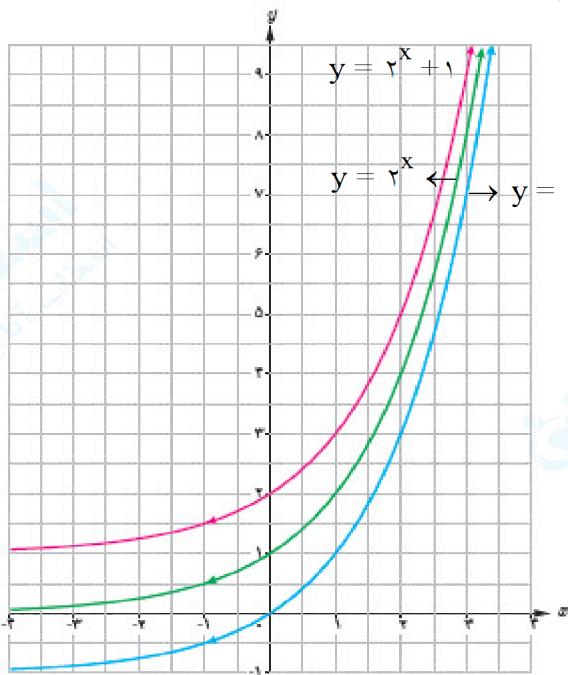


۱- نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 2^x + 1$ و $y = 2^x - 1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x$ ، $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a > 1$)

« پاسخ »

ابتدا نمودار $y = a^x$ را رسم و سپس ۲ واحد روی محور y ها بالا می‌رویم و آنرا $y = a^x + 2$ می‌نامیم و اگر ۲ واحد نسبت به نمودار $y = a^x$ پایین رویم آنرا $y = a^x - 2$ می‌نامیم.



۲- الف) معادله $\left(\frac{1}{25}\right)^{3-x} = 625^{3x-1}$ را حل کنید.

ب) نامعادله $\frac{1}{256} \leq 8^{4p-2}$ را حل کنید.

« پاسخ »

$$5^{-6+2x} = 5^{12x-4} \Rightarrow -6+2x = 12x-4 \Rightarrow x = \frac{-1}{5}$$

(الف)

$$2^{-8} \leq 2^{12p-6} \Rightarrow -8 \leq 12p-6 \Rightarrow p \geq \frac{-1}{6}$$

(ب)

۳- دامنه تابع $y = (\sqrt{3})^x$ برابر و برد آن برابر است.

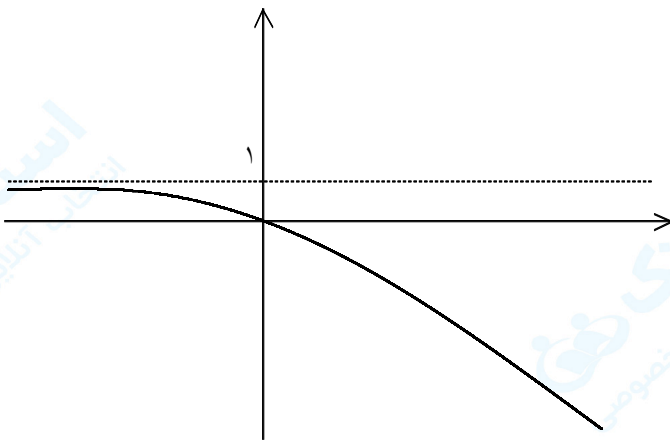
« پاسخ »

دامنه $D = \mathbb{R}$

برد $R = (0, +\infty)$

۴- نمودار تابع $f(x) = -(3)^x + 1$ را رسم کنید.

« پاسخ »



۵- از تساوی‌های $2^{x+2y} = \frac{1}{32}$ و $2^{x-2y} = 8$ نتیجه می‌شود که $x + y$ برابر با می‌باشد.

« پاسخ »

$$\begin{cases} 2^{x+2y} = 2^{-5} \\ 2^{x-2y} = 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x + y = -3$$

۶- الف) نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

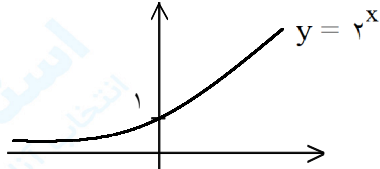
ب) نمودار تابع $y = 2^x - 1$ و $y = 2^{x-1}$ را به کمک نمودار $y = 2^x$ رسم کنید.

« پاسخ »

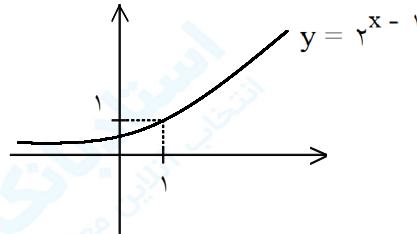
$$2^{4x-2} > \frac{1}{2^{10}} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-10} \Rightarrow 4x - 2 > -10$$

(الف)

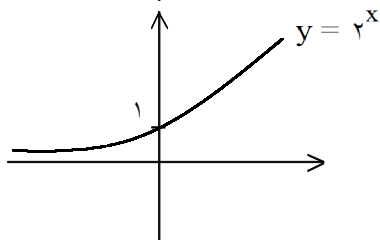
$$4x > -8 \Rightarrow x > -2$$



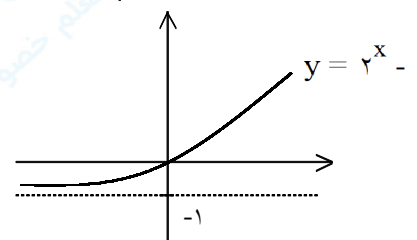
⇒



(ب)



