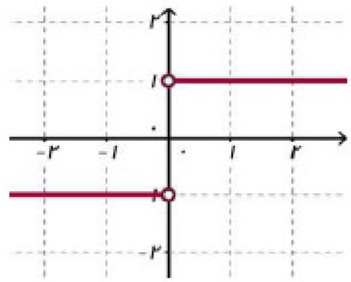
۱- اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ موجود است؟

« **پاسخ** »



$$f(x)=\frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x} & x>۰\\ \frac{-x}{x} & x<۰\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱ \ , \ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد

۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^۲+۲ & x>۰\\ -۲x-۲ & x\le ۰\end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را - در صورت وجود - بیابید.

« **پاسخ** »

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=(۰)^۲+۲=۲ \ , \ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۲(۰)-۲=-۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد

۳- آیا حد تابع مقابل در $x=۲$ موجود است؟

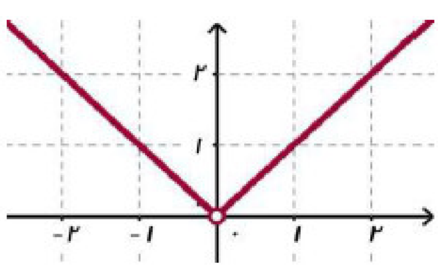
$$f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x>۲\\ -۲ & x=۲\\ x-۳ & x<۲\end{cases}$$

« **پاسخ** »

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-۲+۲=۰ \ , \ \lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۲-۳=-۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

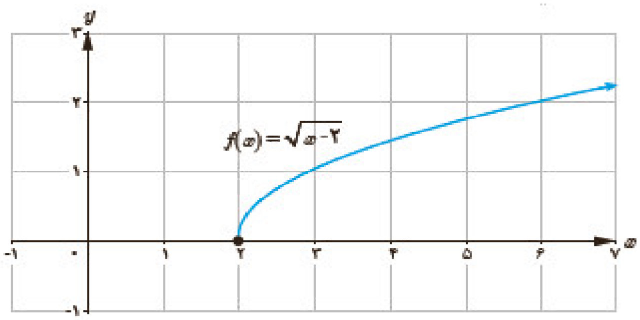
۴- تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x & x>۰\\ -x & x<۰\end{cases}$ را درنظر می‌گیریم. آیا f در نقطه‌ی صفر حد دارد؟ آیا $f(۰)$ موجود است؟

« **پاسخ** »



$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)=۰$$

۵- دربارهٔ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x - ۲}$ مواردزیر را در صورت وجود محاسبه کنید:



الف) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$

ت) $f(۲)$

« **پاسخ** »

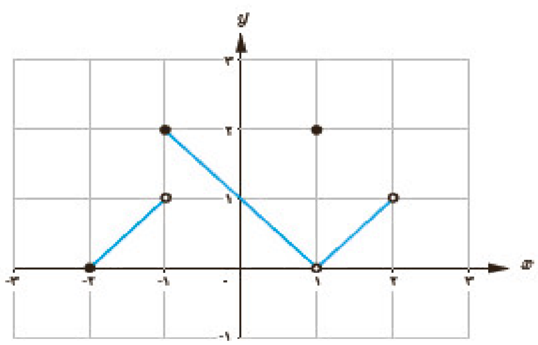
الف) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۰ = ۰$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = ۰$ وجود ندارد

پ) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = ۰$ وجود ندارد

ت) $f(۲) = \sqrt{۲ - ۲} = ۰$

۶- برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x) = ۲$

ب) $f(۱) = ۲$

پ) $f(۲) = ۱$

ت) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۰$

ث) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = ۲$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x) = ۱$

چ) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

« **پاسخ** »

الف) نادرست

ب) درست

پ) نادرست

ت) درست

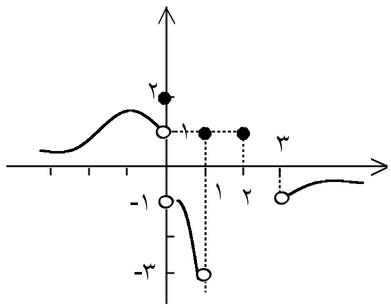
ث) نادرست

ج) درست

چ) درست

ح) درست

۷- با توجه به شکل مقابل حاصل موارد زیر را بیابید.



$\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to ۰} f(x)$

$\lim\limits_{x \to ۳^+} f(x)$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$

« **پاسخ** »

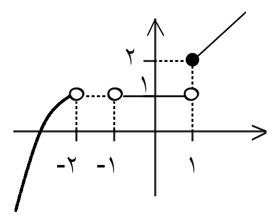
$\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = -۳$

$\lim\limits_{x \to ۰} f(x) =$ حد ندارد (حد راست و چپ متفاوت است)

$\lim\limits_{x \to ۳^+} f(x) = -۱$

$\lim\limits_{x \to ۲} f(x) =$ حد ندارد

۸- نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.



A) $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x)$

B) $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$

C) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$

D) $\lim\limits_{x \to -۲} f(x)$

« **پاسخ** »

A) $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = ۲$

B) $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = ۱$

C) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x) =$ حد ندارد

D) $\lim\limits_{x \to -۲} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to -۲^-} f(x) = ۱ \ , \ \lim\limits_{x \to -۲^+} f(x) =$ وجود ندارد

۹- آیا تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ - x}$ در $x = ۰$ حد دارد؟ چرا؟

« **پاسخ** »

خیر با توجه به دامنه، تابع در همسایگی چپ ۰ تعریف نشده
پس در $x = ۰$ حد ندارد. (۰/۵)

$$D_f = (-\infty , ۰] \cup [۱ , +\infty) \quad (۰/۲۵)$$

۱۰- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = a[x] + [x + ۱]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که $\lim\limits_{x \to ۰} f(x)$ موجود است.
([ ] نماد جزء صحیح است.)

« **پاسخ** »

$\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ موجود است یعنی حد چپ و راست تابع در $x = ۱$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} (a[x] + [x + ۱]) = a + ۲$$

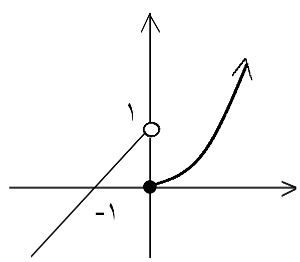
$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (x[x] + [x + ۱]) = ۰ + ۱ = ۱$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) \Rightarrow a + ۲ = ۱ \Rightarrow a = -۱$$

۱۱- ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq ۰ \\ x + ۱ & x > ۰ \end{cases}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، وجود حد تابع را در $x = ۰$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to ۰} f(x) = \text{حد ندارد}$$



۱۲- برای تابع $f(x) = x + [x]$:

الف) نمودار تابع در بازه‌ی $x \in [-۱ , ۱)$ را رسم کنید.

