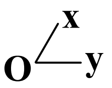
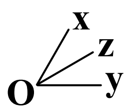
@jozveh_nub

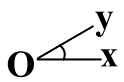
زاویه : زاویه مجموعه نقاطی از صفحه است که به دو نیم خط با مبدأ مشترک محدود باشند. مانند زاویه $\angle xOy$ (یا مختصراً $\angle O$) که در آن Ox و Oy را اضلاع زاویه و O را رأس زاویه می نامیم.



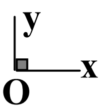
نیمساز زاویه : نیم خطی را که از رأس زاویه گذشته و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند نیمساز آن زاویه می نامیم. مانند نیمساز Oz



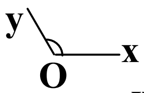
انواع زاویه :



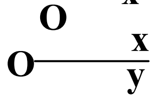
۱) **زاویه حاده (تند) :** زاویه است که اندازه اش بین صفر تا ۹۰ درجه باشد.



۲) **زاویه قائمه :** زاویه ای که بر زاویه‌ی مجانبش منطبق است را قائمه گویند. اندازه این زاویه برابر ۹۰ درجه است.

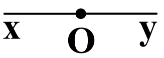


۳) **زاویه منفرجه (باز) :** زاویه ای است که اندازه اش بین ۹۰ تا ۱۸۰ درجه باشد.



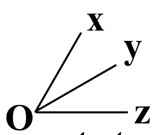
۴) **زاویه صفر درجه :** هرگاه دو ضلع زاویه بر هم منطبق باشند اندازه‌ی این زاویه صفر درجه است.

۵) **زاویه نیم صفحه :** هرگاه دو ضلع زاویه در امتداد یکدیگر و مختلف الجهت باشند به آن زاویه‌ی نیم صفحه گویند. اندازه این زاویه ۱۸۰ درجه است.

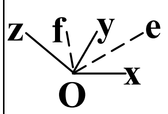


وضعیت دو زاویه :

۱) **دو زاویه مجاور :** دو زاویه را که در رأس و یک ضلع مشترک و دو ضلع غیر مشترک آن ها در طرفین ضلع مشترک واقع باشد مجاور می نامیم مانند دو زاویه ی مجاور $\angle xOy$ و $\angle yOz$



نکته : زاویه‌ی بین دو نیمساز دو زاویه‌ی مجاور نصف مجموع دو زاویه است به طوری که اگر Oe و Of به ترتیب نیمساز زاویه های مجاور $x\hat{O}y = \alpha$ و $y\hat{O}z = \beta$ باشند آنگاه $e\hat{O}f = \frac{\alpha + \beta}{۲}$



۲) **دو زاویه‌ی متمم :** دو زاویه ای که مجموع اندازه های آن ها برابر ۹۰ درجه باشد را دو زاویه‌ی متمم می نامیم. مانند دو زاویه‌ی متمم ۲۵ درجه و ۶۵ درجه

۳) **دو زاویه‌ی مکمل :** دو زاویه ای که مجموع اندازه های آن ها برابر ۱۸۰ درجه باشد را دو زاویه‌ی مکمل می نامیم. مانند دو زاویه‌ی مکمل ۳۵ درجه و ۱۴۵ درجه

نکته ۱ : متمم زاویه‌ی A برابر $۹۰ - A$ و مکمل زاویه‌ی A برابر $۱۸۰ - A$ می باشد.

نکته ۲ : اگر مجموع دو زاویه A و B برابر α باشد مجموع متمم های دو زاویه A و B برابر $۱۸۰ - \alpha$ است.

زیرا $۹۰ - A + ۹۰ - B = ۱۸۰ - (A + B) = ۱۸۰ - \alpha$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

نکته ۳ : اگر مجموع دو زاویه A و B برابر α باشد مجموع مکمل های دو زاویه A و B برابر $۳۶۰-\alpha$ است.

زیرا $۱۸۰-A+۱۸۰-B=۳۶۰-(A+B)=۳۶۰-\alpha$

نکته : تفاضل متمم از مکمل هر زاویه دلخواه برابر ۹۰ است.

زیرا : $۱۸۰-\alpha-(۹۰-\alpha)=۱۸۰-\alpha-۹۰+\alpha=۹۰$

نکته : مجموع متمم و مکمل زاویه ای α مانند برابر $۲۷۰-۲\alpha$ است.

زیرا : $۱۸۰-\alpha+۹۰-\alpha=۲۷۰-۲\alpha$

قضیه : اگر دو زاویه مساوی باشند آن گاه :

الف : متمم های آن ها نیز با یکدیگر مساویند.   ب : مکمل های آن ها نیز با یکدیگر مساویند.

مثال) مجموع دو زاویه ۷۵ درجه است. مجموع مکمل های آن ها چند درجه است؟

۱) ۲۶۵   ۲) ۲۷۵   ۳) ۲۸۵   ۴) ۲۹۵   (آزمون پیش دانشگاهی ریاضی ۷۷)

جواب:گزینه۳ صحیح است.روش اوّل : اگر مجموع دو زاویه A و B برابر α باشد مجموع مکمل های این دو زاویه برابر $۳۶۰-\alpha$ است. پس : $۳۶۰-۷۵=۲۸۵$

روش دوم :زاویه ها را A و B می نامیم. $\hat{A}+\hat{B}=۷۵\Rightarrow ۱۸۰-\hat{A}+۱۸۰-\hat{B}=۳۶۰-(\hat{A}+\hat{B})=۳۶۰-۷۵=۲۸۵$

مثال) دو زاویه A و B متمم اند. اندازه زاویه A برابر $\frac{۴}{۹}$ اندازه مکمل زاویه B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟

۱) ۲۷   ۲) ۳۶   ۳) ۶۳   ۴) ۷۲   (کنکور سراسری ریاضی ۷۵)

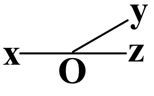
جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل :

$$\begin{cases}A+B=۹۰\\ A=\frac{۴}{۹}(۱۸۰-B)\end{cases}\Rightarrow \frac{۴}{۹}(۱۸۰-B)+B=۹۰\Rightarrow ۷۲۰-۴B+۹B=۸۱۰\Rightarrow ۵B=۹۰\Rightarrow\begin{cases}A=۷۲^\circ\\ B=۱۸^\circ\end{cases}$$

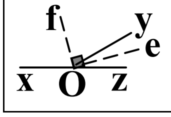
روش دوم :

$$\begin{cases}B=۹۰-A\\ A=\frac{۴}{۹}(۱۸۰-B)\end{cases}\Rightarrow A=\frac{۴}{۹}(۹۰+A)\Rightarrow ۹A=۳۶+۴A\Rightarrow ۵A=۳۶۰\Rightarrow A=۷۲^\circ$$

۴) **دو زاویه‌ی مجانب :** دو زاویه‌ی مجاور که دو ضلع غیر مشترک آن ها در یک امتدادند را دو زاویه‌ی مجانب گویند. به عبارت دیگر دو زاویه مجاور و مکمل یکدیگر را دو زاویه مجانب می گویند. مانند دو زاویه‌ی مجانب xOy و yOz



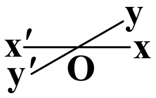
نکته : نیمسازهای دو زاویه مجانب بر هم عمودند به عبارت دیگر نیمساز های داخلی و خارجی هر زاویه بر هم عمودند.



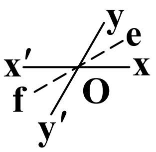
@jozveh_nub

@jozveh_nub

۵) **دو زاویه‌ی متقابل به رأس :** زاویه های مقابل در بین دو خط متقاطع را متقابل به رأس می نامند. مانند دو زاویه‌ی متقابل به رأس xOy و $x'Oy'$



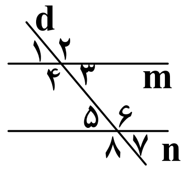
قضیه : الف : زاویه های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع با یکدیگر مساویند.



ب : نیمسازهای زاویه های متقابل به رأس در هر دو خط متقاطع بر روی یک خط رأست واقع اند.

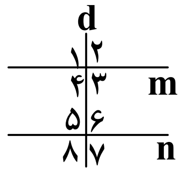
نکته : در صفحه، اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد ، بر دیگری هم عمود است.

قضیه خطوط موازی و مورب : اگر دو خط موازی را خط موربی قطع کند آنگاه زاویه های حاده ایجاد شده با هم و زاویه های منفرجه ایجاد شده با هم مساویند و یک زاویه حاده با یک زاویه منفرجه مکمل است و بر عکس.



نتیجه : $m \parallel n$ و d مورب $\Leftrightarrow$

$$\hat{۱}=\hat{۳}=\hat{۵}=\hat{۷},\hat{۲}=\hat{۴}=\hat{۶}=\hat{۸}$$
$$\hat{۱}+\hat{۲}=\hat{۲}+\hat{۳}=\hat{۳}+\hat{۴}=\hat{۴}+\hat{۱}=۱۸۰^\circ,\hat{۵}+\hat{۶}=\hat{۶}+\hat{۷}=\hat{۷}+\hat{۸}=\hat{۸}+\hat{۵}=۱۸۰^\circ$$
$$\hat{۳}+\hat{۶}=\hat{۴}+\hat{۵}=\hat{۲}+\hat{۷}=\hat{۱}+\hat{۸}=۱۸۰^\circ,\hat{۲}+\hat{۵}=\hat{۱}+\hat{۶}=\hat{۴}+\hat{۷}=\hat{۳}+\hat{۸}=۱۸۰^\circ$$



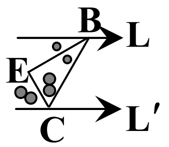
حالت خاص : اگر در صفحه ای خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است و هشت زاویه ایجاد شده با هم برابرندو بر عکس.

مثال) اگر دو خط موازی را موربی قطع کند , کدام گزاره همواره درست است؟

۱) هر دو زاویه برابرند. ۲) هر دو زاویه مکمل اند

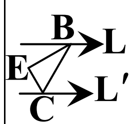
۳) هر دو زاویه مجانب اند. ۴) همه زاویه های حاده برابرند. جواب : گزینه ۴ صحیح است.

نکته : نیمساز های دو زاویه محصور بین دو خط موازی و واقع در یک طرف خط مورب بر هم عمودند.



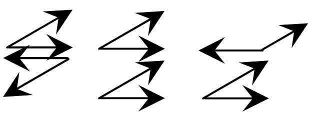
یعنی در شکل مقابل $\hat{E}=۹۰^\circ$

مثال) خط های L و L' با هم موازی اند ، BE و CE نیمسازهای زاویه‌ی B و C هستند. اندازه‌ی زاویه‌ی E کدام است؟



۱) ۴۵ درجه ۲) ۷۵ درجه ۳) ۶۰ درجه ۴) ۹۰ درجه

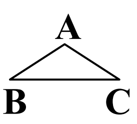
جواب : گزینه ۴ صحیح است. $\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰\Rightarrow ۲E\hat{B}C+۲E\hat{C}B=۱۸۰\Rightarrow E\hat{B}C+E\hat{C}B=۹۰\Rightarrow \hat{E}=۹۰$



نکته : اگر اضلاع دو زاویه نظیر به نظیر موازی باشند آنگاه آن دو زاویه مساوی یا مکمل اند.

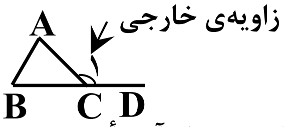
مثلث : اگر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست را دو به دو به هم وصل کنیم شکل حاصل را مثلث می نامند مانند مثلث ABC.

در این مثلث هر یک از پاره خط های AB و BC و AC را یک ضلع و هر یک از زاویه های A و B و C را یک زاویه مثلث می نامند. سه ضلع و سه زاویه هر مثلث را اجزای اصلی آن می گویند.



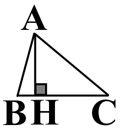
@jozveh_nub

@jozveh_nub



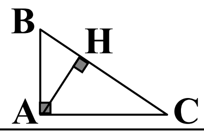
زاویه‌ی خارجی مثلث : زاویه ای که از امتداد دادن یک ضلع تشکیل می شود زاویه‌ی خارجی نامیده می شود. مانند زاویه‌ی خارجی ACD

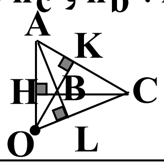
تعریف ارتفاع مثلث : پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث ، و سر دیگر آن ، پای عمودی است که از آن رأس بر ضلع مقابل به آن (و یا امتداد آن) رأس فرود می آید ، مانند ارتفاع AH در شکل مقابل :

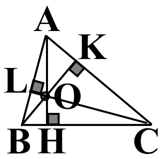


هر مثلث سه ارتفاع دارد که در یک نقطه مانند O به نام مرکز ارتفاعی مثلث همرسند.

اندازه‌ی ارتفاع های AH ، BK و CL را به ترتیب به h_a ، h_b و h_c نشان می دهند.

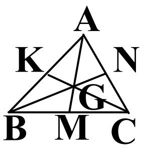






نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث قائم	نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث منفرجه	نقطه برخورد سه ارتفاع مثلث

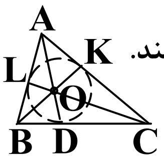
تعریف میانه مثلث : پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث ، و سر دیگر آن ، وسط ضلع مقابل به آن رأس است.



مانند میانه AM در شکل مقابل. هر مثلث سه میانه دارد که در یک نقطه مانند G به نام مرکز ثقل مثلث همرسند.

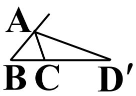
اندازه‌ی میانه های AM ، BN و CK را به ترتیب به m_a ، m_b و m_c نشان می دهند.

تعریف نیمساز زاویه‌ی درونی مثلث : پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث و سر دیگر آن ، نقطه ای روی ضلع مقابل به آن رأس است به طوری که زاویه‌ی درونی نظیر آن رأس را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. مانند نیمساز درونی AD هر مثلث سه نیمساز زاویه‌ی درونی دارد که در یک نقطه مانند O به نام مرکز دایره‌ی محاطی درونی مثلث همرسند.



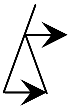
اندازه‌ی نیمساز های زاویه‌ی درونی AD ، BK و CL را به ترتیب به d_a ، d_b و d_c نشان می دهند.

تعریف نیمساز زاویه‌ی برونی مثلث : پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث ، و سر دیگر آن ، نقطه ای در امتداد ضلع مقابل به آن رأس است به طوری که زاویه‌ی برونی نظیر آن رأس را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.



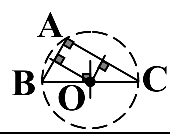
مانند نیمساز برونی AD' در شکل مقابل.

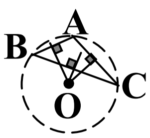
هر مثلث سه نیمساز زاویه‌ی برونی دارد. اندازه‌ی نیمساز های زاویه‌ی های برونی نظیر زاویه های A ، B و C مثلث ABC را به ترتیب به d'_a ، d'_b و d'_c نشان می دهند.

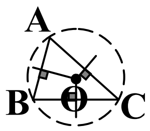


حالت خاص : در مثلث متساوی الساقین نیمساز برونی زاویه‌ی رأس با قاعده موازی است.

تعریف عمودمنصف ضلع مثلث : خطی است که در وسط ضلع مثلث ، بر آن عمود است. هر مثلث سه عمودمنصف دارد که در یک نقطه مانند O به نام مرکز دایره‌ی محیطی مثلث همرسند.





