۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد، حاصل $A^۳$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

« **پاسخ** »

$$A^۳ = A \times A^۲ = \begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_۱^۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲^۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳^۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_۱^۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲^۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳^۳ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۳ = \begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶۴ \end{bmatrix}$$

۲- اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$

ب) $(A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$

« **پاسخ** »

$$(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = A^۲ + AB + BA + B^۲ \xrightarrow[\text{تعویض پذیرند}]{A\ ,\ B} A^۲ + ۲AB + B^۲$$

$$(A-B)(A+B) = A^۲ - AB + BA + B^۲ \xrightarrow[\text{تعویض پذیرند}]{A\ ,\ B} A^۲ - B^۲$$

۳- اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و B ماتریس هم‌مرتبه‌ی A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A\times B = B\times A$ برقرار است؟

« **پاسخ** »

$$A=\begin{bmatrix} r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13}\\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23}\\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33}\end{bmatrix}=rB$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13}\\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23}\\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33}\end{bmatrix}=rB$$

$$\Rightarrow A\times B = B\times A = rB$$

۴- اگر $A=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0\\ 0 & 0 & r_3\end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

« **پاسخ** »

$$A=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0\\ 0 & 0 & r_3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} r_1b_{11} & r_1b_{12} & r_1b_{13}\\ r_2b_{21} & r_2b_{22} & r_2b_{23}\\ r_3b_{31} & r_3b_{32} & r_3b_{33}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

سطر اول B در r_1 ضرب می شود

سطر دوم B در r_2 ضرب می شود

سطر سوم B در r_3 ضرب می شود

$$B\times A=\begin{bmatrix} r_1b_{11} & r_2b_{12} & r_3b_{13}\\ r_1b_{21} & r_2b_{22} & r_3b_{23}\\ r_1b_{31} & r_2b_{32} & r_3b_{33}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

سطر اول B در r_1 ضرب می شود

سطر دوم B در r_2 ضرب می شود

سطر سوم B در r_3 ضرب می شود

۵- اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

« **پاسخ** »

$$\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۸+۲a = ۰ \Rightarrow a = ۴ \\ b-۳ = ۰ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$$

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

« **پاسخ** »

$$\begin{matrix} ۲x-y = ۳ \\ ۲x+y = ۵ \end{matrix} \Rightarrow ۴x = ۸ \Rightarrow x = ۲ , y = ۱$$
$$z = -۲ \Rightarrow x+y+z = ۱$$

۷- در معادله ماتریسی $[۳x \quad ۲]\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$ مقدار x را بیابید.

« **پاسخ** »

$$[۳x-۶ \quad -۶x+۱۲]\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \xrightarrow{(۰/۵)} [-۳x+۶-۶x+۱۲] = ۰$$
$$\xrightarrow{(۰/۲۵)} -۹x+۱۸ = ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} x = ۲ \ (۰/۲۵)$$

۸- در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ ماتریس A را به دست آورید.

« **پاسخ** »

فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ پس $B^{-۱} = \frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ پس $C^{-۱} = \frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داریم.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow BAC = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \xrightarrow[\times C^{-۱}]{B^{-۱}\times} A = B^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} C^{-۱}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۴ & -۱۵ \\ -۷ & ۲۵ \end{bmatrix}$$

۹- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & -۱ \end{bmatrix}$ و $P=\begin{bmatrix} ۱۳ & -۴ \\ ۱۷ & -۱۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $(P^{-۱}AP)^{۲}$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & \sqrt{۳} \\ \sqrt{۳} & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}=۴\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=۴I$$

از طرف دیگر داریم.

$$(P^{-۱}AP)^{۲}=(P^{-۱}AP)(P^{-۱}AP)=P^{-۱}A\underbrace{(PP^{-۱})}_{I}AP=P^{-۱}(AA)P$$

$$P^{-۱}A^{۲}P=P^{-۱}(۴I)P=۴P^{-۱}P=۴I=۴\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۰- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. نشان دهید $|AB|=|A||B|$.

« **پاسخ** »

ابتدا ماتریس AB را به دست می‌آوریم.

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۲۵ & ۱۱ \end{bmatrix}\Rightarrow|AB|=۲۲$$

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۱۱$$

$$B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow|B|=۲$$

دیده می‌شود $|AB|=|A||B|=۲۲$.

