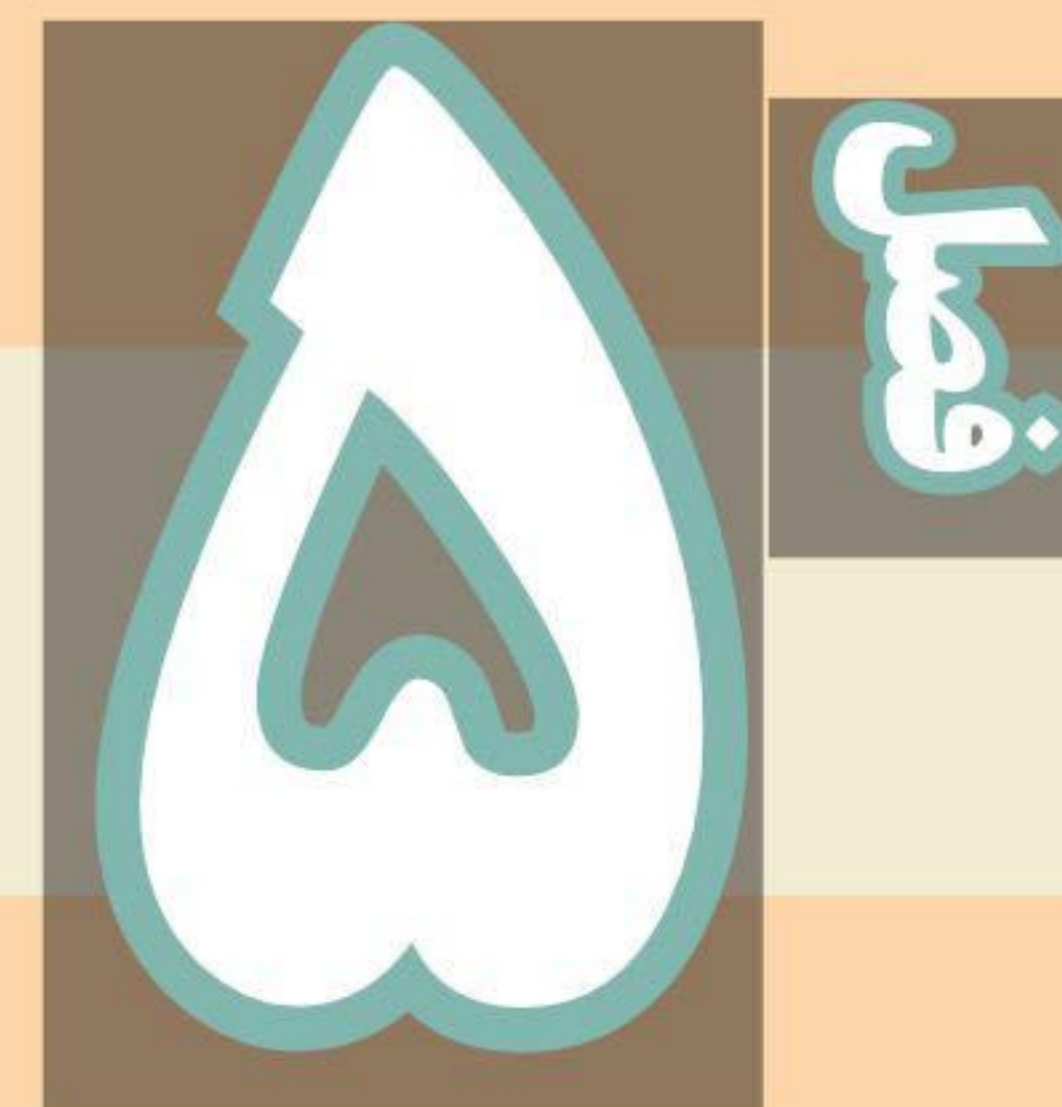


افشین ملاحی
<https://telegram.me/salehin95math>
 09168324500
 آبادان ۱۳۹۵

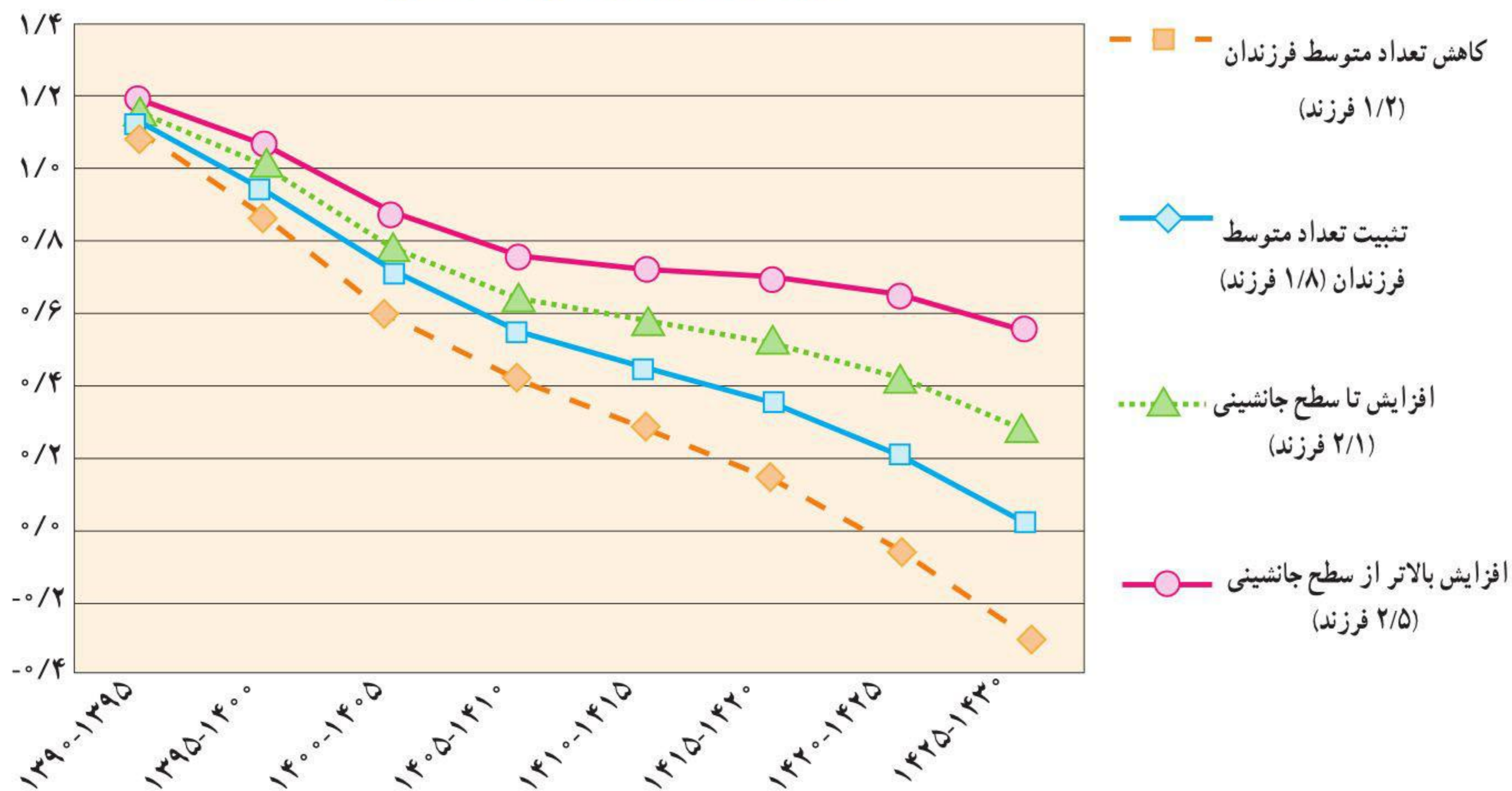


تابع یکی از مفاهیم مهم است که در ریاضیات و سایر علوم دارای کاربردهای فراوانی است. توابع به روش‌های گوناگونی نمایش داده می‌شوند. یکی از این روش‌ها استفاده از نمودارهاست. موضوعات متفاوتی به وسیله تابع قابل مدل‌سازی است. نمودار زیر روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در کشورمان را نشان می‌دهد. نمودار بعدی جمعیت کل کشور را در چهار وضعیت مختلف پیش‌بینی می‌کند. کشور ما در معرض سالمند شدن می‌باشد. به طوری که اگر متوسط تعداد فرزندان یک خانواده تا سال ۱۴۳۰ میزان فعلی باشد در آن موقع، حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ تا سال ۱۳۹۴ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. همچنین با ادامه روند فعلی تغییرات جمعیت در یک دوره ۳۰ ساله، رشد جمعیت به صفر خواهد رسید و پس از آن رشد جمعیت کشور منفی خواهد شد. سالمندی جمعیت و منفی شدن رشد جمعیت، پیامدهای ناگواری را در پی دارد.

نمودار روند کاهش متوسط تعداد فرزندان یک خانواده در ایران



نمودار پیش‌بینی رشد جمعیت کل کشور در دوره‌های پنج‌ساله در چهار وضعیت مختلف تعداد متوسط فرزندان تا افق ۱۴۳۰ شمسی



مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

درس اول

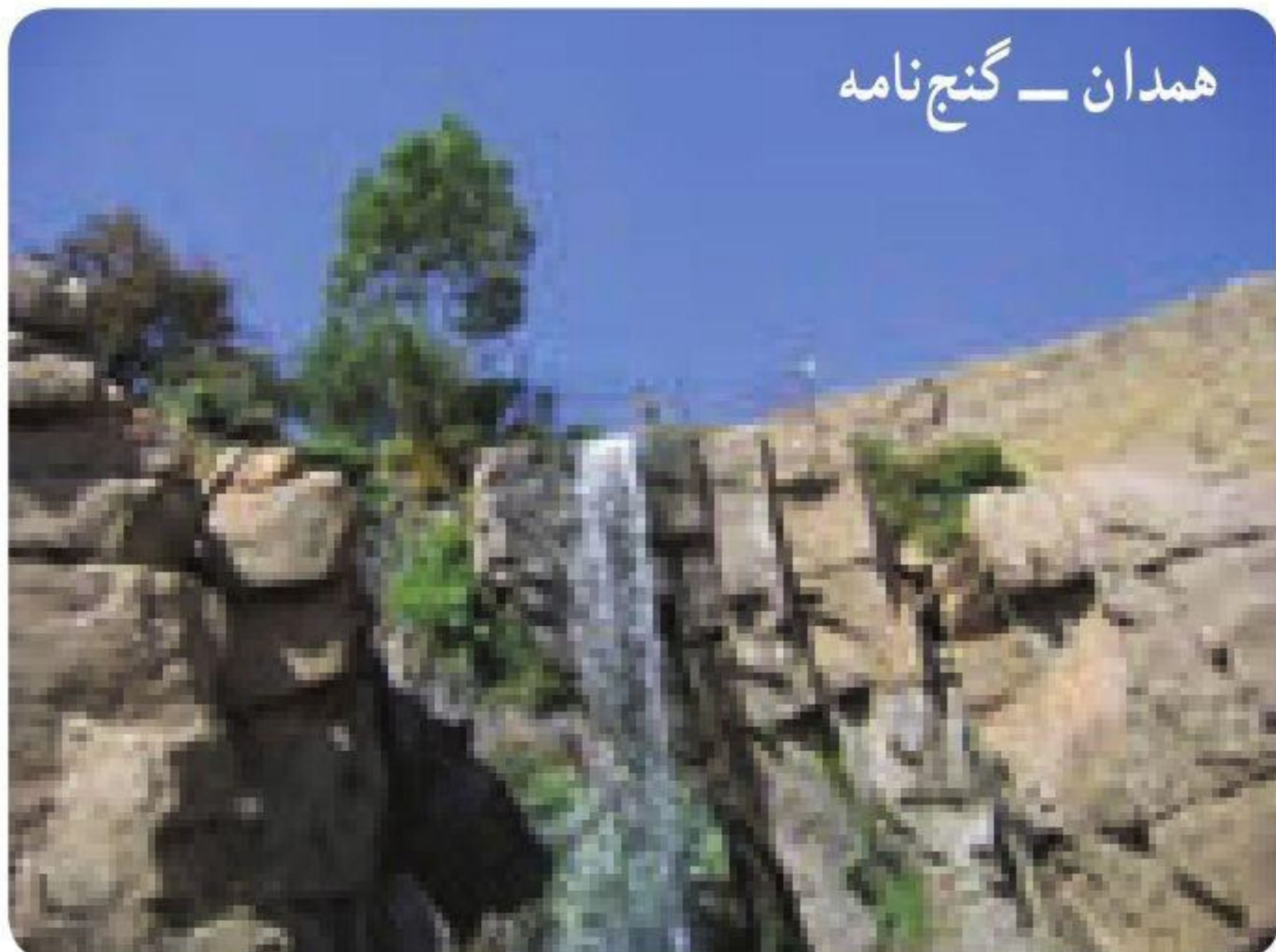
دامنه و برد توابع

درس دوم

انواع توابع

درس سوم

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن



همدان - گنج نامه



میبد، استان یزد - نارین قلعه

بسیاری از پدیده های پیرامون ما به نوعی با هم ارتباط دارند. یک نوع خاص از این ارتباط در موارد زیادی مشاهده می شود. به مثال های زیر توجه کنید:

- دمایی که به ساعت معینی در یک مکان نسبت داده می شود.
- قیمتی که به اجناس یک فروشگاه نسبت داده می شود.
- نمره هایی که به یک دانش آموز در دروس مختلف تعلق می گیرد.
- عددی که به جمعیت شهرها نسبت داده می شود.

شعاعیت ۱

در جدول های زیر مثال های بالا و مواردی دیگر به کمک جدول ارائه شده اند. جاهای خالی را پر کنید. جدول آخر را به سلیقه خودتان تکمیل کنید. با توجه به جدول مشخص است که در یک زمان معین فقط یک دما را می توان به آن نسبت داد. درباره بقیه جدول ها مشابه این عبارت را بنویسید.