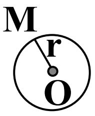


نقطه برخورد سه عمودمنصف مثلث	نقطه برخورد سه عمودمنصف مثلث	نقطه برخورد سه عمودمنصف مثلث

@jozveh_nub

@jozveh_nub

دایره : تمام نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز در آن صفحه به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت را شعاع دایره نامیده می شود.



تذکر : دایره به مرکز O و به شعاع r را به صورت $C(O,r)$ نشان می دهند.

مثال) دونقطه ثابت A و B در صفحه داده شده است. اگر طول پاره خط AC داده شده باشد، برای یافتن مکان نقطه‌ی C باید ....

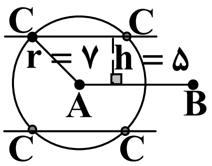
۱) عمودمنصف AB را رسم کنیم. ۲) به مرکز A دایره ای رسم کنیم.

۳) خطی موازی AB رسم کنیم. ۴) از دو سر پاره خط AB بر آن عمود کنیم.

جواب : گزینه ۲ صحیح است. چون طول پاره خط AC داده شده است. فاصله‌ی نقطه‌ی C از A مشخص است. با توجه به ثابت بودن نقطه‌ی A، دایره ای به مرکز A و به شعاع AC رسم می کنیم. نقطه‌ی C روی این دایره واقع خواهد شد.

۱) چند نقطه‌ی متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحه‌ی مختصات، می توان یافت که فاصله‌ی رأس C از نقطه‌ی A و پاره خط AB، به ترتیب ۷ و ۵ واحد، باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ (کنکور سراسری ریاضی ۹۹ خارج از کشور)

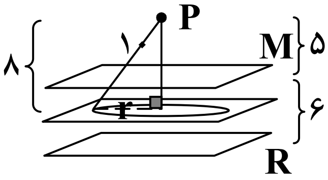


جواب : گزینه ۴ صحیح است. مکان هندسی رأس C محل برخورد دایره ای به مرکز A به شعاع ۷ با دو خط موازی AB به فاصله ۵ واحد از AB می باشد.

مثال) دو صفحه موازی هم و نقطه P به فاصله ۵ و ۱۱ واحد از دو صفحه در بالای هر دو قرار دارد. مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه به یک فاصله و از نقطه P به فاصله ۱۰ واحد باشد، کدام است؟

۱) دایره ای به شعاع۶ ۲) پاره خط به طول ۶ ۳) دایره به شعاع $4\sqrt{2}$ ۴) پاره خط به طول $4\sqrt{2}$

(کنکور سراسری ریاضی۹۱خارج از کشور)



جواب : گزینه ۱ صحیح است. یک مکان هندسی نقطه ای که از دو صفحه‌ی موازی M و R به یک فاصله باشد صفحه ای است موازی آن دو و به فاصله‌ی یکسان از آن دو. مکان هندسی دیگر نقاطی که از نقطه ثابت P، به فاصله ۱۰ باشد سطح کره ای به مرکز P و به شعاع ۱۰ است. این دو مکان را رسم می کنیم. نقطه‌ی تلاقی این دو مکان جواب مسئله است. لازم به ذکر است که کره و این صفحه متقاطع اند.پس فصل مشترک آنها یک دایره است. با توجه به شکل دایره ای به شعاع ۶ مکان هندسی مورد نظر است.

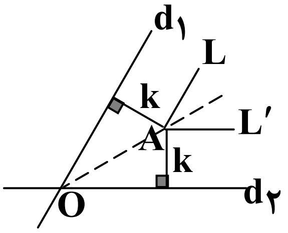
$$r^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \Rightarrow r = 6$$

@jozveh_nub

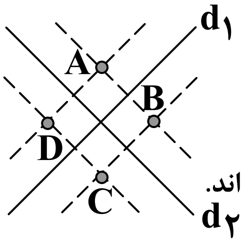
@jozveh_nub

۲) چند نقطه در صفحه وجود دارد که فاصله‌ی آن ها از هر کدام از دو خط متقاطع d_1 و d_2، برابر ۲ سانتی متر باشد؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۴



جواب : گزینه ۴ صحیح است. درون هر یک از زاویه های بوجود آمده از برخورد دو خط متقاطع d_1 و d_2، دو خط L و L' را به ترتیب موازی d_1 و d_2 و به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از آنها رسم می کنیم نقطه تقاطع این دو خط را A می نامیم. فاصله‌ی این نقطه از هر کدام از دو خط متقاطع d_1 و d_2، برابر۲ سانتی متر است.



به بیان دیگر نقاطی از صفحه که از یک خط به فاصله‌ی معینی هستند، دو خط به موازات آن و در دو طرف خط مفروض می باشند، دو خط متقاطع d_1 و d_2 را در نظر می گیریم و دو خط به موازات هر یک و به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از آن ها را رسم می کنیم. نقاط برخورد آن ها (نقاط A، B، C و D) جواب های مسأله اند.

قضیه وجودی مثلث : سه عدد حقیقی مثبت a، b و c داده شده اند، اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلع های آن a، b و c هستند.

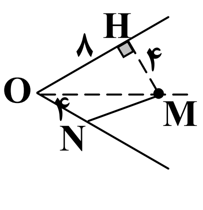
مثال) پاره خط AB به طول ۲۰ سانتی متر مفروض است، چند نقطه در فضا می توان یافت کرد که از A به فاصله‌ی ۱۲ و از B به فاصله‌ی ۱۱ باشند؟

۱) هیچ   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) بیشمار

جواب : گزینه ۴ صحیح است. یک مکان هندسی نقاط در فضا که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱۲ باشند کره ای به مرکز A و شعاع ۱۲ است و مکان هندسی دیگر نقاط در فضا که از نقطه‌ی B به فاصله‌ی ۱۱ باشند کره ای به مرکز B و شعاع ۱۱ است. چون $۱۱ + ۱۲ > ۲۰$ می باشد پس این دو کره متقاطع خواهند بود.

قضیه : درصفحه، هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. و هر نفطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

مثال) در شکل مقابل هرگاه M نقطه ای روی نیمساز زاویه‌ی O باشد، مساحت مثلث OMN کدام است؟



۱) ۶   ۲) ۸   ۳) ۹   ۴) ۱۰

جواب : گزینه ۲ صحیح است. در صفحه، هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. درنتیجه ارتفاع مثلث OMN برابر خواهد بود لذا می توان نوشت :

$$S_{\Delta OMN} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۴ = ۸$$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

۳) دو خط d و d' بر هم عمودند. اگر خط L، این دو خط را در نقاط متمایز A و B قطع کند، آن گاه حداکثر چند نقطه روی خط L می توان یافت که از d و d' به یک فاصله باشند؟

۱) هیچ   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) بیشمار

جواب : گزینه ۳ صحیح است. می دانیم در صفحه، هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. درنتیجه محل برخورد نیمساز های زاویه های داخلی و خارجی تشکیل شده بین دو خط متقاطع d و d' و خط L جواب مسأله اند. مسأله حداکثر دو جواب دارد. (واضح است که اگر خط L موازی یکی از دو خط d و d' باشد مسآله تنها یک جواب دارد.

قضیه : در صفحه، اگر نفطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن به یک فاصله است. و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

مثال) اگر O نقطه‌ی همرسی عمودمنصف های اضلاع مثلث ABC باشد و داشته باشیم $OA = x + ۲$، $OB = ۳x - ۴$ و $OC = y + ۲$، حاصل $x + y$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۷

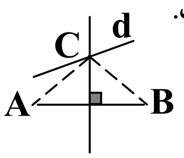
جواب : گزینه ۳ صحیح است. می دانیم در صفحه، اگر نفطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن به یک فاصله است.

$$\begin{cases} OA = OB \Rightarrow x + ۲ = ۳x - ۴ \\ OA = OC \Rightarrow x + ۲ = y + ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۳ \end{cases} \Rightarrow x + y = ۶$$

مثال) دو نقطه‌ی A و B و خط d داده شده اند. می خواهیم مثلث متساوی الساقینی رسم کنیم که رأسش روی d و قاعده‌ی آن پاره خط AB باشد، با توجه به اوضاع A، B و d، تعداد جواب های ممکن برای رسم مثلث کدام <u>نمی تواند</u> باشد؟

۱) یک جواب   ۲) دو جواب   ۳) هیچ جواب   ۴) بیشمار

جواب : گزینه ۲ صحیح است. می دانیم در صفحه، هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد. درنتیجه محل برخورد عمودمنصف پاره خط AB با خط d جواب مسأله است.



در صورتی که عمودمنصف AB خط d را در یک نقطه قطع کند مسأله یک جواب دارد.

در صورتی که عمودمنصف AB و خط d نقطه‌ی مشترک نداشته باشند مسأله جواب ندارد.

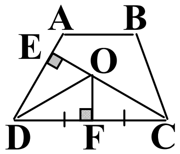
در صورتی که عمودمنصف AB و خط d بر هم منطبق باشند مسأله بیشمار جواب دارد.

۴) در ذوزنقه $ABCD$، نقطه ای از دو سر قاعده‌ی CD به یک فاصله و همچنین از قاعده‌ی CD و ساق AD به یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام است؟

۱) نیمسازهای زاویه های C و D ۲) عمودمنصف های دو ساق

۳) عمودمنصف CD و نیمساز زاویه‌ی D ۴) دو دایره با شعاع یکسان و به مرکز اوساط قاعده ها

جواب : گزینه ۳ صحیح است. می دانیم در صفحه، هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد. و همچنین در صفحه، هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. و در نتیجه محل برخورد عمودمنصف CD و نیمساز زاویه‌ی D جواب مسأله است.

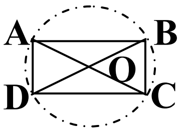


@jozveh_nub

@jozveh_nub

۵) چند مستطیل به قطر ۶ می توان رسم کرد؟

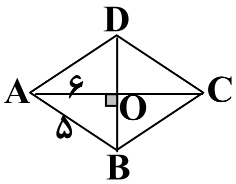
۱) هیچ   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) بیشمار



جواب : گزینه ۴ صحیح است. نقطه دلخواه O را در صفحه در نظر می گیریم سپس دایره ای به مرکز O و شعاع ۳ رسم می کنیم. هر دو قطر دلخواه و متقاطع AC و BD را رسم کنیم چهارضلعی $ABCD$ مستطیل به طول قطر ۶ و جواب مسأله است.

مثال) چه تعداد لوزی می توان رسم کرد که در آن طول یک قطر ۱۲ واحد و طول ضلع آن ۵ واحد باشد؟

۱) صفر   ۲) یک   ۳) دو   ۴) بیشمار



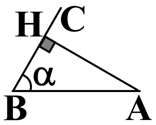
جواب : گزینه ۱ صحیح است. در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند

پس در مثلث قائم الزاویه OAB داریم : $OA = ۶$ و $AB = ۵$ که این غیر ممکن است.

نکته : برای رسم یک n ضلعی محدب و غیر مشخص حداقل $۲n - ۳$ جزء معلوم و مستقل از هم لازم است (البته همگی نباید زاویه باشند.) لازم به ذکر است که اگر n ضلعی ویژگی خاصی داشته باشد، به تعداد این موردها از تعداد معلومات کم می شود.

نکته : ترسیم مثلث با داشتن اندازه‌ی دو ضلع و زاویه‌ی رو به روی یکی از آن ها به صورت $AB = c$ و $\hat{B} = \alpha$ و $AC = c$:

با استفاده از قضیه‌ی سینوس ها داریم :
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \sin B}{b}$$



الف : اگر $\sin C > ۱$ باشد مسأله جواب ندارد.

ب : اگر $\sin C = ۱$ باشد مسأله حداکثر یک جواب دارد.

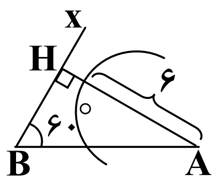
ج : اگر $\sin C < ۱$ باشد در این حالت اگر $b < c$ آنگاه مسأله دو جواب دارد و اگر $b > c$ آنگاه مسأله یک جواب دارد.

مثال) با معلومات $AB = ۸cm$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $AC = ۶cm$ چند مثلث متمایز مشخص می شود؟

۱) هیچ   ۲) یک   ۳) دو   ۴) سه

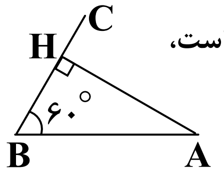
جواب:گزینه ۱ درست است.روش اوّل : با توجه به شکل اگر ارتفاع AH را رسم کنیم با توجه به اینکه در مثلث قائم الزاویه ABH ضلع روبرو به زاویه ۶۰ درجه برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است داریم : $AH = ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳} \simeq ۶/۸$ یعنی در مثلث AHC ارتفاع AH از وتر AC بزرگتر است که این غیر ممکن است لذا مثلث تشکیل نمی شود.

(به بیان بهتر ابتدا پاره خط $AB = ۸cm$ را رسم می کنیم.



زاویه، $\hat{B} = ۶۰^\circ$ را رسم می کنیم (نیم خط Bx به وجود می آید.)

دایره ای به مرکز A و به شعاع ۶ سانتیمتر رسم می کنیم، تا نیم خط Bx را در نقطه، C قطع کند.



فاصله‌ی نقطه‌ی A از نیم خط Bx برابر $AH = ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳} \simeq ۶/۸$ می باشد، و چون $AH > AC$ است، دایره، نیم خط Bx را قطع نمی کند. پس برای C یک نقطه به دست نمی آید و مسأله جواب ندارد.)

روش دوم :
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{۶}{\sin ۶۰} = \frac{۸}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{۴\sqrt{۳}}{۶} \simeq ۱/۱۵ > ۱ \Rightarrow$$
معادله‌ی مثلثاتی جواب ندارد.

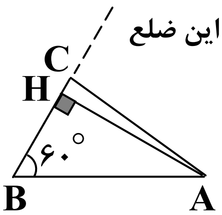
@jozveh_nub

@jozveh_nub

مثال) با معلومات $AC = ۳cm$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۵cm$ چند مثلث متمایز مشخص می شود؟

۱) هیچ   ۲) یک   ۳) دو   ۴) بیشمار

جواب : گزینه ۱ درست است.روش اوّل : ابتدا زاویه‌ی B را برابر ۶۰ درجه رسم می کنیم. و بر روی یک ضلع آن پاره خطی به اندازه‌ی AC جدا می کنیم. از نقطه‌ی A عمود AH را بر ضلع دیگر زاویه‌ی B رسم می کنیم. مکان راس C بر روی این ضلع واقع است. از آنجایی که در مثلث قائم الزاویه ضلع روبروی زاویه‌ی ۶۰ درجه برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.



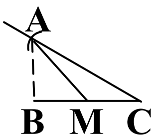
نتیجه می گیریم : $AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AB = \frac{\sqrt{۳}\times ۵}{۲} \simeq ۴/۳ > ۳$ در این صورت اندازه‌ی وتر از اندازه‌ی ضلع زاویه‌ی قائمه کوچکتر است که این غیر ممکن است.

روش دوم : معادله‌ی مثلثاتی جواب جواب ندارد. $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{۳}{\sin ۶۰} = \frac{۵}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{۵\sqrt{۳}}{۶} > ۱$

مثال) چند مثلث متمایز با معلومات $a = ۴$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ و $m_a = ۳$ می توان رسم کرد؟

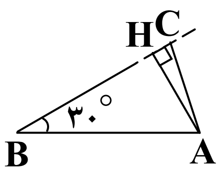
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) بیش از دو مثلث   ۴) نمی توان رسم کرد.   (کنکور آزاد ریاضی ۷۸)

جواب : گزینه ۱ درست است. برای رسم این مثلث ابتدا زاویه‌ی ۳۰ درجه به راس C را رسم می کنیم. روی یکی از اضلاع پاره خط BC را به طول ۴ جدا کرده، به مرکز M (وسط BC) و به شعاع ۳ کمانی می زنیم مثلث ABC جواب مسأله است.