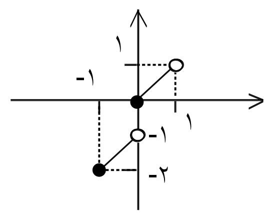
ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
f(x)							

ج) آیا $\lim\limits_{x \to ۰} f(x)$ موجود است؟ چرا؟

« **پاسخ** »

الف)



$$-۱ \le x < ۰ \xrightarrow{[x] = -۱} y = x - ۱$$

x	-۱	۰
f(x)	-۲	-۱

$$۰ \le x < ۱ \xrightarrow{[x] = ۰} y = x$$

x	۰	۱
f(x)	۰	۱

ب)

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
f(x)	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱

ج) موجود نیست. زیرا حد راست و چپ آن برابر نیست.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = -۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰} f(x) = \text{حد ندارد}$$

۱۳- در تابع $f(x) = (-۱)^{[x]}$:

الف) تابع را در بازه‌ی $x \in [۰ , ۲)$ رسم کنید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)							

ج) آیا حد تابع در $x = ۱$ موجود است؟ چرا؟

« **پاسخ** »

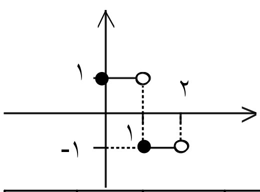
الف)

$$۰ \le x < ۱ \xrightarrow{[x] = ۰} y = (-۱)^۰ = ۱$$

x	۰	۱
y	۱	۱

$$۱ \le x < ۲ \xrightarrow{[x] = ۱} y = (-۱)^۱ = -۱$$

x	۱	۲
y	-۱	-۱



ب)

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)	۱	۱	۱	-۱	-۱	-۱	-۱

ج) موجود نیست. زیرا حد راست و چپ در $x = ۱$ برابر نیست.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۱^+} f(x) = -۱ \\ \lim\limits_{x \to ۱^-} f(x) = ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۱} f(x) = \text{موجود نیست}$$

۱۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ۱ - x & -۲ \leq x < -۱ \\ x & -۱ < x \leq ۲ \end{cases}$ را درنظر بگیرید.

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	-۱	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹
f(x)							

ج) آیا $\lim_{x \to -۱} f(x)$ وجود دارد؟ چرا؟

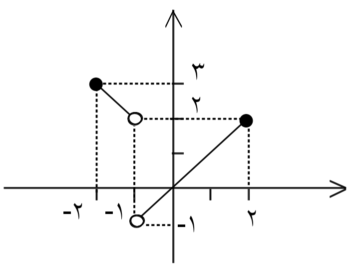
« **پاسخ** »

الف)

$$f(x) = \begin{cases} ۱ - x & -۲ \leq x < -۱ \\ x & -۱ < x \leq ۲ \end{cases}$$

x	-۲	-۱
y	۳	۲

x	-۱	۲
y	-۱	۲



ب)

x	-۱/۱	-۱/۰۱	-۱/۰۰۱	-۱	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹
f(x)	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	تعریف نشده	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹

ج) حد ندارد - زیرا حد راست و چپ برابر نیست.

$$\begin{cases} \lim_{x \to (-۱)^+} f(x) = -۱ \\ \lim_{x \to (-۱)^-} f(x) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to (-۱)} f(x) = \text{موجود نیست}$$

۱۵- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = ۲$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^{۳} + ۲ & x \geq ۲ \\ \dfrac{ax}{x - ۳} & x < ۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

برای آن‌که در $x = ۲$ دارای حد باشد باید حد راست و چپ در $x = ۲$ برابر باشد.

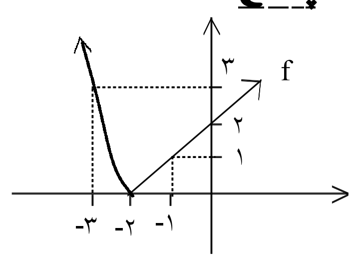
$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} x^{۳} + ۲ = ۸ + ۲ = ۱۰$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} \frac{ax}{x - ۳} = \frac{۲a}{-۱} = -۲a$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} f(x) \Rightarrow ۱۰ = -۲a \Rightarrow a = -۵$$

۱۶- نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x + ۲ & x > -۲ \\ x^{۲} + ۲x & x \leq -۲ \end{cases}$ را رسم کنید. حد چپ و راست تابع f را در $x = -۲$ به دست آورید. آیا تابع f در $x = -۲$ حد دارد؟ چرا؟

« **پاسخ** »



$$f(x) = \begin{cases} x + ۲ & x > -۲ \\ x^{۲} + ۲x & x \leq -۲ \end{cases}$$

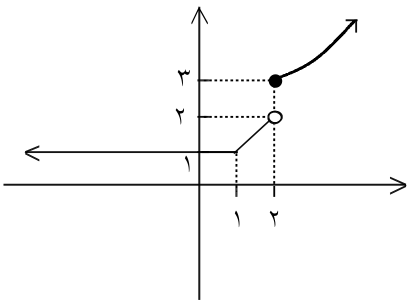
x	-۲	-۱
y	۰	۱

x	-۲	-۳
y	۰	۳

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -۲^+} f(x) = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -۲} f(x) = ۰$$

تابع در $x = -۲$ دارای حدی برابر صفر است. زیرا حد راست و چپ برابر صفر است.

۱۷- با استفاده از نمودار، حاصل عبارت زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.



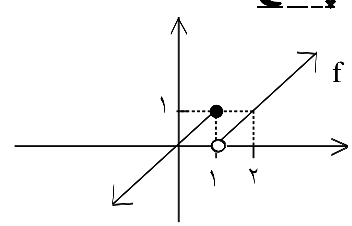
$$\lim_{x \to ۱} f(x) + \lim_{x \to ۲^-} f(x) - ۳f(۲)$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۱} f(x) + \lim_{x \to ۲^-} f(x) - ۳f(۲) = ۱ + ۲ - ۳(۳) = -۶$$

۱۸- نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - ۱ & x > ۱ \\ x & x \leq ۱ \end{cases}$ را رسم کنید. حد چپ و راست تابع f را در $x = ۱$ به دست آورید. آیا تابع f در $x = ۱$ حد دارد؟ چرا؟

« **پاسخ** »



$$f(x) = \begin{cases} x - ۱ & x > ۱ \\ x & x \leq ۱ \end{cases}$$

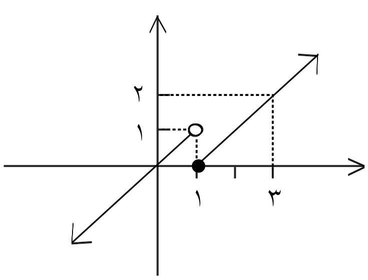
x	۱	۲
y	۰	۱

x	۱	۰
y	۱	۰

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to ۱^+} f(x) = ۰ \\ \lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to ۱} f(x) = \text{حد ندارد}$$

تابع در $x = ۱$ حد ندارد، زیرا حد راست و چپ در $x = ۱$ برابر نیست.

۱۹- با استفاده از نمودار، حاصل عبارت زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.