۱۱- اگر $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $۲a - f + ۳C$ را بیابید.

« **پاسخ** »

مسلماً ماتریس A از مرتبه‌ی ۱×۳ می‌باشد. فرض کنیم $A = [x \quad y \quad z]$ داریم.

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} [x \quad y \quad z] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۲y & ۲z \\ x & y & z \\ ۳x & ۳y & ۳z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

پس نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} ۲x = a \\ ۳z = f \\ ۲z = c \\ x = ۳ \\ z = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۶ \\ c = -۲ \\ f = -۳ \end{cases} \Rightarrow ۲a - f + ۳c = ۱۲ + ۳ - ۶ = ۹$$

۱۲- ماتریس‌های A و B مربعی ۲×۲ هستند و $BA = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A \begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ -۱ & -۶ \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} B$ را بیابید.

« **پاسخ** »

از طرفین عبارت داده شده ماتریس‌های A و B را فاکتور می‌گیریم.

$$B\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}A + B\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ -۱ & -۶ \end{bmatrix}A = B\left(\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ -۱ & -۶ \end{bmatrix}\right)A = B\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}A = B(-I)A$$
$$= -BA = -\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های این ماتریس برابر ۴- است.

۱۳- ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس $A^{۳۲}$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم:

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

بنابراین:

$$A^{۳۲} = \left(A^{۲}\right)^{۱۶} = I^{۱۶} = I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۱۴- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ در تساوی $(A + B)^{۲} + C = ۲A$ صدق می‌کند. ماتریس C را به دست آورید.

« **پاسخ** »

ابتدا ماتریس $(A + B)^{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$A + B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow (A + B)^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$(A + B)^{۲} + C = ۲A \Rightarrow C = ۲A - (A + B)^{۲} = ۲\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

۱۵- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۵ \\ -۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$ دو ماتریس باشند و x درایه‌ی سطر اول، ستون دوم AB بوده و y درایه‌ی سطر دوم، ستون اول BA باشد آن‌گاه $x+y$ را بیابید.

« پاسخ »

با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم.

$$x=(\text{سطر اول } A)\times(\text{ستون دوم } B)=[۲\ \ -۱\ \ ۵]\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}=۲+۰-۱۵=-۱۳$$

$$y=(\text{سطر دوم } B)\times(\text{ستون اول } A)=[۰\ \ -۱]\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰-۱=-۱$$

پس $x+y=-۱۴$.

۱۶- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=A^۳$ آن‌گاه حاصل $b_{۱۲}+۲b_{۳۱}-b_{۲۱}$ برابر چیست؟

« پاسخ »

ابتدا $A^۲$ و سپس $A^۳$ را به دست می‌آوریم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۳ \\ ۴ & -۵ & ۳ \\ ۱ & -۱ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$B=A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۳ \\ ۴ & -۵ & ۳ \\ ۱ & -۱ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۱۱ \\ ۵ & -۹ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b_{۱۲}=۴\ ,\ b_{۳۱}=۵\ ,\ b_{۲۱}=۰$$

پس داریم:

$$b_{۱۲}+۲b_{۳۱}-b_{۲۱}=۴+۱۰-۰=۱۴$$

۱۷- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مقادیر a و b را طوری به دست آورید که AB قطری باشد.

« پاسخ »

در ماتریس قطری درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر هستند.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

۱۸- اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ باشند و داشته باشیم $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$ آن‌گاه ثابت کنید $AB=BA$. (یعنی A و B تعویض‌پذیرند.)

« **پاسخ** »

ابتدا ماتریس $(A+B)^{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$(A+B)^{۲}=(A+B)(A+B)=A^{۲}+AB+BA+B^{۲}$$

از طرف دیگر بنابر فرض $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$ پس داریم.

$$A^{۲}+AB+BA+B^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}\Rightarrow AB=BA$$

۱۹- اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند آن‌گاه ثابت کنید.

$$(A+B)^{۲}=A^{۲}+B^{۲}+۲AB$$

« **پاسخ** »

ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیرند یعنی $AB=BA$ داریم.

$$(A+B)^{۲}=(A+B)(A+B)=A^{۲}+AB+BA+B^{۲}\xrightarrow{AB=BA}$$
$$(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$$

۲۰- اگر $A=\begin{bmatrix}۲x-y & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $A=B$ آن‌گاه حاصل $x+y+z$ را بیابید.