مثال) با معلومات $AB = ۶cm$ و $\hat{B} = ۳۰^\circ$ و $AC = ۸cm$ چند مثلث متمایز مشخص می شود؟

۱) هیچ   ۲) یک   ۳) دو   ۴) سه



جواب : گزینه ۲ درست است. روش اوّل : با توجه به شکل اگر ارتفاع AH را رسم کنیم

با توجه به اینکه در مثلث قائم الزاویه ABH ضلع روبرو به زاویه ۳۰ درجه برابر نصف وتر است داریم :

$AH = ۶\times\frac{۱}{۲} = ۳$ چون $AH < AB < AC \Leftarrow ۸ > ۶ > ۳$ می باشد پس دایره مرکز A و به شعاع ۸ سانتی متر امتداد ضلع دیگر زاویه را در دو نقطه قطع می کند که یکی از آن ها غیر قابل قبول است. در نتیجه مسأله یک جواب دارد.

(به بیان بهتر ابتدا پاره خط $AB = ۶cm$ را رسم می کنیم.

زاویه، $\hat{B} = ۳۰^\circ$ را رسم می کنیم (نیم خط Bx به وجود می آید.)

دایره ای به مرکز A و به شعاع ۸ سانتیمتر رسم می کنیم، تا نیم خط Bx را در نقطه، C قطع کند.

فاصله‌ی نقطه‌ی A از نیم خط Bx برابر $AH = ۶\times\frac{۱}{۲} = ۳$ می باشد، و چون $AC > AB$ و $AH < AC$ است، دایره، نیم خط Bx را فقط در یک نقطه قطع می کند. پس برای C یک نقطه به دست می آید و مسأله یک جواب دارد.)

روش دوم : $\frac{a}{\sin A} = \frac{۸}{\sin ۳۰} = \frac{۶}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{۳}{۸} < \frac{۱}{۲} < ۱$

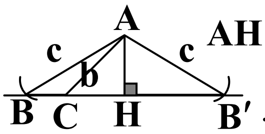
معادله دو جواب دارد یکی حاده و دیگری منفرجه بیشتر از ۱۵۰ درجه که این مورد غیر قابل قبول است زیرا مجموع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

@jozveh_nub

@jozveh_nub

مثال) چند مثلث با اطلاعات $h_a = ۲$ و $b = ۳$ و $c = ۱$ می توان رسم کرد؟

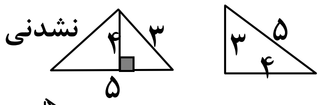
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار (کنکور آزاد ریاضی۸۶خارج از کشور)



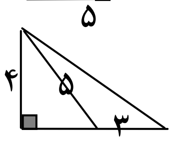
جواب : گزینه ۱ صحیح است. با توجه به شکل، مثلث ACH را با داشتن وتر $c = ۱$ و یک ضلع $AH = h_a = ۲$ نمی توان رسم کرد (ارتفاع وارد بر یک ضلع لزوماً کوچکتر از دو ضلع دیگر است.) در نتیجه مسأله جواب ندارد.

۶) چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن ۳ و ۵ باشد و یکی از ارتفاع ها برابر ۴ باشد؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۶ (کنکور آزاد ریاضی۸۷خارج از کشور)



جواب : گزینه ۱ درست است. ارتفاع به طول ۴ الزاماً به ضلع ۳ وارد می شود زیرا اگر ضلع به طول ۳ و ارتفاع به طول ۴ هم راس باشند آن وقت طول خط قائم بیشتر از خط مایل است که این امر نشدنی است.

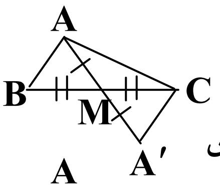


درنتیجه ارتفاع به طول ۴ باید به ضلع به طول ۳ وارد شود که در این حالت نیز ارتفاع در واقع همان ضلع سوم است و یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ داریم.

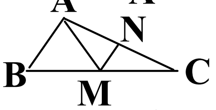
۷) در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $AC = ۷$ و $AB = ۵$ و میانه‌ی $AM = ۴$ با خط کش و پرگار کدام نتیجه حاصل می شود؟

۱) غیر قابل رسم ۲) جواب منحصر به فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) فاقد جواب

جواب : گزینه ۲ صحیح است. برای رسم این مثلث با معلومات دو ضلع $AC = ۷$، $AB = ۵$ و میانه‌ی $AM = ۴$ دو شیوه می توان داشت :

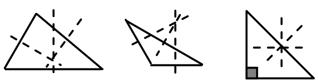


۱) میانه AM را از طرف M به اندازه‌ی خودش ادامه می دهیم تا نقطه‌ی A' حاصل شود. مثلث $AA'C$ را با داشتن طول های $AC = ۷$، $AB = ۵$ و $۲AM = ۸$ رسم می کنیم. سپس میانه‌ی CM را به اندازه‌ی خودش از طرف M ادامه می دهیم تا نقطه‌ی B حاصل شود. مثلث ABC جواب مسأله است.



۲) از نقطه‌ی M به نقطه‌ی N وسط AC وصل می کنیم. با توجه به عکس تالس، اضلاع مثلث AMN مشخص و برابر $\frac{AC}{۲} = ۳/۵$، $\frac{AB}{۲} = ۲/۵$ و $AM = ۴$ است. لذا این مثلث قابل رسم است. AN را از طرف N به اندازه‌ی خودش امتداد می دهیم تا به نقطه‌ی C برسیم، پاره خط CM را از طرف M به اندازه‌ی خودش امتداد می دهیم تا نقطه‌ی B حاصل شود. مثلث ABC جواب مسأله است.

نکته : محل برخورد عمودمنصف های اضلاع در مثلث حاده الزاویه داخل مثلث و مثلث قائم الزاویه وسط وتر و در مثلث منفرجه الزاویه خارج آن مثلث قرار دارد.

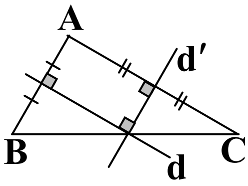


@jozveh_nub

@jozveh_nub

مثال) در مثلث ABC ، $AC = ۷/۵$ و $AB = ۳$ و عمودمنصف های این دو ضلع بر هم عمود می باشند. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف ها از وسط بزرگ ترین ضلع مثلث چه قدر است؟

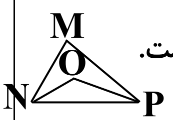
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) صفر



جواب : گزینه ۴ صحیح است. اگر عمودمنصف دو ضلع AB و AC بر هم عمود باشند پس خود آن اضلاع نیز بر هم عمود هستند، یعنی $\hat{A} = ۹۰^\circ$ از طرفی عمودمنصف های اضلاع مثلث قائم الزاویه در وسط وتر آن همرسند. پس فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف ها از وسط وتر صفر است.

نکته : در هر مثلث، ضلع روبه رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگتر است از ضلع روبه رو به زاویه‌ی کوچکتر و برعکس.

قضیه : در هر مثلث مجموع زاویه های داخلی، ۱۸۰ درجه است. یعنی $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$

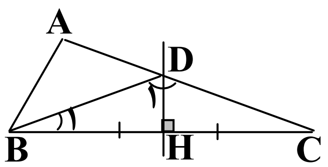


نکته : اگر نقطه O را به دلخواه در درون مثلث MNP انتخاب کنیم آنگاه زاویه NOP از زاویه NMP بزرگتر است.

۸) در مثلث $ABC(\hat{C} = ۲۰^\circ)$، عمودمنصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطه‌ی D قطع می کند. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{D}B$ کدام است؟ ($\hat{B} > \hat{C}$)

۱) ۱۰ درجه ۲) ۲۰ درجه ۳) ۳۰ درجه ۴) ۴۰ درجه

جواب : گزینه ۴ صحیح است. نقطه‌ی D روی عمودمنصف ضلع BC واقع است، پس از دو سر آن به یک فاصله است، یعنی



$DB = DC$، بنابراین مثلث BDC متساوی الساقین است و نتیجه می گیریم که $\hat{B}_۱ = \hat{C} = ۲۰^\circ$

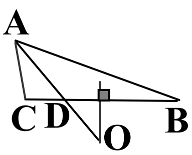
$$\Delta BDC : \hat{D}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۱ + ۲۰^\circ + ۲۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۱ = ۱۴۰^\circ$$

$$\hat{D}_۱ + A\hat{D}B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۴۰^\circ + A\hat{D}B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{D}B = ۴۰^\circ$$

مثال) در مثلثی $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و $\hat{B} = ۲۰^\circ$ است. زاویه‌ی بین نیمساز A و عمودمنصف BC چند درجه است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۰

جواب : گزینه ۳ صحیح است.



$$\hat{C} = ۱۸۰ - (\hat{A} + \hat{B}) = ۱۸۰ - (۶۰ + ۲۰) = ۱۰۰^\circ$$

$$O\hat{D}B = A\hat{D}C = ۱۸۰ - (۱۰۰ + ۳۰) = ۵۰^\circ$$

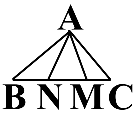
$$\hat{O} = ۱۸۰ - (۹۰ + ۵۰) = ۴۰^\circ$$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

مثال) در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره خط های $BM = BA$ و $CN = CA$ را جدا می کنیم. اگر زاویه‌ی $\hat{A} = ۷۲^\circ$ باشد، زاویه‌ی $M\hat{A}N$ چند درجه است؟

۱) ۵۴   ۲) ۵۲   ۳) ۴۸   ۴) ۴۲   (کنکور سراسری تجربی ۸۶)



جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$BM = BA \Rightarrow B\hat{M}A = B\hat{A}N + M\hat{A}N$$

و

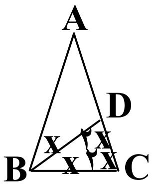
$$CN = CA \Rightarrow C\hat{N}A = C\hat{A}M + M\hat{A}N$$

$$B\hat{M}A + C\hat{N}A + M\hat{A}N = ۱۸۰ \Rightarrow B\hat{A}N + M\hat{A}N + C\hat{A}M + M\hat{A}N + M\hat{A}N = ۱۸۰$$

$$\Rightarrow \hat{A} + ۲M\hat{A}N = ۱۸۰ \Rightarrow ۷۲ + ۲M\hat{A}N = ۱۸۰ \Rightarrow ۲M\hat{A}N = ۱۰۸ \Rightarrow M\hat{A}N = ۵۴^\circ$$

۹)درمثلث متساوی الساقین ABC،طول BD نیمسازداخلی زاویه‌ی B باطول قاعده‌ی BC برابر است، زاویه‌ی $A\hat{D}B$ کدام است؟

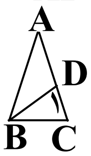
۱) ۳۶ درجه   ۲) ۷۲ درجه   ۳) ۱۰۸ درجه   ۴) ۱۴۴ درجه



جواب : گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : $AB = AC \Rightarrow B = C = ۲x, BD = BC \Rightarrow D = C = ۲x$

$$\Rightarrow x + ۲x + ۲x = ۱۸۰ \Rightarrow ۵x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۳۶ \Rightarrow ۲x = ۷۲ \Rightarrow A\hat{D}B = ۱۸۰ - ۷۲ = ۱۰۸$$

روش دوم : $AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}, BD = BC \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{C}$ و $\triangle BDC : ۲\hat{C} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۱۸۰ \Rightarrow ۵\hat{C} = ۳۶۰ \Rightarrow \hat{C} = ۷۲$



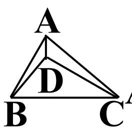
$$A\hat{D}B = ۱۸۰ - \hat{D}_۱ = ۱۸۰ - ۷۲ = ۱۰۸$$

نکته : در مثلث متساوی الاضلاع میانه، عمودمنصف، ارتفاع و نیمساز نظیر اضلاع آن بر هم منطبق اند.

نکته : در بررسی تست های کنکور به سؤال هایی برمی خوریم که مجموع و یا تفاضل دو زاویه مثلث معلوم باشند و شرط دیگری که روی زاویه ها تأثیر بگذارد وجود نداشته باشد. هر چند راه حل های ساده و یا گاهاً مشکل و یا فرمولی برای اینگونه سؤال ها وجود دارد ولی شاید در اینگونه سؤال ها به توان با آزمون عدد جواب سؤال را تشخیص داد.

نکته : زاویه‌ی بین دو نیمساز زاویه های درونی مثلث : در هر مثلث اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمسازهای داخلی دو زاویه، برابر است با نصف اندازه‌ی زاویه‌ی سوم بعلاوه‌ی ۹۰ درجه بنابراین اگر نقطه‌ی D محل برخورد نیمساز های زاویه های درونی مثلث ABC باشد داریم :

$$B\hat{D}C = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} \text{ و } A\hat{D}B = ۹۰^\circ + \frac{\hat{C}}{۲} \text{ و } A\hat{D}C = ۹۰^\circ + \frac{\hat{B}}{۲}$$

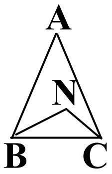


@jozveh_nub

@jozveh_nub

مثال) در مثلث متساوی الساقین ABC به رأس $\hat{A} = ۴۶^\circ$ نقطه‌ی N درون آن طوری قرار گرفته که اگر از N به B و C وصل کنیم $N\hat{C}A$ و $N\hat{B}C$ با هم برابرند آنگاه اندازه‌ی $B\hat{N}C$ برابر است با :

۱) ۶۷ درجه ۲) ۱۱۳ درجه ۳) ۲۳ درجه ۴) ۱۵۷ درجه



جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : $\hat{A} = ۴۶ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۶۷^\circ$

$$B\hat{N}C = ۱۸۰ - (N\hat{B}C + N\hat{C}B) = ۱۸۰ - (N\hat{C}A + N\hat{C}B) = ۱۸۰ - ۶۷ = ۱۱۳^\circ$$

روش دوم : $\hat{A} = ۴۶ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۶۷^\circ$ حال با عدد گذاری جواب تست را مشخص می نماییم مثلاً

$$N\hat{C}A = N\hat{B}C = ۱۷ \Rightarrow N\hat{C}B = N\hat{B}A = ۵۰ \Rightarrow B\hat{N}C = ۱۸۰ - (۱۷ + ۵۰) = ۱۱۳^\circ$$

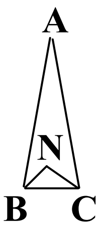
روش سوم : فرض کنیم NB و NC نیمسازهای درونی دو زاویه‌ی B و C باشد پس :

$$B\hat{N}C = ۱۸۰ - \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۱۸۰ - B = ۱۸۰ - ۶۷ = ۱۱۳^\circ$$

روش چهارم : فرض کنیم NB و NC نیمسازهای درونی دو زاویه‌ی B و C باشد پس : $۹۰ + \frac{A}{۲} = ۹۰ + ۲۳ = ۱۱۳^\circ$

مثال) در مثلث متساوی الساقین ABC به رأس $\hat{A} = ۲۰^\circ$ نقطه‌ی N درون آن طوری قرار گرفته که اگر از N به B و C وصل کنیم $N\hat{C}A$ و $N\hat{B}C$ با هم برابرند آنگاه اندازه‌ی $B\hat{N}C$ برابر است با :