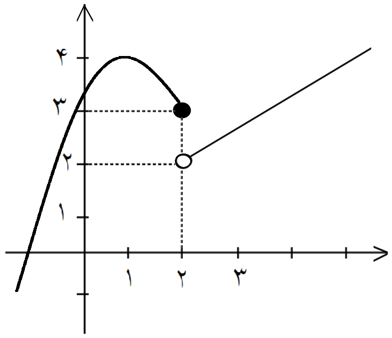


$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) - \lim_{x \to ۱^-} f(x) + f(۳)$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) - \lim_{x \to ۱^-} f(x) + f(۳) = ۰ - ۱ + ۲ = ۱$$

۲۰- با استفاده از نمودار زیر حدهای خواسته شده را (در صورت وجود) محاسبه کنید.



الف) $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$

« **پاسخ** »

الف) ۰/۲۵ $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = ۳$ ب) ۰/۲۵ $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۲$

ج) وجود ندارد $= \lim\limits_{x \to ۲} f(x)$ ۰/۲۵

۲۱- مقادیر b و a را در $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \geqslant -۱ \\ ax^۲ - ۱ & x < -۱ \end{cases}$ طوری تعیین نمایید که $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = ۱$ گردد.

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to -۱^+} f(x) = \lim_{x \to -۱^+} (ax+b) \quad ۰/۲۵ \quad = a\,(-۱) + b = -a + b \quad ۰/۲۵$$

$$\lim_{x \to -۱^-} f(x) = \lim_{x \to -۱^+} \left(ax^۲-۱\right) \quad ۰/۲۵ = a(-۱)^۲ - ۱ = a-۱ \quad ۰/۲۵ \Rightarrow \begin{cases} -a+b=۱ \\ a - ۱ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=۲ \ \ ۰/۲۵ \\ b=۳ \ \ ۰/۲۵ \end{matrix}$$

۲۲- با رسم نمودار تابع زیر در اطراف نقطه‌ی داده شده، وجود حد و حد راست و حد چپ را در نقطه‌ی $x_۰ = ۱$ بررسی کنید.

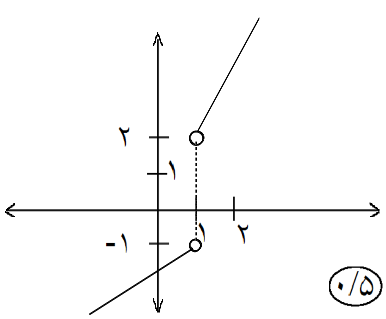
$$f(x) = \begin{cases} x - ۲ & x < ۱ \\ ۲x & x > ۱ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

۰/۲۵ ۱- = حدچپ

۰/۲۵ ۲ = حد راست

۰/۲۵ ۲ ≠ ۱ - : حد وجود ندارد.

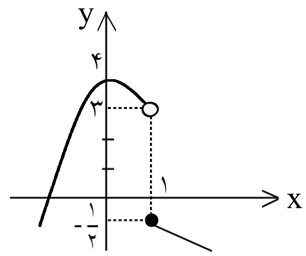


۰/۵

۲۳- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x & x \geq ۱ \\ ۴ - x^۲ & x < ۱ \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x = ۱$ بررسی کنید.

« **پاسخ** »

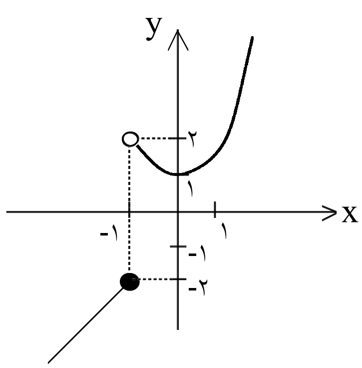
رسم سهمی ۰/۷۵   رسم خط ۰/۲۵



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \frac{-۱}{۲} \;\; ۰/۲۵ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = ۳ \;\; ۰/۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) \Rightarrow$$

تابع در $x = ۱$ حد ندارد ۰/۲۵

۲۴- شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.



الف) $\lim\limits_{x \to -۱^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to -۱^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰} f(x)$

د) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x)$

« **پاسخ** »

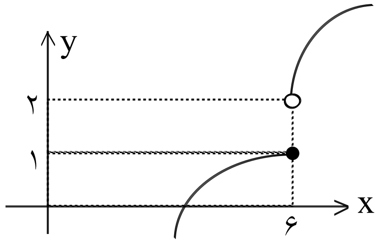
الف) ۲ ۰/۲۵   ب) -۲ ۰/۲۵   ج) ۱ ۰/۲۵   د) حد ندارد ۰/۲۵

۲۵- تابع $f(x) = \begin{cases} ax^۳ - ۲ & x < -۱ \\ ۲ax^۲ & x > -۱ \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع در $x = -۱$ حد داشته باشد.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -۱^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -۱^-} \left(ax^۳ - ۲\right) = -a - ۲ \;\; ۰/۵ \\ \lim\limits_{x \to -۱^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -۱^+} \left(۲ax^۲\right) = ۲a \;\; ۰/۲۵ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a = -a - ۲ \;\; ۰/۲۵ \;\; \Rightarrow a = \frac{-۳}{۲} \;\; ۰/۲۵$$

۲۶- با توجه به نمودار تابع $f(x)$، حاصل هر یک از حدهای زیر را محاسبه کنید.



الف) $\lim\limits_{x \to ۶^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to ۶^-} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x \to ۶} f(x)$

« **پاسخ** »

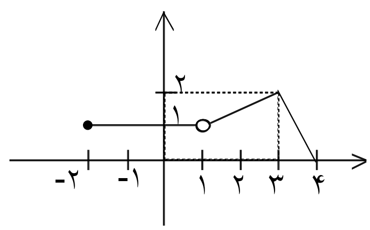
الف) $\lim\limits_{x \to ۶^+} f(x) = ۲$

ب) $\lim\limits_{x \to ۶^-} f(x) = ۱$

ج) $\lim\limits_{x \to ۶} f(x) =$ وجود ندارد

۲۷- با توجه به نمودار دادهشده به سؤال روبرو پاسخ دهید.

$\lim\limits_{x \to (-۲)^+} f(x)$



« **پاسخ** »

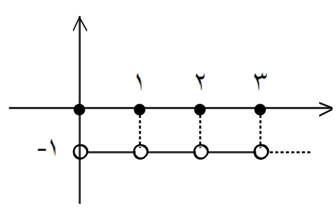
$\lim\limits_{x \to (-۲)^+} f(x) = ۱$

۲۸- نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = [x] + [-x]$ را رسم نموده و حدود زیر را حساب کنید.(در صورت وجود)

الف) $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$

« **پاسخ** »

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin z \end{cases}$$



الف) $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = -۱$

ب) $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = -۱$

ج) $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = -۱$

۲۹- حاصل حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \to ۲} \frac{\operatorname{Log}_{۲}^{x} - \operatorname{Log}_{x}^{۲}}{\operatorname{Log}_{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲}}$$

« **پاسخ** »