⇒



۷- هریک از نامعادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{x^2-5x+4} \leq 256^{x-4}$

ب) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+4} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5}$

« پاسخ »

الف) $2^{x^2-5x+4} \leq (2^8)^{x-4} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 8x - 32 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 \leq 0$

$\Rightarrow (x-4)(x-9) \leq 0 \Rightarrow 4 \leq x \leq 9$

ب) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+4} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+12} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+5} \Rightarrow 3x+12 \leq 2x+5 \Rightarrow x \leq -7$

۸- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $16^{4n+1} = 2^{38-n}$

ب) $625(\sqrt{5})^{4x+1} = (\sqrt{5})^{15-2x}$

« پاسخ »

الف) $16^{4n+1} = 2^{38-n} \Rightarrow (2^4)^{4n+1} = 2^{38-n} \Rightarrow 2^{16n+4} = 2^{38-n}$
 $\Rightarrow 16n + 4 = 38 - n \Rightarrow 17n = 34 \Rightarrow n = 2$

ب) $625(\sqrt{5})^{4x+1} = (\sqrt{5})^{15-2x} \Rightarrow 5^4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{4x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{15-2x}$
 $\Rightarrow 5^4 \times 5^{2x+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{15}{2}-x}$
 $\Rightarrow 4 + 2x + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} - x \Rightarrow 3x = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} - 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

۹- فرض کنید تابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 243$ محورهای x و y را به ترتیب در نقاط $A(a, 0)$ و $B(0, b)$ قطع می‌کند. مقادیر a و b را به دست آورید.

« پاسخ »

محور x ها را قطع کند
 $y = 0 \rightarrow 0 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 243 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} = 243 \Rightarrow 3^{-2x+1} = 3^5$

$\Rightarrow -2x + 1 = 5 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0) \Rightarrow a = -2$

محور y ها را قطع کند
 $x = 0 \rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 243 \Rightarrow y = 3 - 243 = -240 \Rightarrow B(0, -240) \Rightarrow b = -240$

۱۰- اگر $f(x) = 8^x + 1$ باشد، $f\left(\frac{2}{3}\right)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 8^{\frac{2}{3}} + 1 = (2^3)^{\frac{2}{3}} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

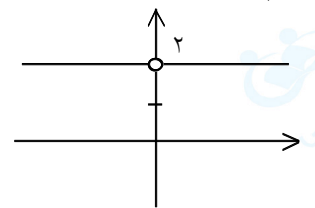
۱۱- اگر $f(x) = 16^x + 1$ باشد، $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = 16^{-\frac{3}{4}} + 1 = (2^4)^{-\frac{3}{4}} + 1 = \frac{1}{2^3} + 1 = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$$

۱۲- نمودار تابع $y = \frac{2^{x+1} - 2}{2^x - 1}$ را رسم کنید.

« پاسخ »



۱۳- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{x-1} + 2^{x+1} = 40$

ب) $(0.25)^{x-7} = 16^{2x}$

« پاسخ »

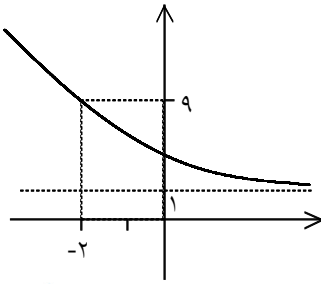
الف) $2^{x-1} + 2^{x+1} = \frac{2^x}{2} + 2 \times 2^x = 40 \Rightarrow 2^x \left(\frac{1}{2} + 2\right) = 40 \Rightarrow \frac{5}{2} \times 2^x = 40 \Rightarrow 2^x = 16$

$\Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

ب) $(0.25)^{x-7} = 16^{2x} \Rightarrow (2^{-2})^{x-7} = (2^4)^{2x} \Rightarrow 2^{-2x+14} = 2^{8x}$

$\Rightarrow -2x + 14 = 8x \Rightarrow 10x = 14 \Rightarrow x = 1/4$

۱۴- در دستگاه محور مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = a + 2^{(b-x)}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید.



« پاسخ »

$$2^{(b-x)} > 0 \xrightarrow{+a} a + 2^{(b-x)} > a \Rightarrow a = 1$$

با توجه به نمودار

$$y = a + 2^{(b-x)} > 1$$

$$y = 1 + 2^{(b-x)} \xrightarrow{x = -2} 9 = 1 + 2^{(b+2)} \Rightarrow 8 = 2^{(b+2)} \Rightarrow 2^3 = 2^{(b+2)} \Rightarrow b + 2 = 3$$

$$\Rightarrow b = 1$$

۱۵- عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

- لگاریتم اعداد مثبت کم‌تر از ۱ همواره عددی منفی است.
- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.
- تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است.
- تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند.
- اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آن‌گاه (d, b) روی نمودار $y = \text{Log}_a x$ قرار دارد.
- اگر $a > b > 0$ ، $\text{Log}_a a < \text{Log}_a b$.