« **پاسخ** »

در دو ماتریس مساوی درایه‌های نظیر مساویند. پس داریم:

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}۳=۲x-y\\ ۲x+y=۵\\ -۲=z\Rightarrow z=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲x-y=۳\\ ۲x+y=۵\end{cases}\Rightarrow x=۲\ ,\ y=۱$$

پس $x+y+z=۲+۱-۲=۱$.

۲۱- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ به طوری‌که $a_{ij}=\begin{cases} ۷ & i=j \\ i+j & i>j \\ t^{۲} & i<j \end{cases}$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

« **پاسخ** »

بنابر تعریف درایه‌های ماتریس A داریم.

$$\begin{matrix} a_{۱۱}=۷\ ,\ a_{۱۲}=۱\ ,\ a_{۱۳}=۱\ ,\ a_{۱۴}=۱ \\ a_{۲۱}=۳\ ,\ a_{۲۲}=۷\ ,\ a_{۲۳}=۴\ ,\ a_{۲۴}=۴ \\ a_{۳۱}=۴\ ,\ a_{۳۲}=۵\ ,\ a_{۳۳}=۷\ ,\ a_{۳۴}=۹ \end{matrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

۲۲- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۶x+۳y & ۴ \\ -۵ & z+۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۶ & x-y \\ -۵ & ۷ \end{bmatrix}$ مساویند. حاصل $۳x-y+z$ را بیابید.

« **پاسخ** »

در دو ماتریس مساوی تمام درایه‌های نظیر برابرند. پس داریم:

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} ۶=۶x+۳y \\ x-y=۴ \\ ۷=z+۲ \Rightarrow z=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶x+۳y=۶ \\ x-y=۴ \end{cases} \Rightarrow x=۲\ ,\ y=-۲$$

پس $۳x-y+z=۶+۲+۵=۱۳$.

۲۳- در هر مورد به جای □ عبارت مناسب بنویسید تا گزاره‌ی درست حاصل شود.

الف) $A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{\square} \Rightarrow A+B=[a_{ij}+\square]_{\square}$

ب) $A=[a_{ij}]_{\square}\ ,\ r\in R \Rightarrow rA=[\square]_{m\times n}$

ج) اگر $A+(-A)=\bar{o}$ آن‌گاه $-A$ □ ماتریس A است.

د) $A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{\square} \Rightarrow ۲A+۳B=\square$

« **پاسخ** »

الف) $A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A+B \Rightarrow [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$

۲) $A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ r\in R \Rightarrow rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$

ج) اگر $A+(-A)=\bar{o}$ آن‌گاه $-A$ قرینه‌ی ماتریس A است.

د) $A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow ۲A+۳B=[۲a_{ij}+۳b_{ij}]_{m\times n}$

۲۴- اگر ضرب ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد حاصل $[x \quad ۲ \quad -y] \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید.

« **پاسخ** »

$$\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{۰/۲۵} \begin{bmatrix} ۴x + ۳y & ۳x + ۴y \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۴x + ۶ & ۴y - ۳ \\ ۳x + ۸ & ۳y - ۴ \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

$$۳x + ۸ = ۵ \rightarrow x = -۱ \quad (۰/۲۵) \quad , \quad ۳y - ۴ = ۲ \rightarrow y = ۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$[-۱ \quad ۲ \quad -۲] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = -۲ + ۴ - ۲ = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

۲۵- اگر $A = [a_{ij}]_{۳ \times ۳}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i.j & i > j \\ i^۲ & i = j \\ ۲i - j & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A - ۳I$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

$$۲A - ۳I = \underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} - \underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$$

۲۶- اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل $A^۲ + AB$ را به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$A^۲ + AB = \begin{bmatrix} ۵ & ۹ & ۹ \\ ۸ & ۱۳ & ۱۵ \\ ۱۱ & ۱۱ & ۲۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۷ & ۴ \\ ۴ & ۱۲ & ۶ \\ ۱۳ & ۱۴ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۶ & ۱۳ \\ ۱۲ & ۲۵ & ۲۱ \\ ۲۴ & ۲۵ & ۲۷ \end{bmatrix}$$

۲۷- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۱&۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^{۵}$ را به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۳&۳&۳\\۳&۳&۳\\۳&۳&۳\end{bmatrix}=۳A$$

$$A^{۵}=\left(A^{۲}\right)^{۲}\times A=(۳A)^{۲}\times A=۹A^{۲}\times A=۹A^{۲}\times A=۲۷A^{۲}=۸۱A$$

$$=۸۱A=\begin{bmatrix}۸۱&۸۱&۸۱\\۸۱&۸۱&۸۱\\۸۱&۸۱&۸۱\end{bmatrix}$$

۲۸- اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰&d\\-d&۰\end{bmatrix}$ آنگاه مقادیر $a\,,\,b\,,\,c\,,\,d$ را از تساوی $A+B=\begin{bmatrix}۱&۳\\۵&۲\end{bmatrix}$ بیابید.