۱) ۱۰۰ درجه ۲) ۸۰ درجه ۳) ۱۲۰ درجه ۴) ۱۴۰ درجه



جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : $\hat{A} = ۲۰ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۸۰$

$$B\hat{N}C = ۱۸۰ - (N\hat{B}C + N\hat{C}B) = ۱۸۰ - (N\hat{C}A + N\hat{C}B) = ۱۸۰ - ۸۰ = ۱۰۰^\circ$$

روش دوم : $\hat{A} = ۲۰ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۸۰$ حال با عدد گذاری جواب تست را مشخص می نماییم مثلاً

$$N\hat{C}A = N\hat{B}C = ۷۰ \Rightarrow N\hat{C}B = N\hat{B}A = ۱۰ \Rightarrow B\hat{N}C = ۱۸۰ - (۱۰ + ۷۰) = ۱۰۰^\circ$$

روش سوم : فرض کنیم NB و NC نیمسازهای درونی دو زاویه‌ی B و C باشد پس :

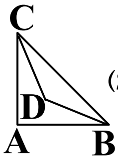
$$B\hat{N}C = ۱۸۰ - \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۱۸۰ - B = ۱۸۰ - ۸۰ = ۱۰۰^\circ$$

روش چهارم : فرض کنیم NB و NC نیمسازهای درونی دو زاویه‌ی B و C باشد پس : $۹۰ + \frac{A}{۲} = ۹۰ + ۱۰ = ۱۰۰^\circ$

@jozveh_nub

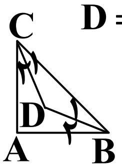
@jozveh_nub

مثال) در مثلث ABC نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی B و C با یکدیگر چه زاویه ای می سازند؟



۱) $B+C$ ۲) $\frac{A}{۲}$ ۳) $۲A$ ۴) $۹۰+\frac{A}{۲}$ (کنکور آزاد ریاضی ۶۷)

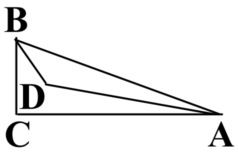
جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل : $D=۱۸۰-\frac{B}{۲}+\frac{C}{۲}=۱۸۰-\frac{B+C}{۲}=۹۰+\frac{۱۸۰-(B+C)}{۲}=۹۰+\frac{A}{۲}$



روش دوم : آزمون عدد : $\hat{B}=\hat{C}=\hat{A}\Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{C}_۱=۳۰^\circ \Rightarrow \hat{D}=۱۸۰-(۳۰+۳۰)=۱۲۰^\circ=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$

مثال) در مثلث قائم الزاویه با زوایای $\hat{A}=۲۰^\circ$ و $\hat{C}=۹۰^\circ$ زاویه‌ی بین نیمساز زاویه A و B کدام است؟

۱) ۱۰° ۲) ۳۵° ۳) ۱۱۰° ۴) ۱۳۵° (کنکور آزاد تجربی ۸۶)



جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل : $\hat{B}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{C})=۱۸۰-(۲۰+۹۰)=۷۰$

$$\Rightarrow A\hat{D}B=۱۸۰-(\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲})=۱۸۰-(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲})=۱۸۰-\frac{۲۰+۷۰}{۲}=۱۳۵^\circ$$

روش دوم : $A\hat{D}B=۹۰+\frac{\hat{C}}{۲}=۹۰+۴۵=۱۳۵^\circ$

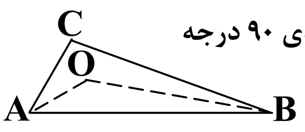
۱۰) در مثلث ABC نیمسازهای زاویه داخلی، در نقطه O، متقاطع اند. اگر زاویه های AOB و BOC و COA متناسب با اعداد ۷ و ۶ و ۵ باشند، بزرگترین زاویه‌ی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۸۰   ۲) ۹۰   ۳) ۱۰۰   ۴) ۱۱۰   (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۷)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $A\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}A=۷x+۶x+۵x=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۸x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۲۰^\circ$

$$\Rightarrow A\hat{O}B=۱۴۰^\circ \text{ و } B\hat{O}C=۱۲۰^\circ \text{ و } C\hat{O}A=۱۰۰^\circ$$

در هر مثلث اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمسازهای داخلی دو زاویه، برابر است با نصف اندازه‌ی زاویه‌ی سوم بعلاوه‌ی ۹۰ درجه



$$A\hat{O}B=۹۰+\frac{\hat{C}}{۲}\Rightarrow ۱۴۰^\circ=۹۰^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}\Rightarrow \hat{C}=۱۰۰^\circ$$

@jozveh_nub

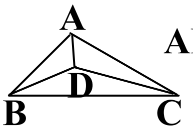
@jozveh_nub

مثال) درمثلثی که زاویه هابه نسبت۲و۳و۷(زاویه بزرگتر A)اگر D محل تلاقی سه نیمساز باشد حاصل $A\hat{D}B + A\hat{D}C - B\hat{D}C$ کدام است؟

۱) ۱۰۵° ۲) ۷۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰° (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۷)

جواب:گزینه ۲ صحیح است. $۲x + ۳x + ۷x = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۲x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۱۵ \Rightarrow \hat{A} = ۱۰۵$ و $\hat{B} = ۴۵$ و $\hat{C} = ۳۰$

روش اوّل : $B\hat{D}C = ۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰ + \frac{۱۰۵}{۲} = ۱۴۲/۵ \Rightarrow A\hat{D}B + A\hat{D}C - B\hat{D}C = ۳۶۰ - ۲(۱۴۲/۵) = ۷۵$



روش دوم : $A\hat{D}B + A\hat{D}C - B\hat{D}C = (۱۸۰ - \frac{۱۰۵ + ۴۵}{۲}) + (۱۸۰ - \frac{۱۰۵ + ۳۰}{۲}) - (۱۸۰ - \frac{۴۵ + ۳۰}{۲}) =$

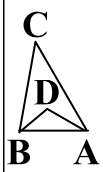
$$(۱۸۰ - ۷۵) + (۱۸۰ - ۶۷/۵) - (۱۸۰ - ۳۷/۵) = ۱۰۵ + ۱۱۲/۵ - ۱۴۲/۵ = ۷۵$$

روش سوم : $A\hat{D}B + A\hat{D}C - B\hat{D}C = ۹۰ + \frac{C}{۲} + ۹۰ + \frac{B}{۲} - ۹۰ - \frac{A}{۲} = ۹۰ + (\frac{C + B - A}{۲})$

$$= ۹۰ + \frac{۳۰ + ۴۵ - ۱۰۵}{۲} = ۹۰ - ۱۵ = ۷۵$$

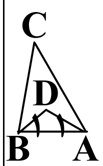
مثال) در مثلث ABC زاویه‌ی بین نیمساز داخلی زاویه A و نیمساز داخلی زاویه B برابر ۱۱۰ درجه است. زاویه C کدام است؟

۱) ۷۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۵ (کنکور آزاد ریاضی ۷۹)



جواب : گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : $\hat{C} = ۱۸۰ - (\hat{A} + \hat{B}) = ۱۸۰ - ۲(\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲}) = ۱۸۰ - ۲(۱۸۰ - A\hat{D}B)$

$$= ۱۸۰ - ۲(۱۸۰ - ۱۱۰) = ۱۸۰ - ۱۴۰ = ۴۰^\circ$$



روش دوم : $A\hat{D}B = ۹۰ + \frac{\hat{C}}{۲} \Rightarrow ۱۱۰ = ۹۰ + \frac{\hat{C}}{۲} \Rightarrow \hat{C} = ۴۰^\circ$

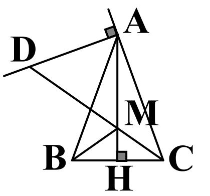
روش سوم : آزمون عدد : $\hat{D} = ۱۱۰$ و $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = ۳۵$ (مثلاً) و $\hat{D} = ۱۱۰ \Rightarrow \hat{C} = ۱۸۰ - (۷۰ + ۷۰) = ۴۰^\circ$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

مثال) در مثلث متساوی الساقین $ABC(AB = AC)$ در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویه‌ی داخلی C را در D قطع می کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد، AD برابر کدام است؟

۱) AM ۲) MD ۳) MC ۴) $\frac{۱}{۲}AC$ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۴)



جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : $\frac{\hat{C}}{۲} = \alpha = A\hat{C}M \Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰۰ - ۴\alpha \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰ - ۲\alpha$

$$A\hat{M}D = C\hat{A}M + A\hat{C}M = ۹۰ - ۲\alpha + \alpha = ۹۰ - \alpha$$

$$A\hat{D}C = ۹۰ - \alpha \Rightarrow A\hat{D}C = A\hat{M}D \Rightarrow AD = AM$$

روش دوم : در مثلث های قائم الزاویه‌ی CHM و ADM داریم : $A\hat{M}D = M\hat{H}C = ۹۰ - \frac{\hat{C}}{۲}$ و $A\hat{D}M = ۹۰ - \frac{\hat{C}}{۲}$

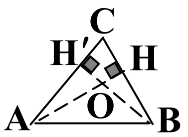
و درنتیجه : $A\hat{M}D = \hat{D}$ بنابراین : $AD = AM$

روش سوم : زاویه‌ی منفرجه بین دو نیمساز داخلی B و C برابر $۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲}$ است پس : $A\hat{M}D = \frac{۹۰ + \frac{\hat{A}}{۲}}{۲} = ۴۵ + \frac{\hat{A}}{۴}$

و در مثلث ADM داریم : $D\hat{A}M = ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{D} = ۱۸۰ - ((۴۵ + \frac{\hat{A}}{۴}) + (۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲})) = ۴۵ + \frac{A}{۴}$

و درنتیجه : $A\hat{M}D = \hat{D}$ بنابراین : $AD = AM$

روش چهارم آزمون عدد : $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{D} = A\hat{M}D = ۶۰^\circ \Rightarrow AD = AM$

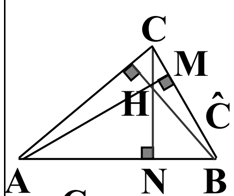


نکته : در مثلث ΔABC زاویه‌ی بین دو ارتفاع AH و BH' برابر $\hat{C}$ و $۱۸۰ - \hat{C}$

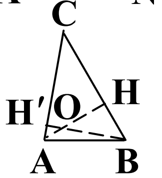
مثال) در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = ۴۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ اگر نقطه تلاقی سه ارتفاع H باشد زاویه $C\hat{H}A$ چند درجه است؟

۱) ۱۰۰ درجه   ۲) ۱۲۰ درجه   ۳) ۱۴۰ درجه   ۴) ۸۰ درجه   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۰)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : در هر مثلث مجموع زاویه های داخلی ۱۸۰ درجه است.



$\hat{C} = ۱۸۰ - (۶۰ + ۴۰) = ۸۰^\circ$ و $A\hat{C}H = ۵۰^\circ$ و $C\hat{A}H = ۱۰^\circ \Rightarrow C\hat{H}A = ۱۸۰ - (۵۰ + ۱۰) = ۱۲۰^\circ$



روش دوم : در مثلث ΔABC زاویه‌ی بین دو ارتفاع AH و CH برابر $\hat{B}$ و $۱۸۰ - \hat{B}$

درنتیجه : $C\hat{H}A = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰^\circ$

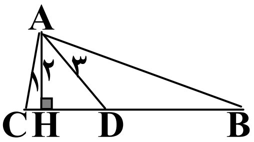
روش سوم : مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی ۳۶۰ درجه است. در نتیجه $\hat{B} + M\hat{H}N = ۱۸۰^\circ$

پس : $C\hat{H}A = M\hat{H}N = ۱۸۰ - \hat{B} = ۱۸۰ - ۶۰ = ۱۲۰^\circ$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

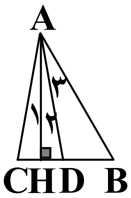
نکته : زاویه‌ی بین نیمساز و ارتفاع نظیر یک رأس در مثلث : در مثلث ABC، زاویه‌ی بین ارتفاع AH و



نیمساز داخلی AD برابر است با : $\dfrac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$

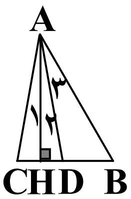
مثال) در مثلث ABC زاویه ای که نیمساز و ارتفاع نظیر رأس A با هم پدید می آورند برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$ ۲) $|\hat{B}-\hat{C}|$ ۳) $\dfrac{|\hat{B}+\hat{C}|}{۲}$ ۴) $|\hat{B}+\hat{C}|$



جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : آزمون عدد مثلاً : فرض کنیم $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۳۰^\circ$

پس : $\hat{A}_۱=۳۰^\circ$ و $\hat{A}_۳=۴۵^\circ$ ودرنتیجه : $\hat{A}_۲=۱۵^\circ=\dfrac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$



روش دوم : در مثلث ABC، زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز AD برابر است با : $\dfrac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$

زیرا : نیمساز $AD \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\hat{A}_۳=\dfrac{\hat{A}}{۲}$

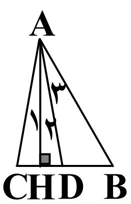
ارتفاع $AH \Rightarrow \hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{A}_۳+\hat{B}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{B}=۹۰^\circ$ و $\hat{A}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ$

$$\hat{A}_۱+۲\hat{A}_۲+\hat{B}=\hat{A}_۱+\hat{C} \Rightarrow ۲\hat{A}_۲+\hat{B}=\hat{C} \Rightarrow \hat{A}_۲=\dfrac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$$

۱۱) در مثلث ABC، $\hat{A}=۴۰^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ است. زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز AD چقدر است؟

۱) ۱۰° ۲) ۲۰° ۳) ۳۰° ۴) ۵۰° (کنکور آزاد تجربی ۷۲)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : نیمساز $AD \Rightarrow \hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\hat{A}_۳=\dfrac{\hat{A}}{۲}=۲۰^\circ$



ارتفاع $AH \Rightarrow \hat{H}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{A}_۳+\hat{B}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{A}_۳=۳۰^\circ$

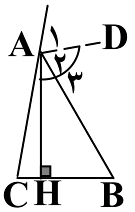
$$\Rightarrow \hat{A}_۲+\hat{A}_۳=\hat{A}_۲+\dfrac{\hat{A}}{۲}=\hat{A}_۲+۲۰^\circ=۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲=۱۰^\circ$$

روش دوم : زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز AD برابر است با : $\dfrac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$ بنابراین $۱۰^\circ=\dfrac{|۶۰-۸۰|}{۲}=\dfrac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$ و $\hat{C}=۸۰^\circ$

@jozveh_nub

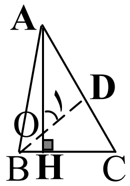
@jozveh_nub

نکته : در مثلث ABC، زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز خارجی AD برابر است با : $90^\circ + \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{2}$



نکته (زاویه‌ی بین ارتفاع نظیر یک رأس و نیمساز نظیر رأس دیگر) :

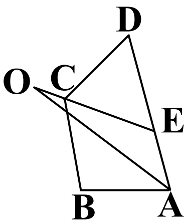
در مثلث ABC، زاویه‌ی بین ارتفاع AH و نیمساز داخلی رأس B برابر است با : $\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}$



مثال) در چهارضلعی محدّب $ABCD$، رابطه‌ی $\frac{\hat{A}}{3}=\frac{\hat{B}}{4}=\frac{\hat{C}}{5}=\frac{5\hat{D}}{12}$، بین زاویه ها برقرار است. زاویه‌ی حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل $\hat{A}$ و $\hat{C}$ چند درجه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۵ (کنکور سراسری تجربی۹۶)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $\frac{\hat{A}}{3}=\frac{\hat{B}}{4}=\frac{\hat{C}}{5}=\frac{5\hat{D}}{12}=x \Rightarrow \hat{A}=3x$ و $\hat{B}=4x$ و $\hat{C}=5x$ و $\hat{D}=\frac{12}{5}x$