« پاسخ »

- لگاریتم اعداد مثبت کم‌تر از ۱ همواره عددی منفی است. × مبنا را معلوم نکرده است.
- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓
- تابع لگاریتم، تابعی یک به یک است. ✓
- تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند. ×
- اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آن‌گاه (d, b) روی نمودار $y = \text{Log}_a x$ قرار دارد. ✓
- اگر $a > b > 0$ ، $\text{Log}_a a < \text{Log}_a b$. × در مبنای بیش از ۱ تا؟؟ لگاریتم صعودی است.

$$a \times b \Rightarrow \text{Log}_{10} a > \text{Log}_{10} b$$

۱۶- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 1 + \text{Log}_3 x$

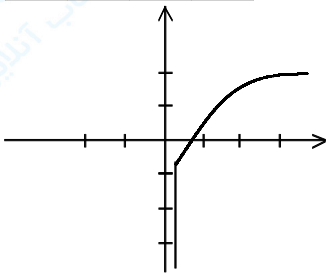
ب) $y = -3^x - 2$

پ) $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

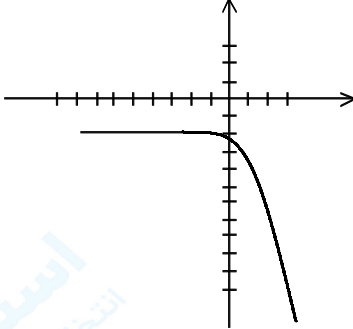
« پاسخ »

الف) $x > 0$

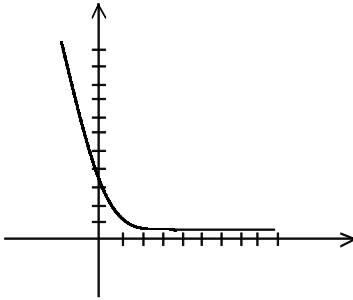
x	۱	۳	۹
y	۱	۲	۳



ب) $y = -2^x - 2$



ج) $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$



۱۷- با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید:

$$\text{Log}_{10} 0.01, \text{Log}_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6}, \text{Log}_2 \sqrt{2}, \text{Log}_V \sqrt[3]{V^2}$$

« پاسخ »

$$\text{Log}_{10} 0.01 = x \Rightarrow 10^x = 0.01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Log}_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^y = \frac{1}{6} \Rightarrow 6^y = 6^{-1} \Rightarrow y = -1$$

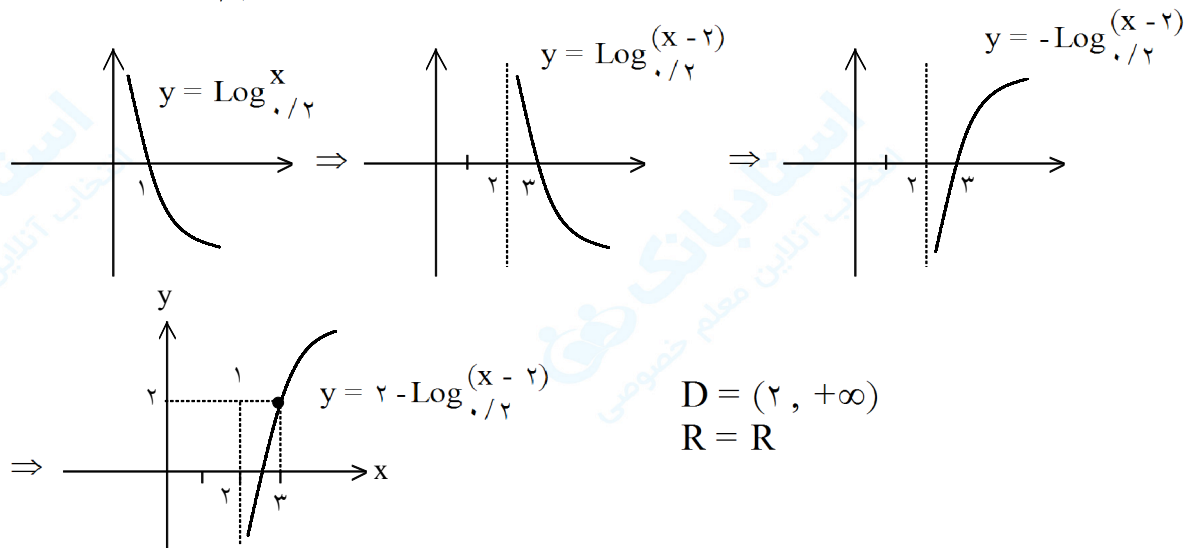
$$\text{Log}_2 \sqrt{2} = z \Rightarrow 2^z = \sqrt{2} \Rightarrow 2^z = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$\text{Log}_V \sqrt[3]{V^2} = t \Rightarrow V^t = \sqrt[3]{V^2} \Rightarrow V^t = V^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

۱۸- نمودار تابع $y = 2 + \text{Log}_{\frac{1}{2}} x - 2$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آنرا حساب کنید.