ساعت	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
دما	۱۵	۱۶	۱۷	۱۷	۱۸

به یک ساعت معین فقط یک دما را می توان نسبت داد؛ یعنی یک ساعت مشخص دو دمای متفاوت ندارد.

کالا	خودکار	دفتر	مداد	خط کش
قیمت (تومان)	۱۵۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰۰	۱۵۰۰

یک کالای معین نمی تواند دو قیمت متفاوت داشته باشد.

درس	ریاضی	فیزیک	شیمی	ادبیات
نمره	۱۸	۱۶	۱۷	۱۸

یک درس معین نمی تواند دو نمره متفاوت داشته باشد.

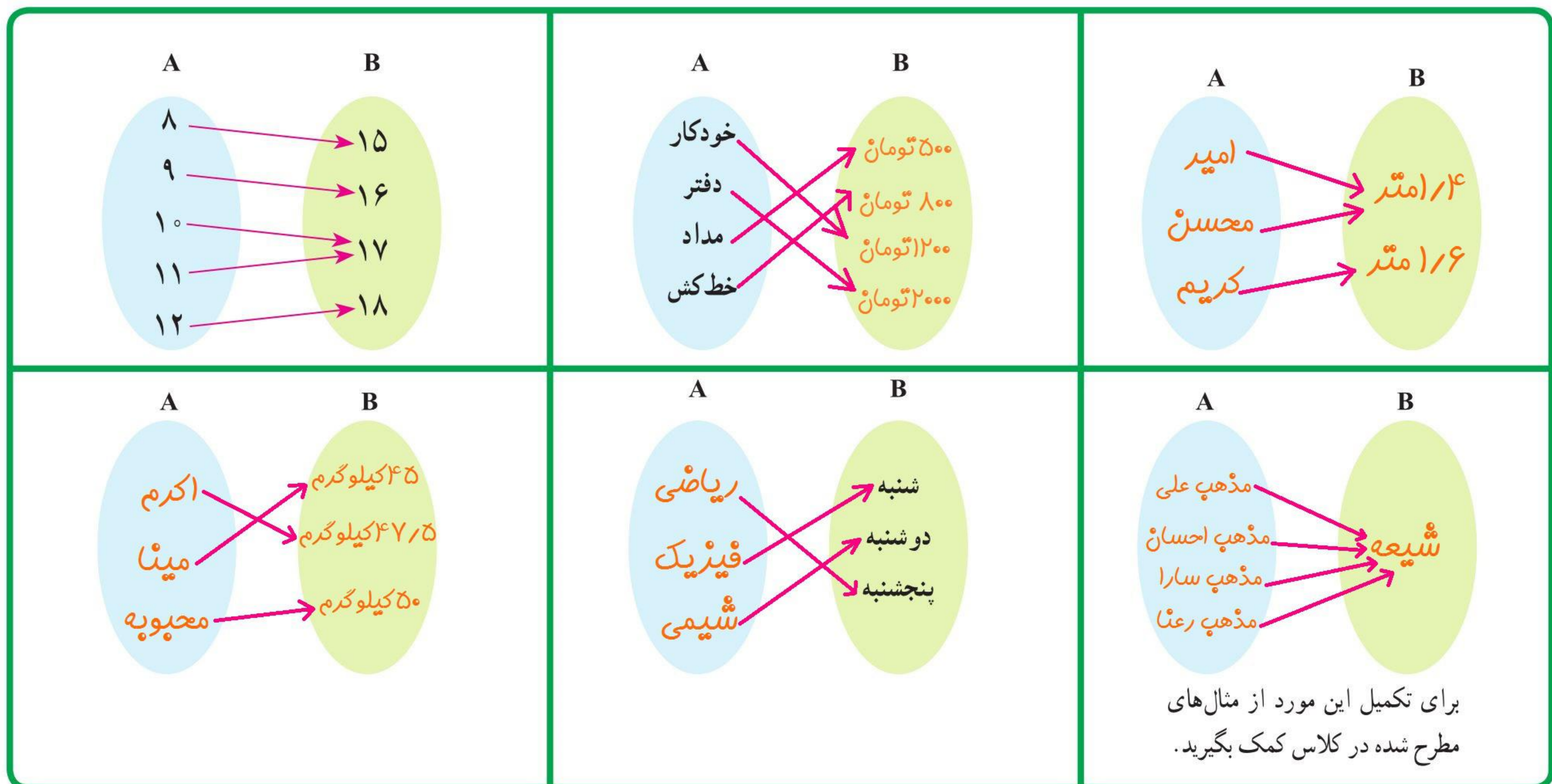
فرد	امیدی	احسانی	کشاورز	رستگار
روز تولد	شنبه	دوشنبه	شنبه	پنجشنبه

یک شخص معین دو روز تولد متفاوت ندارد.

کلاس	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم
جمعیت	۲۰	۱۸	۲۴	۱۸	۱۵

یک کلاس معین نمی تواند دو جمعیت متفاوت داشته باشد.

جدول های فعالیت ۱ را می توان به کمک مجموعه ها و پیکان هایی که اعضای آنها را به هم **مربوط** می کنند، مشخص کرد. به این شیوه نمایش، نمودارهای پیکانی می گوئیم. یک نمونه کامل شده است. بقیه را شما کامل کنید.

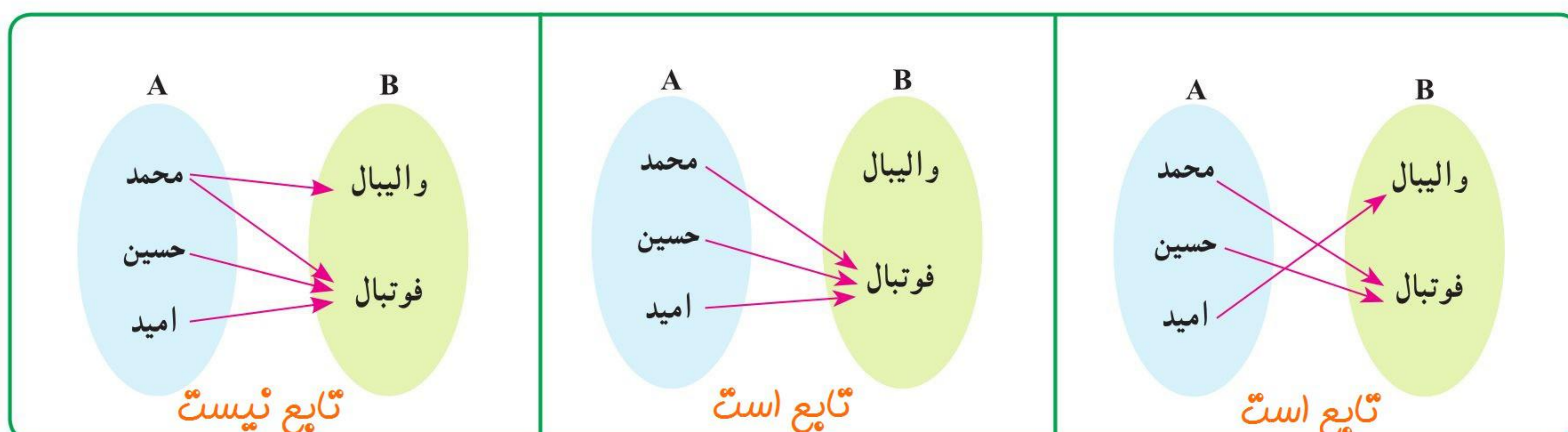


توجه دارید که در رابطه های بالا، از هر عضو مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است. این گونه رابطه بین دو مجموعه را یک «تابع» می نامند.

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

در فعالیت ۱، همه مثال های ارائه شده تابع هایی هستند که به صورت جدول نمایش داده شده اند.

۱ مجموعه A شامل سه دانش آموز به نام های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش آموزان می توانند انتخاب کنند. کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟

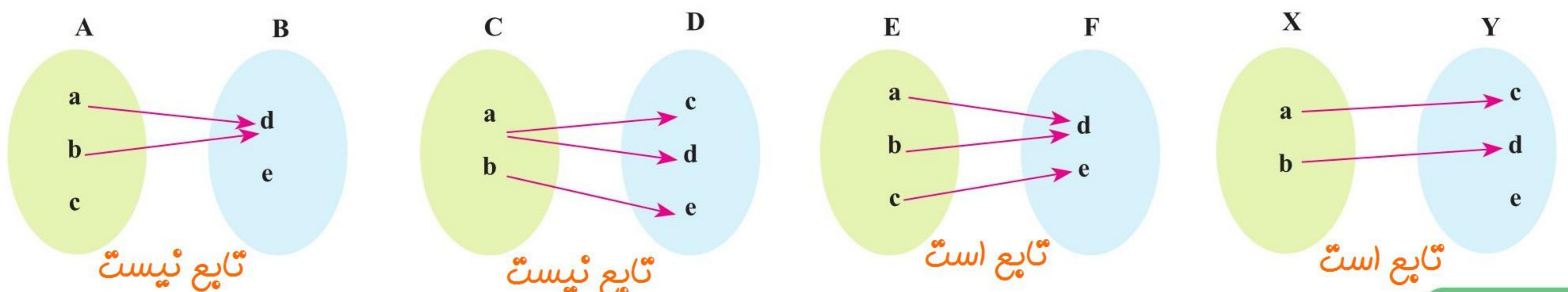


۲ از مجموعه A به مجموعه B نمودار پیکانی را طوری رسم کنید که یک تابع را نمایش دهد. از مجموعه X به مجموعه Y این کار را به گونه‌ای انجام دهید که حاصل یک تابع نباشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



۳ الف) آیا رابطه‌ای که به افراد سن آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ **پله** رابطه‌ای که به افراد وزن آنها را نسبت می‌دهد، چطور؟ **پله** ب) آیا رابطه‌ای که به افراد غذای مورد علاقه آنها را نسبت می‌دهد، یک تابع است؟ توضیح دهید. **خیبر ممکن است یک نفر به چند نوع غذا علاقه داشته باشد.**