« **پاسخ** »

$$\begin{bmatrix}۱&۳\\۵&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b+d\\b-d&c\end{bmatrix}\qquad\begin{cases}a=۱\\b+d=۳\\b-d=۵\\c=۲\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=۴\\d=-۱\\c=۲\end{cases}$$

۲۹- اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\۱&۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۲\end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $(A-I)(B+I)$ را بیابید.

« **پاسخ** »

$$(A-I)(B+I)=\begin{bmatrix}۱&۳\\۱&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۱\\۰&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۱۰\\۳&۱۳\end{bmatrix}$$

۳۰- اگر $A=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}-۱&\sqrt{۳}\\-\sqrt{۳}&-۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه کوچک‌ترین مقدار طبیعی n را به‌گونه‌ای بیابید که $A^{n}=I$ باشد.

« **پاسخ** »

$$A^{۲}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}-۲&-۲\sqrt{۳}\\۲\sqrt{۳}&-۲\end{bmatrix}\qquad A^{۳}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۸&۰\\۰&۸\end{bmatrix}=I$$

پس کوچک‌ترین مقدار n برابر ۳ است.

۳۱- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$[۱ \quad ۲ \quad x]\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

« پاسخ »

$$۰ = [۲ + x \quad ۲ + x \quad ۷ + ۲x]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۴ + ۲x + ۲ + x + ۷ + ۲x$$

$$\rightarrow ۵x + ۱۳ = ۰ \rightarrow x = -\frac{۱۳}{۵}$$

۳۲- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ آن‌گاه مطلوب است ماتریس $A^۳ + ۲AB$.

« پاسخ »

$$A^۳ + ۲AB = A\left(A^۲ + ۲B\right) = ۲I(۴I + ۲B)$$
$$= ۲\left(\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}\right) = ۲\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ ۲ & ۸ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۸ & ۱۲ \\ ۴ & ۱۶ \end{bmatrix}$$

۳۳- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $A^{۱۸} - A^{۲۰}$ را بیابید.

« پاسخ »

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$
$$A^۳ = \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$A^n = \begin{bmatrix} n + ۱ & -n \\ n & -n + ۱ \end{bmatrix}$$
$$A^{۲۰} - A^{۱۸} = \begin{bmatrix} ۲۱ & -۲۰ \\ ۲۰ & -۱۹ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱۹ & -۱۸ \\ ۱۸ & -۱۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

۳۴- با فرض $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$ حاصل A^{1385} را بیابید.

« **پاسخ** »

$$A^2=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & 2\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}2 & -2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -8\\ 8 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^6=A^3.A^3=\begin{bmatrix}-64 & 0\\ 0 & -64\end{bmatrix}=-2^6\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=-2^6 I$$

$$A^{1385}=A^{1386}.A^{-1}=(A^6)^{231}\times A^{-1}=-2^{1386}\times\frac{1}{4}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$=-2^{1384}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

۳۵- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ آنگاه مقادیر a و b را به گونه‌ای بیابید که $A^2+aA+bI=\bar{0}$ باشد.

« **پاسخ** »

$$A^2+aA+bI=\begin{bmatrix}7 & 21\\ 7 & 28\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2a & 3a\\ a & 5a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7+2a+b & 21+3a\\ 7+a & 28+5a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}21+3a=0\to a=-7\\ 7+2a+b=0\to b=7\\ 28+5a+b=0\end{cases}$$

۳۶- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبهٔ A^{10}.

« **پاسخ** »

ابتدا ماتریس A^2 را به‌دست می‌آوریم.

