



فصل ۲: حساب اعداد طبیعی تاپ تنظیم و ویرایش: سوده شفيعی

درس اول: یادآوری عددهای اول

یادآوری:

۱) **شمارنده (مقسوم علیه) یک عدد:** شمارنده ها همان اعدادی هستند که عدد داده شده بر آنها بخشپذیر می شود. مانند: شمارنده های عدد ۱۵ اعداد ۱، ۳، ۵ و ۱۵ هستند

۲) **تعریف عددهای اول:** هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که هیچ شمارنده طبیعی به جز خودش و یک نداشته باشد، عدد اول نامیده می شود. مانند عدد ۵ و ۷ زیرا: ۵ و ۱ = شمارنده های ۵ و ۷ و ۱ = شمارنده های ۷

۳) **تعریف عدد های مرکب:** هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که بتوان آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت، عدد مرکب می نامند. مانند: $۳۰ = ۵ \times ۶ = ۳ \times ۱۰ = ۲ \times ۱۵$ و $۶ = ۲ \times ۳$

نکته های مهم:

۱. عدد یک، نه اول است و نه مرکب. (زیرا فقط یک شمارنده دارد؛ یعنی خود یک)

۲. هر عدد اول دقیقا دو شمارنده دارد.

۳. هر عدد مرکب بیش از دو شمارنده دارد.

۴. عدد یک، شمارنده ی همه عددهای طبیعی است.

۵. بزرگترین شمارنده هر عدد، خود عدد است.

مضرب های طبیعی یک عدد: برای نوشتن مضرب های طبیعی یک عدد، کافی است عدد داده شده را به ترتیب در اعداد طبیعی ضرب کنیم تا مضرب های طبیعی آن بدست بیاید.

مثال ۱: مضرب های طبیعی عددهای زیر را بنویسید.

$$\dots \text{ و } ۲۰ \text{ و } ۱۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۵ = \dots \text{ و } ۵ \times ۴ \text{ و } ۵ \times ۳ \text{ و } ۵ \times ۲ \text{ و } ۵ \times ۱ = \text{ مضرب های طبیعی } ۵$$

$$\dots \text{ و } ۲۴ \text{ و } ۱۸ \text{ و } ۱۲ \text{ و } ۶ = \text{ مضرب های طبیعی } ۶$$

با توجه به مثال بالا می توان نکته های زیر را نتیجه گرفت:

۱. فقط اولین مضرب هر عدد اول، عددی اول است و بقیه مضرب های آن مرکب هستند. (مثلا ۵ عددی اول است پس اولین مضرب آن یعنی خود ۵، اول و بقیه مضرب های آن یعنی \dots و ۲۰ و ۱۵ و ۱۰ مرکب هستند.)

۲. همه مضرب های یک عدد مرکب ، مرکب هستند. (مثلا ۶ عددی مرکب است پس همه مضرب های آن مرکب هستند).

به این ترتیب: اعداد طبیعی به سه بخش تقسیم می شوند: عدد یک ، عدد های اول ، عدد های مرکب

مثال ۲: الف- عدد ۱۰ چند مضرب دارد؟ بی شمار

ب- چند تا از مضرب های آن عدد اول هستند؟ هیچ کدام؛ زیرا خود ۱۰ عددی مرکب است، پس همه مضرب های آن نیز مرکب اند.

ج- تنها مضرب اول عدد ۲۳ کدام است؟ خود عدد ۲۳

تعداد شمارنده های یک عدد محدود است اما تعداد مضرب های آن بی شمار؛

نکته مهم

دو عدد متباین (نسبت به هم اول): اگر ب.م.م (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) دو عدد برابر یک باشد، می گوئیم دو عدد نسبت به هم اول هستند.

مثال ۳: عدد های ۶ و ۳۵ نسبت به هم اول هستند؛ زیرا:

$$۳۵ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۱ = \text{شمارنده های } ۳۵ \quad \longrightarrow \quad ۶ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱ = \text{شمارنده های } ۶ \quad \longrightarrow \quad (۳۵ \text{ و } ۶) = ۱$$

نکته های مهم؛

۱. هر دو عدد اول متمایز نسبت به هم اول هستند. مثال: $(۱۱ \text{ و } ۲۳) = ۱$

۲. هر دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول هستند. مثال: $(۳۱ \text{ و } ۳۲) = ۱$

۳. عدد یک و هر عدد طبیعی بزرگتر از یک نسبت به هم اول هستند. مثال: $(۱ \text{ و } ۲۵) = ۱$

۴. اگر دو عدد طبیعی نسبت به هم اول باشند، ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) آنها از حاصل ضرب آن دو عدد بدست

می آید. مثال: اگر $(۳ \text{ و } ۴) = ۱$ ← ک.م.م: $۳ \times ۴ = ۱۲ = [۳ \text{ و } ۴]$

مثال ۴: الف- سه عدد مرکب بنویسید که غیر از ۲ و ۷ شمارنده اول دیگری نداشته باشند.