۴ کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر یک تابع است؟



فعالیت

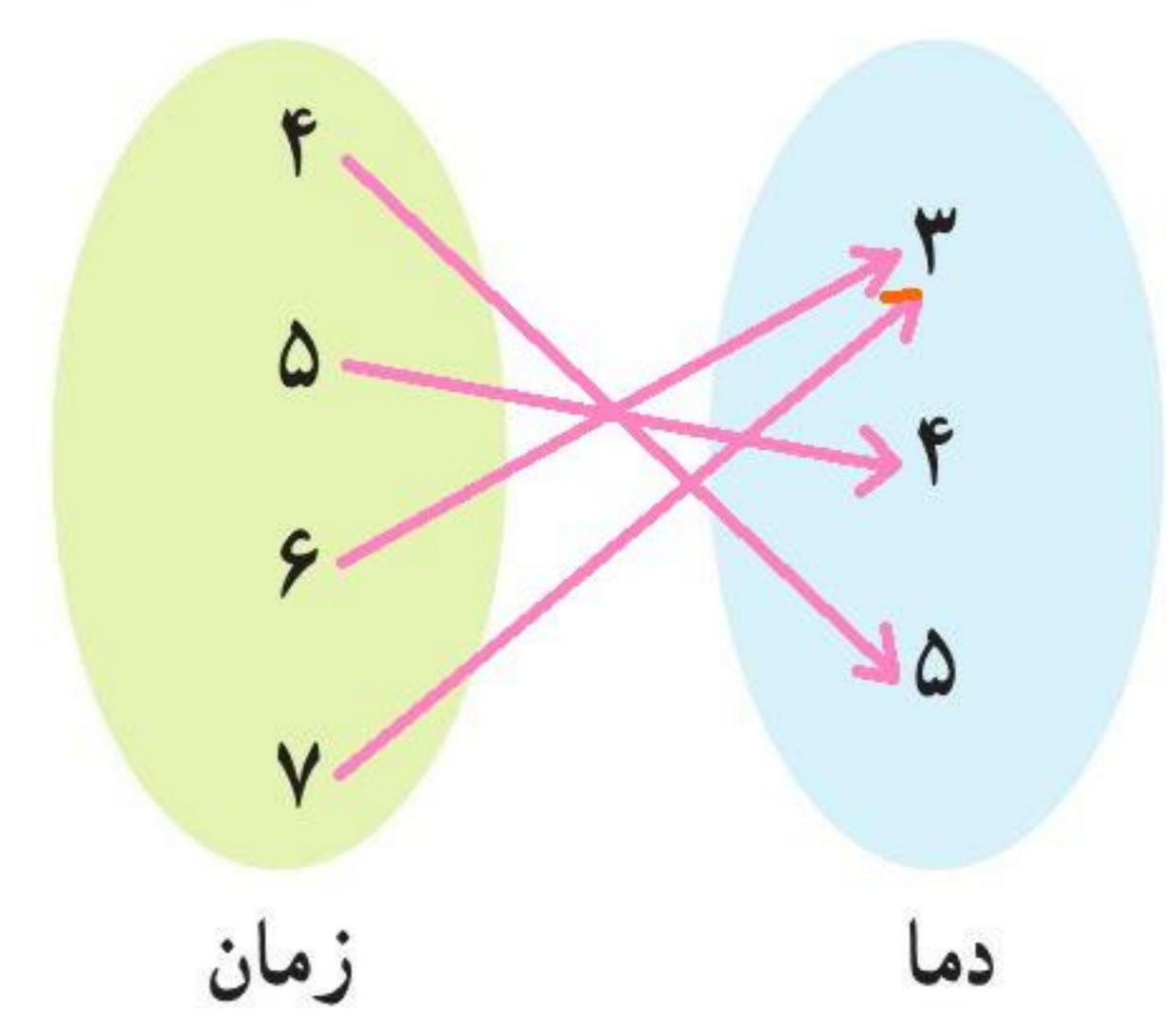
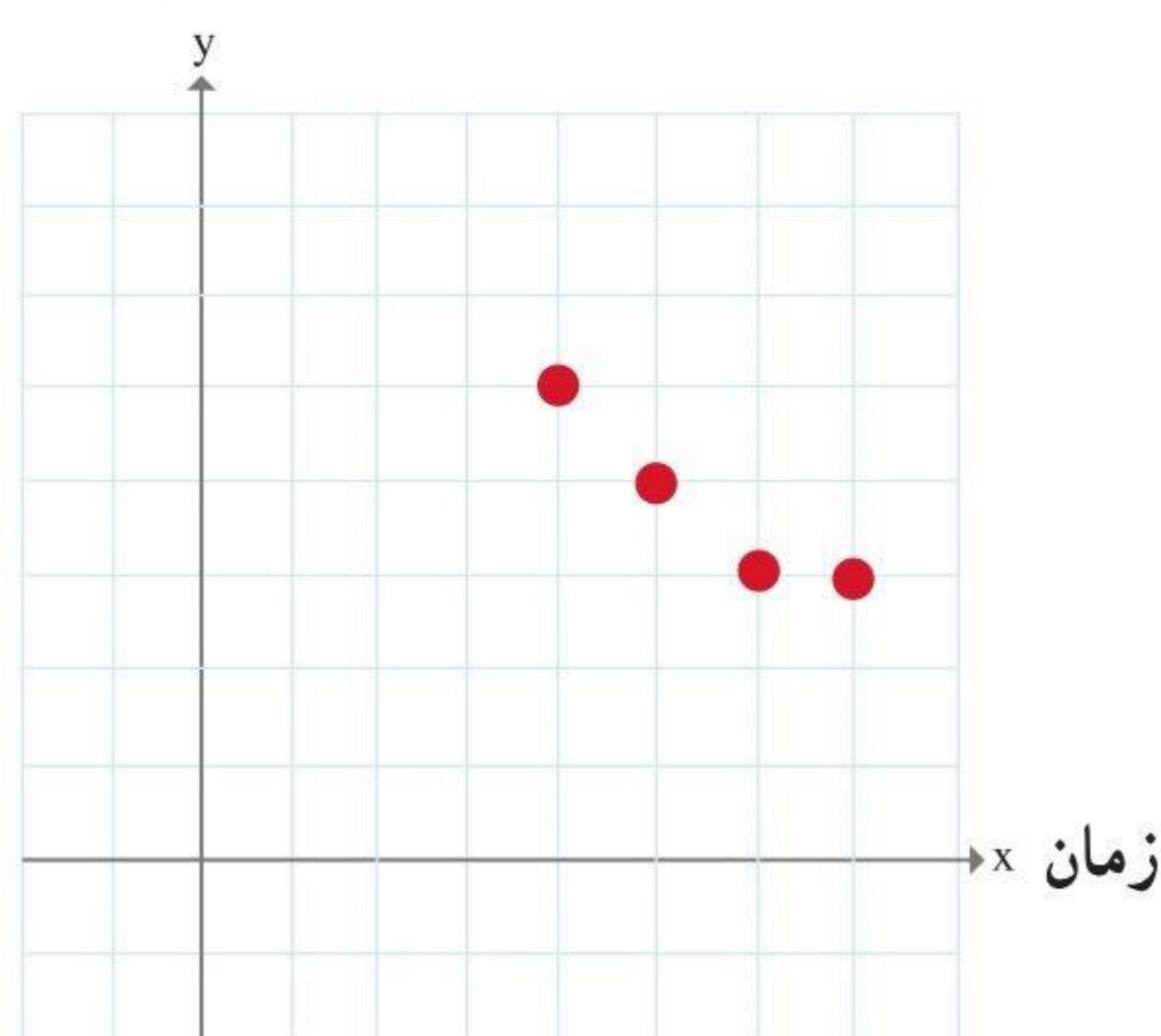
نمایش تابع به صورت زوج‌های مرتب و نمودار مختصاتی

نمودار زیر، دمای هوا را در چهار ساعت متفاوت در اردبیل نشان می‌دهد. رابطه بین زمان و دما را به صورت نمودار پیکانی نمایش دهید و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ جدول را هم کامل کنید.



گردنه حیران - اردبیل

دما (سانتی‌گراد)



ساعت	۴	۵	۶	۷
دما	۵	۴	۳	۳

اگر در نمودار بالا محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر بگیریم، مختصات هر یک از نقاط داده شده را می‌توان با یک «زوج» از اعداد به صورت زیر نمایش داد:

(۴, ۵), (۵, ۴), (۶, ۳), (۷, ۳)

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مهم است. مثلاً زوج‌های (۴, ۵) و (۵, ۴) برابر نیستند و دو نقطه متفاوت در نمودار را نشان می‌دهند. به همین دلیل به هر یک از زوج‌های بالا یک «زوج مرتب» می‌گوییم.

اگر همه زوج‌های مرتب بالا را در مجموعه‌ای قرار دهیم، یک نمایش دیگر برای رابطه ارائه شده بین زمان و دما به دست می‌آید که به آن نمایش زوج مرتبی رابطه داده شده می‌گویند. برای نام‌گذاری این مجموعه جدید از حروفی مانند f و g استفاده می‌کنیم.

$$f = \{(4,5), (5,4), (6,3), (7,3)\}$$

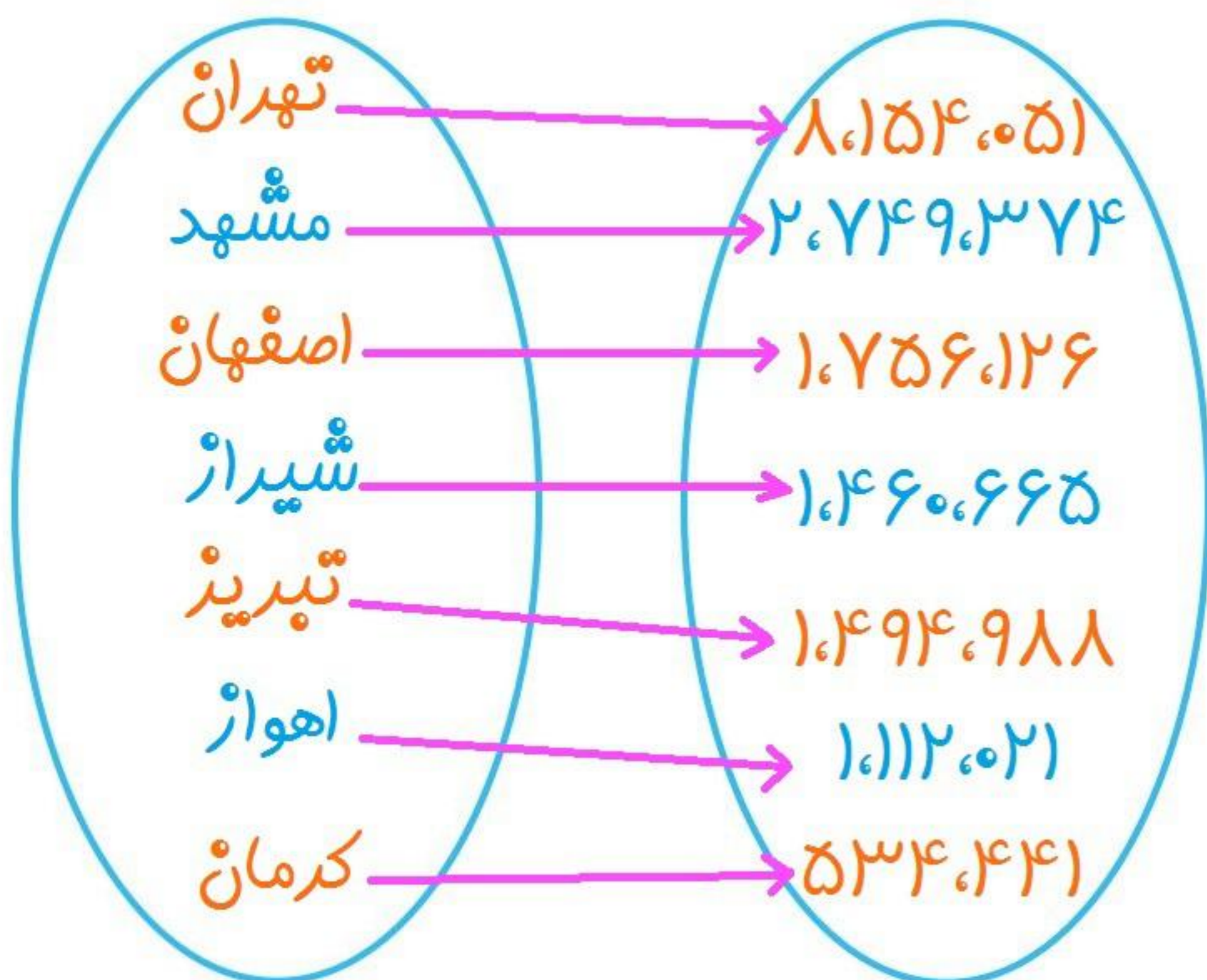
در هر زوج مرتب عضو اول را «مؤلفه اول» و عضو دوم را «مؤلفه دوم» می‌نامیم. به طور مثال در زوج مرتب (۳ و ۶)، مؤلفه اول ۶ و مؤلفه دوم ۳ است. مجموعه f یک تابع است. برای ساعت‌های دیگر موجود در نمودار دمایی را به زمان نسبت دهید و نمودار را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

کار در کلاس

۱ نام شهرهای تهران، مشهد، اصفهان، شیراز، تبریز و اهواز در یک سطر جدول زیر نوشته شده‌اند. در سطر دیگر، جمعیت آن شهرها را به طور تقریبی بنویسید (جمعیت دقیق لازم نیست).

شهر	تهران	مشهد	اصفهان	شیراز	تبریز	اهواز	کرمان
جمعیت	۸,۱۵۴,۰۵۱	۲,۷۴۹,۳۷۴	۱,۷۵۶,۱۲۶	۱,۴۶۰,۶۶۵	۱,۴۹۴,۹۸۸	۱,۱۱۲,۰۲۱	۵۳۴,۴۴۱

رابطه بالا را به صورت پیکانی و زوج مرتب نمایش دهید. آیا این رابطه یک تابع است؟



{(۸۱۵۴۰۵۱ و تهران) و ... و (۱۱۱۲۰۲۱ و اهواز) و (۵۳۴۴۴۱ و کرمان) و (۲۷۴۹۳۷۴ و مشهد) و (۱۷۵۶۱۲۶ و اصفهان)}



۲ در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

توصیف رابطه	مجموعه زوج‌های مرتب	نمودار پیکانی	جدول یا نمودار								
به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.	$\{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3)\}$										
به هر عدد طبیعی بین ۱ و ۵، مجذورش را نسبت می‌دهد.	$\{(2,4), (3,9), (4,16)\}$		<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>۴</td> <td>۹</td> <td>۱۶</td> </tr> </table>	x	۲	۳	۴	y	۴	۹	۱۶
x	۲	۳	۴								
y	۴	۹	۱۶								
به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.	$\{(4,2), (4,-2), (7,\sqrt{7}), (7,-\sqrt{7})\}$										
به اعداد (۱ و -۱)، (۰ و ۰)، (۲ و -۲) برابرشان را نسبت می‌دهد.	$\{(1,2), (0,0), (-1,-2)\}$										
به هر کدام از اعداد طبیعی کمتر از ۴، ۲ را نسبت می‌دهد.	$\{(1,2), (2,2), (3,2)\}$										

۳ الف) کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

رابطه g تابع نیست زیرا برای ۲، دو عدد ۵ و ۹ تعریف شده است. $g = \{(1,5), (2,9), (2,5), (3,10)\}$

رابطه f تابع است زیرا برای هر مولفه‌ی اول فقط یک مولفه‌ی دوم تعریف شده است. $f = \{(1,5), (2,9), (3,10)\}$

ب) با تکمیل جمله زیر برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، هنگامی که رابطه به صورت زوج مرتبی ارائه می‌شود، معیاری به دست آورید:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مولفه‌ی اول یکسان نباشند.

۱ کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید.

(الف) رابطه ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می دهد. **تابع است زیرا برای یک ضلع مربع فقط یک محیط بدست می آید.**

(ب) رابطه ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می دهد.

تابع است زیرا برای هر فرد در یک زمان مشخص فقط یک دمای بدن وجود دارد.

