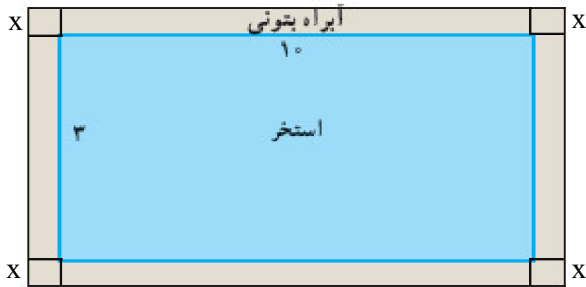


۱- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آنرا محاسبه کنید.

« پاسخ »



$$4x^2 + 20x + 6x = 14$$

$$2x^2 + 13x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = \frac{1}{2} \\ \text{غ ق ق } x = -7 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(2x + 14)(2x - 1) = 0$$

۲- در معادله  $2x^2 - 8x + m = 0$ ، اگر یکی از جوابها دو واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد،  $m$  و هر دو جواب معادله را بیابید.

« پاسخ »

$$x^2 - 4x + \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = \beta + 2$$

$$\alpha + \beta = 2\beta + 2 = 4 \Rightarrow \beta = 1 \text{ و } \alpha = +3$$

$$\alpha\beta = 3 \Rightarrow \frac{m}{2} = 3 \Rightarrow m = 6$$

۳- معادله  $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$  را حل کرده و ریشهها را بیابید.

« پاسخ »

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 8) = 0$$

$$t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$t = 8 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

۴- محیط یک زمین مستطیل شکل ۲۸ متر و مساحت آن ۴۶ متر مربع است. اندازه طول و عرض مستطیل را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$\text{محیط} = 28 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 28 \Rightarrow \alpha + \beta = 14 \Rightarrow S = 14$$

$$\text{مساحت} = 46 \Rightarrow \alpha\beta = 46 \Rightarrow P = 46$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 46 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x = -46 \xrightarrow{+49} x^2 - 14x + 49 = 3$$

$$\Rightarrow (x - 7)^2 = 3 \Rightarrow x - 7 = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 7 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 7 + \sqrt{3} \text{ (طول)} \\ \beta = 7 - \sqrt{3} \text{ (عرض)} \end{cases}$$

۵- محیط یک زمین مستطیل شکل ۲۰ متر و مساحت آن ۲۰ متر مربع است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$\text{محیط} = 20 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 20 \Rightarrow \alpha + \beta = 10 \Rightarrow S = 10$$

$$\text{مساحت} = 20 \Rightarrow \alpha\beta = 20 \Rightarrow P = 20$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x = -20 \xrightarrow{+25} x^2 - 10x + 25 = 5$$

$$\Rightarrow (x - 5)^2 = 5 \Rightarrow x - 5 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 + \sqrt{5} \text{ (طول)} \\ \beta = 5 - \sqrt{5} \text{ (عرض)} \end{cases}$$

۶- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $7 \pm 2\sqrt{3}$  باشد.

« پاسخ »

$$\begin{cases} \alpha = 7 + 2\sqrt{3} \\ \beta = 7 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 7 + 2\sqrt{3} + 7 - 2\sqrt{3} = 14 \\ P = \alpha\beta = (7 + 2\sqrt{3})(7 - 2\sqrt{3}) = 49 - 12 = 37 \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 37 = 0$$

۷- محیط یک زمین مستطیل شکل ۲۸ متر و مساحت آن ۴۵ متر مربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$\text{محیط} = 28 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 28 \Rightarrow \alpha + \beta = 14 \Rightarrow S = 14$$

$$\text{مساحت} = 45 \Rightarrow \alpha\beta = 45 \Rightarrow P = 45$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 45 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 9 \text{ (طول)} \\ \beta = 5 \text{ (عرض)} \end{cases}$$

۸- صفرهای تابع  $f$  با ضابطه  $y = (x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15 = 0 \xrightarrow{x^2 + 4x = t} t^2 - 2t - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 5)(t + 3) = 0$$

$$\begin{cases} t = 5 \Rightarrow x^2 + 4x = 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases} \\ t = -3 \Rightarrow x^2 + 4x = -3 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

۹- اگر  $f(x) = x^2 + 5x + 1$ ، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف)  $f(5)$       ب)  $f(t - 1)$       پ)  $f(4)$       ت)  $f(\sqrt{2} - 1)$

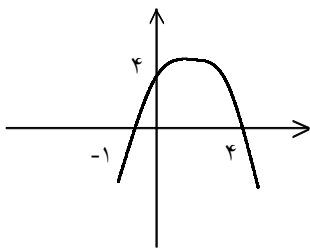
« پاسخ »

الف)  $f(5) = 5^2 + 5(5) + 1 = 51$

ب)  $f(t - 1) = (t - 1)^2 + 5(t - 1) + 1 = t^2 - 2t + 1 + 5t - 5 + 1 = t^2 + 3t - 3$

پ)  $f(4) = 16 + 20 + 1 = 37$

ت)  $f(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1)^2 + 5(\sqrt{2} - 1) + 1 = 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 5 + 1 = 3\sqrt{2} - 1$



۱۰- شکل زیر سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  را نشان می‌دهد. ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 4 - 3x$  را حساب کنید.