چون ۲ و ۷ هر دو شمارنده های اول این اعداد هستند پس باید آنها را در هم ضرب کنیم و چون غیر از ۲ و ۷ شمارنده اول دیگری ندارند، پس برای ساخت عدد های بعدی باید به تعداد دلخواه ۲ و ۷ را در هم ضرب کنیم.

$$۲ \times ۷ = ۱۴$$

$$۲ \times ۲ \times ۷ = ۲۸$$

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۷ = ۵۶$$

$$۲ \times ۷ \times ۷ = ۹۸$$

ب- آیا این عددها نسبت به عددی که شمارنده های اول آن ۷ و ۱۳ باشند، اول است؟

خیر- زیرا شمارنده مشترک ۷ را دارند. پس نسبت به هم اول نیستند.

مثال ۵: اگر تعداد عدد های اول کمتر از ۳۵، ۱۱ عدد باشند، تعداد عدد های مرکب کمتر از ۳۵، چند تا است؟ چرا؟

عدد های طبیعی سه بخش می شوند: یک، عدد اول، عدد مرکب. در اینجا از ۳۵ عدد، ۱۱ عدد، اول هستند و یکی دیگر از آن ۳۵ عدد، عدد یک است (که نه اول و نه مرکب است). در نتیجه $(1+11=12)$ عدد از ۳۵ عدد مرکب نیستند،

$$\text{پس تعداد عدد های مرکب کمتر از ۳۵: } 35-12=23$$

مثال ۶: مجموع دو عدد اول ۲۵، است. حاصل ضرب آن دو عدد را بدست آورید.

هرگاه مجموع یا تفاضل دو عدد طبیعی، عددی فرد باشد یکی از آنها زوج و دیگری فرد بوده است. در اینجا چون ذکر شده مجموع دو عدد اول، پس می نویسیم: $(25 = \text{عدد زوج اول} + \text{عدد فرد اول})$ و چون تنها عدد زوج اول عدد ۲ می باشد؛ پس داریم:

$$\boxed{23} + \boxed{2} = 25 \quad \longrightarrow \quad 23 \times 2 = 46$$

مثال ۷: عدد های ۱۵ و ۲۱ دو شمارنده یک عدد هستند. شش شمارنده دیگر این عدد را بنویسید.

$$\begin{cases} 15=3 \times 5 \\ 21=3 \times 7 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{دیگر های شمارنده}} \quad 1 \text{ و } 3 \text{ و } 5 \text{ و } 7 \text{ و } 35 \text{ و } 105$$

$$5 \times 7 = 35$$

$$3 \times 5 \times 7 = 105$$

توجه کنید که یک شمارنده همه عدد ها است و چون در ساختار ۱۵ و ۲۱ عدد های ۳ و ۵ و ۷ وجود دارد پس در واقع در ساختار عدد اصلی هم باید وجود داشته باشند و در نهایت حاصل ضرب این عدد ها (یعنی ۳ و ۵ و ۷) نیز در ساختار عدد اصلی وجود دارد.



۱. الف- چهار عدد مرکب بنویسید که شمارنده اولی غیر از ۳ و ۵ نداشته باشند.

ب- آیا این عدد ها نسبت به عددی که شمارنده های اول آن ۲ و ۱۱ باشند، اول است؟ چرا؟

۲. اگر تعداد عدد های اول کمتر از ۴۷، ۱۴ عدد باشد، تعداد عدد های مرکب چند تا است؟ چرا؟

۳. تفاضل (اختلاف) دو عدد اول ۴۵ است. آن دو عدد را بیابید و مجموع آنها را حساب کنید.

۴. دو عدد ۲۲ و ۳۵ نسبت به هم اول هستند. ک.م.م آنها را بدست آورید .

۵. ب.م.م عدد های زیر را بدست آورید .

$$(۱۶ \text{ و } ۱۵) =$$

$$(۴ \text{ و } ۲۰) =$$

$$(۲۳ \text{ و } ۲۹) =$$

$$(۱۸ \text{ و } ۴۵) =$$

$$(۷۷ \text{ و } ۵۵) =$$

$$(۱۸ \text{ و } ۱) =$$

۶. عدد های ۱۴ و ۶ دو شمارنده یک عدد هستند . شش شمارنده دیگر برای این عدد بنویسید .