روش اول:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{\operatorname{Log}_{۲}^{x} - \operatorname{Log}_{x}^{۲}}{۲\operatorname{Log}_{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)} = \lim_{x \to ۲} \frac{\operatorname{Log}_{۲}^{x} - \frac{۱}{\operatorname{Log}_{۲}^{x}}}{۲\left(\operatorname{Log}_{۲}^{x} - \operatorname{Log}_{۲}^{۲}\right)} = \lim_{x \to ۲} \frac{\left(\operatorname{Log}_{۲}^{x}\right)^{۲} - ۱}{۲\operatorname{Log}_{۲}^{x}\left(\operatorname{Log}_{۲}^{x} - ۱\right)}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{\cancel{\left(\operatorname{Log}_{۲}^{x} - ۱\right)}\left(\operatorname{Log}_{۲}^{x} + ۱\right)}{۲\operatorname{Log}_{۲}^{x}\cancel{\left(\operatorname{Log}_{۲}^{x} - ۱\right)}} = \frac{۱ + ۱}{۲} = ۱$$

روش دوم (هوبیتال):

$$\operatorname{Log}_{۲}^{x} = t \Rightarrow \lim_{t \to ۱} \frac{t - \frac{۱}{t}}{۲(t - ۱)} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{t \to ۱} \frac{۱ + \frac{۱}{t^{۲}}}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

۳۰- حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x - \sqrt{x}}{(x - ۱)(x + ۲)} =$$

« **پاسخ** »

$$\underbrace{\lim_{x \to ۱} \frac{x^{۲} - x}{(x + ۲)(x - ۱)\left(x + \sqrt{x}\right)}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\lim_{x \to ۱} \frac{x\,(x - ۱)}{(x + ۲)(x - ۱)\left(x + \sqrt{x}\right)}}_{۰/۲۵} = \underbrace{\frac{+۱}{۶}}_{۰/۲۵}$$

۳۱- در هریک از حالت‌های زیر درباره‌ی حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

« **پاسخ** »

الف) حد $f+g$ تابع وجود ندارد.

ب) حد $f+g$ تابع وجود ندارد.

۳۲- اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = ۰$ و $\lim\limits_{x\to ۲} h(x) = -۱$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} (f(x)+h(x))$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} (h(x))^{۵}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{f(x)}{g(x)}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{g(x)}{f(x)}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۳f(x)}{g(x)-۵h(x)}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۱}{h(x)}$

« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} (f(x)+h(x)) = \lim\limits_{x\to ۲} f(x) + \lim\limits_{x\to ۲} h(x) = ۳+۰=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} (h(x))^{۵} = \left(\lim\limits_{x\to ۲} h(x)\right)^{۵} = (-۱)^{۵} = -۱$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد

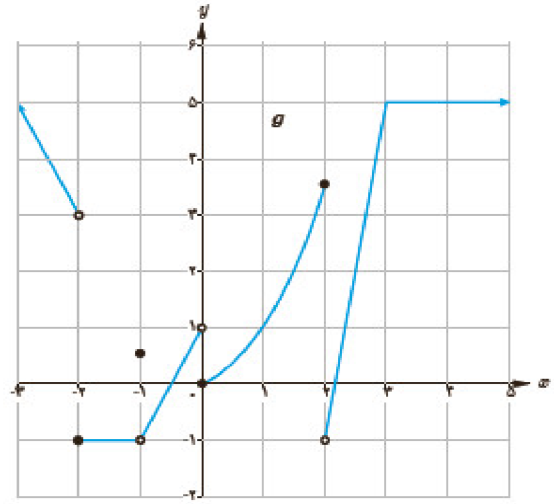
ت) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} f(x)} = \frac{۰}{۳} = ۰$

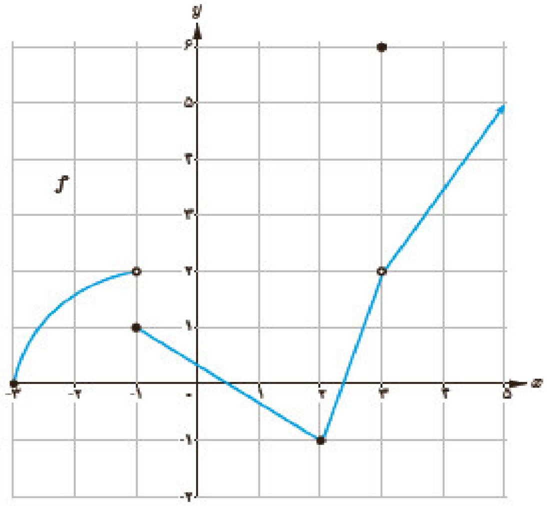
ث) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۳f(x)}{g(x)-۵h(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to ۲} ۳f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)-۵h(x)} = \frac{۳\lim\limits_{x\to ۲} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲} g(x)-۵\lim\limits_{x\to ۲} h(x)}$

$= \frac{۳\times ۳}{۰-۵(-۱)} = \frac{۹}{۵}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۱}{h(x)} = \frac{۱}{\lim\limits_{x\to ۲} h(x)} = \frac{۱}{-۱} = -۱$

۳۳- با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.





الف) $\lim\limits_{x \to ۳} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x \to ۳} g(x)$

ت) $\lim\limits_{x \to ۳} (f(x) + g(x))$

ث) $\lim\limits_{x \to -۱} (f(x) + g(x))$

ج) $\lim\limits_{x \to ۲} (۲f(x) + ۵g(x))$

چ) $\lim\limits_{x \to ۰} (f(x))^۴$

ح) $\lim\limits_{x \to ۰} (g(x))^۲$

خ) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

د) $\lim\limits_{x \to ۵} (f(x).g(x))$

« پاسخ »

الف) $\lim\limits_{x \to ۳} f(x) = ۲$

ب) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim\limits_{x \to ۳} g(x) = ۵$

ت) $\lim\limits_{x \to ۳} (f(x) + g(x)) = ۲ + ۵ = ۷$

ث) $\lim\limits_{x \to -۱} (f(x) + g(x))$ وجود ندارد

ج) $\lim\limits_{x \to ۲} (۲f(x) + ۵g(x))$ وجود ندارد

چ) $\lim\limits_{x \to ۰} (f(x))^۴ = \left(\dfrac{۱}{۳}\right)^۴$

ح) $\lim\limits_{x \to ۰} (g(x))^۲$ وجود ندارد

خ) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد

د) $\lim\limits_{x \to ۵} (f(x).g(x)) = ۵ \times ۵ = ۲۵$

۳۴- حاصل حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{x \to ۱} \frac{|x-۱|}{x-۱}$$

$$\lim_{x \to ۳} \frac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to ۱} \frac{|x-۱|}{x-۱} \qquad \lim_{x \to ۱^+} \frac{\cancel{x-۱}}{\cancel{x-۱}} = ۱ \qquad \lim \frac{-\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}} = -۱$$ حد ندارد

$$\lim_{x \to ۳} \frac{x^۲-۳x}{x^۲-۹} = \frac{۰}{۰} \qquad \lim_{x \to ۳} \frac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)} = \frac{x}{x+۳} = \frac{۱}{۲}$$

۳۵- برای تابع $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲-۱}{x-۱} & x \neq ۱ \\ ۳ & x = ۱ \end{cases}$

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار مقادیر زیر را حساب کنید.