(ج) رابطه ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد. **تابع است زیرا به هر فرد فقط یک گروه خونی نسبت داده شده است.**

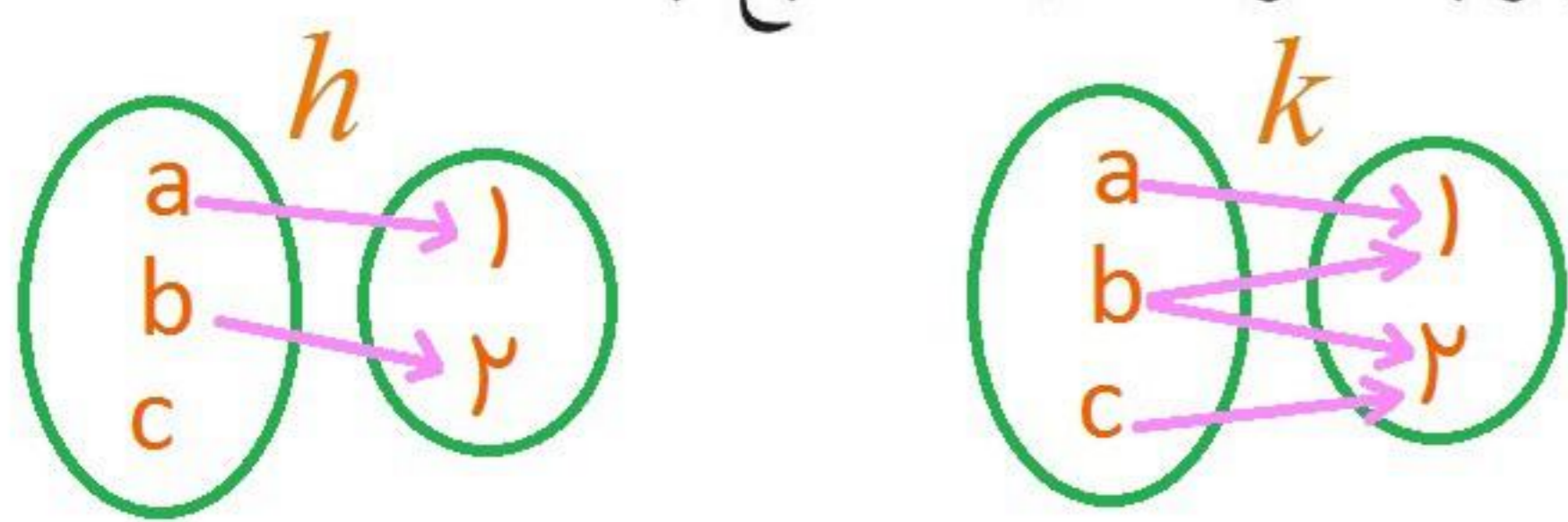
(د) رابطه ای که به هر دانش آموز، دوستان او را نسبت می دهد **تابع نیست زیرا هر دانش آموز می تواند چندین دوست داشته باشد.**

(ه) رابطه ای که به هر عدد، ریشه های دوم آن عدد را نسبت می دهد. **تابع نیست زیرا اعداد مثبت هر کدام دو ریشه دوم دارند.**

(و) رابطه ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد. **تابع است زیرا برای هر عدد فقط یک ریشه سوم وجود دارد.**

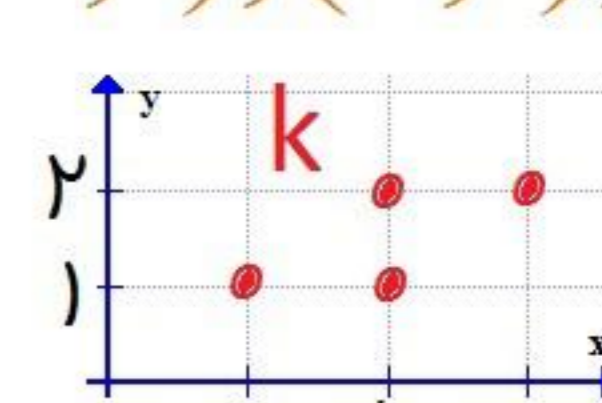
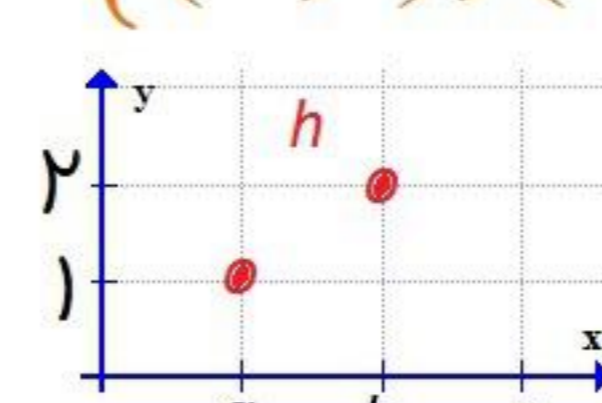
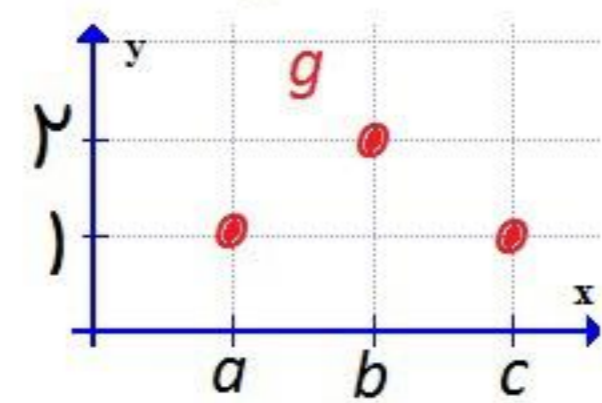
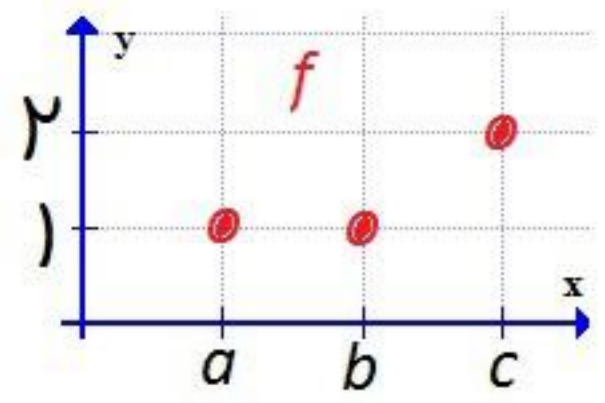
۲ مجموعه های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{1, 2\}$ داده شده اند.

(الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.



(ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج های مرتب و نمودار نمایش دهید.

$$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\} \quad g = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\} \quad h = \{(a, 1), (b, 2)\} \quad k = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 2)\}$$



۳ کدام یک از مجموعه های زیر یک تابع است؟

$g = \{(0, 1), (\frac{3}{5}, 1), (-5, 1), (8, 1)\}$ **تابع است**

$k = \{(2, 5)\}$ **تابع است**

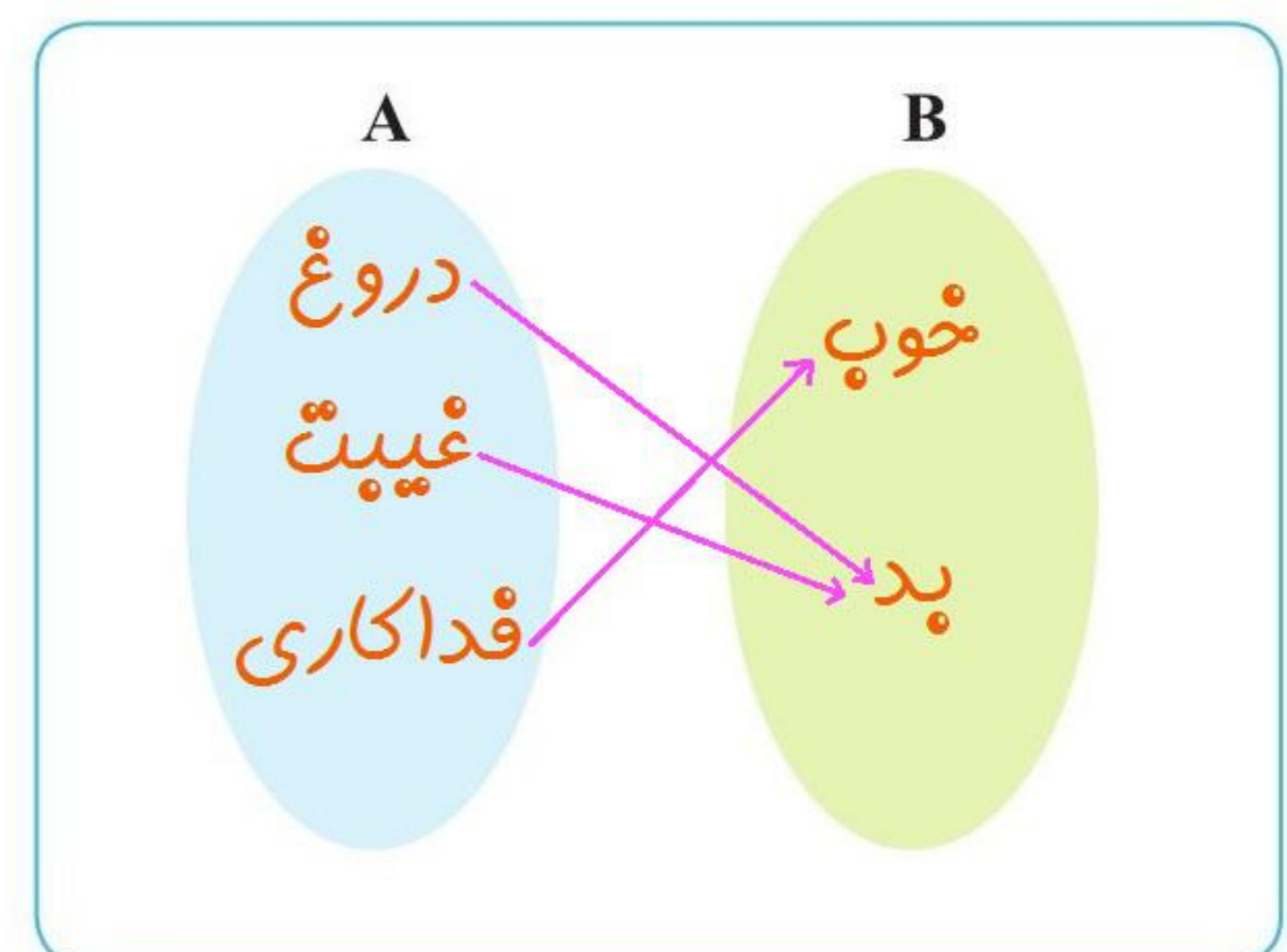
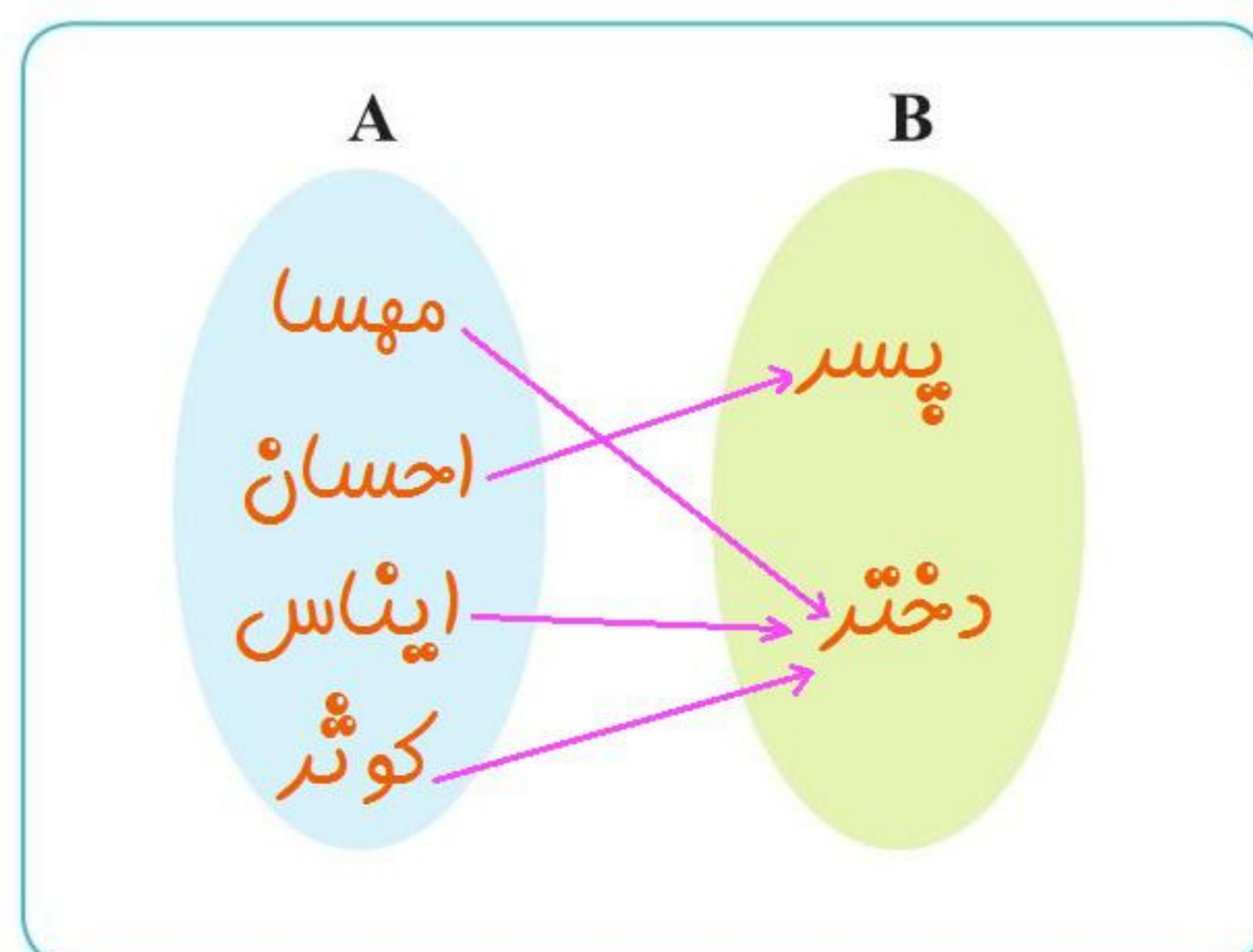
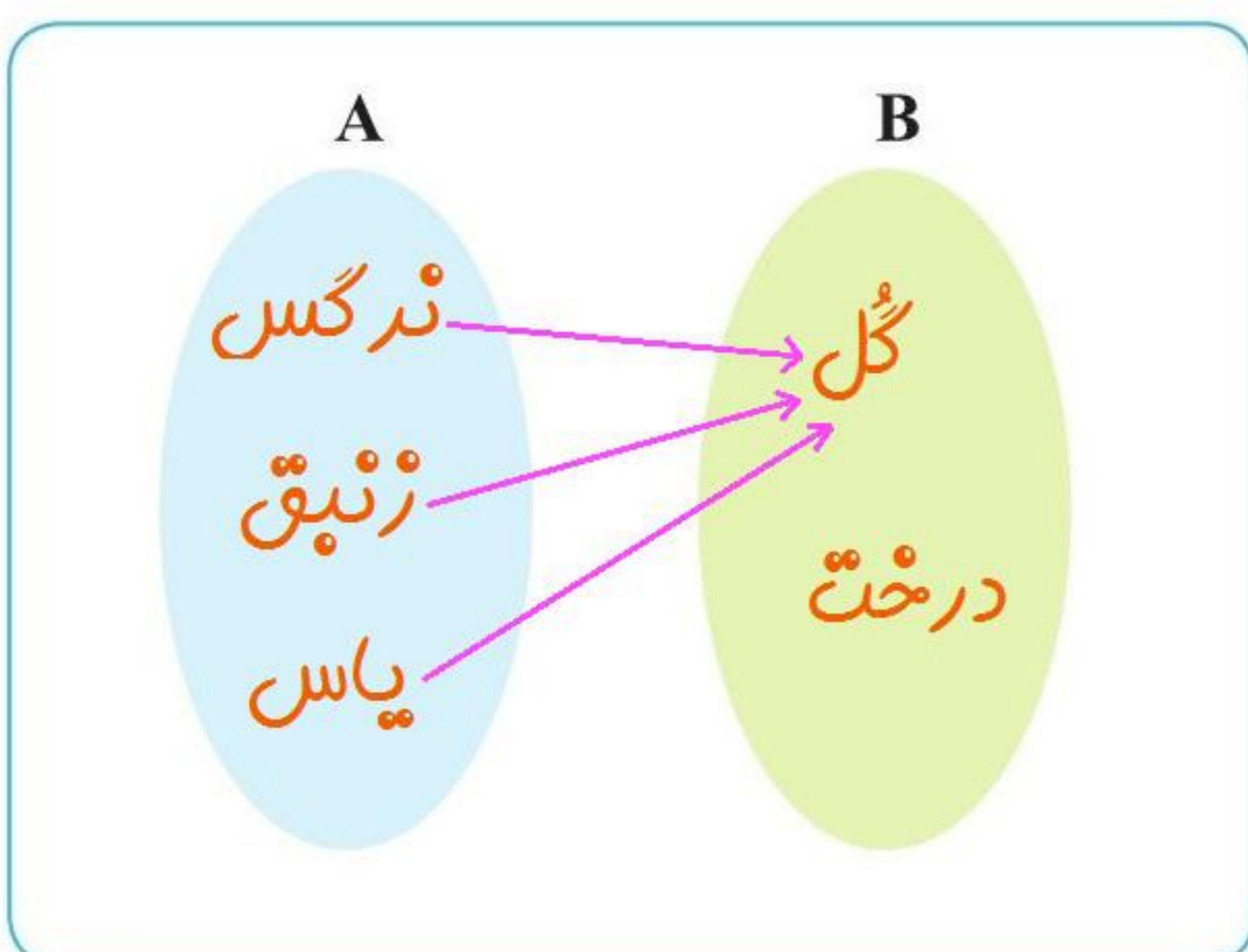
$l = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$ **تابع است**