درس دوم : تعیین اعداد اول

یادآوری چند قاعده بخشپذیری:

۱. **بخشپذیری بر ۲:** عددی بر ۲ بخشپذیر است که رقم یکان آن ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ باشد. (یا زوج باشد)

۲. **بخشپذیری بر ۳:** عددی بر ۳ بخشپذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخشپذیر باشد.

۳. **بخشپذیری بر ۵:** عددی بر ۵ بخشپذیر است که رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد.

برای تعیین عدد های اول از روش غربال استفاده می کنیم .

در این روش ، در واقع عدد های غیر اول را خط می زنیم تا عدد های اول باقی بمانند . به این ترتیب که :

۱. ابتدا عدد یک را خط می زنیم . (زیرا یک نه اول است و نه مرکب)

۲. عدد ۲ ، اول است و همه مضرب های آن بجز خود ۲ ، مرکب هستند . پس : همه مضرب های عدد ۲ را ، به جز خود ۲ ، خط می زنیم .

۳. عدد ۳ ، اول است . تمام مضرب های عدد ۳ را ، به جز خود ۳ خط می زنیم .

و به همین ترتیب خط زدن را تا عدد اولی که مربع (توان دوم) آن بین عدد های نوشته شده نباشد ، ادامه می دهیم .

دقت کنید : در اینجا اولین مضرب مرکب هر عدد اول که برای اولین بار خط می خورد ، توان دوم آن عدد اول است .

مثلا اولین مضرب مرکب ۵ که برای اولین بار خط می خورد ، $5^2 = 25$ می باشد و در نهایت اعداد خط نخورده باقی مانده ، اول هستند .

مثال ۱: می خواهیم عدد های اول بین ۱ تا ۳۰ را بیابیم.

۱. ابتدا عدد یک خط می خورد.

~~۱~~ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰

۱۱ ۱۲ ۱۳ ۱۴ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۹ ۲۰

۲۱ ۲۲ ۲۳ ۲۴ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۸ ۲۹ ۳۰

۲. عدد ۲ اول است پس اولین مضرب مرکب ۲ که خط می خورد ، مربع ۲ یعنی ۴ می باشد و بعد از آن می توان گفت

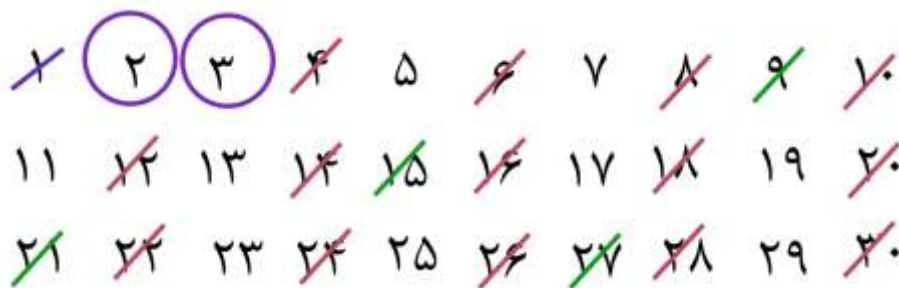
بقیه ی مضرب های مرکب ۲ را به صورت ۲ تا ۲ تا بعد از ۴ خط می زنیم . (یعنی ... و ۸ و ۶ و ۴)

~~۱~~ ۲ ۳ ~~۴~~ ۵ ~~۶~~ ۷ ~~۸~~ ۹ ~~۱۰~~

۱۱ ~~۱۲~~ ۱۳ ~~۱۴~~ ۱۵ ~~۱۶~~ ۱۷ ~~۱۸~~ ۱۹ ~~۲۰~~

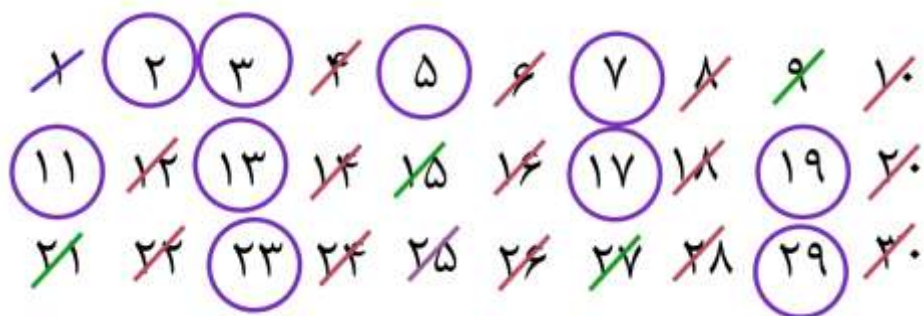
۲۱ ~~۲۲~~ ۲۳ ~~۲۴~~ ۲۵ ~~۲۶~~ ۲۷ ~~۲۸~~ ۲۹ ~~۳۰~~

۳. عدد ۳ اول است و مضرب های مرکب آن که هنوز خط نخورده اند را با شروع از ۹ (یعنی مربع عدد ۳) به صورت ۳ تا



تا خط می زنیم .