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=I$$

$$A^{10}=(A^2)^5=I^5=I$$

۳۷- فرض کنید a ، b ، c و d چهار واحد طول باشند. ماتریس زیر یک جدول تبدیل واحد است

$$A=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ \frac{۱}{۳} & ۱ & ۲ & ۸ \\ \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ \frac{۱}{۲۴} & \frac{۱}{۸} & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین، یک واحد از a شش واحد از c است، یک واحد از b ، هشت واحد از d است، و یک واحد از c نصف واحد از b است. این جدول را به‌عنوان یک ماتریس در نظر بگیرید و شرح دهید که چرا $a_{ik}\,a_{kj}=a_{ij}$ آیا می‌توانید بدون محاسبهٔ مستقیم $A^{۲}$ را پیدا کنید.

« **پاسخ** »

درایه‌های هر سطر و ستون نشان دهنده‌ی ارتباط بین دو واحد متفاوت می‌باشد. مثلاً درایه سطر دوم و ستون اول یعنی $\frac{۱}{۳}$ با درایه‌ی سطر اول ستون سوم یعنی ۶ ارتباط بین واحد b , c را مشخص می‌کند. اگر این دو عدد را در هم ضرب کنیم، $۲=\frac{۱}{۳}\times۶$ عدد $a_{۲۳}$ را به دست می‌آوریم. در ضمن برای محاسبه‌ی ماتریس $A^{۲}$ درایه‌های این ماتریس عبارتند از:

$$A=[a_{ij}]_{۴\times۴}\Rightarrow A^{۲}=C=[c_{ij}]_{۴\times۴}$$

$$\forall ij: c_{ij}=\sum_{k=۱}^{۴} a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=۱}^{۴} a_{ij}=۴a_{ij}$$

بنابراین درایه‌های ماتریس $A^{۲}$ مساوی ۴ برابر درایه‌های ماتریس A می‌باشد.

$$A^{۲}=۴A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱۲ & ۲۴ & ۹۶ \\ \frac{۴}{۳} & ۴ & ۸ & ۳۲ \\ \frac{۴}{۶} & \frac{۴}{۲} & ۴ & ۱۶ \\ \frac{۴}{۲۴} & \frac{۴}{۸} & \frac{۴}{۴} & ۴ \end{bmatrix}$$

۳۸- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هریک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

الف) $\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x + ۳y = ۵ \\ -۲x - ۶y = ۱ \end{cases}$

پ) $\begin{cases} -۲x + ۳y = ۲ \\ ۴x - ۶y = -۴ \end{cases}$

« **پاسخ** »

الف) $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۳ + ۱۰ = ۱۳ \neq ۰$

$\frac{۳}{۲} \neq \frac{-۵}{۱} \Rightarrow$ دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۵}{۱۳} \\ \frac{-۲}{۱۳} & \frac{۳}{۱۳} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۳} & \frac{۵}{۱۳} \\ \frac{-۲}{۱۳} & \frac{۳}{۱۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-۱ + ۴۰}{۱۳} \\ \frac{۲ + ۲۴}{۱۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = ۳ \\ y = ۲ \end{matrix}$$

ب) $\frac{-۲}{۴} = \frac{۳}{-۶} = \frac{۲}{-۴}$ دو خط بر هم منطبقند پس دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

پ) $\frac{۱}{-۲} = \frac{۳}{-۶} \neq \frac{۵}{-۱} \Rightarrow$ دو خط با هم موازیند پس دستگاه جواب ندارد.

۳۹- به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + ۳y = ۴ \\ x - ۲y = ۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد.

« **پاسخ** »

$$\begin{vmatrix} k & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} \neq ۰ \Rightarrow -۲k - ۳ \neq ۰ \Rightarrow k \neq -\frac{۳}{۲}$$

۴۰- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

« پاسخ »

$$\begin{cases}۳x-۵y=۱\\ ۴x+۲y=۱۰\end{cases}\qquad |A|=۳\times۲-(-۵)\times۴=۶+۲۰=۲۶$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ -۴ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۳} & \frac{۵}{۲۶}\\ \frac{-۲}{۱۳} & \frac{۳}{۲۶}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۳} & \frac{۵}{۲۶}\\ \frac{-۲}{۱۳} & \frac{۳}{۲۶}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲+۵۰}{۲۶}\\ \frac{-۴+۳۰}{۲۶}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$$

۴۱- اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=۵$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

« پاسخ »

$$||A|A|=|A|^{۳}|A|=|A|^{۴}=۵^{۴}=۶۲۵$$

۴۲- الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ $(k\in R)$ را درنظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت الف را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb\\ c & d\end{bmatrix}$ $(k\in R)$ بررسی کنید.