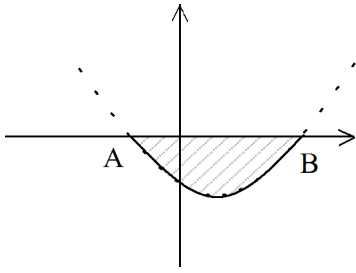
« پاسخ »

محل برخورد تابع با محور  $x$  ها  $-1$  و  $4$  است. بنابراین معادله سهمی به صورت زیر است:

$$y = a(x + 1)(x - 4) \xrightarrow{\substack{x = 0 \\ y = 4}} 4 = a(0 + 1)(0 - 4) \Rightarrow a = -1$$

$$y = -(x + 1)(x - 4) = -(x^2 - 3x - 4) \Rightarrow y = -x^2 + 3x + 4$$

$$-x^2 + 3x + 4 = 4 - 3x \Rightarrow -x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$



۱۱- شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله  $y = x^2 - 4x - 5$  مطابق شکل زیر مدل سازی می شود:  
 الف) مختصات نقاط انتهایی عدسی A و B را به دست آورید.  
 ب) اگر X برحسب سانتی متر باشد طول AB را به دست آورید.  
 پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و Y برحسب میلی متر باشد بیشترین ضخامت آن چه قدر است؟

« پاسخ »

الف) در نقاط B و A، y سهمی صفر است.

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

ب)  $AB = |x_B - x_A| = 6 \text{ cm}$   
 پ)

بیشترین ضخامت =  $9 \text{ mm}$   $\Rightarrow y = (2)^2 - 4(2) - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$   
 $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

۱۲- حدود m را چنان بیابید که خط  $y = x + 1$ ، سهمی  $y = x^2 + mx + 5$  را قطع نکند.

« پاسخ »

باید دو تابع را برابر قرار داد و بعد از تشکیل معادله درجه ۲ باید  $\Delta < 0$  باشد.

$$x^2 + mx + 5 = x + 1 \Rightarrow x^2 + mx - x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + (m - 1)x + 4 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (m - 1)^2 - 16 < 0 \Rightarrow (m - 1)^2 < 16 \Rightarrow |m - 1| < 4$$

$$\Rightarrow -4 < m - 1 < 4 \xrightarrow{+1} -3 < m < 5$$

۱۳- k را طوری تعیین کنید که معادله ی زیر ریشه ی مضاعف داشته باشد.

$$(k + 1)x^2 - 2(k + 3)x + 3k = 0$$

« پاسخ »

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4(k + 3)^2 - 12k(k + 1) = 0 \Rightarrow k^2 + 6k + 9 - 3k^2 - 3k = 0$$

$$\Rightarrow -2k^2 + 3k + 9 = 0 \Rightarrow k = 3, -\frac{3}{2}$$

۱۴- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $3x^2 + 8x - 4 = 0$  باشد معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن  $\frac{1}{\alpha}$  و  $\frac{1}{\beta}$  باشد.

« پاسخ »

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{4}{3}} = 2$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 8x - 3 = 0$$

۱۵- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 2x - 4 = 0$  باشند تعیین کنید.

« پاسخ »

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

۱۶- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 2x - 4 = 0$  باشند تعیین کنید.

« پاسخ »

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3pS = (2)^3 - 3(-4)(2) = 32$$

۱۷- در معادله‌ی  $x^2 + mx - 3 = 0$  مقدار  $m$  را چنان بیابید که بین  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های این معادله رابطه‌ی  $2\alpha + \beta = 4$  برقرار باشد.