« پاسخ »

$$y = 2 + \text{Log}_{\frac{1}{2}} (x-2)^{-1} \Rightarrow y = 2 - \text{Log}_{\frac{1}{2}} (x-2)$$



۱۹- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

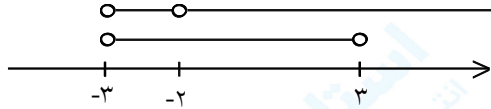
$$f(x) = \text{Log}_{(x+3)}(9-x^2) \quad \text{(الف)}$$

« پاسخ »

$$g(x) = \sqrt{5 - \text{Log}_2(2x-4)} \quad \text{(ب)}$$

$$\begin{aligned} 9 - x^2 > 0 &\Rightarrow -3 < x < 3 \\ x + 3 > 0 &\Rightarrow x > -3 \\ x + 3 \neq 1 &\Rightarrow x \neq -2 \end{aligned} \Rightarrow D_f = (-3, 3) - \{-2\}$$

(الف)

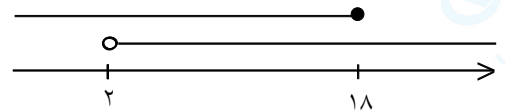


$$2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2 \quad (1)$$

(ب)

$$5 - \text{Log}_2(2x-4) \geq 0 \Rightarrow \text{Log}_2(2x-4) \leq 5 \Rightarrow 2x-4 \leq 2^5 \Rightarrow 2x \leq 32+4 \Rightarrow x \leq 18 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_g = (2, 18]$$



۲۰- وارون تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \text{Log}_5(x-1) + 7$ را حساب کنید.

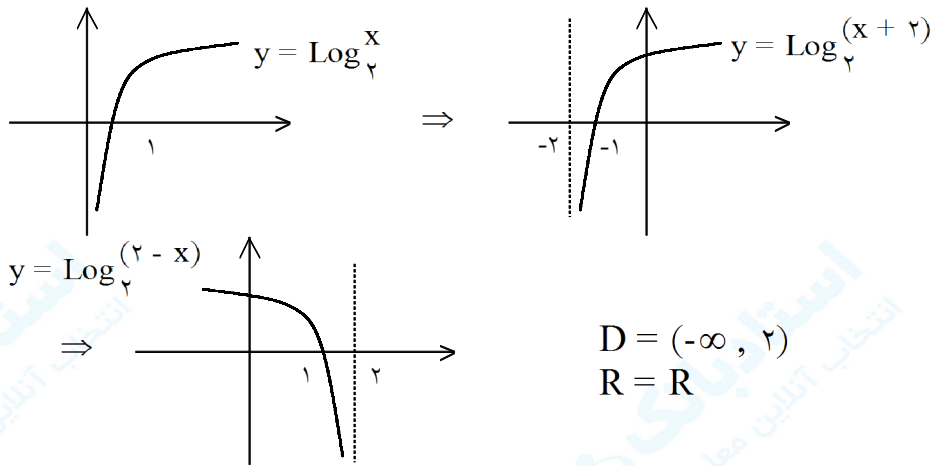
« پاسخ »

$$y = \text{Log}_5(x-1) + 7 \Rightarrow y - 7 = \text{Log}_5(x-1) \Rightarrow x-1 = 5^{y-7} \Rightarrow x = 5^{y-7} + 1$$

$$\xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 5^{x-7} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = 5^{x-7} + 1$$

۲۱- نمودار تابع $y = \text{Log}_2(2-x)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد آنرا حساب کنید.

« پاسخ »



$$D = (-\infty, 2)$$

$$R = \mathbb{R}$$

۲۲- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

ب) $g(x) = \text{Log}_x|x-3|$

الف) $f(x) = \text{Log}(4x^2 + 4x + 1)$

« پاسخ »

$$\text{الف) } (4x^2 + 4x + 1) > 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 > 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

ب) $|x-3| > 0 \Rightarrow x \neq 3$ (۱)

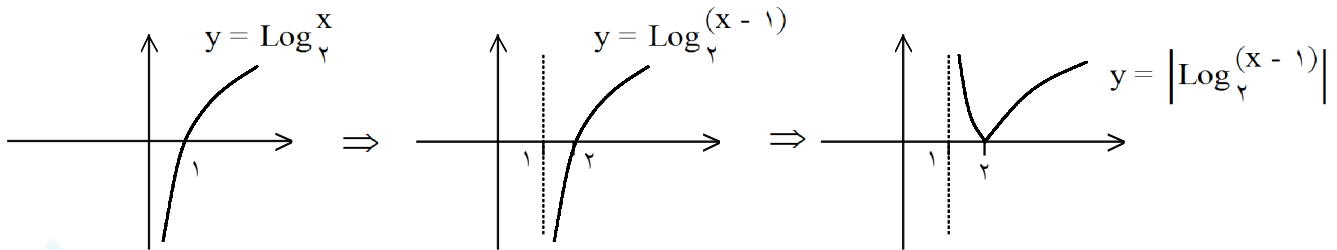
$x > 0$ (۲)

$x \neq 1$ (۳)

$$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} D_g = (0, +\infty) - \{1, 3\}$$

۲۳- نمودار $f(x) = \left| \text{Log}_2(x-1) \right|$ را به کمک انتقال رسم کنید و سپس دامنه و برد آنرا مشخص کنید.