« پاسخ »

الف) $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=\left[\begin{array}{ccc}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{array}\right]\begin{array}{cc}a & b\\ d & e\\ g & h\end{array}$

$$\Rightarrow|A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

$$B=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=\left[\begin{array}{ccc}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{array}\right]\begin{array}{cc}ka & kb\\ d & e\\ g & h\end{array}$$

$$\Rightarrow|B|=(kaei+kbfg+kcdh)-(kceg+kafh+kbdi)$$
$$=k(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)=k|A|\Rightarrow|B|=k|A|$$

ب) $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=ad-bc$

$$B=\begin{bmatrix}ka & kb\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=kad-kbc=k(ad-bc)=k|A|$$

۴۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۲\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورده و $|A|$ را با $\left|A^{-۱}\right|$ مقایسه کنید.

« **پاسخ** »

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۴}\times\begin{bmatrix}۲&-۲\\-۳&۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&\frac{-۱}{۲}\\\frac{-۳}{۴}&\frac{۵}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow\left|A^{-۱}\right|=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

$$|A|=۱۰-۶=۴$$

$$|A|\times\left|A^{-۱}\right|=۴\times\frac{۱}{۴}=۱\Rightarrow\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{|A|}$$

۴۴- اگر $A=\begin{bmatrix}۴&۳\\۲&۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲&-۳\\۵&-۱\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $\left(۲A^{-۱}-۳B^{-۱}\right)$ را بیابید.

« **پاسخ** »

$$۲\times\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix}۵&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix}-۳\times\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix}-۱&۳\\-۵&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۵}{۷}&\frac{-۳}{۷}\\\frac{-۲}{۷}&\frac{۴}{۷}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{۳}{۱۷}&\frac{-۹}{۱۷}\\\frac{۱۵}{۱۷}&\frac{۶}{۱۷}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{۸۵+۲۱}{۱۱۹}&\frac{-۵۱-۶۳}{۱۱۹}\\\frac{-۳۴+۱۰۵}{۱۱۹}&\frac{۶۸+۴۲}{۱۱۹}\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۱۹}\begin{bmatrix}۱۰۶&-۱۱۴\\۷۱&۱۱۰\end{bmatrix}$$

۴۵- اگر $A=\begin{bmatrix}۵|A|&|A|\\۵&۴|A|^۲\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(|A|^۳-۲\right)$ را بیابید.

« **پاسخ** »

$$|A|=۲۰|A|^۳-۵|A|\Rightarrow۲۰|A|^۲-۶|A|=۰\Rightarrow|A|\left(۲۰|A|^۲-۶\right)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|A|=۰\Rightarrow|A|^۳-۲=۰-۲=-۲\\۲۰|A|^۲-۶=۰\Rightarrow|A|^۲=\frac{۳}{۱۰}\Rightarrow|A|=\pm\sqrt{۰/۳}\Rightarrow|A|^۳-۲=\pm\left(۰/۳\sqrt{۰/۳}\right)-۲\end{cases}$$

۴۶- اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^{۲}|$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$|A| = (-۲)(-۳)(-۵) = -۳۰$$
$$|A^{۲}| = |A|^{۲} = (-۳۰)^{۲} = ۹۰۰$$

۴۷- مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + ۳y = -۳ \\ ۴x + (m+۴)\ y = ۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

« **پاسخ** »

$$\frac{m}{۴} = \frac{۳}{m+۴} \neq \frac{-۳}{۲} \xrightarrow{(۰/۵)} m\ (m+۴) - ۱۲ = ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} \begin{cases} m = -۶\ (۰/۲۵) & \text{غیرقابل قبول} \\ m = ۲\ (۰/۲۵) & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۴۸- اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A^{۳}|$ را محاسبه کنید.