$h(۱)$

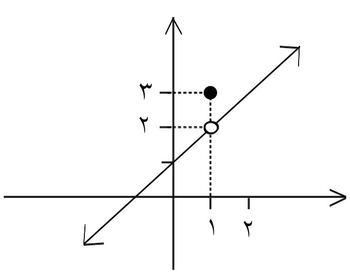
$\lim_{x \to ۱} h(x)$

« **پاسخ** »

الف)

$$x \neq ۱ \Rightarrow h(x) = \frac{x^۲-۱}{x-۱} = \frac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{(x-۱)}} \Rightarrow h(x) = x+۱$$

x	۱	۲
y	۲	۳



ب)

$h(۱) = ۳$

$\lim_{x \to ۱} h(x) = ۲$

۳۶- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{|x^۳ - ۱|}{x - ۱}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{|x + ۲| - |۴x - ۱|}{x^۲ - ۱}$

« **پاسخ** »

الف)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۱^+} \dfrac{x^۳ - ۱}{x - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱^+} \dfrac{\cancel{(x - ۱)}(x^۲ + x + ۱)}{\cancel{(x - ۱)}} = ۳ \\ \lim\limits_{x \to ۱^-} \dfrac{-(x^۳ - ۱)}{x - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱^-} \dfrac{-\cancel{(x - ۱)}(x^۲ + x + ۱)}{\cancel{x - ۱}} = -۳ \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{|x^۳ - ۱|}{x - ۱} =$ حد ندارد

ب)

$$\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x + ۲ - ۴x + ۱}{x^۲ - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱} \frac{-۳\cancel{(x - ۱)}}{\cancel{(x - ۱)}(x + ۱)} = \frac{-۳}{۲}$$

۳۷- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{\left|x^{۲} - ۴x + ۳\right|}{x^{۳} - ۱}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{|۲x + ۵| - |۸x - ۱|}{x^{۲} - ۱}$

« **پاسخ** »

الف) بهتر است برای تعیین علامت $x^{۲} - ۴x + ۳$ در همسایگی $x = ۱$ از جدول تعیین علامت استفاده کنیم.

x		۱^{-}	۱	۱^{+}	۳	
$x^{۲} - ۴x + ۳$	$+$		۰	$-$	۰	$+$

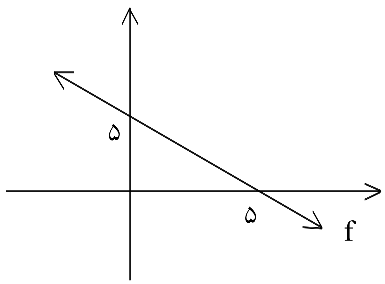
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۱^{+}} \dfrac{-\left(x^{۲} - ۴x + ۳\right)}{x^{۳} - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱^{+}} \dfrac{-\cancel{(x - ۱)}(x - ۳)}{\cancel{(x - ۱)}\left(x^{۲} + x + ۱\right)} = \dfrac{۲}{۳} \\[2ex] \lim\limits_{x \to ۱^{-}} \dfrac{\left(x^{۲} - ۴x + ۳\right)}{x^{۳} - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱^{-}} \dfrac{\cancel{(x - ۱)}(x - ۳)}{\cancel{(x - ۱)}\left(x^{۲} + x + ۱\right)} = \dfrac{-۲}{۳} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{\left|x^{۲} - ۴x + ۳\right|}{x^{۳} - ۱} =$ حد ندارد

ب)

$$\lim\limits_{x \to ۱} \frac{۲x + ۵ - (۸x - ۱)}{x^{۲} - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱} \frac{-۶\cancel{(x - ۱)}}{\cancel{(x - ۱)}(x + ۱)} = \frac{-۶}{۲} = ۳$$

۳۸- شکل زیر نمودار $f(x)$ است. حاصل $\lim\limits_{x \to ۵} \dfrac{x^۲ - ۵x}{f(x)}$ را حساب کنید.

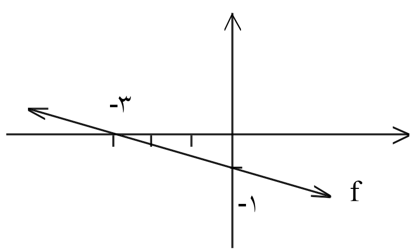


« **پاسخ** »

f یک تابع خطی گذرنده از $A(۰\ ,\ ۵)$ و $B(۵\ ,\ ۰)$ است.

$$f(x) = ax + b$$
$$A(۰\ ,\ ۵) \Rightarrow a(۰) + b = ۵ \Rightarrow b = ۵$$
$$B(۵\ ,\ ۰) \Rightarrow a(۵) + b = ۰ \xrightarrow{b = ۵} a = -۱ \Rightarrow f(x) = -x + ۵$$
$$\lim_{x \to ۵} \frac{x^۲ - ۵x}{f(x)} = \lim_{x \to ۵} \frac{x\cancel{(x - ۵)}}{-\cancel{(x - ۵)}} = \lim_{x \to ۵} \frac{x}{-۱} = -۵$$

۳۹- شکل زیر نمودار $f(x)$ است. حاصل $\lim\limits_{x \to -۱} \dfrac{f^{-۱}(x)}{x^۳ + ۱}$ را حساب کنید.



« **پاسخ** »

f یک تابع خطی گذرنده از $A(۰\ ,\ -۱)$ و $B(-۳\ ,\ ۰)$ است.

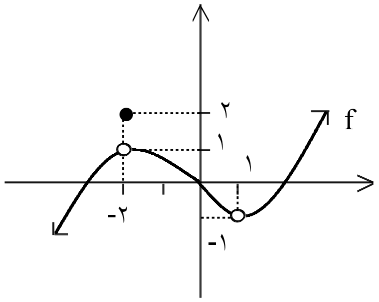
$$f(x) = ax + b$$
$$A(۰\ ,\ -۱) \Rightarrow a(۰) + b = -۱ \Rightarrow b = -۱$$
$$B(-۳\ ,\ ۰) \Rightarrow a(-۳) + b = ۰ \xrightarrow{b = -۱} -۳a = ۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow f(x) = -\frac{۱}{۳}x - ۱$$
$$y = -\frac{۱}{۳}x - ۱ \Rightarrow y + ۱ = -\frac{۱}{۳}x \xrightarrow{\times(-۳)} -۳y - ۳ = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = -۳x - ۳ \Rightarrow f^{-۱}(x) = -۳x - ۳$$
$$\lim_{x \to -۱} \frac{f^{-۱}(x)}{x^۳ + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{-۳\cancel{(x + ۱)}}{\cancel{(x + ۱)}\left(x^۲ - x + ۱\right)} = \lim_{x \to -۱} \frac{-۳}{x^۲ - x + ۱} = \frac{-۳}{۱ + ۱ + ۱} = -۱$$