$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\}$ **تابع نیست**

$h = \{(2, 3), (3, 2), (1, 1)\}$ **تابع است**

$r = \{(2, 0), (-7, 0)\}$ **تابع است**

۴ A و B مجموعه هایی غیر عددی اند، در شکل زیر در A و B اعضایی دلخواه بگذارید و یک تابع از A به B به کمک نمودار پیکانی ارائه کنید. سعی کنید لا اقل سه تابع مختلف بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.



درس دوم: دامنه و برد توابع

فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

چندضلعی	مثلث	مربع	لوزی	پنج ضلعی
مجموع زوایای داخلی (درجه)	180°	360°	360°	540°

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{(180^\circ, \text{مثلث}), (360^\circ, \text{مربع}), (360^\circ, \text{لوزی}), (540^\circ, \text{پنج ضلعی})\}$$

چرا f یک تابع است؟ زیرا هیچ دو زوج مرتب متمایز، دارای مولفه های اول یکسان نیستند.

مجموعه همه مؤلفه های اول زوج های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه های دوم را «برد» آن تابع می نامند.

در فعالیت بالا: f دامنه = {پنج ضلعی، لوزی، مربع، مثلث}

$$f \text{ برد} = \{180^\circ, 360^\circ, 540^\circ\}$$

کاردر کلاس

۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۴	۵
محیط	۲	۴	۶	۸	۱۶	۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

زیرا هیچ دو زوج مرتب متمایز، دارای مولفه های اول یکسان نیستند. $\{(\frac{1}{2}, 2), (1, 4), (\frac{3}{2}, 6), (2, 8), (4, 16), (5, 20)\}$

$$D_f = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 4, 5\} \text{ و } R_f = \{2, 4, 6, 8, 16, 20\}$$

۲ الف) تابعی مثال بنویسید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد. $f = \{(-1, 2), (1, 4), (0, 2)\}$

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

خیر چنین تابعی وجود ندارد، زیرا در این صورت برای یکی از مولفه های اول، دو مولفه ی دوم تعریف شده است که تابع نیست.

۳ اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می دانیم که دامنه f همان مجموعه A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعه B برابر

است؟ مثال بنویسید. خیر به طور مثال: $f = \{(-1, 2), (1, 4), (0, 2)\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ و $A = \{-1, 0, 1\}$

$$R_f = \{2, 4\} \Rightarrow R_f \neq B$$

اگر در یک تابع برد با همداغنه (مجموعه B) برابر باشد، آنز تابع را تابع پوشا (پوشش) ناعند.

فعالیت

دنباله شکل های زیر را در نظر بگیرید :



جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	۲n-۱	...

چرا این جدول یک تابع را نشان می دهد؟ زیرا مولفه ی اول تکراری ندارد

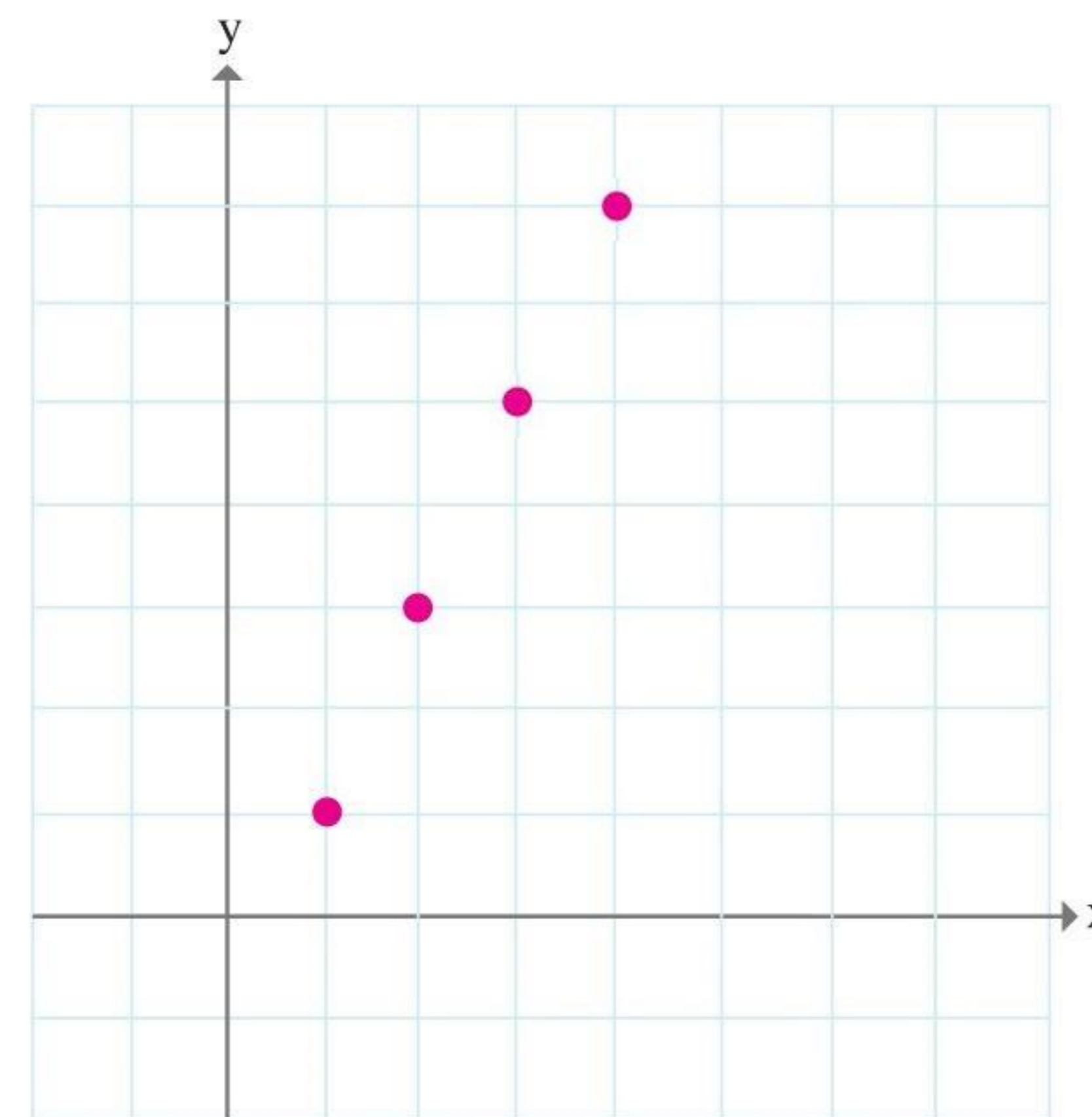
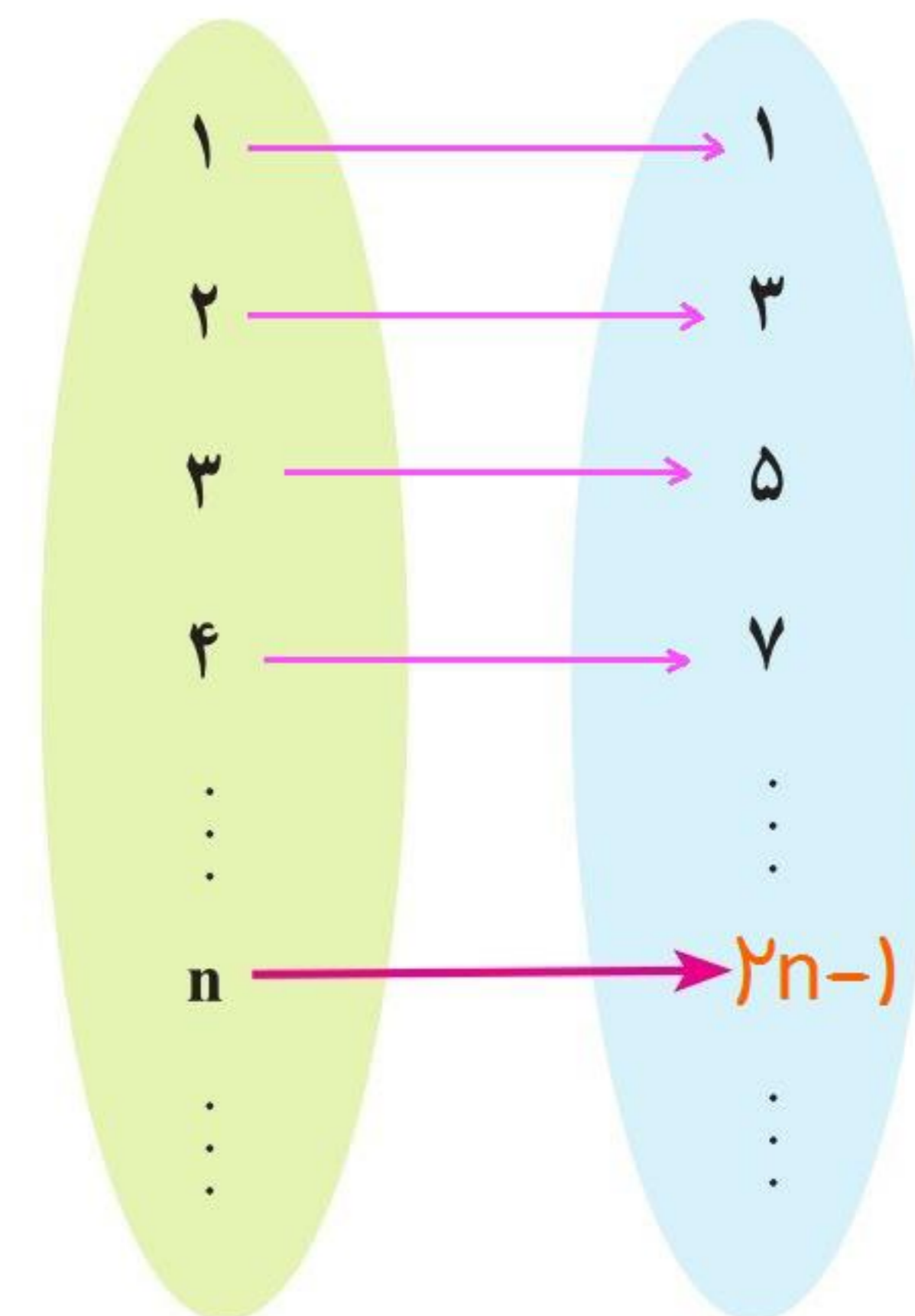
نمایش زوج مرتبی این تابع : $f = \{(1,1), (2,3), (3,5), \dots, (100, \dots), \dots, (n, \dots), \dots\}$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید.

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه هایی هستند؟ نام ببرید.