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360 \Rightarrow 3x+4x+5x+\frac{12}{5}x=360 \Rightarrow 72x=5\times 360 \Rightarrow x=25$$

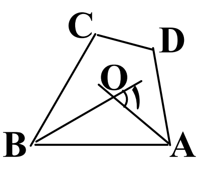
$\hat{A}=75$ و $\hat{B}=100$ و $\hat{C}=125$ و $\hat{D}=60$

$$O\hat{E}A=\frac{\hat{C}}{2}+\hat{D}=\frac{125}{2}+60=\frac{245}{2} \Rightarrow A\hat{O}C=180-(\frac{\hat{A}}{2}+O\hat{E}A)=180-(\frac{75}{2}+\frac{245}{2})=20$$

مثال) در چهارضلعی محدّب $ABCD$، رابطه‌ی $\frac{\hat{A}}{4}=\frac{\hat{B}}{3}=\frac{\hat{C}+\hat{D}}{11}$، بین زاویه ها برقرار است. زاویه‌ی حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی مجاور $\hat{A}$ و $\hat{B}$، چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵ (کنکور سراسری تجربی۹۶خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $\frac{\hat{A}}{4}=\frac{\hat{B}}{3}=\frac{\hat{C}+\hat{D}}{11}=x \Rightarrow \hat{A}=4x$ و $\hat{B}=3x$ و $\hat{C}+\hat{D}=11x$



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360 \Rightarrow 4x+3x+11x=360 \Rightarrow 18x=360 \Rightarrow x=20$$

$\hat{A}=80$ و $\hat{B}=60$ و $\hat{C}+\hat{D}=220$

$\hat{O}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}=\frac{80}{2}+\frac{60}{2}=70^\circ$ (زاویه‌ی خارجی مثلث AOB)

دو مثلث همنهشت : دو مثلث قابل انطباق برهم

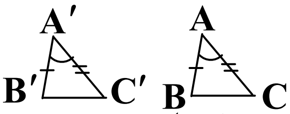
@jozveh_nub

@jozveh_nub

حالت های همنهشتی دو مثلث : دو مثلث به حالت های زیر با یکدیگر هم نهشت اند :

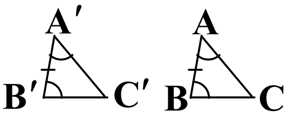
۱) (ض ز ض) هرگاه دو ضلع و زاویه‌ی بین از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین از مثلث دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند.

یعنی اگر $AB = A'B'$ و $\hat{A} = \hat{A}'$ و $AC = A'C'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$



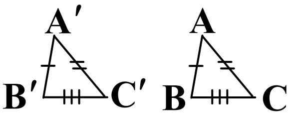
۲) (ز ض ز) هرگاه دو زاویه و ضلع بین از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین از مثلث دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند.

یعنی اگر $\hat{A} = \hat{A}'$ و $AB = A'B'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$



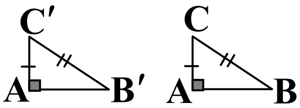
۳) (ض ض ض) هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند.

یعنی اگر $AB = A'B'$ و $BC = B'C'$ و $AC = A'C'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

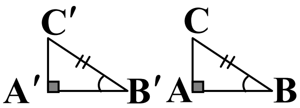


۴) هرگاه وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند.

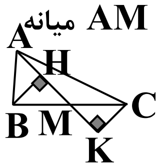
یعنی اگر $AB = A'B'$ و $\hat{A} = \hat{A}' = ۹۰^\circ$ و $BC = B'C'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$



۵) هرگاه وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم الزاویه ای با وتر و یک زاویه‌ی حاده از مثلث قائم الزاویه دیگر مساوی باشند دو مثلث همنهشت اند. یعنی اگر $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{A} = \hat{A}' = ۹۰^\circ$ و $BC = B'C'$ آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$



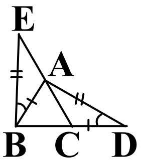
نکته : هر دو رأس مثلث از میانه‌ی نظیر رأس سوم آن به یک فاصله اند. یعنی $BH = CK \Leftarrow \hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ$ و AM میانه



مثال) با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه گیری درست است؟

۱) $AB = AC$ ۲) $AB = BC$ ۳) $AE = BC$ ۴) $AE = AC$

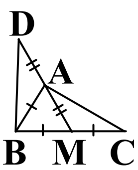
(کنکور سراسری تجربی ۸۵خارج از کشور)



جواب : گزینه ۴ صحیح است. $\Delta ABE \cong \Delta ADC$ (ض ز ض) $\Rightarrow AE = AC$

۱۲) در شکل مقابل $\hat{D} + \hat{C} = ۶۱^\circ$، اندازه‌ی $A\hat{B}C$ چند درجه است؟

۱) ۳۹   ۲) ۶۱   ۳) ۵۸   ۴) ۵۶   (کنکور سراسری تجربی ۸۹)



جواب : گزینه ۳ صحیح است.

(ض ز ض) $\Delta ABD \cong \Delta CMA \Leftarrow$ (مکمل های دو زاویه‌ی برابر با هم مساوی اند) $B\hat{A}D = A\hat{M}C$

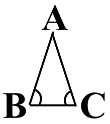
$$\Rightarrow \hat{C} = A\hat{B}D \Rightarrow A\hat{B}C = ۱۸۰ - ۲ \times B\hat{A}M = ۱۸۰ - ۲(A\hat{B}D + \hat{D}) = ۱۸۰ - ۲(\hat{C} + \hat{D}) = ۱۸۰ - ۱۲۲ = ۵۸$$

مثلث متساوی الساقین : هرگاه در مثلثی دو ضلع برابر باشند مثلث را متساوی الساقین می نامیم. به هر یک از دو ضلع مساوی یک ساق مثلث گوئیم.

@jozveh_nub

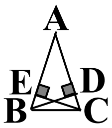
@jozveh_nub

تذکر : ۱) در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند و برعکس.



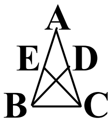
یعنی اگر در مثلث ABC ، $AB = AC$ باشد آنگاه : $\hat{B} = \hat{C}$ و برعکس.

۲) در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع های نظیر ساق ها با هم برابرند و برعکس.



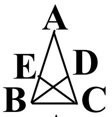
یعنی اگر در مثلث ABC ، $AB = AC$ و BD و CE ارتفاع های نظیر ساق ها باشند آنگاه : $BD = CE$ و برعکس.

۳) در هر مثلث متساوی الساقین میانه های نظیر ساق ها با هم برابرند و برعکس.

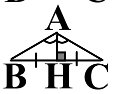


یعنی اگر در مثلث ABC ، $AB = AC$ و BD و CE میانه های نظیر ساق ها باشند آنگاه : $BD = CE$ و برعکس.

۴) در هر مثلث متساوی الساقین نیمساز های داخلی نظیر ساق ها با هم برابرند و برعکس.



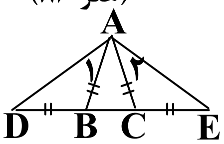
یعنی اگر در مثلث ABC ، $AB = AC$ و BD و CE نیمسازهای داخلی باشند آنگاه : $BD = CE$ و برعکس.



۵) در هر مثلث متساوی الساقین میانه و نیمساز و ارتفاع و عمودمنصف وارد بر قاعده بر هم منطبق اند.

مثال) در مثلث متساوی الساقین ABC داریم : $\hat{B} = ۲\hat{A}$ ، بزرگترین زاویه‌ی مثلث ADE ، چند برابر کوچکترین زاویه‌ی مثلث ABC ، است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴ (هنر ۸۶)



جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند.

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۲\hat{A} \quad و \quad \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{A} + ۲\hat{A} + ۲\hat{A} = ۱۸۰ \Rightarrow ۵\hat{A} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{A} = ۳۶^\circ$$

زاویه‌ی $D\hat{A}E$ بزرگترین زاویه‌ی مثلث ADE است.

$$AB = BD \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_۱ \xrightarrow{(\text{زاویه خارجی})} \hat{B} = ۲\hat{A}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۳۶^\circ$$

و به طریق مشابه داریم : $\hat{A}_۲ = ۳۶^\circ$ بنابراین $D\hat{A}E = ۳۶ + ۳۶ + ۳۶ = ۳\hat{A}$

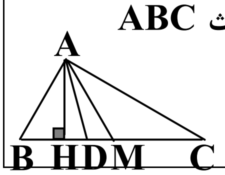
روش دوم : در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند. $AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۲\hat{A}$

زاویه‌ی $D\hat{A}E$ بزرگترین زاویه‌ی مثلث ADE است.

$$AB = BD \Rightarrow \hat{D} = \hat{A}_۱ \xrightarrow{(\text{زاویه خارجی})} \hat{B} = ۲\hat{A}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}$$

و به طریق مشابه داریم : $\hat{A}_۲ = \hat{A}$ بنابراین $D\hat{A}E = \hat{A}_۱ + \hat{A} + \hat{A}_۲ = ۳\hat{A}$

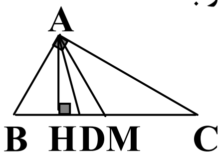
نکته : درهرمثلث نیمساز زاویه هررأس بین ارتفاع و میانه گذرنده از آن رأس واقع است مگر در حالت رأس مثلث متساوی الساقین و یا مثلث متساوی الاضلاع که هر سه بر هم منطبق اند. یعنی اگر AH ارتفاع و AD نیمساز و AM میانه مثلث ABC باشند آن گاه : $AH < AD < AM$ و در حالت خاص : $AH = AD = AM$



@jozveh_nub

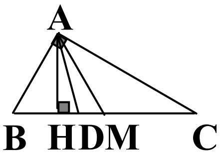
@jozveh_nub

نکته : اگر در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC : AH و AD و AM به ترتیب ارتفاع و نیمساز و میانه وارد بر وتر باشند، آنگاه



نیمساز AD زاویه‌ی بین ارتفاع AH و میانه‌ی AM را نصف می کند. $H\hat{A}D = M\hat{A}D$

مثال) در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC : AH و AD و AM به ترتیب ارتفاع و نیمساز و میانه وارد بر وتر است در این صورت :



۱) $H\hat{A}D = A\hat{B}C$　۲) $H\hat{A}D = A\hat{C}B$　۳) $H\hat{A}D = M\hat{A}D$　۴) $M\hat{A}D = A\hat{B}C$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. آزمون عدد : به عنوان مثال فرض کنیم که $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ باشد.

$$AM = BM \Rightarrow A\hat{M}D = ۶۰ \Rightarrow M\hat{A}C = ۳۰^\circ \Rightarrow H\hat{A}D = M\hat{A}D = ۱۵^\circ$$

نکته : بزرگترین زاویه‌ی خارجی نظیر کوچکترین زاویه‌ی داخلی مثلث است.

نکته : بزرگترین (کوچکترین) زاویه‌ی داخلی نظیر کوچکترین (بزرگترین) زاویه‌ی خارجی مثلث است وبرعکس.

مثال) زاویه های مثلثی متناسب با اعداد ۸ و ۵ و ۲ می باشد، اندازه‌ی کوچکترین زاویه‌ی خارجی این مثلث چند درجه است؟

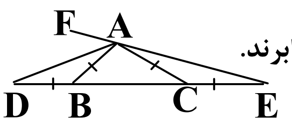
۱) ۷۲　۲) ۸۲　۳) ۸۴　۴) ۹۶　(کنکور سراسری تجربی ۸۰)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $۸x + ۵x + ۲x = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۵x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۱۲ \rightarrow ۸x = ۹۶ \Rightarrow ۱۸۰ - ۹۶ = ۸۴$

توجه : کوچکترین زاویه‌ی خارجی نظیر بزرگترین زاویه‌ی داخلی مثلث است.

مثال) در مثلث متساوی الساقین ABC، قاعده BC را از هر دو طرف به اندازه ساق ها، تا نقاط D و E امتداد می دهیم. در مثلث ADE کوچکترین زاویه خارجی، چند برابر کوچکترین زاویه داخلی آن است؟

۱) ۱　۲) ۱/۵　۳) ۲　۴) ۳　(کنکور سراسری تجربی۹۳ خارج از کشور)



جواب : گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند.

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow A\hat{B}D = A\hat{C}E \xrightarrow{(ضزض)} \Delta ABD \cong \Delta ACE \Rightarrow \hat{D} = \hat{E}$$

کوچکترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE نظیر بزرگترین زاویه‌ی داخلی آن است پس زاویه‌ی $F\hat{A}D$ کوچکترین زاویه‌ی خارجی و زاویه‌ی D کوچکترین زاویه‌ی داخلی این مثلث می باشند. $F\hat{A}D = \hat{D} + \hat{E} = ۲\hat{D}$ (زاویه‌ی خارجی مثلث ADE)

روش دوم : آزمون عدد　$\hat{B} = \hat{C} = ۴۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۱۰۰^\circ \Rightarrow A\hat{D}E = D\hat{A}B = C\hat{A}E = C\hat{E}A = ۲۰^\circ$

$$\Rightarrow F\hat{A}D = ۱۸۰ - ۲۰ - ۱۰۰ - ۲۰ = ۴۰^\circ \Rightarrow F\hat{A}D = ۲A\hat{D}E$$

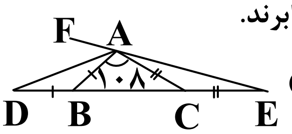
@jozveh_nub

@jozveh_nub

۱۳) در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} = ۱۰۸^\circ$ است، ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می دهیم، کوچکترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE چند درجه است؟

۱) ۲۴   ۲) ۳۲   ۳) ۳۶   ۴) ۵۴   (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۳)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند.



$CE = CA \Rightarrow E\hat{A}C = A\hat{E}C$ و $BD = BA \Rightarrow D\hat{A}B = A\hat{D}B$

کوچکترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE نظیر بزرگترین زاویه‌ی داخلی آن است پس زاویه‌ی $F\hat{A}D$ کوچکترین زاویه‌ی خارجی این مثلث می باشد.

$$A\hat{D}B + D\hat{A}B + ۱۰۸ + E\hat{A}C + A\hat{E}C = ۱۸۰ \Rightarrow ۲A\hat{D}B + ۱۰۸ + ۲A\hat{E}C = ۱۸۰$$

$$\Rightarrow A\hat{D}B + A\hat{E}C = \frac{۱۸۰ - ۱۰۸}{۲} = ۳۶ \Rightarrow F\hat{A}D = A\hat{D}B + A\hat{E}C = ۳۶^\circ$$

روش دوم : حالت خاص : مثلث ABC متساوی الساقین باشد. در هر مثلث متساوی الساقین زاویه های روبه روی ساق ها با هم برابرند.

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = ۳۶^\circ \Rightarrow A\hat{B}D = A\hat{C}E \xrightarrow{(\text{ضزض})} \Delta ABD \cong \Delta ACE \Rightarrow \hat{D} = \hat{E} = ۱۸^\circ$$

کوچکترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE نظیر بزرگترین زاویه‌ی داخلی آن است پس زاویه‌ی $F\hat{A}D$ کوچکترین زاویه‌ی خارجی و زاویه‌ی D کوچکترین زاویه‌ی داخلی این مثلث می باشند. $F\hat{A}D = \hat{D} + \hat{E} = ۲\hat{D} = ۳۶^\circ$ (زاویه‌ی خارجی مثلث ADE)

روش سوم : آزمون عدد $\hat{B} = \hat{C} = ۳۶^\circ \Rightarrow A\hat{D}E = D\hat{A}B = C\hat{A}E = C\hat{E}A = ۱۸^\circ \Rightarrow F\hat{A}D = ۳۶^\circ$

نکته: اگراندازه سه زاویه مثلثی بااعداد a و b و c متناسب باشد و داشته باشیم $a = b + c$، آنگاه مثلث فوق قائم الزاویه است.