۴. خط زدن را تا مربع عدد ۵، یعنی ۲۵ ادامه می دهیم. زیرا بعد از آن، مربع عدد ۷ را داریم که ۴۹ می شود و چون ۴۹ از ۳۰ بزرگتر است پس کار خط زدن عدد های مرکب تمام می شود و عدد های باقیمانده که دورشان خط کشیده شده، همه اول هستند.



مثال ۲: عدد های اول بین ۳۰ تا ۵۰ را با روش غربال بنویسید.

راهنمایی: دقت کنید در اینجا ابتدای کار ما عدد یک نیست. در نتیجه قطعا اولین مضرب عدد اول ۲ هم که خط می خورد عدد ۴ نیست. در این سوال ها می توانید از قوانین بخش پذیری برای یافتن اولین مضرب مرکب عدد اول (در اینجا عدد ۲) استفاده کنید.

توجه داشته باشید که در این سوال ها هم برای بعضی از عدد های اول، اولین مضرب مرکب همان توان دوم عدد اول است. در اینجا اولین مضرب ۲ که خط می خورد عدد ۴ می باشد.

۱. مضرب های عدد اول ۲ را خط می زنیم. زیرا: $2^2 = 4 < 49$



در اینجا اولین مضرب ۳ که خط می خورد عدد ۳۳ می باشد.

۲. مضرب های عدد اول ۳ را خط می زنیم. زیرا: $3^2 = 9 < 49$



در اینجا اولین مضرب ۵ که خط می خورد عدد ۳۵ می باشد .

۳. مضرب های عدد اول ۵ را خط می زنیم . زیرا : $5^2 = 25 < 49$

۳۱ ~~۳۲~~ ~~۳۳~~ ~~۳۴~~ ~~۳۵~~ ~~۳۶~~ ~~۳۷~~ ~~۳۸~~ ~~۳۹~~ ~~۴۰~~
۴۱ ~~۴۲~~ ~~۴۳~~ ~~۴۴~~ ~~۴۵~~ ~~۴۶~~ ~~۴۷~~ ~~۴۸~~ ~~۴۹~~

در اینجا اولین مضرب ۷ که خط می خورد همان مربع عدد ۷ یعنی ۴۹ می باشد و چون مربع عدد اول بعدی یعنی ۱۱ برابر ۱۲۱ می شود و از ۴۹ بزرگتر است پس کار خط زدن تمام می شود

۴. مضرب های اول ۷ را خط می زنیم . زیرا : $7^2 = 49$ و اعداد باقیمانده همان اعداد اول در فاصله ۳۰ تا ۵۰ می باشند .

۳۱ ~~۳۲~~ ~~۳۳~~ ~~۳۴~~ ~~۳۵~~ ~~۳۶~~ ۳۷ ~~۳۸~~ ~~۳۹~~ ~~۴۰~~
۴۱ ~~۴۲~~ ۴۳ ~~۴۴~~ ~~۴۵~~ ~~۴۶~~ ۴۷ ~~۴۸~~ ~~۴۹~~

تشخیص اول یا مرکب بودن هر عدد طبیعی ؛



مطابق روش غربال باید مشخص شود عدد مورد نظر مضرب عدد های اول می باشد یا خیر .

برای تشخیص ، باید عدد مورد نظر را بر اعداد اول مانند ... و ۷ و ۵ و ۳ و ۲ تقسیم کرد .

اگر عدد داده شده بر یکی یا بیشتر ، از اعداد اول ، بخشپذیر باشد (باقیمانده صفر شود) ، عدد داده شده مرکب است .

اگر عدد داده شده بر هیچ کدام از اعداد اول بخشپذیر نباشد (باقیمانده صفر نشود) ، عدد داده شده اول است .

برای تعیین تعداد این تقسیم ها ، از عدد مورد نظر جذر تقریبی می گیریم و سپس عدد داده شده را بر اعداد اول کوچکتر از جذر

تقسیم می کنیم .