$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \Rightarrow$ مجموعه ی اعداد طبیعی

$R_f = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} \Rightarrow$ مجموعه ی اعداد فرد طبیعی



همان گونه که از نمایش های مختلف تابع دیده می شود، عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می شود. به جای این می توان با یک قرارداد کار را ساده تر کرد. معمولاً می نویسند $f(1)=1, f(2)=3$ و گفته می شود که مقدار تابع f در نقطه ۱ برابر ۱ است و مقدار تابع f در نقطه ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می توان نوشت :

$f(3)=5, f(4)=7, \dots, f(n)=2n-1, \dots$

رابطه بین دامنه و برد تابع f را می توان به صورت یک عبارت ریاضی به شکل $f(n)=2n-1$ نوشت که در آن n یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می نامند. برای مشخص کردن تابع f به صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم. دامنه تابع f مجموعه اعداد طبیعی است.

در بسیاری از موقعیت ها کار با نمایش جبری یک تابع، ساده تر و مناسب تر از کار با دیگر نمایش های تابع است.

کاردر کلاس

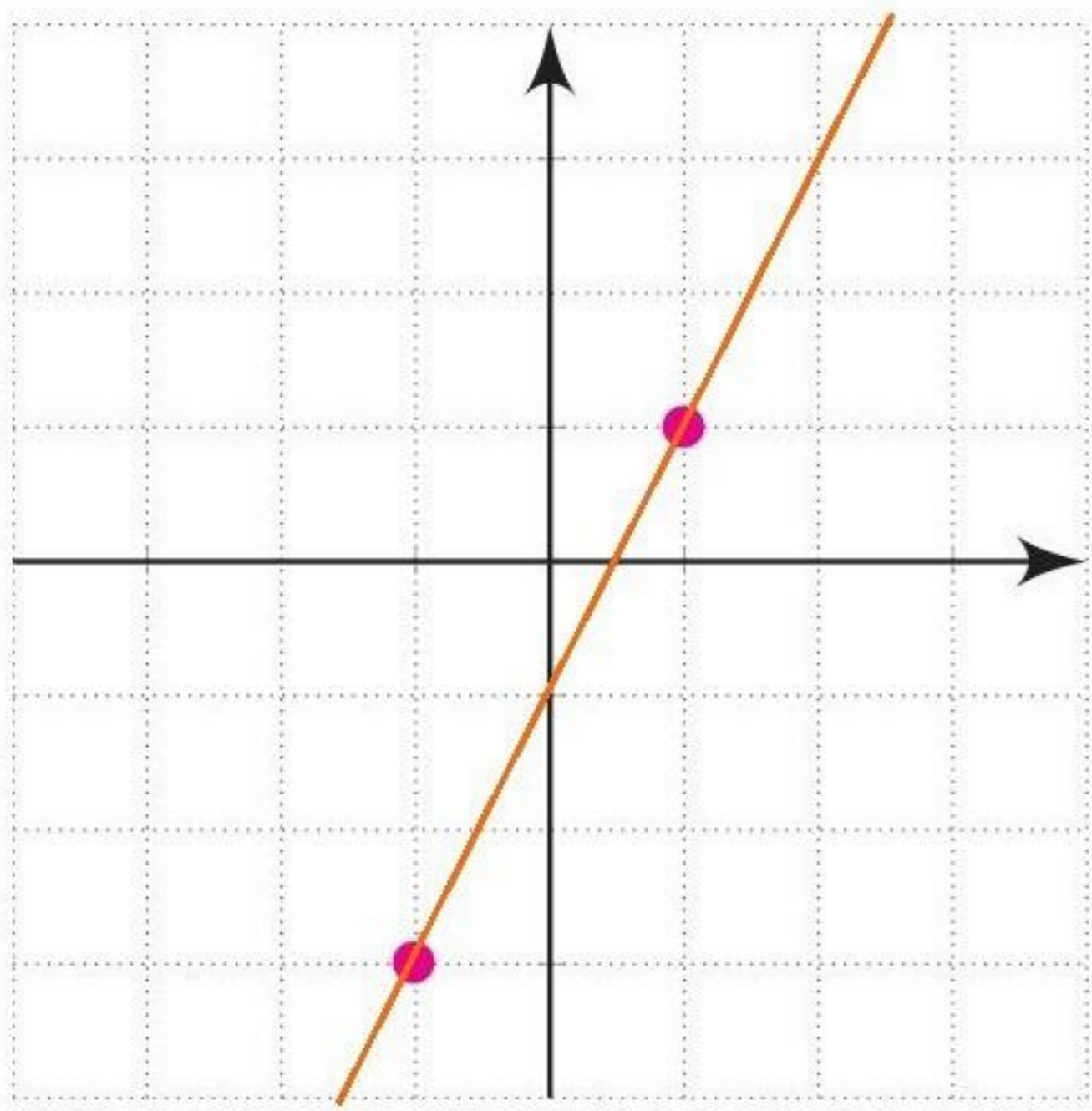
اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد،

برد تابع f را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^2 + 1 = 2 \\ f(2) &= 2^2 + 1 = 5 \\ f(3) &= 3^2 + 1 = 10 \\ f(4) &= 4^2 + 1 = 17 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \{2, 5, 10, 17\}$$

جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = 2x - 1$ استفاده کنید.

x	۱	۲	۳	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
y	۱	۳	۵	-۳	-۱	۰	$-\frac{1}{4}$	$2\sqrt{2}-1$



آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟

شباهت: مختصات نقاط هر دو جدول در یک راستا هستند.

تفاوت: مولفه‌های اول فعالیت قبل اعداد طبیعی است ولی در این فعالیت مولفه‌های اول اعداد حقیقی اند.

چرا این جدول هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید.

زیرا به ازای هر مولفه‌ی اول فقط یک مولفه دوم بدست می‌آید.

نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ نمودار تابع قبل نمایشگر نقاطی با فاصله از یکدیگر است ولی نمودار این

تابع مجموعه نقاط به هم چسبیده است که یک خط راست را تشکیل داده

دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = 2n - 1$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ مقایسه کنید.

دامنه و برد این تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است در حالی که تابع قبل دامنه اعداد طبیعی و برد اعداد فرد طبیعی است.

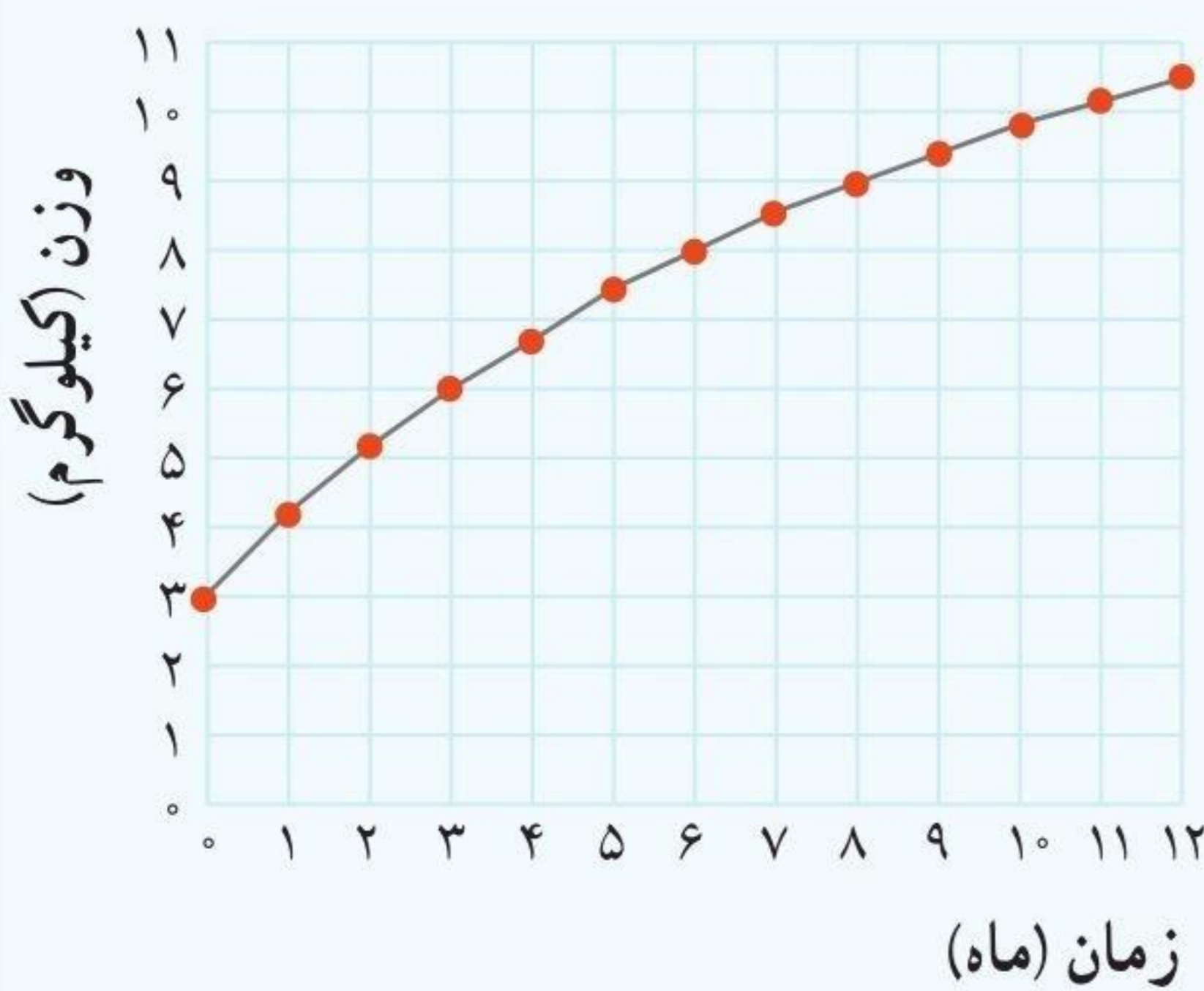
جاهای خالی را کامل کنید. $g(1) = 1$ $g(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 1$ $g(\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$ $g(0) = -1$ $g(-\frac{1}{5}) = -\frac{7}{5}$

نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. $g(x) = 2x - 1$

در اینجا x یک عدد حقیقی است.

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

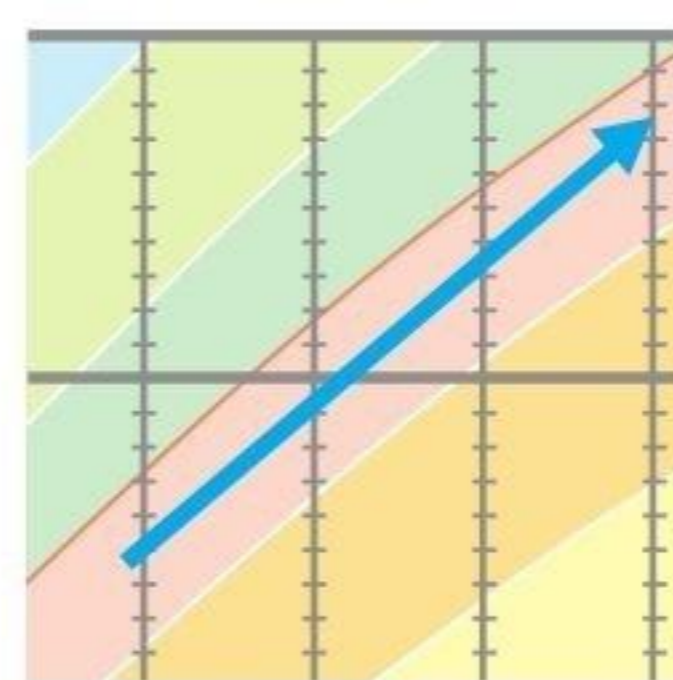
شاید بیشتر شما نمودارهای وزن یا قد یک کودک را از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه دیده باشید. شکل زیر نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد. وزن یک کودک تابعی از زمان است.



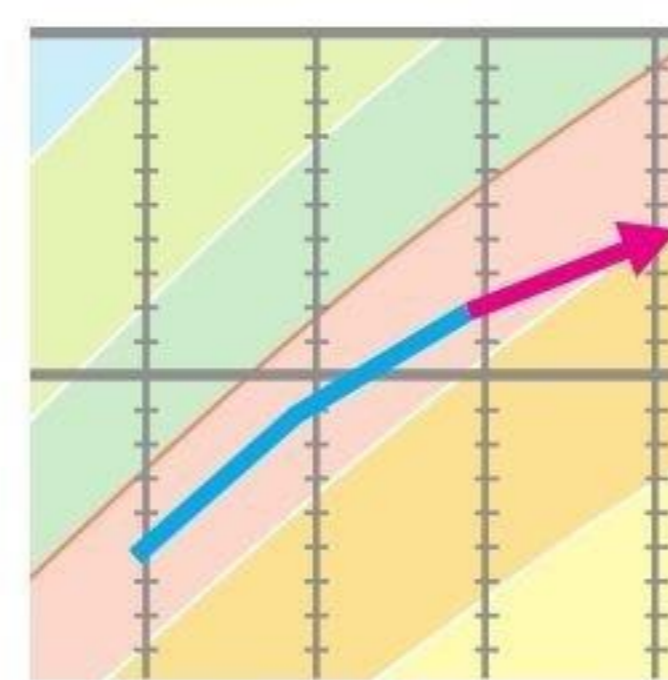
شکل ۱- نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

۱- برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.