« پاسخ »



$$D = (1, +\infty)$$

$$R = [0, +\infty)$$

۲۴- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = \text{Log} \frac{(x^2 - 4)}{(x + 1)}$

ب) $g(x) = \text{Log} \frac{(x - 5)^2}{|x|}$

« پاسخ »

$$D_f: \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (2, +\infty)$$

$$D_g: \begin{cases} (x - 5)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 5 \\ |x| > 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_g = \mathbb{R} - \{5, 0, \pm 1\}$$

۲۵- دامنه تابع زیر را حساب کنید.

$$f(x) = \sqrt{5 + \text{Log} \frac{1}{2} (x + 4)}$$

« پاسخ »

$$\begin{aligned} x + 4 > 0 &\Rightarrow x > -4 & (1) \\ 5 + \text{Log} \frac{1}{2} (x + 4) \geq 0 &\Rightarrow \text{Log} \frac{1}{2} (x + 4) \geq -5 \Rightarrow x + 4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \\ &\Rightarrow x + 4 \leq (2^{-1})^{-5} \Rightarrow x + 4 \leq 2^5 \Rightarrow x + 4 \leq 32 \Rightarrow x \leq 28 & (2) \\ \xrightarrow{(1) \cap (2)} & D_f = (-4, 28] \end{aligned}$$

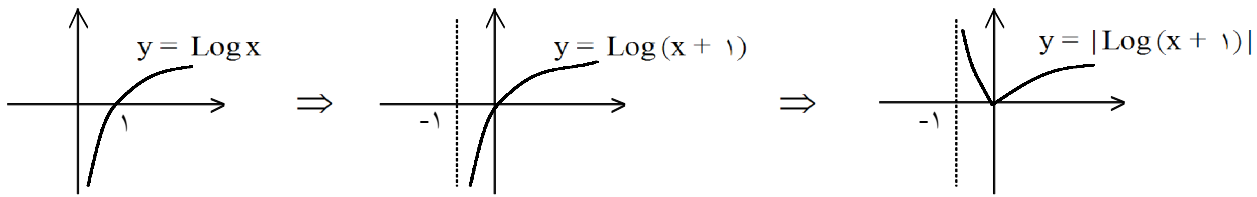
۲۶- اگر $f(x) = 3 - 2 \text{Log}_3 \left(\frac{x}{4} + 2 \right)$ مقدار $f(28)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(28) = 3 - 2 \text{Log}_3 (7 + 2) = 3 - 2 \text{Log}_3 3^2 = 3 - 4 = -1$$

۲۷- نمودار تابع $y = |\text{Log}(x + 1)|$ را رسم کنید.

« پاسخ »



۲۸- دامنه‌ی تابع مقابل را بدست آورید.

« پاسخ »

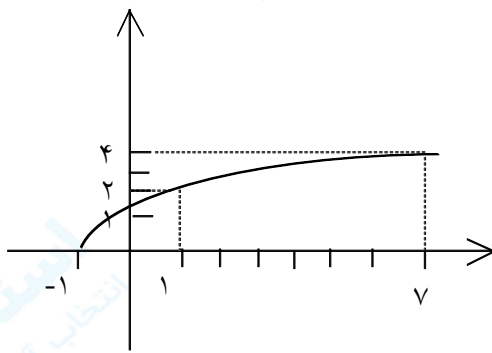
$$y = \text{Log}(\text{Log}(x - 1))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Log}(x - 1) > 0 \Rightarrow \text{Log}(x - 1) > \text{Log} 1 \Rightarrow x > 2 \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{array} \right\} \cap \Rightarrow x > 2 \Rightarrow D_f = (2, +\infty)$$

۲۹- منحنی $2 \text{Log} y = \text{Log} 2 + \text{Log}(x + 1)$ را رسم کنید.

« پاسخ »

$$\text{Log} y - \frac{1}{2} \text{Log} 2 + \frac{1}{2} \text{Log}(x + 1) - \text{Log} \sqrt{2} + \text{Log} \sqrt{x + 1} - \text{Log} \sqrt{2x + 2} \rightarrow y = \sqrt{2x + 2}$$



x	y
-1	0
1	2
7	4

۳۰- اگر $\text{Log}_6^3 = a$ باشد، Log_6^2 را برحسب a به دست آورید.

« پاسخ »

$$\text{Log}_6^2 = \text{Log}_6^{\frac{6}{3}} = \text{Log}_6^6 - \text{Log}_6^3 = 1 - a$$

۳۱- اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \text{Log}_a x$ از نقطه‌ی $(\frac{1}{7}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

« پاسخ »

۳۲- عبارات زیر را ساده کنید. ($\text{Log} 3 \simeq 0/4771$, $\text{Log} 2 \simeq 0/301$).

الف) $\text{Log}(18 \times 375)$ ب) $\text{Log} \sqrt{0/75}$ پ) $\text{Log}_4 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}}$

« پاسخ »

الف) $\text{Log} 2 \times 3^3 \times 5^3 = \text{Log} 2 + 3\text{Log} 3 + 3\text{Log} 5$
 $0/301 + 3(0/477) + 3(1 - 6301)$

ب) $\text{Log} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2}(\text{Log} 3 - \text{Log} 2^2) = \frac{1}{2}(0/4771 - 2(0/301))$

پ) $\text{Log}_8 \frac{1}{2} - \text{Log}_2 \frac{1}{4} = \text{Log}_2 \frac{1}{2} - \text{Log}_2 \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \times 1 - \frac{1}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$

۳۳- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید:

الف) $\text{Log}_b a = a$ ($b \neq 1, a, b > 0$)
 ب) $\text{Log}_a abc = \text{Log}_d a + \text{Log}_d b + \text{Log}_d c$ ($d \neq 1, a, b, c, d > 0$)
 پ) $\text{Log} x \text{Log} y = \text{Log} x + \text{Log} y$
 ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

« پاسخ »

الف) نادرست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست

۳۴- از معادله $\text{Log}(x - 3) = 2 - \frac{1}{4}\text{Log} 25$ مقدار x را به دست آورید.