« پاسخ »

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha + \beta = -m \end{cases} \Rightarrow \alpha + \alpha + \beta = 4 \Rightarrow \alpha = 4 + m$$

$$(4 + m)^2 + m(4 + m) - 3 = 0 \Rightarrow 2m^2 + 12m + 13 = 0 \Rightarrow m = \frac{-6 \pm \sqrt{10}}{2}$$

۱۸- اگر  $\alpha$  ,  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $x^2 - 4x - 2 = 0$  باشند، مقدار عددی عبارت  $\frac{\alpha}{\beta + 1} + \frac{\beta}{\alpha + 1}$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$A = \frac{\alpha}{\beta + 1} + \frac{\beta}{\alpha + 1} = \frac{\alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1)}{(\alpha + 1)(\beta + 1)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

با توجه به این که  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x - 2 = 0$  هستند، پس:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha\beta = -2 \end{cases}$$

$$A = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha\beta) + (\alpha + \beta)}{(\alpha\beta) + (\alpha + \beta) + 1} = \frac{(4)^2 - 2(-2) + 4}{-2 + 4 + 1} = \frac{24}{3} = 8$$

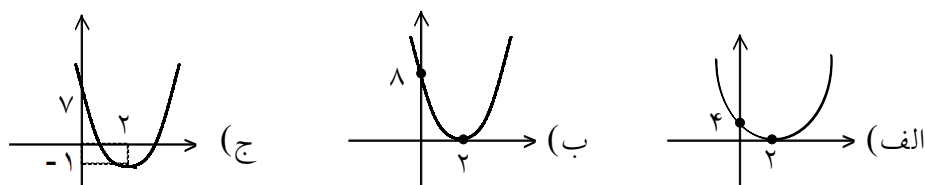
۱۹- نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف)  $y = (x - 2)^2$

ب)  $y = 2(x - 2)^2$

ج)  $y = 2(x - 2)^2 - 1$

« پاسخ »



۲۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی  $2x^2 - 5x - 6 = 0$  باشند، مقدار عددی عبارت  $(\alpha - \beta)^2$  را محاسبه کنید.

« پاسخ »

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2} \\ \alpha\beta &= \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{25}{4}$$

۲۱- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0$$

« پاسخ »

$$\frac{x^2}{3} - 2 = t \quad (\cdot/25) \Rightarrow t^2 - 11t + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$(t-10)(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 10 \quad (\cdot/25) \Rightarrow x = \pm 6 \quad (\cdot/25) \\ t = 1 \quad (\cdot/25) \Rightarrow x = \pm 3 \quad (\cdot/25) \end{cases}$$

۲۲- محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

« پاسخ »

اگر طول مستطیل را با  $a$  و عرض آن را با  $b$  نمایش دهیم آن‌گاه:

$$\text{محیط: } 2(a + b) = 18 \Rightarrow S = a + b = 9$$

$$\text{مساحت: } ab = 14 \Rightarrow P = ab = 14$$

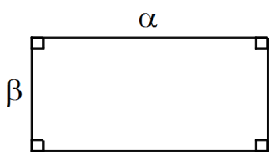
بنابراین اضلاع مستطیل ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - Sx + P = 0$  هستند.

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 7$$

پس  $a = 7$  و  $b = 2$ .

۲۳- محیط یک زمین مستطیل شکل، هجده متر و مساحت آن چهارده متر مربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

« پاسخ »



طبق فرض سؤال و با توجه به شکل، داریم:

$$\text{محیط مستطیل} = 2\alpha + 2\beta = 18 \Rightarrow \alpha + \beta = 9$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \alpha \cdot \beta = 14$$

با معلوم بودن مجموع دو عدد ( $S$ ) و حاصل ضرب آن‌ها ( $P$ ) می‌توان گفت این دو عدد ریشه‌های معادله‌ی

$$x^2 - Sx + P = 0 \text{ هستند، داریم:}$$

$$\begin{cases} S = 9 \\ P = 14 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$$

ریشه‌ی بزرگ‌تر طول مستطیل و ریشه‌ی کوچک‌تر عرض آن است، پس  $\begin{cases} \alpha = 7 \\ \beta = 2 \end{cases}$ .

۲۴- معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

ب)  $(2x-4)^4 - (2x-4)^2 - 2 = 0$

« پاسخ »

الف)  $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t-4)(t+1) = 0$

$$\begin{cases} t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ t=-1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \text{جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

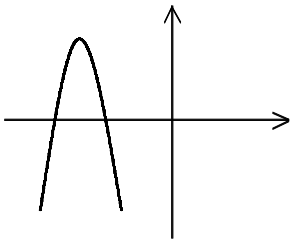
(الف)

(ب)

ب)  $(2x-4)^2 = t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0$

$$\begin{cases} t=2 \Rightarrow (2x-4)^2=2 \Rightarrow 2x-4=\pm\sqrt{2} \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{2}}{2} \\ t=-1 \Rightarrow \text{جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

۲۵- در شکل زیر سهمی به معادله  $p(x) = ax^2 + bx + c$  داده شده است. علامت ضرایب  $a$ ,  $b$ ,  $c$  و نیز تعداد جواب‌های این معادله را بنویسید.



« پاسخ »

$a < 0$

$c < 0$

$b < 0$  دو ریشه دارد.