مثال) اندازه سه زاویه مثلثی با اعداد ۵ و ۴ و ۱ متناسب است این مثلث کدام است؟

۱) متساوی الاضلاع ۲) متساوی الساقین   ۳) قائم الزاویه   ۴) منفرجه الزاویه   (کنکور سراسری ریاضی ۶۵)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. زاویه های مثلث با اعداد ۱ و ۴ و ۵ متناسب است پس زاویه های آن به صورت x و $۴x$ و $۵x$ است.

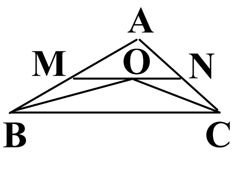
$$x + ۴x + ۵x = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۰x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۱۸$$

در نتیجه زاویه های مثلث ۱۸ و ۷۲ و ۹۰ درجه اند.

مثال) در مثلث ABC از نقطه‌ی O محل برخورد نیمسازهای داخلی زاویه های B و C خطی موازی BC رسم می کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در M و N قطع کند. اگر $AB = ۷$ و $AC = ۵$ باشد محیط مثلث AMN کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۱۵   ۳) ۱۲   ۴) ۱۷

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $MN \parallel BC$ مورب $OB \Rightarrow M\hat{O}B = O\hat{B}C$ (۱)



$M\hat{B}O = O\hat{B}C$ (فرض) $\xrightarrow{(۱)} M\hat{B}O = M\hat{O}B \Rightarrow OM = MB$

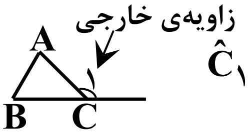
به طریق مشابه داریم : $ON = NC$

$$\Delta AMN : AM + OM + ON + AN = AM + MB + NC + AN = AB + AC = ۷ + ۵ = ۱۲$$

@jozveh_nub

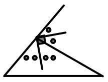
@jozveh_nub

نکته : الف : اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی مثلث برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور آن. یعنی $\hat{C}_1 = \hat{A} + \hat{B}$



ب : اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی مثلث از هرزاویه‌ی داخلی غیر مجاور آن بزرگتر است. یعنی $\hat{C}_1 > \hat{A}$ و $\hat{C}_1 > \hat{B}$

پ : در هر مثلث مجموع زاویه های خارجی، ۳۶۰ درجه است.

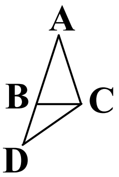


ت : نیمساز زاویه‌ی داخلی و خارجی هر رأس از مثلث بر هم عمودند.

ث:درهرمثلث که در آن نیمساز زاویه‌ی خارجی یک رأس موازی ضلع مقابل به آن رأس باشد، مثلث متساوی الساقین است و برعکس.

مثال) در مثلث متساوی الساقین $ABC(AB = AC)$، ساق AB را به اندازه‌ی $BD = BC$ امتداد می دهیم. اگر CD برابر AC باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟

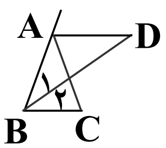
۱) ۲۵   ۲) ۳۰   ۳) ۳۲   ۴) ۳۶   (کنکور سراسری تجربی ۹۴ خارج از کشور)



جواب : گزینه ۴ صحیح است.   (۱) $AB = AC \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B$ و (۲) $BC = BD \Rightarrow \hat{D} = B\hat{C}D$

و   (۳) $AC = CD \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}$ و (۴) $\Delta BCD \xrightarrow{\text{زاویه خارجی}} A\hat{B}C = \hat{D} + B\hat{C}D$

$$\Delta ABC : \hat{A} + \hat{D} + A\hat{C}B + B\hat{C}D = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{A} + 2\hat{A} + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ$$



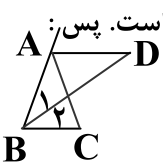
نکته : اگر در مثلث متساوی الساقین ABC داشته باشیم $AB = AC$

و نیمساز داخلی زاویه‌ی B نیمساز خارجی زاویه‌ی A را در D قطع کرده باشد، آن گاه $AD = AB$

مثال) در مثلث متساوی الساقین ABC، ($AB = AC$) نیمساز خارجی زاویه‌ی A و نیمساز داخلی زاویه‌ی B در نقطه‌ی D متلاقی اند. طول پاره خط AD برابر کدام جزء مثلث است؟

۱) AC ۲) شعاع دایره‌ی محیطی   ۳) BC ۴)طول نیمسازداخلی زاویه B(کنکورسراسری تجربی۷۳

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : چون در هر مثلث متساوی الساقین، نیمساز زاویه‌ی خارجی رأس، موازی قاعده است. پس:

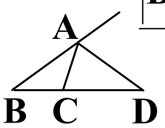


$AD \parallel BC$ و BD مورب $\Rightarrow \hat{D} = \hat{B}_2$ و $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow \hat{D} = \hat{B}_1$

$\Rightarrow ABD$ متساوی الساقین است. $\Rightarrow AD = AB = AC$

روش دوم : آزمون عدد : $\hat{B} = \hat{C} = \hat{A} = 60 \Rightarrow C\hat{A}D = 60 \Rightarrow \hat{D} = A\hat{B}D = 30 \Rightarrow AD = AB = AC$

نکته : زاویه‌ی بین نیمساز خارجی با امتداد ضلع رو به روی آن زاویه در مثلث : اگر AD نیمساز خارجی زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد آنگاه زاویه‌ی این نیمساز با امتداد ضلع BC برابر است با : $\dfrac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$



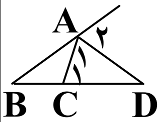
@jozveh_nub

@jozveh_nub

۱۴)زوایای مثلثی متناسب بااعداد۱و۱و۳می باشند.نیمساززاویه خارجی یکی از زاویه ها، ضلع مقابل را تحت چند درجه قطع می کند؟

۱) ۳۰   ۲) ۳۲   ۳) ۳۶   ۴) ۴۵   (کاردانی به کارشناسی سراسری ۸۶)

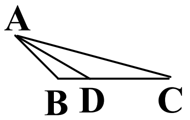
جواب : گزینه ۳ صحیح است. $\mathbf{x+x+۳x=۱۸۰ \Rightarrow ۵x=۱۸۰ \Rightarrow x=۳۶ \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}=۳۶^\circ}$ و $\hat{C}=۱۰۸^\circ$



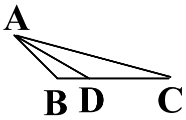
روش اوّل : $\hat{C}_۱=۷۲^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱=\frac{۱۸۰-۳۶}{۲}=۷۲^\circ \Rightarrow \hat{D}=۱۸۰-(\hat{A}_۱+\hat{C}_۱)=۱۸۰-(۳۶+۷۲)=۳۶^\circ$

روش دوم : با توجه به اینکه اگر AD نیمساز خارجی زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد آنگاه زاویه‌ی این نیمساز با امتداد ضلع BC برابر است با : $\frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$ نتیجه می شود : $\hat{D}=\frac{|B-C|}{۲}=\frac{|۳۶-۱۰۸|}{۲}=۳۶^\circ$

نکته : زاویه‌ی بین نیمساز داخلی با ضلع رو به روی آن زاویه در مثلث :اگر AD نیمساز داخلی زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد آنگاه زاویه های این نیمساز با ضلع BC برابر است با : $۹۰ \pm \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$



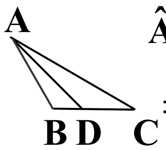
نکته : اگر در مثلث ABC داشته باشیم : $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز داخلی زاویه‌ی A و ضلع BC برابر است با : $۹۰-\frac{\alpha}{۲}$ و زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز خارجی زاویه‌ی A و ضلع BC برابر است با : $\frac{\alpha}{۲}$



نکته : اگر در مثلث ABC داشته باشیم : $\hat{B}-\hat{C}=۹۰^\circ$ آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز داخلی (نیمساز خارجی) زاویه‌ی A و ضلع BC برابر ۴۵ درجه است.

مثال)اگر در مثلث ABC داشته باشیم : $\hat{B}-\hat{C}=۹۰^\circ$، زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و ضلع BC برابر است با :

۱) ۳۰ درجه   ۲) ۴۵ درجه   ۳) ۶۰ درجه   ۴) ۱۵ درجه   (کنکور سراسری تجربی ۵۱)



جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{B}-۹۰=۱۸۰ \Rightarrow \hat{A}+۲\hat{B}=۲۷۰$

$\Rightarrow ۲D\hat{A}B+۲\hat{B}=۲۷۰ \Rightarrow D\hat{A}B+\hat{B}=۱۳۵ \Rightarrow A\hat{D}B=۴۵$

روش دوم : اگر در مثلث ABC داشته باشیم : $\hat{B}-\hat{C}=۹۰^\circ$ آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز داخلی (نیمساز خارجی) زاویه‌ی A و ضلع BC برابر ۴۵ درجه است.

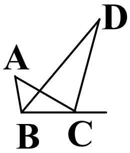
روش سوم : آزمون عدد $\hat{B}=۱۲۰^\circ$ و $\hat{C}=۳۰ \Rightarrow \hat{A}=۳۰ \Rightarrow B\hat{A}D=۱۵^\circ \Rightarrow A\hat{D}B=۴۵^\circ$

روش چهارم : اگر AD نیمساز داخلی زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد آنگاه زاویه های این نیمساز با ضلع BC برابر است با : $۹۰ \pm \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$ **درنتیجه :** $۹۰-\frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}=۹۰-\frac{۹۰}{۲}=۴۵^\circ$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

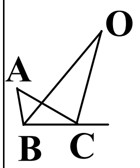
نکته : زاویه‌ی بین نیمساز داخلی یک زاویه و نیمساز خارجی زاویه‌ی دیگر در مثلث :



اگر در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی B و نیمساز خارجی زاویه‌ی C را رسم کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی D قطع کنند آنگاه اندازه‌ی BDC برابر است با : $\frac{A}{۲}$

مثال) در شکل زاویه‌ی $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و BO و CO نیمساز هستند. آنگاه :

۱) $\hat{O} = ۴۵^\circ$ ۲) $\hat{O} = ۶۰^\circ$ ۳) $\hat{O} = ۳۰^\circ$ ۴) هیچکدام (کنکور آزاد ریاضی ۷۶)



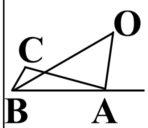
جواب : گزینه ۳ صحیح است. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی B و نیمساز خارجی زاویه‌ی C همدیگر به زاویه‌ی $\frac{A}{۲}$ قطع می کنند. پس : $\hat{O} = \frac{۶۰}{۲} = ۳۰^\circ$

۱۵) در مثلثی زوایای A و B و C به نسبت ۱ و ۴ و ۷ تقسیم شده اند. زاویه ای که نیمساز داخلی زاویه‌ی A با نیمساز خارجی B می سازد، چند درجه است؟

۱) ۳۵ درجه ۲) ۵۲/۵ درجه ۳) ۷۵ درجه ۴) ۱۵ درجه (کنکور آزاد ریاضی۸۷خارج از کشور)

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

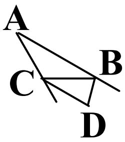
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = x + ۴x + ۷x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۱۵ \Rightarrow \hat{A} = x = ۱۵^\circ \text{ و } \hat{B} = ۴x = ۶۰^\circ \text{ و } \hat{C} = ۷x = ۱۰۵^\circ$$



در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی B و نیمساز خارجی زاویه‌ی A همدیگر به زاویه‌ی $\frac{C}{۲}$ قطع می کنند.

پس : $\hat{O} = \frac{۱۰۵}{۲} = ۵۲/۵^\circ$

نکته : زاویه‌ی بین دو نیمساز زاویه های خارجی مثلث : اگر در مثلث ABC نیمسازهای خارجی زوایای B و C را رسم کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی D قطع کنند آنگاه اندازه‌ی BDC برابر است با : $۹۰ - \frac{A}{۲}$

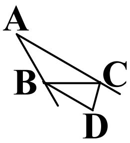


۱۶)درمثلث ABC ، $\hat{B} - \hat{C} = ۹۰^\circ$ و اندازه‌ی زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی B و C برابر ۷۵ درجه است، نوع مثلث کدام است؟

۱) متساوی الساقین ۲) قائم الزاویه ۳) غیرمشخص ۴) قائم الزاویه و متساوی الساقین

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : در مثلث ABC زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی زوایای B و C برابر است با : $۹۰ - \frac{A}{۲}$

پس : $۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} = ۷۵ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۵۰^\circ$



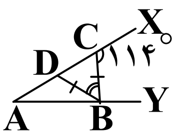
روش دوم : $\frac{۱۸۰ - \hat{B}}{۲} + \frac{۱۸۰ - \hat{C}}{۲} + ۷۵ = ۱۸۰ \Rightarrow ۳۶۰ - (\hat{B} + \hat{C}) = ۲۱۰ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۵۰$

$$\begin{cases} \hat{B} - \hat{C} = ۹۰ \\ \hat{B} + \hat{C} = ۱۵۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = ۱۲۰ \\ \hat{C} = ۳۰ \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = ۳۰$$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

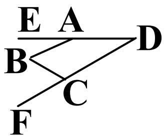
مثال) در شکل مقابل $\mathbf{B\hat{C}X = ۱۱۴^\circ}$. زاویه‌ی $\mathbf{C\hat{B}D}$ چند درجه است؟



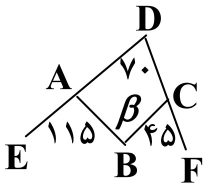
۱) ۴۴　　۲) ۴۶　　۳) ۴۸　　۴) ۵۲　(کنکور سراسری تجربی ۸۴)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.　$\mathbf{B\hat{C}X = ۱۱۴^\circ \Rightarrow B\hat{D}C = B\hat{C}D = ۶۶^\circ \Rightarrow C\hat{B}D = ۱۸۰ - (۶۶ + ۶۶) = ۴۸^\circ}$

نکته : در شکل مقابل همواره داریم :　$\mathbf{E\hat{A}B + B\hat{C}F = \hat{B} + \hat{D}}$



مثال) در شکل روبرو، اندازه‌ی زاویه‌ی β برابر است با :

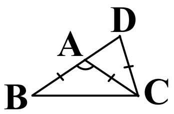


۱) ۸۰　　۲) ۸۵　　۳) ۹۰　　۴) ۶۵

جواب : گزینه ۳ صحیح است. قطر $\mathbf{BD}$ را رسم می کنیم داریم :

$$\mathbf{E\hat{A}B + B\hat{C}F = A\hat{D}B + A\hat{B}D + B\hat{D}C + C\hat{B}D = \hat{B} + \hat{D} \Rightarrow ۱۱۵ + ۴۵ = ۷۰ + \beta \Rightarrow \beta = ۹۰}$$

مثال) در مثلث متساوی الساقین $\mathbf{ABC}$ $\mathbf{(AB = AC)}$، ساق $\mathbf{BA}$ را از نقطه‌ی $\mathbf{B}$ به اندازه‌ی قاعده $\mathbf{BC}$ تا نقطه‌ی $\mathbf{D}$، امتداد می دهیم. اگر $\mathbf{CD = CA}$ باشد، زاویه‌ی $\mathbf{A}$ چند درجه است؟