« **پاسخ** »

$$|A| = ۲(۴ - ۳) = ۲ \xrightarrow{(۰/۵)} \underbrace{|A^{۳}| = |A|^{۳}}_{(۰/۲۵)} = ۸\ (۰/۲۵)$$

۴۹- به‌ازای کدام مقادیر m دستگاه معادلات $\begin{cases} (۲m+۱)x - my = ۱ \\ -۷mx + (m+۶)y = -m \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد؟

« **پاسخ** »

$$\begin{cases} (۲m+۱)x - my = ۱ \\ -۷mx + (m+۶)y = -m \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط جواب بیشمار داشتن}} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{۲m+۱}{-۷m} = \frac{-m}{m+۶} = \frac{۱}{-m}$$

$$\frac{۲m+۱}{-۷m} = \frac{-m}{m+۶} \Rightarrow ۵m^{۲} - ۱۳m - ۶ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۱۳ \pm \sqrt{۱۶۹+۱۲۰}}{۱۰} = \frac{۱۳ \pm ۱۷}{۱۰} \Rightarrow \begin{cases} m = ۳ \\ m = -۰/۴ \end{cases}$$

$$\frac{-m}{m+۶} = \frac{۱}{-m} \Rightarrow m^{-۲} - m - ۶ = ۰ \Rightarrow (m-۳)(m+۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۳ \\ n = -۲ \end{cases}$$

پس به‌ازای $m = ۳$ بیشمار جواب دارد.

۵۰- اگر $A^{-۱} = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & -۵ \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $۲A \times B$ را به دست آورید.

« **پاسخ** »

از $A^{-۱}$ وارون می‌گیریم تا ماتریس A به دست آید.

$$A = \left(A^{-۱}\right)^{-۱} = \frac{۱}{-۲+۴}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$۲A \times B = ۲ \times \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۲ & -۶ \\ -۱۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

۵۱- ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ در تساوی $A^{-۱} = mA + nI_۲$ صدق می‌کند. $m+n$ را بیابید.

« **پاسخ** »

ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{-۲+۱}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = mA + nI_۲ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲m & m \\ -m & -m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & ۰ \\ ۰ & n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲m+n & m \\ -m & -m+n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲m+n = ۱ \Rightarrow n = -۱ \\ m = ۱ \end{cases}$$

بنابراین $m+n = ۰$.

۵۲- به‌ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + ۳y = ۴ \\ x - ۲y = ۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

« **پاسخ** »

دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است هرگاه دترمینان ماتریس ضرایب غیرصفر باشد.

$$\begin{cases} kx + ۳y = ۴ \\ x - ۲y = ۳ \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} k & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| \neq ۰ \Rightarrow -۲k - ۳ \neq ۰ \Rightarrow k \neq -\frac{۳}{۲}$$

۵۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورده نشان دهید: $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$

« **پاسخ** »

$$A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۱}=\frac{۱}{۱۰-۶}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۵}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

$$A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۱۰-۶=۴$$

بنابراین $|A|=۴$ و $|A^{-۱}|=\frac{۱}{۴}$ در نتیجه $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$.

۵۴- ماتریسی ۳×۳ چون A بنویسید به طوری‌که $|A|=-۶$ باشد.

« **پاسخ** »

ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳ & ۷ & ۶\\ ۰ & -۲ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ دارای دترمینان برابر ۶- است.

۵۵- اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این صورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^{۲}-۵|A|+۶=۰$ برقرار باشد.

« **پاسخ** »

ابتدا از معادله‌ی داده شده $|A|$ را به دست می‌آوریم.

$$|A|^{۲}-۵|A|+۶=۰\Rightarrow(|A|-۲)(|A|-۳)=۰\Rightarrow|A|=۲\ ,\ |A|=۳$$

$|A|=۲\Rightarrow\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=۲\Rightarrow$ a , b , c , d می‌توانند بی‌شمار جواب داشته باشند.

از جمله $a=۲\ ,\ d=۱\ ,\ b=۳\ ,\ c=۰$.

$|A|=۳\Rightarrow\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=۳\Rightarrow$ a , b , c , d می‌توانند بی‌شمار جواب داشته باشند.

از جمله $a=۳\ ,\ d=۲\ ,\ b=۱\ ,\ c=۳$.

۵۶- در مورد جواب‌های دستگاه معادلات $\begin{cases}۳x-y=۱\\ -۶x+۲y=۲\end{cases}$ بحث کنید.

« **پاسخ** »

$$\begin{cases}۳x-y=۱\\ -۶x+۲y=۲\end{cases}\Rightarrow\frac{۳}{-۶}=\frac{-۱}{۲}\neq\frac{۱}{۲}$$

پس این دستگاه شامل دو خط موازی است و این دو خط هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند، لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.