« پاسخ »

$\text{Log}(x - 3) + \frac{1}{4}\text{Log} 25 = 2$

$\text{Log}(x - 3)5 = 2 \Rightarrow 5x - 15 = 100 \Rightarrow 5x = 115 \Rightarrow x = 23$

۳۵- اگر $\text{Log}_c a = \frac{3}{4}$ و $\text{Log}_c b = \frac{7}{9}$ باشد، مقدار $\text{Log} \frac{a^2 \sqrt{b}}{b^3}$ را بیابید.

« پاسخ »

با استفاده از ویژگی تغییر مبنا $\text{Log}_b a = \frac{\text{Log}_c a}{\text{Log}_c b}$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{Log} \frac{a^2 \sqrt{b}}{b^3} &= \frac{\text{Log}_c a^2 \sqrt{b}}{\text{Log}_c b^3} = \frac{\text{Log}_c a^2 + \text{Log}_c \sqrt{b}}{3 \text{Log}_c b} = \frac{2 \text{Log}_c a + \frac{1}{2} \text{Log}_c b}{3 \text{Log}_c b} \\ &= \frac{2 \left(\frac{3}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{7}{9} \right)}{3 \left(\frac{7}{9} \right)} = \frac{17}{21} \end{aligned}$$

۳۶- ابتدا معادله‌ی لگاریتمی $\text{Log}(x - 2) = 3 \text{Log} 2 - \text{Log}(x - 4)$ را حل کرده و سپس حاصل $\text{Log}_{27} \sqrt{x - 3}$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\text{Log}(x - 2) = \text{Log} \frac{2^3}{x - 4} \Rightarrow x - 2 = \frac{2^3}{x - 4} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 8$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$x(x - 6) = 0 \begin{cases} \rightarrow x = 0 \text{ غ.ق.ق} \\ \rightarrow x = 6 \text{ (۰/۵)} \end{cases} \quad \text{Log}_{27} \sqrt{3} = \text{Log}_{3^3} 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \text{ (۰/۲۵)}$$

(۰/۲۵)

۳۷- از ۲۰ گرم یک عنصر پس از یک ساعت ۵ گرم باقی مانده است. نیم‌عمر این عنصر چند دقیقه است؟

« پاسخ »

$$Q(t) = A \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \quad A = 20, t = 60, Q(60) = 5 \Rightarrow Q(60) = 20 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{60}{T}} = 5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{60}{T}} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{60}{T} = 2 \Rightarrow T = 30$$

۳۸- اگر $\text{Log} 2 = 0.3$ ، $\text{Log} 3 = 0.47$ ، باشد، حاصل $\text{Log} 1500$ است.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{Log} 1500 &= \text{Log}(3 \times 5 \times 100) = \text{Log} 3 + \text{Log} 5 + \text{Log} 10^2 = \text{Log} 3 + \text{Log} \left(\frac{10}{2}\right) + 2 \text{Log} 10 \\ &= \text{Log} 3 + \text{Log} 10 - \text{Log} 2 + 2 \text{Log} 10 = 0.47 + 1 - 0.3 + 2 = 3.17 \end{aligned}$$

۳۹- اگر $\text{Log} 2 = a$ و $\text{Log} 3 = b$ باشد، حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$$\text{Log} \sqrt{0.75}$$

« پاسخ »

$$\text{Log} 2 = a, \text{Log} 3 = b$$

$$\begin{aligned} \text{Log} \sqrt{0.75} &= \text{Log} \left(\frac{75}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{Log} \frac{3}{4} = \frac{1}{2} (\text{Log} 3 - \text{Log} 2^2) = \frac{1}{2} (\text{Log} 3 - 2 \text{Log} 2) \\ &= \frac{1}{2} (b - 2a) \end{aligned}$$

۴۰- اگر $f(x) = 8x + 1$ ، مقدار $f(2 + 2 \text{Log}_2^x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} 2 + 2 \text{Log}_2^x = 6 &\Rightarrow 2 \text{Log}_2^x = 4 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \xrightarrow{x=4} f(2 + 2 \text{Log}_2^4) \\ &= 8(4) + 1 \Rightarrow f(6) = 33 \end{aligned}$$

۴۱- در هر قسمت ضابطه یک تابع داده شده است. مقدار تابع را برای X های داده شده حساب کنید.