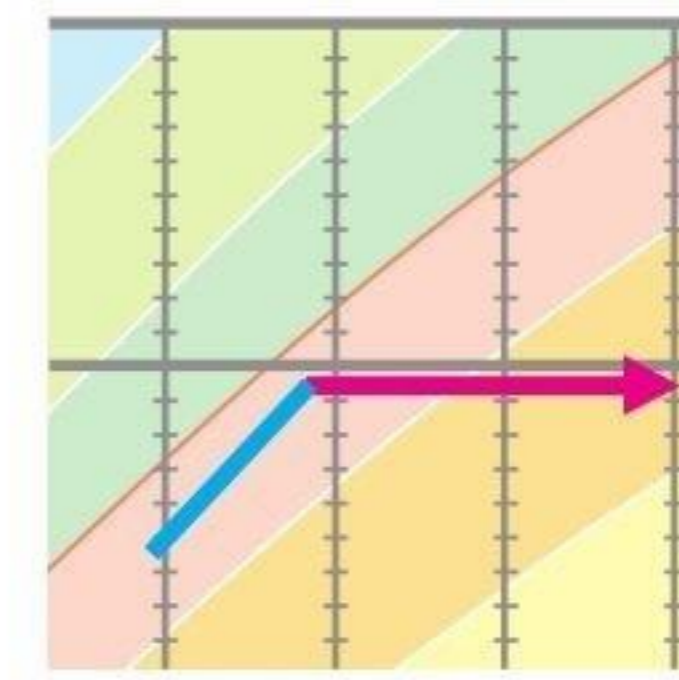
هنگامی که پزشکان می‌خواهند دربارهٔ رشد یک کودک اظهار نظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسهٔ نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



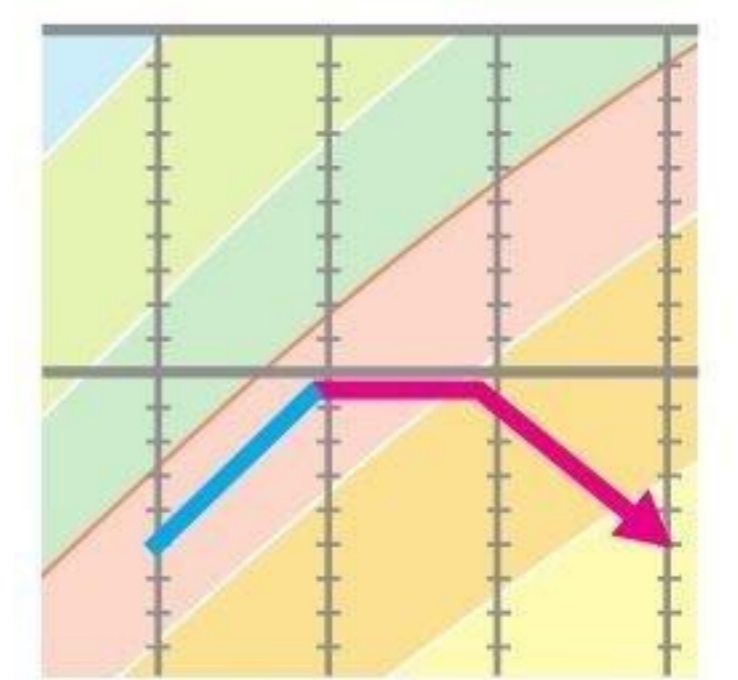
الف) رشد مطلوب



ب) کندی رشد



پ) توقف رشد



ت) افت رشد

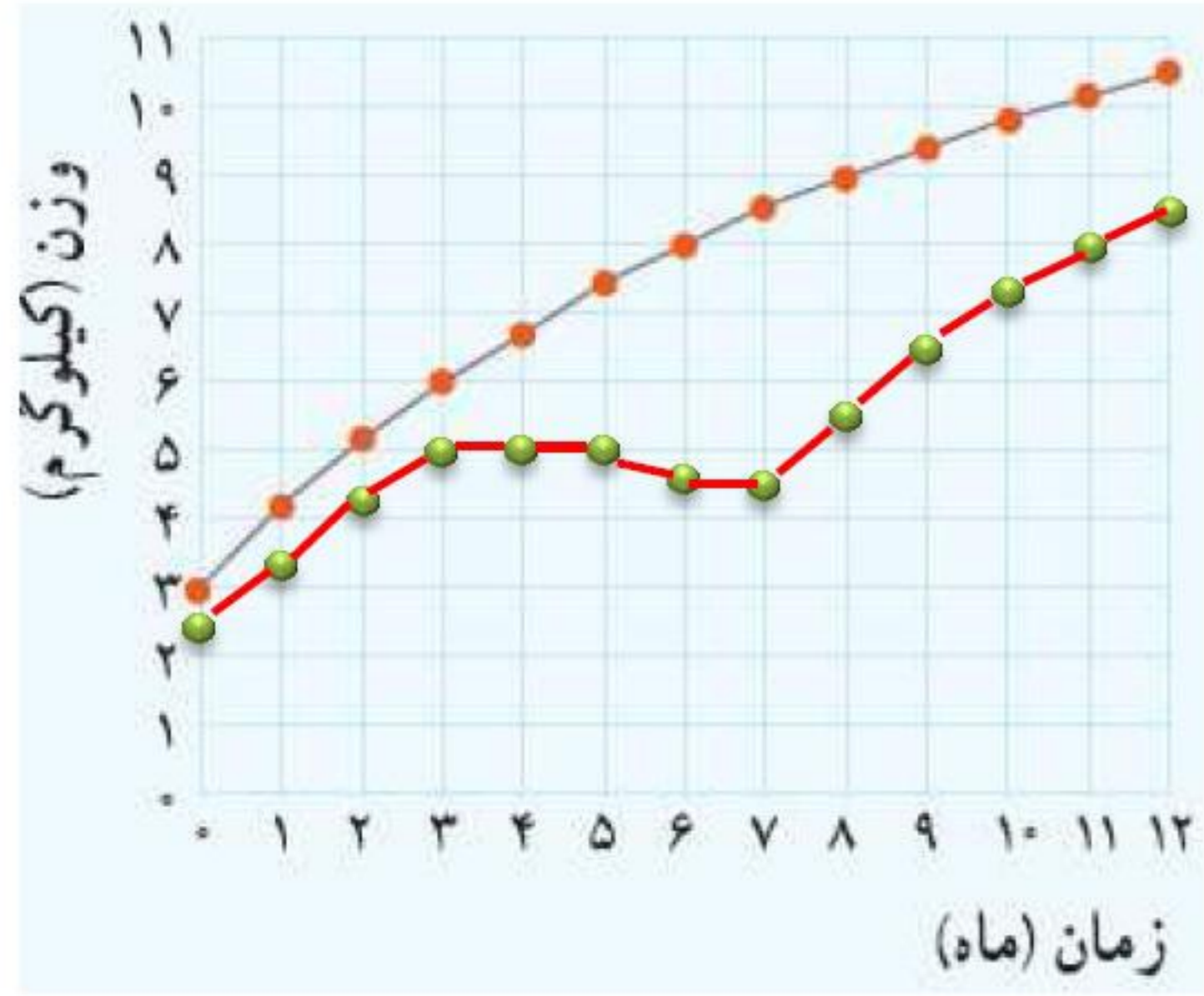
شکل ۲

فعالیت

جدول زیر نشان دهندهٔ وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{2}$	۵	۵	۵	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{2}$	۸	$\frac{8}{5}$

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟ **الف (رشد مطلوب)**



ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟ **۳ تا ۵ ماهگی**

پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد

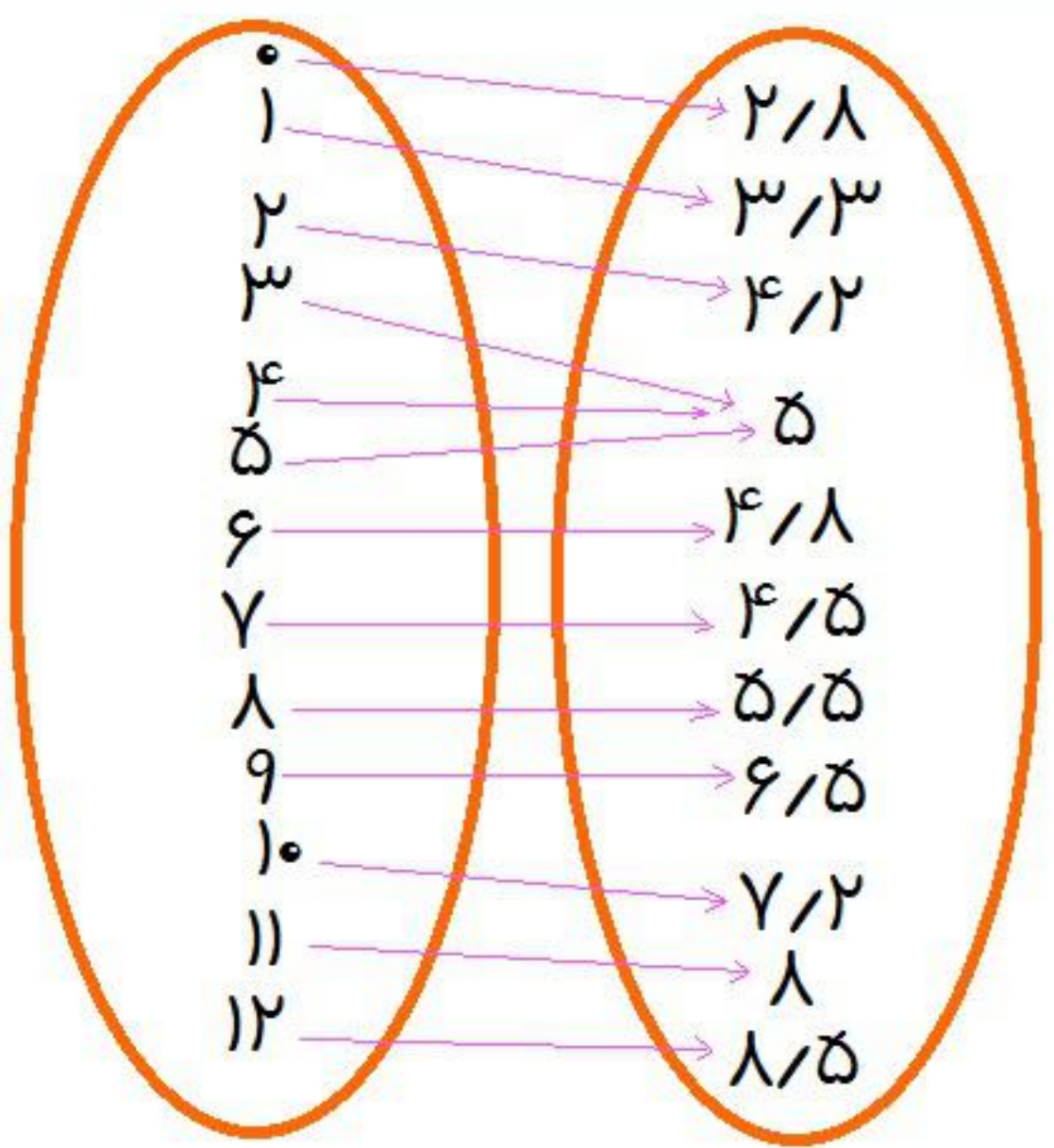
کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

وزن کودک در فاصله بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

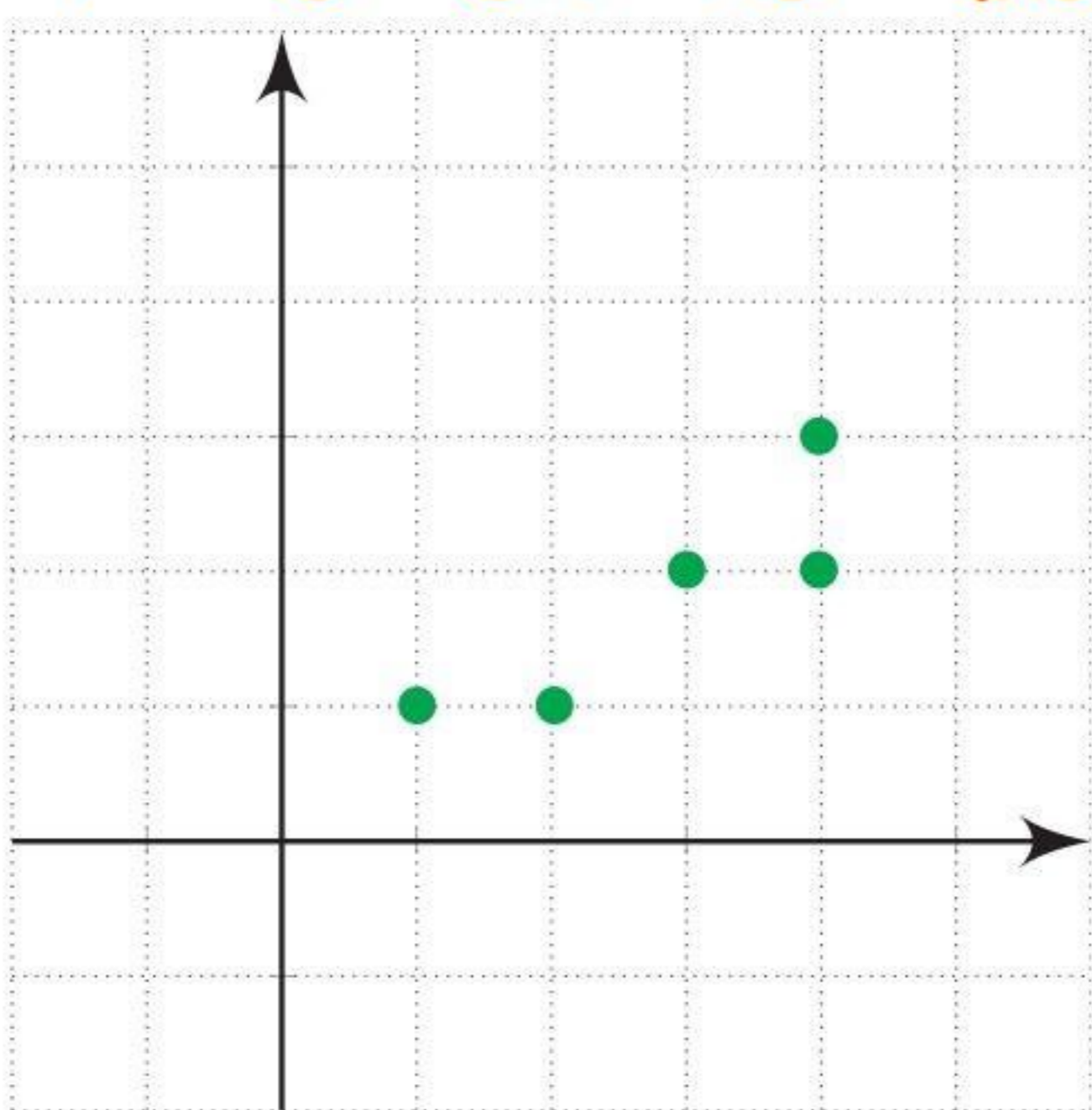
$$R = \{2/8, 3/3, 4/2, 5/4, 6/8, 4/5, 5/5, 6/5, 7/2, 8/8, 8/5\}$$