مثال ۳: می‌خواهیم مشخص کنیم عدد ۳۷، عدد اول است یا مرکب؟

$$\text{ابتدا جذر تقریبی عدد ۳۷ را می‌گیریم (} \sqrt{37} \approx 6/1 \text{) } \quad \sqrt{49} = 7 < \sqrt{37} < \sqrt{36} = 6$$

پس ۳۷ را بر اعداد اول کوچکتر از ۶ (یعنی ۲ و ۳ و ۵) تقسیم می‌کنیم.

- یکان ۳۷ فرد است پس بر ۲ بخش پذیر نیست.
- مجموع ارقام ۳۷ عدد ۱۰ است و بر ۳ بخش پذیر نیست.
- یکان ۷ است و بر ۵ بخش‌پذیر نیست (یکانش صفر یا ۵ نیست).

چون بر هیچ کدام از اعداد اول ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر نیست، پس: ۳۷ یک عدد اول است.

مثال ۴: مشخص کنید عدد ۹۳ اول است یا مرکب؟

$$\text{ابتدا جذر تقریبی عدد ۹۳ را محاسبه می‌کنیم. } \sqrt{93} \approx 9/6 \quad \sqrt{100} = 10 < \sqrt{93} < \sqrt{81} = 9$$

پس عدد ۹۳ را بر عددهای اول کوچکتر از ۹ (یعنی ۲ و ۳ و ۵ و ۷) تقسیم می‌کنیم

- یکان ۹۳ فرد است پس بر ۲ بخش پذیر نیست.
- مجموع ارقام ۹۳ عدد ۱۲ است و بر ۳ بخش پذیر است.

عدد ۹۳ بر ۳ بخش پذیر است پس: ۹۳ یک عدد مرکب است

مثال ۵: عددی کمتر از ۱۶۰ و بزرگتر از ۱۳۰ می‌باشد. برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا خیر، حداکثر چند

تقسیم انجام می‌دهیم؟ چرا؟

در اینجا چون عدد مورد نظر دقیقاً مشخص نشده باید عدد بزرگتر در صورت سوال مد نظر قرار گیرد.

$$\sqrt{160} \approx 12/6 \quad \sqrt{169} = 13 < \sqrt{160} < \sqrt{144} = 12$$

پس بر اعداد اول کوچکتر از ۱۲ باید تقسیم شود. یعنی بر ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ پس یعنی حداکثر ۵ تقسیم.

توجه کنید که در اینجا فقط تعداد تقسیم‌ها پرسیده شده و هیچ تقسیمی انجام نمی‌شود زیرا عدد مورد نظر دقیقاً داده نشده است.

مثال ۶: عددهای ۱ تا ۹۰ را نوشته و غربال کرده ایم. با توجه به آن به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف- اولین عددی که خط می‌خورد؟ عدد یک

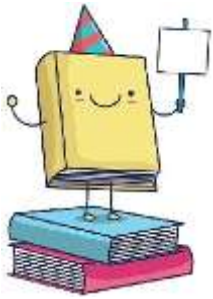
ب- اولین مضرب مرکب ۷ که برای اولین بار خط می‌خورد؟

عدد ۴۹

پ- عدد ۵۷ با مضرب کدام عدد خط می‌خورد؟ عدد ۳

ت- تمام مضرب‌های ۵ که برای بار اول خط می‌خورند، را بنویسید. ۲۵-۳۵-۴۵-۵۵-۶۵-۷۵-۸۵

تمرین



۱. عددهای اول بین ۱ تا ۳۸ را با استفاده از روش غربال بنویسید .

۲. عددهای اول بین ۳۵ تا ۷۰ را با روش غربال مشخص کنید .

۳. با روش تقسیم کردن مشخص کنید که عددهای ۸۳ و ۱۴۳ اول هستند یا مرکب ؟

۴. عددی کمتر از ۱۱۰ و بزرگتر از ۹۳ می باشد . برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا خیر ، حداکثر چند تقسیم باید انجام شود؟ چرا؟

۵. میانگین اعداد اول در مجموعه { ۳۲ و ۳ و ۱۱ و ۱ و ۲۱ } را بدست آورید .

۶. عددهای ۸۰ تا ۱۳۰ را نوشته و غربال کرده ایم . با توجه به آن به سوالات زیر پاسخ دهید :

الف- اولین عددی که خط می خورد ؟

ب- اولین مضرب مرکب ۳ که خط می خورد ؟

پ- تمام مضرب های عدد ۵ که برای اولین بار خط می خورند ؟

ت- عدد ۹۱ با مضرب کدام عدد خط می خورد ؟