الف) $f(x) = 2 - \text{Log}_5(3x + 1)$ ، $x = 8$

ب) $f(x) = 3 + \text{Log}_{32} \sqrt{x^2 + 1}$ ، $x = \sqrt{15}$

« پاسخ »

الف) $f(8) = 2 - \text{Log}_5(24 + 1) = 2 - \text{Log}_5 25 = 2 - \text{Log}_5 5^2 = 2 - 2 \text{Log}_5 5 = 2 - 2 = 0$

ب) $f(\sqrt{15}) = 3 + \text{Log}_{32} \sqrt{15 + 1} = 3 + \text{Log}_{32} 4 = 3 + \text{Log}_{2^5} 2^2 = 3 + \frac{2}{5} \text{Log}_2 2$
 $= 3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$

۴۲- اگر انرژی آزاد شده یک زلزله $E = 10^{20} \times 6/4$ باشد، شدت زلزله برحسب ریشتر را حساب کنید.
($\text{Log } 2 = 0.3$)

« پاسخ »

$$E = 6/4 \times 10^{20} = 64 \times 10^{19} = 2^6 \times 10^{19} \xrightarrow{\text{Log } 2 = 0.3 \Rightarrow 2 = 10^{0.3}} E = (10^{0.3})^6 \times 10^{19} = 10^{20.8}$$

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log } 10^{20.8} = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 20.8 = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 1/5 M = 9 \Rightarrow M = 45$$

۴۳- زلزله‌ای به شدت $7/6$ ریشتر در ۲۰ سپتامبر ۱۹۹۹ در شهر نانتو تایوان اتفاق افتاد. انرژی آزاد شده در این زلزله چه قدر بوده است؟ ($\text{Log } 2 = 0.3$)

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{Log } E &= 11/8 + 1/5 M \\ M &= 7/6 \\ \xrightarrow{\quad} \text{Log } E &= 11/8 + 1/5(7/6) \Rightarrow \text{Log } E = 11/8 + 11/4 \Rightarrow \text{Log } E = 23/2 \\ \Rightarrow E &= (2)^4 \times 10^{22} \text{ Erg} = 16 \times 10^{22} \text{ Erg} = 1/6 \times 10^{23} \text{ Erg} \end{aligned}$$

۴۴- زلزله‌ای به بزرگی $7/8$ ریشتر در ۱۸ آوریل ۱۹۰۶ (۲۹ فروردین ۱۲۸۵) در ساعت ۵:۱۲ صبح سواحل شمال ایالت کالیفرنیا در ایالات متحده را لرزاند. انرژی آزاد شده در این زلزله چه قدر بوده است؟ ($\text{Log } 2 = 0.3$)

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \text{Log } E &= 11/8 + 1/5 M \\ M &= 7/8 \Rightarrow \text{Log } E = 11/8 + 1/5(7/8) = 11/8 + 11/7 = 23/5 \Rightarrow E = 10^{23/5} \text{ Erg} \\ \xrightarrow{\text{Log } 2 = 0.3} E &= 10^{1/5} \times 10^{22} = (10^{0.3})^5 \times 10^{22} \text{ Erg} \Rightarrow E = 2^5 \times 10^{22} = 32 \times 10^{22} \\ &= 3/2 \times 10^{23} \text{ Erg} \end{aligned}$$

۴۵- جواب نامعادله $\text{Log}_{\frac{1}{2}} \frac{(4x-1)}{2} > \text{Log}_{\frac{1}{2}} (x+7)$ را به دست آورید.

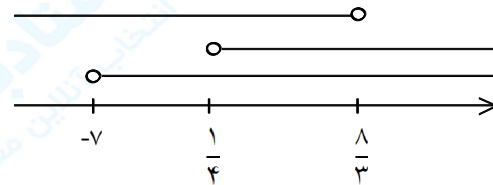
« پاسخ »

$$4x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{4} \quad (1)$$

$$x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7 \quad (2)$$

$$\text{Log}_{\frac{1}{2}} \frac{(4x-1)}{2} > \text{Log}_{\frac{1}{2}} (x+7) \Rightarrow 4x - 1 < x + 7 \Rightarrow 3x < 8 \Rightarrow x < \frac{8}{3} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} \text{جواب} = \left(\frac{1}{4}, \frac{8}{3} \right)$$



۴۶- در معادله $\frac{1}{256} = \frac{-6 + \text{Log}_2^x}{x}$ ریشه‌ها را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\frac{-6 + \text{Log}_2^x}{x} = \frac{1}{256} \Rightarrow \text{Log}_2^x \frac{-6 + \text{Log}_2^x}{x} = \text{Log}_2^x \frac{1}{256} \Rightarrow (-6 + \text{Log}_2^x) \text{Log}_2^x = \text{Log}_2^{x-8}$$

$$\text{Log}_2^x = t \xrightarrow{\quad} (-6 + t)t = -8 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 4) = 0$$

$$\begin{cases} t = 2 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \\ t = 4 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases}$$

$$A = \frac{3}{3 + \text{Log}_2^3} + \frac{1}{1 + 3\text{Log}_3^2}$$

۴۷- مقدار A را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{3 + \text{Log}_2^3} + \frac{1}{\text{Log}_3^3 + 3\text{Log}_3^2} = \frac{3}{3\text{Log}_2^2 + \text{Log}_2^3} + \frac{1}{\text{Log}_3^3 + \text{Log}_3^4} \\ &= \frac{3}{\text{Log}_2^4 + \text{Log}_2^3} + \frac{1}{\text{Log}_3^3 + \text{Log}_3^4} = \frac{3}{\text{Log}_2^{24}} + \frac{1}{\text{Log}_3^{24}} = 3\text{Log}_{24}^2 + \text{Log}_{24}^3 \\ &= \text{Log}_{24}^6 + \text{Log}_{24}^3 = \text{Log}_{24}^{24} = 1 \end{aligned}$$