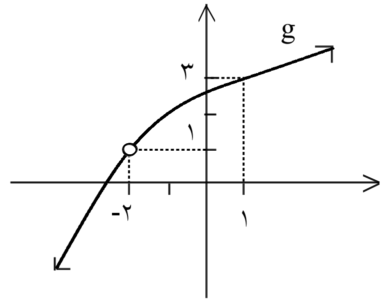
۴۰- نمودار توابع f و g به صورت زیر است:

حاصل هریک از حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} (۲f(x) - g(x))$

ب) $\lim\limits_{x \to -۲} (f(x) - ۳g(x))$





« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x \to ۱} (۲f(x) - g(x)) = ۲\lim\limits_{x \to ۱} f(x) - \lim\limits_{x \to ۱} g(x) = ۲(-۱) - ۳ = -۵$

ب) $\lim\limits_{x \to -۲} (f(x) - ۳g(x)) = \lim\limits_{x \to -۲} f(x) - ۳\lim\limits_{x \to -۲} g(x) = ۱ - ۳(۱) = -۲$

۴۱- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۸} \dfrac{x + ۷}{\sqrt{x + ۱}}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۳^-} (۲ + [x])$

ج) $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{x^۲ - ۱۶}{x^۲ - ۵x + ۴}$

د) $\lim\limits_{x \to \frac{۳\pi}{۲}} \dfrac{۱ + \operatorname{Sin}^۳ x}{\operatorname{Cos}^۲ x}$

« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x \to ۸} \dfrac{x + ۷}{\sqrt{x + ۱}} = \dfrac{۸ + ۷}{\sqrt{۸ + ۱}} = \dfrac{۱۵}{۳} = ۵$

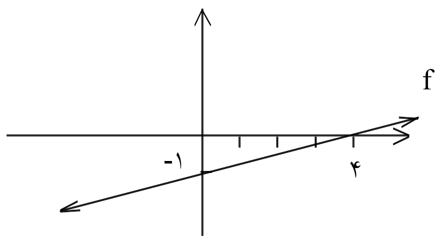
ب) $\lim\limits_{x \to ۳^-} (۲ + [x]) = ۲ + ۲ = ۴$

ج) $\lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{x^۲ - ۱۶}{x^۲ - ۵x + ۴} = \lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{\cancel{(x - ۴)}(x + ۴)}{\cancel{(x - ۴)}(x - ۱)} = \lim\limits_{x \to ۴} \dfrac{x + ۴}{x - ۱} = \dfrac{۸}{۳}$

د) $\lim\limits_{x \to \frac{۳\pi}{۲}} \dfrac{۱ + \operatorname{Sin}^۳ x}{\operatorname{Cos}^۲ x} = \lim\limits_{x \to \frac{۳\pi}{۲}} \dfrac{\cancel{(۱ + \operatorname{Sin} x)}\left(۱ - \operatorname{Sin} x + \operatorname{Sin}^۲ x\right)}{\cancel{(۱ + \operatorname{Sin} x)}(۱ - \operatorname{Sin} x)} = \lim\limits_{x \to \frac{۳\pi}{۲}} \dfrac{۱ - \operatorname{Sin} x + \operatorname{Sin}^۲ x}{۱ - \operatorname{Sin} x}$

$= \dfrac{۱ + ۱ + ۱}{۱ + ۱} = \dfrac{۳}{۲}$

۴۲- اگر نمودار تابع خطی $f(x)$ به صورت زیر باشد، $\lim\limits_{x \to ۸} \left(f(x) - f^{-۱}(x)\right)$ را حساب کنید.



« پاسخ »

f یک تابع خطی است. بنابراین داریم:

$$f(x) = ax + b$$

$$A(۰\,,\,-۱) \Rightarrow a(۰) + b = -۱ \Rightarrow b = -۱$$

$$B(۴\,,\,۰) \Rightarrow a(۴) + b = ۰ \xrightarrow{b = -۱} ۴a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴} \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۴}x - ۱$$

$$y = \frac{۱}{۴}x - ۱ \Rightarrow y + ۱ = \frac{۱}{۴}x \xrightarrow{\times ۴} ۴y + ۴ = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-۱}(x) = ۴x + ۴$$

$$\lim\limits_{x \to ۸} \left(f(x) - f^{-۱}(x)\right) = \lim\limits_{x \to ۸} f(x) - \lim\limits_{x \to ۸} f^{-۱}(x) = \left(\frac{۱}{۴}(۸) - ۱\right) - (۳۲ + ۴) = ۱ - ۳۶ = -۳۵$$

۴۳- اگر $f(x) = \left(۲x^۲ + ax + b\right)[x]$ در $x = ۷$ و $x = -۳$ دارای حد باشد، $a\,,\,b$ را حساب کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است)

« پاسخ »

باید معادله $۲x^۲ + ax + b = ۰$ به ازای $x = ۷$ و $x = -۳$ صفر شود. بنابراین:

$$\begin{cases} x = -۳ \Rightarrow x + ۳ = ۰ \\ x = ۷ \Rightarrow x - ۷ = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\times} (x + ۳)(x - ۷) = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۲۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۸x - ۴۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۸ \\ b = -۴۲ \end{cases}$$

۴۴- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to \frac{۵\pi}{۶}} ۲\sin x + ۱$ ب) $\lim\limits_{x \to ۰} \sqrt{x}$

« پاسخ »

الف) $\lim\limits_{x \to \frac{۵\pi}{۶}} ۲\sin x + ۱ = ۲\sin\left(\frac{۵\pi}{۶}\right) + ۱ = ۲ \times \sin\left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right) + ۱ = ۲ \times \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) + ۱$

$= ۲ \times \frac{۱}{۲} + ۱ = ۲$

ب) $\lim\limits_{x \to ۰} \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to ۰^+} \sqrt{x} = ۰ \\ \lim\limits_{x \to ۰^-} \sqrt{x} = \text{حد چپ ندارد} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰} \sqrt{x} = \text{حد ندارد}$

۴۵- اگر $f(x) = \left(۳x^۲ - ax + ۲b - ۱\right)[x]$ در $x = ۱$ و $x = ۵$ دارای حد باشد، a , b را حساب کنید.