۱) ۱۰۲　　۲) ۱۰۵　　۳) ۱۰۸　　۴) ۱۱۲　(کنکور سراسری ریاضی ۹۴ خارج از کشور)

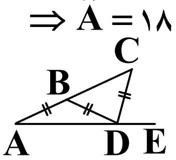
جواب : گزینه ۳ صحیح است.　$\mathbf{AB = AC \Rightarrow \hat{B} = A\hat{C}B \Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰ - ۲\hat{B}}$

$$\mathbf{CD = CA \Rightarrow \hat{D} = C\hat{A}D = ۲\hat{B}}$$

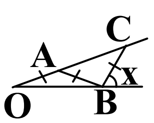
$$\mathbf{BC = BD \Rightarrow B\hat{C}D = \hat{D} = ۲\hat{B} \Rightarrow \Delta BCD : \hat{B} + B\hat{C}D + \hat{D} = ۱۸۰ \Rightarrow ۵\hat{B} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B} = ۳۶^\circ}$$

$$\mathbf{\Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰ - ۲\hat{B} = ۱۸۰ - ۲ \times ۳۶ = ۱۰۸^\circ}$$

نکته : در شکل مقابل همواره داریم :　$\mathbf{C\hat{D}E = ۳C\hat{A}E}$



مثال) در شکل زیر $\mathbf{C\hat{O}B = ۲۰^\circ}$، اندازه‌ی زاویه‌ی $\mathbf{x}$ کدام است؟



۱) ۳۰ درجه　　۲) ۴۰ درجه　　۳) ۵۰ درجه　　۴) ۶۰ درجه

جواب : گزینه ۴ صحیح است. (زاویه‌ی خارجی مثلث $\mathbf{AOB}$) $\mathbf{\hat{O} = ۲۰}$ و $\mathbf{OA = AB \Rightarrow A\hat{B}O = ۲۰ \Rightarrow C\hat{A}B = ۴۰}$

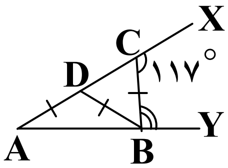
(زاویه‌ی خارجی مثلث $\mathbf{COB}$) $\mathbf{AB = BC \Rightarrow O\hat{C}B = ۴۰ \Rightarrow x = ۴۰ + ۲۰ = ۶۰}$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

۱۷) در شکل مقابل $B\hat{C}X = 117^\circ$. زاویه‌ی $C\hat{B}Y$ چند درجه است؟

۱) ۹۳　۲) ۹۴/۵　۳) ۹۵/۵　۴) ۹۶　(کنکور سراسری تجربی ۸۴خارج از کشور)

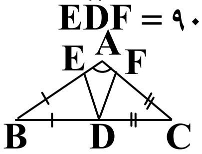


جواب : گزینه ۲ صحیح است. $B\hat{C}X = 117^\circ \Rightarrow B\hat{D}C = B\hat{C}D = 63^\circ \Rightarrow 2\hat{A} = 2A\hat{B}D = 63^\circ$

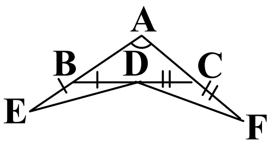
روش اوّل : $\Rightarrow \hat{A} = A\hat{B}D = 31/5^\circ \Rightarrow C\hat{B}Y = \hat{A} + B\hat{C}D = 31/5 + 63 = 94/5^\circ$

روش دوم : $\Rightarrow \hat{A} = A\hat{B}D = 31/5^\circ \Rightarrow C\hat{B}Y = 3\hat{A} = 94/5^\circ$

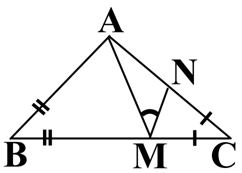
نکته : زاویه‌ی بین دو قاعده‌ی مثلث های متساوی الساقین تشکیل شده در دو رأس مجاور مثلث : اگر در مثلث ABC شکل مقابل $BE = BD$ و $CF = CD$ و $\hat{A} = \alpha$ باشد آنگاه $E\hat{D}F = 90 - \frac{\alpha}{2}$ است.



نکته : زاویه‌ی بین دو قاعده‌ی مثلث های متساوی الساقین تشکیل شده در امتداد دو ضلع مجاورمثلث : اگردر مثلث ABC شکل مقابل $BE = BD$ و $CF = CD$ و $\hat{A} = \alpha$ باشد آنگاه $E\hat{D}F = 90 + \frac{\alpha}{2}$ است.



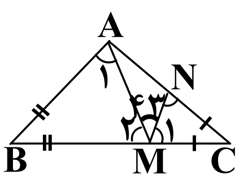
مثال) در شکل مقابل، دو مثلث کناری متساوی الساقین اند و $\hat{M} = 43^\circ$ است. زاویه‌ی $B\hat{A}C$ چند درجه است؟



۱) ۹۳　۲) ۹۴　۳) ۹۶　۴) ۹۷

(کنکور سراسری تجربی ۹۲ خارج از کشور)

جواب:گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : با توجه به شکل مقابل داریم : $\hat{M}_1 + 43 + \hat{M}_2 = 180 \Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 137$



$$BM = BA \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{A}_1 \Rightarrow \hat{B} + 2\hat{M}_2 = 180 \Rightarrow \hat{B} = 180 - 2\hat{M}_2$$

$$CM = CA \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N} \Rightarrow \hat{C} + 2\hat{M}_1 = 180 \Rightarrow \hat{C} = 180 - 2\hat{M}_1$$

$$B\hat{A}C = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 180 - (180 - 2\hat{M}_2 + 180 - 2\hat{M}_1) = -180 + 2(\hat{M}_2 + \hat{M}_1) = -180 + 274 = 94^\circ$$

روش دوم : $A\hat{M}N = 90 - \frac{B\hat{A}C}{2} \Rightarrow 43 = 90 - \frac{B\hat{A}C}{2} \Rightarrow B\hat{A}C = 180 - 86 = 94^\circ$

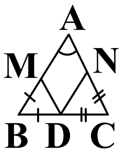
روش سوم : آزمون عدد : $\hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{M}_2 = \frac{180 - 60}{2} = 60^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 = 180 - (60 + 43) = 77^\circ = \hat{N}$

$$\hat{C} = 180 - 2 \times 77 = 26^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = 180 - (60 + 26) = 94^\circ$$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

۱۸) در شکل مقابل $\hat{A} = ۵۸^\circ$ و $BM = BD$ و $CN = CD$، زاویه‌ی $M\hat{D}N$ چند درجه است؟



۱) ۵۸ ‏ ‏ ۲) ۵۹ ‏ ‏ ۳) ۶۱ ‏ ‏ ۴) ۶۲ ‏ ‏ (کنکور سراسری ریاضی ۹۱)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : $BM = BD \Rightarrow B\hat{M}D = B\hat{D}M$

$$CN = CD \Rightarrow C\hat{N}D = C\hat{D}N$$

$$\Delta ABC : \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ - ۵۸ = ۱۲۲$$

از طرفی زوایای دو مثلث ΔCND و ΔBMD روی هم ۳۶۰ درجه است داریم :

$$B\hat{M}D + B\hat{D}M + \hat{B} + \hat{C} + C\hat{N}D + C\hat{D}N = ۳۶۰ \Rightarrow$$

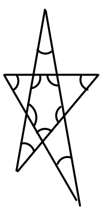
$$۲B\hat{D}M + ۱۲۲ + ۲C\hat{D}N = ۳۶۰ \Rightarrow B\hat{D}M + C\hat{D}N = ۱۱۹ \Rightarrow M\hat{D}N = ۱۸۰ - ۱۱۹ = ۶۱$$

روش دوم : $M\hat{D}N = ۹۰ - \frac{\alpha}{۲} = ۹۰ - \frac{۵۸}{۲} = ۹۰ - ۲۹ = ۶۱$

روش سوم : آزمون عدد $\hat{B} = \hat{C} = ۶۱^\circ \Rightarrow B\hat{D}M = C\hat{D}M = \frac{۱۸۰ - ۶۱}{۲} = ۵۹/۵^\circ \Rightarrow M\hat{D}N = ۶۱^\circ$

نکته : در شکل مقابل مجموع زوایای A، B، C، D و E برابر است با : $۱۸۰^\circ \times$(۴- تعدا پره ها)

مثال) مجموع زاویه های مشخص شده در شکل زیر، چند درجه است؟



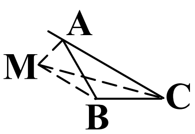
۱) ۶۸۰ ‏ ‏ ۲) ۷۲۰ ‏ ‏ ۳) ۸۴۰ ‏ ‏ ۴) ۹۰۰ ‏ ‏ (هنر ۹۵)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. مجموع زاویه های داخلی پنج ضلعی برابر است با : $(۵-۲)\times ۱۸۰ = ۵۴۰$

و مجموع پنج زاویه کناری برابر است با : $۱۸۰ = ۱۸۰ \times (۴-۵) = ۱۸۰^\circ \times$(۴- تعدا پره ها)

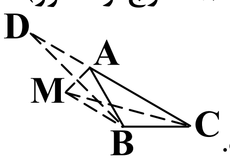
درنتیجه مجموع کل زاویه ها برابر است با : $۵۴۰ + ۱۸۰ = ۷۲۰$

مثال) در شکل روبه رو، نقطه‌ی M روی نیمساز خارجی زاویه‌ی A است. نسبت $\frac{MB + MC}{AB + AC}$، چگونه است؟



۱)بزرگتر از ۱ ‏ ‏ ۲) کمتر از ۱ ‏ ‏ ۳) برابر با ۱ ‏ ‏ ۴) غیر مشخص

(کنکور سراسری ریاضی ۹۴ خارج از کشور)



جواب : گزینه ۱ صحیح است. ضلع AC را از طرف A تا نقطه‌ی D امتداد می دهیم به طوری که $AD = AB$

بنابراین نیمساز خارجی زاویه‌ی A از مثلث ABC، عمودمنصف BD در مثلث متساوی الساقین ABD است.

نقطه‌ی M یر روی عمودمنصف BD واقع است، پس : $MB = MD$

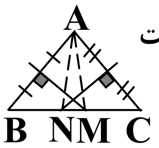
درنتیجه داریم : $MB + MC = MD + MC > DC = AD + AC = AB + AC \Rightarrow \frac{MB + MC}{AB + AC} > ۱$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

۱۹) در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = ۸۰^\circ$، عمودمنصف های دو ساق مثلث، قاعده‌ی BC را در M و N قطع می کند. کوچکترین زاویه‌ی مثلث AMN چند درجه است؟

۱) ۱۵   ۲) ۲۰   ۳) ۲۵   ۴) ۳۰   (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۲)



جواب : گزینه ۲ صحیح است. می دانیم هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است

پس : $$NC = NA \Rightarrow C\hat{A}N = \hat{C} = ۵۰^\circ \quad \text{و} \quad MB = MA \Rightarrow B\hat{A}M = \hat{B} = ۵۰^\circ$$

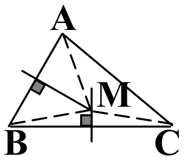
$$M\hat{A}N = B\hat{A}M + C\hat{A}N - \hat{A} = ۵۰ + ۵۰ - ۸۰ = ۲۰^\circ$$

قضیه : عمود منصف های ضلع های هر مثلث همرسند.

مثال) کدام یک از نقاط زیر از سه رأس مثلث به یک فاصله است؟

۱) محل تلاقی ارتفاع ها ۲) محل تلاقی میانه ها ۳) محل تلاقی عمودمنصف ها ۴) محل تلاقی نیمسازهای داخلی

جواب : گزینه ۳ صحیح است. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. در نتیجه محل تلاقی عمودمنصف ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است.



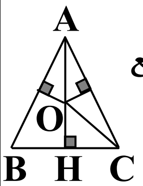
۲۰) چند نقطه در صفحه مثلث وجود دارد که از رأس های آن به یک فاصله باشد؟

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

جواب : گزینه ۱ درست است. مرکز دایره محیطی مثلث جواب مسئله است.

مثال) در مثلث متساوی الساقین ABC، $AB = AC$ و $BC = ۸$ فاصله‌ی نقطه‌ی همرسی عمودمنصف های اضلاع از قاعده برابر ۳ است. طول ساق مثلث به شرط آن که از قاعده بزرگتر باشد، کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۸   ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$



جواب : گزینه ۴ صحیح است. فرض کنیم O نقطه‌ی همرسی عمودمنصف های سه ضلع مثلث باشد پس این نقطه از سه رأس مثلث به یک فاصله است درنتیجه $OC = OA$ از طرفی در مثلث متساوی الساقین ABC عمودمنصف ضلع BC همان ارتفاع AH است و $OH = ۳$. لذا در مثلث قائم الزاویه‌ی OHC می توان نوشت :

$$OC^۲ = OH^۲ + HC^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow OC = ۵ \Rightarrow AH = OA + OH = ۵ + ۳ = ۸$$

$$\Rightarrow \Delta ABH : AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ = ۱۶ + ۶۴ = ۸۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۸۰} = ۴\sqrt{۵}$$

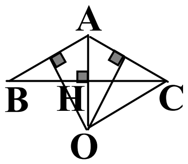
لازم به ذکر است که اگر زاویه A منفرجه باشد نقطه‌ی همرسی عمودمنصف ها خارج مثلث قرار می گیرد و طول ساق مثلث از قاعده کوچکتر خواهد بود.

@jozveh_nub

@jozveh_nub

مثال) در مثلث متساوی الساقین ABC ، $AB = AC$ و $BC = ۸$ فاصله‌ی نقطه‌ی همرسی عمودمنصف های اضلاع از قاعده برابر ۳ است. طول ساق مثلث به شرط آن که از قاعده کوچکتر باشد، کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۸   ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$



جواب : گزینه ۳ صحیح است. فرض کنیم O نقطه‌ی همرسی عمودمنصف های سه ضلع مثلث باشد پس این نقطه از سه رأس مثلث به یک فاصله است درنتیجه $OC = OA$ از طرفی در مثلث متساوی الساقین ABC عمودمنصف ضلع BC همان امتداد ارتفاع AH است و $OH = ۳$. لذا در مثلث قائم الزاویه‌ی OHC می توان نوشت :

$$OC^۲ = OH^۲ + HC^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow OC = ۵ \Rightarrow OA = OC = ۵ \Rightarrow AH = OA - OH = ۵ - ۳ = ۲$$

$$\Rightarrow \Delta ABH : AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ = ۱۶ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

لازم به ذکر است که اگر زاویه A حاده باشد نقطه‌ی همرسی عمودمنصف ها درون مثلث قرار می گیرد و طول ساق مثلث از قاعده بزرگتر خواهد بود.

قضیه : سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

قضیه : در هر مثلث سه نیمساز زاویه های داخلی همرسند.

نکته : در هر مثلث نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه‌ی رأس سوم همرسند.

۲۱) در صفحه‌ی یک مثلث چند نقطه می توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آنها به یک فاصله باشد؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴   (کنکور سراسری ریاضی ۶۸وسراسری تجربی ۸۰)

جواب : گزینه ۴ درست است. در صفحه‌ی یک مثلث نقطه ای که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آنها به یک فاصله باشد محل همرسی نیمسازهای داخلی آن است. این نقاط مرکز دوایر محاطی اند. پس سه مرکز دایره های محاطی برونی و یک مرکز دایره محاطی درونی جواب مسئله اند.