۴۸- نیمه عمر عنصری ۱۰ روز و جرم اولیه آن ۲۰ گرم است.
الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می ماند بیابید.
ب) طی چند روز این جرم به $1/25$ گرم کاهش می یابد؟

« پاسخ »

(الف)

$$\begin{aligned} \text{مقدار اولیه} &= 20 \text{ gr} \\ \text{روز نیمه عمر} &= 10 \end{aligned} \Rightarrow m(t) = 20 \times \frac{1}{2^{t/10}}$$

(ب)

$$\begin{aligned} m(t) = 1/25 \text{ gr} &\Rightarrow 20 \times \frac{1}{2^{t/10}} = \frac{5}{4} \xrightarrow{\div 20} \frac{1}{2^{t/10}} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{t/10} = 16 \Rightarrow 2^{t/10} = 2^4 \Rightarrow \frac{t}{10} = 4 \\ &\Rightarrow t = 40 \text{ روز} \end{aligned}$$

۴۹- نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای ۱۰۰ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده ۴۰ میلی‌گرم باشد، پس از ۲۰۰ سال چه جرمی از این ماده باقی می ماند.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} m(t) &= 40 \times 2^{-\frac{t}{100}} \\ m(200) &= 40 \times 2^{-\frac{200}{100}} = \frac{40}{4} = 10 \end{aligned}$$

۵۰- مقدار A را حساب کنید.

$$A = \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} + 1} + \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} + 1}$$

« پاسخ »

$$A = \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^2} + \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^2} = \log_{\sqrt{3}}^2 + \log_{\sqrt{3}}^2$$

$$= \log_{\sqrt{3}}^2 = 1$$

۵۱- در معادله $\log_{\sqrt{2}}^x - \log_x^4 = 3$ مقدار x را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\log_{\sqrt{2}}^x - \log_x^4 = 3 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^x - \log_x^2 = 3 \Rightarrow 2 \log_{\sqrt{2}}^x - 2 \log_x^2 - 3 = 0$$

$$\log_{\sqrt{2}}^x = t \rightarrow 2t - \frac{2}{t} - 3 = 0 \rightarrow 2t^2 - 2 - 3t = 0 \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(2t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^x = 2 \Rightarrow x=4 \\ t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x=2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

۵۲- اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، لگاریتم‌های زیر را بر حسب a, b بنویسید.

الف) $\log 6$ (الف) ب) $\log 5$ (ب) پ) $\log 0.25$ (پ) ت) $\log 90$ (ت)

« پاسخ »

الف) $\log 6 = \log 2 \times 3 = \log 2 + \log 3 = a + b$

ب) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$

پ) $\log 0.25 = \log \frac{1}{4} = \log 1 - \log 2^2 = 0 - 2a = -2a$

ت) $\log 90 = \log 3^2 \times 10 = 2 \log 3 + \log 10 = 2b + 1$

۵۳- مقادیر زیر را حساب کنید:

$$\text{الف) } \text{Log}_{9+4\sqrt{5}}^{\sqrt{5}+2}$$

« پاسخ »

$$\text{ب) } \text{Log}_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1}$$

$$\text{الف) } \text{Log}_{9+4\sqrt{5}}^{\sqrt{5}+2} = \text{Log}_t^t = \frac{1}{2} \text{Log}_t^t = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{5}+2=t \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} 5+4+4\sqrt{5}=t^2 \Rightarrow 9+4\sqrt{5}=t^2$$

$$\text{ب) } \text{Log}_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{2}-1} = \text{Log}_{\frac{1}{t}}^t = \text{Log}_{t^{-1}}^t = -1$$

$$\sqrt{2}-1=t \Rightarrow (\sqrt{2}-1) \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2-1}{\sqrt{2}+1} = t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+1} = t$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}+1 = \frac{1}{t}$$

۵۴- در معادله $(\text{Log}_5^x + 3) = 625$ مقدار x را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x (\text{Log}_5^x + 3) = 625 \Rightarrow \text{Log}_x (\text{Log}_5^x + 3) = \text{Log}_5^{625} \Rightarrow (\text{Log}_5^x + 3) \text{Log}_5^x = 4$$

$$\text{Log}_5^x = t \xrightarrow{\text{}} (t+3)t = 4 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-4 \end{cases}$$

$$t=1 \Rightarrow \text{Log}_5^x = 1 \Rightarrow x=5$$

$$t=-4 \Rightarrow \text{Log}_5^x = -4 \Rightarrow x = 5^{-4} = \frac{1}{625}$$

۵۵- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\text{ب) } \text{Log}_{\frac{1}{5}}(x^2 - 11) = -2$$

$$\text{الف) } 3\text{Log}_v^a - \text{Log}_v^6 = \text{Log}_v^{36}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \text{Log}_v^a - \text{Log}_v^6 = \text{Log}_v^{36} \Rightarrow \text{Log}_v^{\frac{a^3}{6}} = \text{Log}_v^{36} \Rightarrow \frac{a^3}{6} = 36 \Rightarrow a^3 = 216 \Rightarrow a = 6$$

$$\text{ب) } \text{Log}_{\frac{1}{5}}(x^2 - 11) = -2 \Rightarrow x^2 - 11 = (5^{-1})^{-2} \Rightarrow x^2 - 11 = 25 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{ق ق} \\ x = -6 & \text{غ ق} \end{cases}$$