« پاسخ »

باید معادله $۳x^۲ - ax + ۲b - ۱ = ۰$ به ازای $x = ۷$ و $x = -۳$ صفر شود بنابراین:

$\begin{cases} x = ۱ \Rightarrow x - ۱ = ۰ \\ x = ۵ \Rightarrow x - ۵ = ۰ \end{cases} \xrightarrow{\times} (x - ۱)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۵ = ۰ \xrightarrow{\times ۳} ۳x^۲ - ۱۸x + ۱۵ = ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} -a = -۱۸ \Rightarrow a = ۱۸ \\ ۲b - ۱ = ۱۵ \Rightarrow b = ۸ \end{cases}$

۴۶- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x+۸}-۳}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{\sqrt[۳]{x+۵}-۲}{x-\sqrt{x+۶}}$

« **پاسخ** »

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x+۸}-۳}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}\times\dfrac{\sqrt{x+۸}+۳}{\sqrt{x+۸}+۳}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}\left(\sqrt{x+۸}\right)+۳}{\cancel{(x+۸-۹)}\left(\sqrt{x}+۱\right)}$

$=\dfrac{۶}{۲}=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{\sqrt[۳]{x+۵}-۲}{x-\sqrt{x+۶}}\times\dfrac{\sqrt[۳]{(x+۵)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۵}+۴}{\sqrt[۳]{(x+۵)^۲}\times ۲\sqrt[۳]{x+۵}+۴}\times\dfrac{x+\sqrt{x+۶}}{x+\sqrt{x+۶}}$

$=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{(x+۵-۸)\left(x+\sqrt{x+۶}\right)}{\left(x^۲-x-۶\right)\left(\sqrt[۳]{(x+۵)^۲}+۲\sqrt[۳]{x+۵}+۲\right)}$

$=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\cancel{(x-۳)}\left(x+\sqrt{x+۶}\right)}{\cancel{x-۳}(x+۲)\left(\sqrt[۳]{(x+۵)^۲}+۲\sqrt{۳x+۵}^{۲}+۴\right)}=\dfrac{۶}{۵\times ۱۲}=\dfrac{۱}{۱۰}$

۴۷- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۲} \dfrac{x - \sqrt{x + ۲}}{x^{۲} - ۴}$ ب) $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{\sqrt[۳]{x + ۵} - ۲}{x^{۲} - ۹}$

« **پاسخ** »

الف) $$\lim_{x \to ۲} \frac{x - \sqrt{x + ۲}}{x^{۲} - ۴} \times \frac{x + \sqrt{x + ۲}}{x + \sqrt{x + ۲}} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^{۲} - x - ۲}{\left(x^{۲} - ۴\right)\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)}$$

$$= \lim_{x \to ۲} \frac{\cancel{(x - ۲)}(x + ۱)}{\cancel{(x - ۲)}(x + ۲)\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)} = \lim_{x \to ۲} \frac{x + ۱}{(x + ۲)\left(x + \sqrt{x + ۲}\right)} = \frac{۳}{۴ \times ۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

ب) $$\lim_{x \to ۳} \frac{\sqrt[۳]{x + ۵} - ۲}{x^{۲} - ۹} \times \frac{\sqrt[۳]{(x + ۵)^{۲}} + ۲\sqrt[۳]{x + ۵} + ۴}{\sqrt[۳]{(x + ۵)^{۲}} + ۲\sqrt[۳]{x + ۵} + ۴}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{\cancel{x + ۵ - ۸}}{\cancel{(x - ۳)}(x + ۳)\left(\sqrt[۳]{(x + ۵)^{۲}} + ۲\sqrt[۳]{x + ۵} + ۴\right)}$$

$$= \lim_{x \to ۳} \frac{۱}{(x + ۳)\left(\sqrt[۳]{(x + ۵)^{۲}} + ۲\sqrt[۳]{x + ۵} + ۴\right)} = \frac{۱}{۶ \times ۱۲} = \frac{۱}{۷۲}$$

۴۸- حد تابع زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x^{۲}-۹}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{x^{۲}-۹} \times \frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳) \quad ۰/۲۵}{(x-۳)(x+۳)\left(\sqrt{x+۱}+۲\right) \quad ۰/۲۵} = \frac{۱}{۲۴} \quad ۰/۲۵$$

۴۹- حد زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x \to ۵} \frac{۲ - \sqrt{x - ۱}}{x^۲ - ۶x + ۵}$$

« پاسخ »

$$\frac{\cdot}{\cdot} \to \text{رفع ابهام} = \lim_{x \to ۵} \frac{۲ - \sqrt{x - ۱}}{x^۲ - ۶x + ۵} \times \frac{۲ + \sqrt{x - ۱}}{۲ + \sqrt{x - ۱}} = \lim_{x \to ۵} \frac{\overbrace{۴ - x + ۱}^{۵ - x}}{(x - ۵)(x - ۱)\left(۲ + \sqrt{x - ۱}\right)}$$

$$= \lim_{x \to ۵} \frac{-(x - ۵)}{(x - ۵)(x - ۱)\left(۲ + \sqrt{x - ۱}\right)} = \frac{-۱}{۴ \times ۴} = \frac{-۱}{۱۶}$$

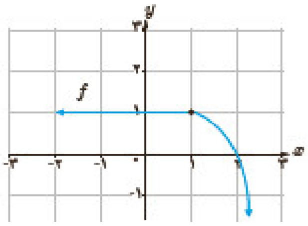
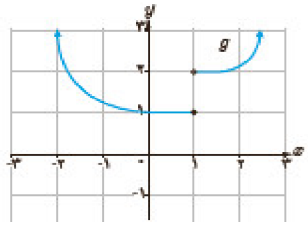
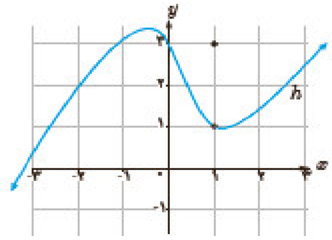
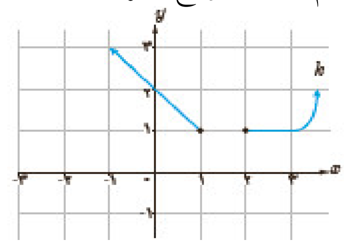
۵۰- حاصل حد زیر را به‌دست آورید:

$$\lim_{x \to ۱} \frac{(x - ۱)\sqrt[۳]{۲۸ - x}}{x^۲ - ۱}$$

« پاسخ »

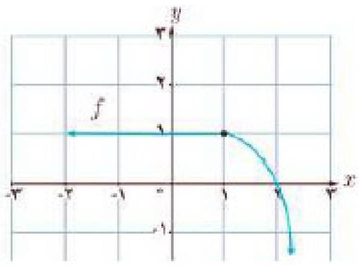
$$\text{حد مورد نظر} = \lim_{x \to ۱} \frac{\cancel{(x - ۱)}\sqrt[۳]{۲۸ - x}}{\cancel{(x - ۱)}(x + ۱)} = \frac{\sqrt[۳]{۲۷}}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

۵۱- کدام‌یک از توابع زیر در $x = ۱$ پیوسته است؟

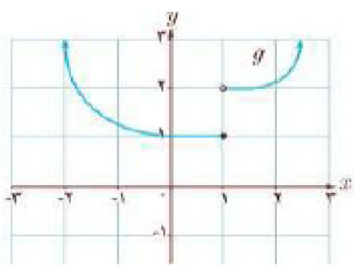
« پاسخ »

تابع $f(x)$ در $x = ۱$ پیوسته است زیرا:



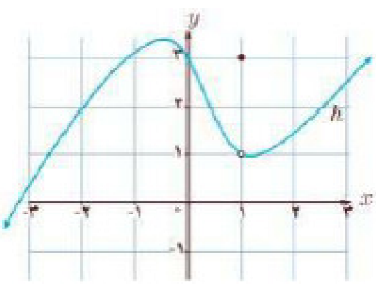
$$\lim_{x \to ۱} f(x) = f(۱)$$

تابع $g(x)$ در $x = ۱$ ناپیوسته است زیرا:



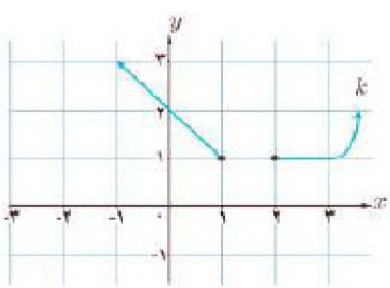
$$\lim_{x \to ۱^+} g(x) \neq \lim_{x \to ۱^-} g(x)$$

تابع $h(x)$ در $x = ۱$ ناپیوسته است زیرا:



$$\lim_{x \to ۱} h(x) \neq h(۱)$$

تابع $k(x)$ در $x = ۱$ ناپیوسته است زیرا:



$\lim_{x \to ۱^+} k(x)$ وجود ندارد , $\lim_{x \to ۱^-} k(x) = ۱$

۵۲- پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -۲x + ۲ & x \le ۰ \\ x^۲ + ۲ & x > ۰ \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x = ۰$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

« **پاسخ** »

تابع $f(x)$ در نقطه $x = ۰$ پیوسته است زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۰^+} \left(x^۲ + ۲\right) = (۰)^۲ + ۲ = ۲ \\ \lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ۰^-} (-۲x + ۲) = -۲(۰) + ۲ = ۲ \\ f(۰) = -۲(۰) + ۲ = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۰} f(x) = f(۰)$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است زیرا:

$$\lim\limits_{x \to x_۰} f(x) = f(x_۰)$$

۵۳- مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۱}{x^۲ - ۳x + ۲} & x \ne ۱ \\ a + ۲ & x = ۱ \end{cases}$ در نقطه $x = ۱$ پیوسته باشد.

« **پاسخ** »

$$f(۱) = \lim\limits_{x \to ۱} f(x)$$

$$f(۱) = a + ۲$$

$$\lim\limits_{x \to ۱} f(x) = \lim\limits_{x \to ۱} \frac{(x - ۱)(x + ۱)}{(x - ۱)(x - ۲)} = -۲ \Rightarrow a + ۲ = -۲ \Rightarrow a = -۴$$

۵۴- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه ی $x_{\circ} = ۲$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + ۲b}{x^۲ - ۲} & ; \ x > ۲ \\ ۲a + x + ۱ & ; \ x = ۲ \\ ۲b + ۵ & ; \ x < ۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$$f(۲) = ۲a + ۲ + ۱ = ۲a + ۳$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x + ۲b}{x^۲ - ۲} = \frac{۲ + ۲b}{۲} = b + ۱$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۲b + ۵$$

$$۲a + ۳ = b + ۱ = ۲b + ۵ \Rightarrow b + ۱ = ۲b + ۵ \Rightarrow b = -۴$$

$$۲a + ۳ = ۲b + ۵ \Rightarrow ۲a + ۳ = -۳ \Rightarrow a = -۳$$

۵۵- در تابع زیر a را طوری تعیین کنید که تابع در $x = ۱$ پیوسته باشد. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

« **پاسخ** »

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

$$k(۱) = (۱ - a)[۱] = ۱ - a$$

$$\lim_{x \to (۱)^+} k(x) = \lim_{x \to (۱)^+} ([x] - a)[x] = (۱ - a)(۱) = ۱ - a$$

$$\lim_{x \to (۱)^-} k(x) = \lim_{x \to (۱)^-} ([x] - a)[x] = (۰ - a)(۰) = ۰$$

چون $k(۱) = \lim_{x \to (۱)^-} k(x) = \lim_{x \to (۱)^+} k(x) \Rightarrow ۱ - a = ۰ \Rightarrow a = ۱$

۵۶- اگر تابع f با ضابطه‌ی زیر در $x = ۲$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را به دست آورید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{۲} - ۴}{x - ۲} + ax & x > ۲ \\ ۳ & x = ۲ \\ b[x] - ۳ & x < ۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$x = ۲$ شرط پیوستگی در : $\lim\limits_{x \to ۲^{+}} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^{-}} f(x) = f(۲)$

$$\lim_{x \to ۲^{+}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{+}} \frac{x^{۲} - ۴}{x - ۲} + ax = \lim_{x \to ۲^{+}} \frac{\cancel{(x - ۲)}(x + ۲)}{\cancel{(x - ۲)}} + ax = ۴ + ۲a$$

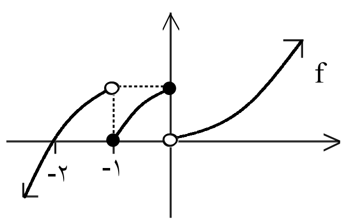
$$f(۲) = ۳$$

$$\lim_{x \to ۲^{-}} f(x) = \lim_{x \to ۲^{-}} b[x] - ۳ = b - ۳$$

$$b - ۳ = ۳ \Rightarrow b = ۶$$

$$۴ + ۲a = ۳ \Rightarrow ۲a = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

۵۷- نمودار تابع f به صورت مقابل است. کدام گزینه درست و کدام گزینه نادرست است؟ چرا؟



الف) f در بازه $[۰ , +\infty)$ پیوسته است.

ب) f در بازه $[-۱ , ۰]$ پیوسته است.

« **پاسخ** »

الف) نادرست است. زیرا f در $x = ۰$ پیوستگی راست ندارد.

ب) درست است. زیرا f در بازه‌ی $(-۱ , ۰)$ پیوسته و در $x = -۱$ پیوستگی راست و $x = ۰$ پیوستگی چپ دارد.

۵۸- در تابع مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه $x=۱$ پیوسته باشد.

$$f(x)= \begin{cases} a\ |x|+۱ & x\le ۱ \\ x^{۲}+۲ax+۲ & x>۱ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to ۱^{+}} x^{۲}+۲ax+۲ = ۱+۲a+۲۲ = ۳+۲a = f(۱) \ (۰/۵) \\ &\lim_{x\to ۱^{-}} a\ |x|+۱=a+۱ \ (۰/۲۵) \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۳+۲a = a+۱ \Rightarrow a=-۲ \ (۰/۲۵)$$

۵۹- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & 0 \leqslant x < 1 \\ [x] + a & x \geqslant 1 \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \underbrace{\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}}_{0/25} = \underbrace{\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1}}_{0/25} = \frac{1}{2} \quad 0/25$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} [x] + a = 1 + a \quad 0/25$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \quad 0/25 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad 0/25$$

۶۰- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در نقطه $x_0 = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & x > 0 \\ a + 1 & x = 0 \\ [x+2] + b & x < 0 \end{cases}$$

« **پاسخ** »

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = 2 \quad 0/5$$

$$f(0) = a + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad 0/25$$

$$\lim_{x \to 0^-} [x+2] + b = \lim_{x \to 0^-} [x] + 2 + b = -1 + 2 + b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1 \quad 0/25$$

$$0/25$$