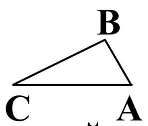
قضیه : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه‌ی مقابل به ضلع کوچکتر.

مثال) در مثلث ABC اندازه‌ی اضلاع $AB = ۳$ و $BC = ۶$ و $AC = ۷$ است، کدام زاویه‌ی مثلث منفرجه است؟

۱) A ۲) B ۳) C ۴) هیچکدام   (کنکور آزاد تجربی ۶۹)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اول : می دانیم در هر مثلث، زاویه‌ی رو به رو به ضلع بزرگتر از زاویه‌ی رو به رو به ضلع کوچکتر، بزرگتر است. پس :

$$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \text{ و } AC > BC \Rightarrow \hat{B} > \hat{A} \Rightarrow \hat{B} > \hat{A} \text{ و } \hat{C}$$



روش دوم : با توجه به قضیه‌ی کسینوس ها داریم :

$$AC^۲ = ۴۹ \text{ و } AB^۲ + BC^۲ = ۹ + ۳۶ = ۴۵ \Rightarrow AC^۲ > AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow \hat{B} > ۹۰$$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

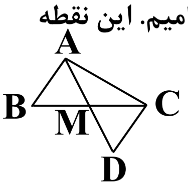
نکته : اگر در مثلث ABC : AM میانه و $AB < AC$ باشد. آنگاه : $B\hat{A}M > M\hat{A}C$

مثال) در مثلث ABC : AM میانه و $AB < AC$ می باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $B\hat{A}M > M\hat{A}C$ ۲) $B\hat{A}M < M\hat{A}C$

۳) $B\hat{A}M = M\hat{A}C$ ۴) $B\hat{A}M = ۲M\hat{A}C$

جواب : گزینه ۱ صحیح است. میانه AM را از طرف نقطه M به اندازه خودش ادامه داده و نقطه حاصل را D می نامیم. این نقطه را به راس C وصل می کنیم.



$$\Delta ABM \cong \Delta CDM(\text{ضزض}) \Rightarrow B\hat{A}M = C\hat{D}M(۱)$$

$$CD = AB \xrightarrow{\Delta ACD} CD < AC \Rightarrow C\hat{D}M > M\hat{A}C(۲) \xrightarrow{(۱),(۲)} B\hat{A}M > M\hat{A}C$$

قضیه : در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ تر است. (نامساوی مثلثی)

قضیه : در هر مثلث قدرمطلق تفاضل طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم کوچکتر است.

قضیه‌ی نامساوی مثلثی (یا قضیه حمار) : در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر و از قدرمطلق تفاضل طول های این دو ضلع از طول ضلع سوم کوچکتر است. $\Delta ABC : AB + BC > AC > |AB - BC|$

قضیه وجودی مثلث : سه عدد حقیقی در صورتی اندازه‌ی اضلاع یک مثلث اند که بزرگترین عدد از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد و یا کوچکترین عدد از قدرمطلق تفاضل دو عدد دیگر بزرگتر باشد.

مثال) اندازه‌ی اضلاع مثلثی اعداد صحیح اند یک ضلع ۹ واحد و نسبت دو ضلع دیگر آن $\frac{۱}{۲}$ می باشد، اندازه‌ی بزرگترین ضلع ممکن کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸ (هنر ۸۵)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. در هر مثلث، مجموع طول های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ تر است. (نامساوی مثلثی)

$x < ۲x + ۹ \Rightarrow -۹ < x$ (۱)

$۲x < x + ۹ \Rightarrow x < ۹$ (۲)

$۹ < x + ۲x \Rightarrow ۳ < x$ (۳)

(۱) و (۲) و (۳) $\Rightarrow ۳ < x < ۹ \xrightarrow{x \in Z} x = ۸ \Rightarrow ۲x = ۱۶$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

مثال) سه پاره خط به طول های $6x$، $x+7$ و $4x-4$ اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{11}{9}<x<3$ ۲) $\frac{5}{3}<x<3$ ۳) $2<x<3$ ۴) $\frac{11}{9}<x<4$ (کنکور سراسری ریاضی ۸۲)

جواب : گزینه۱ درست است.

$$\begin{cases} 6x>0 \Rightarrow x>0 \\ x+7>0 \Rightarrow x>-7 \Rightarrow 1<x \\ 4x-4>0 \Rightarrow x>1 \end{cases}$$

از طرفی
$$\begin{cases} 6x<x+7+4x-4 \Rightarrow x<3 \\ x+7<6x+4x-4 \Rightarrow \frac{11}{9}<x \\ 4x-4<6x+x+7 \Rightarrow \frac{-11}{3}<x \end{cases} \Rightarrow \frac{11}{9}<x<3$$
در نتیجه باید $\frac{11}{9}<x<3$ باشد.

مثال) محیط یک مثلث متساوی الساقین برابر ۹ سانتی متر است. اندازه‌ی ساق آن مثلث در کدام محدوده قرار خواهد داشت؟

۱) بین ۳ و ۶ ۲) کوچکتر از ۶ ۳) بین ۲/۲۵ و ۴/۵ ۴) کوچکتر از ۴/۵

جواب : گزینه ۳ صحیح است. اگر اندازه‌ی ساق مثلث را a و اندازه‌ی قاعده‌ی آن را b بنامیم، بنا به قضیه‌ی نامساوی مثلثی داریم :

$$a-a<b<a+a \Rightarrow 0<b<2a \Rightarrow 2a<b+2a<4a \Rightarrow 2a<9<4a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a<9 \Rightarrow a<4/5 \\ 9<4a \Rightarrow 2/25<a \end{cases} \Rightarrow 2/25<a<4/5$$

نکته : چنانچه AA'، BB' و CC' سه ارتفاع مثلث ABC باشند داریم : $\frac{1}{AA'}<\frac{1}{BB'}+\frac{1}{CC'}$ و برعکس

نتیجه : برای آنکه بتوانیم مثلثی با معلوم بودن سه ارتفاع آن رسم کنیم باید معکوس هر ارتفاع از قدرمطلق تفاضل معکوس دو ارتفاع دیگر بزرگتر و از مجموع معکوس دو ارتفاع دیگر کوچکتر باشد. به عبارت دیگر

$$\left|\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right|<\frac{1}{h_b}<\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}$$

مثال) تعداد مثلث های ممکن با ارتفاع های ۵ و ۴ و ۲ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار (هنر ۸۶)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. برای آنکه بتوانیم مثلثی با معلوم بودن سه ارتفاع آن رسم کنیم باید داشته باشیم :

$$\left|\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right|<\frac{1}{h_b}<\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}$$

$\frac{1}{h_b}=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ ولی $\frac{1}{h_b}\not<\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_a}$

@jozveh_nub

@jozveh_nub

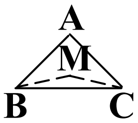
۲۲) حدود m برای این که بتوانیم مثلثی رسم کنیم که ارتفاع های آن $h_a = \frac{۱}{۲}$ و $h_b = \frac{۱}{m}$ و $h_c = \frac{۱}{۳}$ باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۵} < m < ۶$ ۲) $\frac{۱}{۶} < m < \frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۵} < m < ۱$ ۴) $۱ < m < ۵$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. برای آنکه بتوانیم مثلثی با معلوم بودن سه ارتفاع آن رسم کنیم باید معکوس هر ارتفاع از قدرمطلق تفاضل دو ارتفاع دیگر بزرگتر و از معکوس مجموع دو ارتفاع دیگر کوچکتر باشد.

$$\left|\frac{۱}{h_c} - \frac{۱}{h_a}\right| < \frac{۱}{h_b} < \frac{۱}{h_c} + \frac{۱}{h_a} \Rightarrow |۳ - ۲| < m < ۳ + ۲ \Rightarrow ۱ < m < ۵$$

نکته : اگر M یک نقطه‌ی اختیاری داخل مثلث ABC باشد. آنگاه :



الف : $BC < MB + MC < AB + AC$

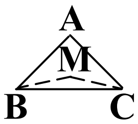
ب : محیط BMC از محیط ABC کوچکتر است.

مثال) اگر M یک نقطه‌ی اختیاری داخل مثلث ABC باشد. کدام رابطه درست است؟

۱) $MA + MB < CA + CB$ ۲) $MA + MB \le MC$

۳) $MA + MB \ge MC$ ۴) $MA + MB > CA + CB$ (کاردانی به کارشناسی سراسری ۸۲)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. می دانیم : $BC < MA + MB < CA + CB$



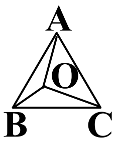
قضیه وجودی مثلث : سه عدد حقیقی مثبت a، b و c داده شده اند، اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلع های آن a، b و c هستند.

نکته : سه عدد حقیقی در صورتی اندازه‌ی اضلاع یک مثلث اند که بزرگترین عدد از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد و یا کوچکترین عدد از قدرمطلق تفاضل دو عدد دیگر بزرگتر باشد.

نکته : در هر مثلث مجموع سه ارتفاع از نصف محیط مثلث بزرگترو از محیط مثلث کوچکتر است.

نکته : در هر چند ضلعی، هر ضلع از مجموع ضلع های دیگرکوچکتر است.

نکته : مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث از سه راس آن بزرگتر از نصف مجموع سه ضلع مثلث و کوچکتر از مجموع سه ضلع مثلث است.یعنی $\frac{AB + BC + AC}{۲} < OA + OB + OC < AB + BC + AC$



@jozveh_nub

@jozveh_nub

۲۳) مثلثی به طول اضلاع ۳، $\sqrt{۲}-۳$ و $\sqrt{۲}+۲$ واحد، نقطه M داخل مثلث تغییر مکان می دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل نقطه M از سه راس مثلث، مورد قبول است؟

۱) $۵-\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۸ (کنکور سراسری ریاضی۸۸خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. محیط مثلث > مجموع فواصل نقطه M از سه راس مثلث > نصف محیط مثلث

$$\Rightarrow \frac{۳+۳-\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}}{۲} < \text{مجموع فواصل نقطه } M \text{ از سه راس مثلث} < ۳+۳-\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}$$

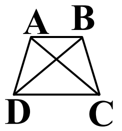
$$\Rightarrow ۴ < \text{مجموع فواصل نقطه } M \text{ از سه راس مثلث} < ۸$$

نکته : الف : در هر متوازی الاضلاع مجموع دو قطر از نصف محیط آن بزرگتر و از محیط آن کوچکتر است.

ب : در هر چهارضلعی محدب مجموع دو قطر از نصف محیط آن بزرگتر و از محیط آن کوچکتر است.

پ : در هر چهارضلعی محدب مجموع دو قطر از مجموع دو ضلع روبه روی آن بزرگتر است.

مثال) محیط چهارضلعی محدب $ABCD$ برابر ۷۲ واحد است در این صورت.........



۱) $۲۴ < AC+BD < ۴۸$ ۲) $۳۶ < AC+BD < ۷۲$

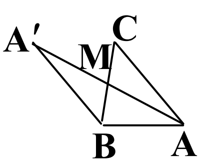
۳) $۷۲ < AC+BD < ۱۴۴$ ۴) $۲۴ < AC+BD < ۹۶$

جواب : گزینه ۲ صحیح است. در هر چهارضلعی محدب مجموع دو قطر از نصف محیط آن بزرگتر و از محیط آن کوچکتر است.

مثال) مثلثی با طول سه ضلع b و c و $۲m_a$ (m_a طول میانه‌ی مثلث ABC است) رسم کرده ایم. طول میانه‌ی وارد بر ضلع $۲m_a$ کدام است؟

۱) a ۲) $۲a$ ۳) $\frac{a}{۲}$ ۴) $\frac{b+c}{۲}$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۷)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. میانه AM را از طرف M امتداد داده، نقطه‌ی A' را طوری اختیار می کنیم که $AM = A'M$



$$\begin{cases} AM = A'M \\ BM = CM \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض}-\text{ز}-\text{ض})} \overset{\Delta}{AMC} = \overset{\Delta}{A'MB} \Rightarrow AC = BA'$$

در مثلث ABA'، سه ضلع برابر با b و c و $۲m_a$ می باشند و میانه‌ی وارد بر ضلع $۲m_a$، پاره خط BM است

و می دانیم $BM = MC = \frac{a}{۲}$.

@jozveh_nub

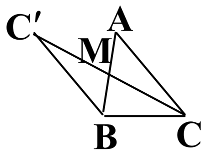
@jozveh_nub

مثال) اگر a و b و m_c دو ضلع و میانه وارد بر ضلع سوم باشند، کدام گزینه در مثلث درست نیست؟

۱) $a = ۷$ و $b = ۶$ و $m_c = ۵$ ۲) $a = ۵$ و $b = ۶$ و $m_c = ۷$

۳) $a = ۵$ و $b = ۶$ و $m_c = ۵$ ۴) $a = ۶$ و $b = ۶$ و $m_c = ۵$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۸)

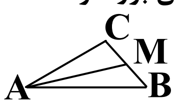
جواب : گزینه ۲ صحیح است. در مثلث ABC میانه‌ی CM را از طرف M به اندازه‌ی خودش امتداد داده و نقطه‌ی حاصل را C' می نامیم.



$$\begin{cases} CM = C'M \\ BM = AM \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \end{cases} \xrightarrow{(ض-ز-ض)} \overset{\Delta}{A}MC = \overset{\Delta}{C'}MB \Rightarrow AC = BC'$$

در مثلث CBC'، سه ضلع برابر با a و b و m_c می باشند بنا به قضیه حمار در این مثلث داریم : $a + b > ۲m_c$.

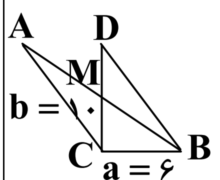
نکته : در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر و از نصف قدرمطلق تفاضل دو ضلع مجاور آن بزرگتر است. یعنی اگر AM میانه مثلث ABC باشد آنگاه $\frac{|AB - AC|}{۲} < AM < \frac{AB + AC}{۲}$



مثال) در مثلث $a = ۶$ و $b = ۱۰$ و $m_c = ۴$ آنگاه مثلث :

۱) حاده الزاویه است. ۲) قائم الزاویه است. ۳) منفرجه الزاویه است. ۴) وجود ندارد. (کنکور آزاد ریاضی ۸۴)

جواب: گزینه ۳ صحیح است. میانه $CM = m_c$ را از طرف M امتداد داده نقطه‌ی D را طوری اختیار می کنیم که (۱) $CM = MD$



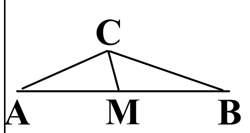
$$\begin{cases} CM = MD \\ AM = MB \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \end{cases} \xrightarrow{(ض-ز-ض)} \overset{\Delta}{A}MC = \overset{\Delta}{D}MB \Rightarrow AC = BD(۲)$$

$$\Delta BCD : BC = ۶ \text{ و } CD = ۸ \text{ و } BD = ۱۰ \Rightarrow D\hat{C}B = ۹۰^\circ \Rightarrow A\hat{C}B > ۹۰^\circ$$

۲۴) در مثلثی طول اضلاع $BC = ۹$ و $AC = ۷$ طول میانه وارد بر ضلع سوم کدام می تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۱۰ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۹۱)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر و از نصف قدرمطلق تفاضل دو ضلع مجاور آن بزرگتر است. $\frac{|۹ - ۷|}{۲} < CM < \frac{۹ + ۷}{۲} \Rightarrow ۱ < CM < ۸$



نکته : در هر مثلث مجموع سه میانه از محیط مثلث کوچکتر است.

@jozveh_nub