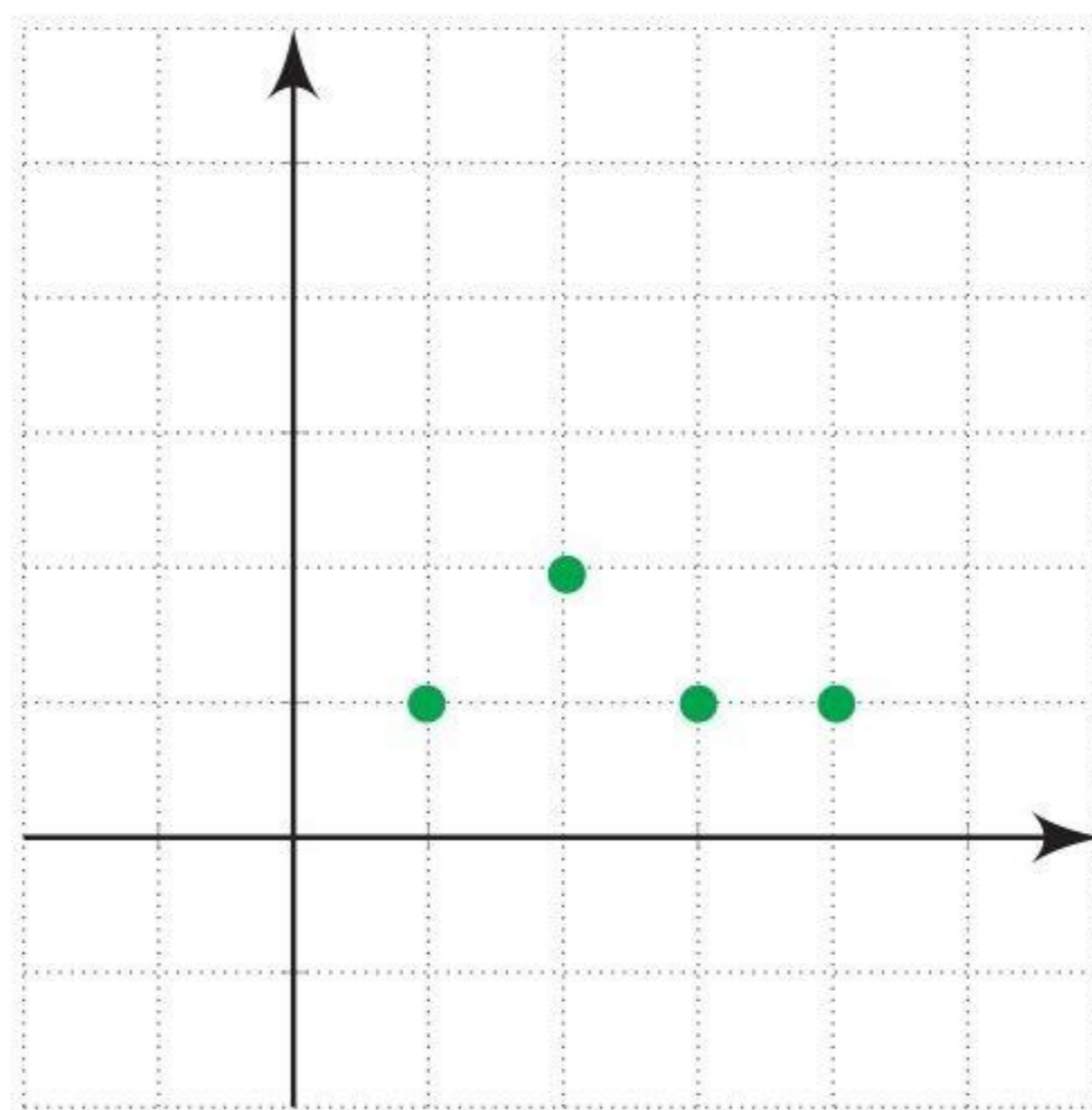
کار در کلاس

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.

تابع نیست زیرا دو نقطه از نقاط آن طول های یکسان و عرض های متفاوت دارند.



تابع است زیرا هیچکدام از نقاط آن طول های مساوی



می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

$D = \{1, 2, 3, 4\}$ و $R = \{1, 2\}$ \Rightarrow تابع است $\Rightarrow \{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)\}$ نمودار سمت راست

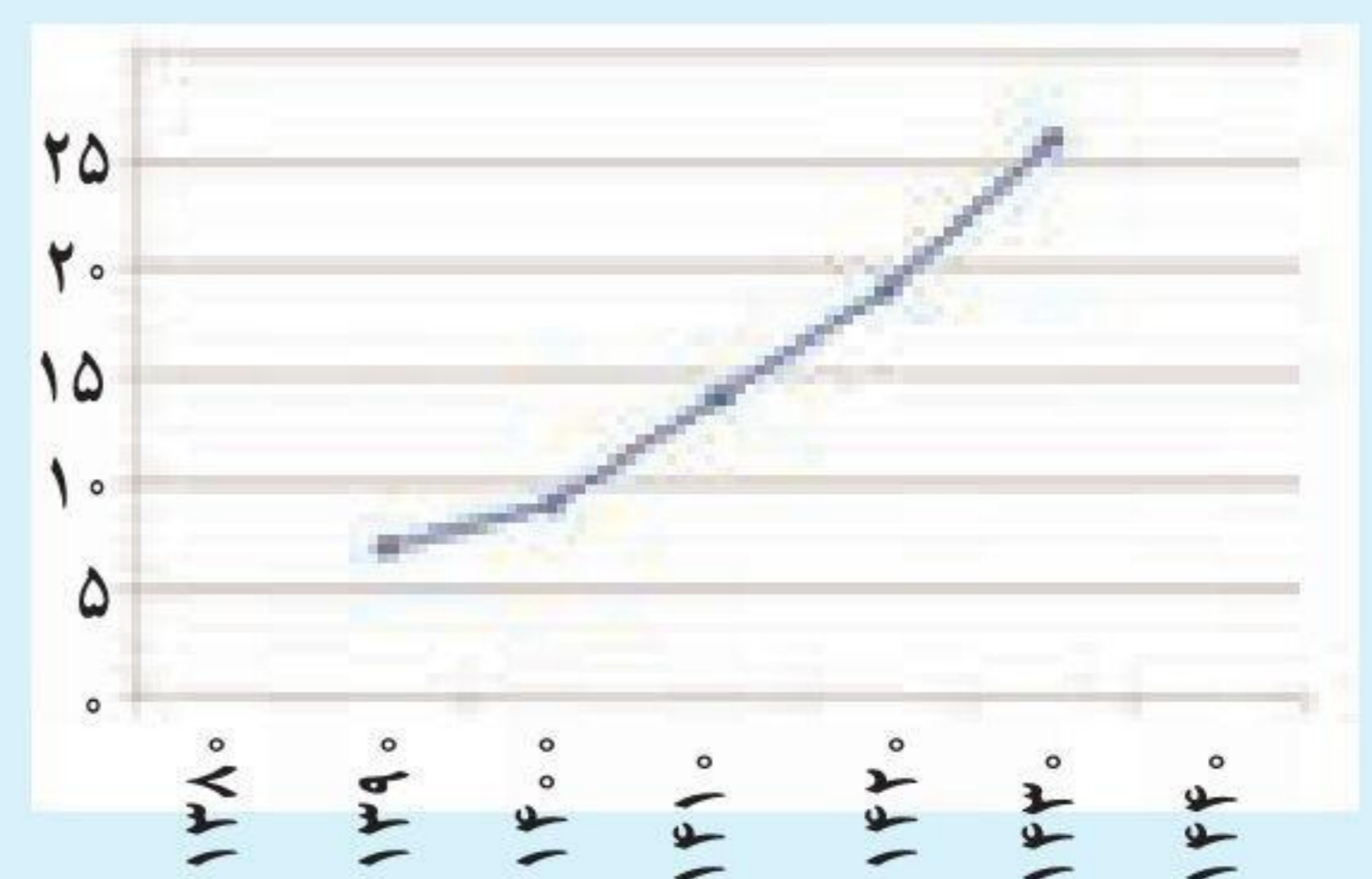
تابع نیست $\Rightarrow \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$ نمودار سمت چپ

با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، به دست آورید.

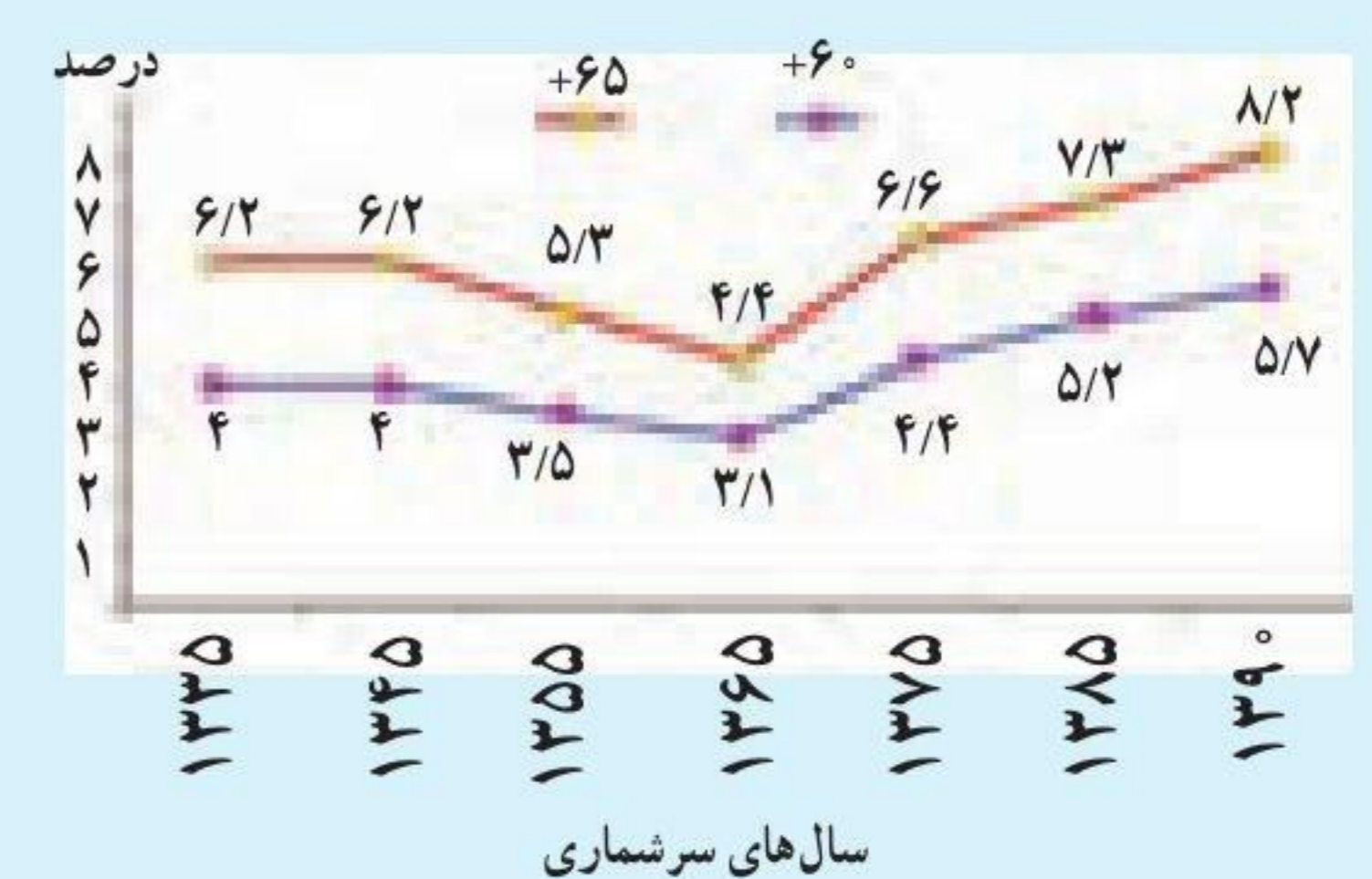
اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در **یک نقطه** قطع کند.

از سال ۱۹۹۹، کمیسیون جمعیت و توسعه سازمان ملل شصت سالگی را به عنوان آستانه سالمندی در نظر گرفته است که هر روز افراد بیشتری در جهان به آن می‌رسند. منظور از سالمندی جمعیت، افزایش نسبت تعداد افراد ۶۰ ساله و بالاتر به ازای هر ۱۰۰ نفر جمعیت زیر ۱۵ سال است. طبق آمارهای سازمان ملل در سال ۲۰۱۲، در صورت تثبیت وضعیت حاضر، کشور ایران در سال ۲۰۵۰ میلادی (۱۴۳۰ شمسی) جزء پیرترین کشورها خواهد بود و حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. این در حالی است که در زمان انتشار این آمار (۲۰۱۲)، کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. نتایج پیش‌بینی‌های اخیر سازمان ملل در سال ۲۰۱۰ در مورد تحولات حجم جمعیت ایران تا ۱۰۰ سال آینده نشان می‌دهد که با ادامه روند کنونی سال ۱۴۸۰ جمعیت به حدود ۳۱ میلیون نفر با شاخص سالخوردگی ۴۷/۴ درصد کاهش خواهد یافت.

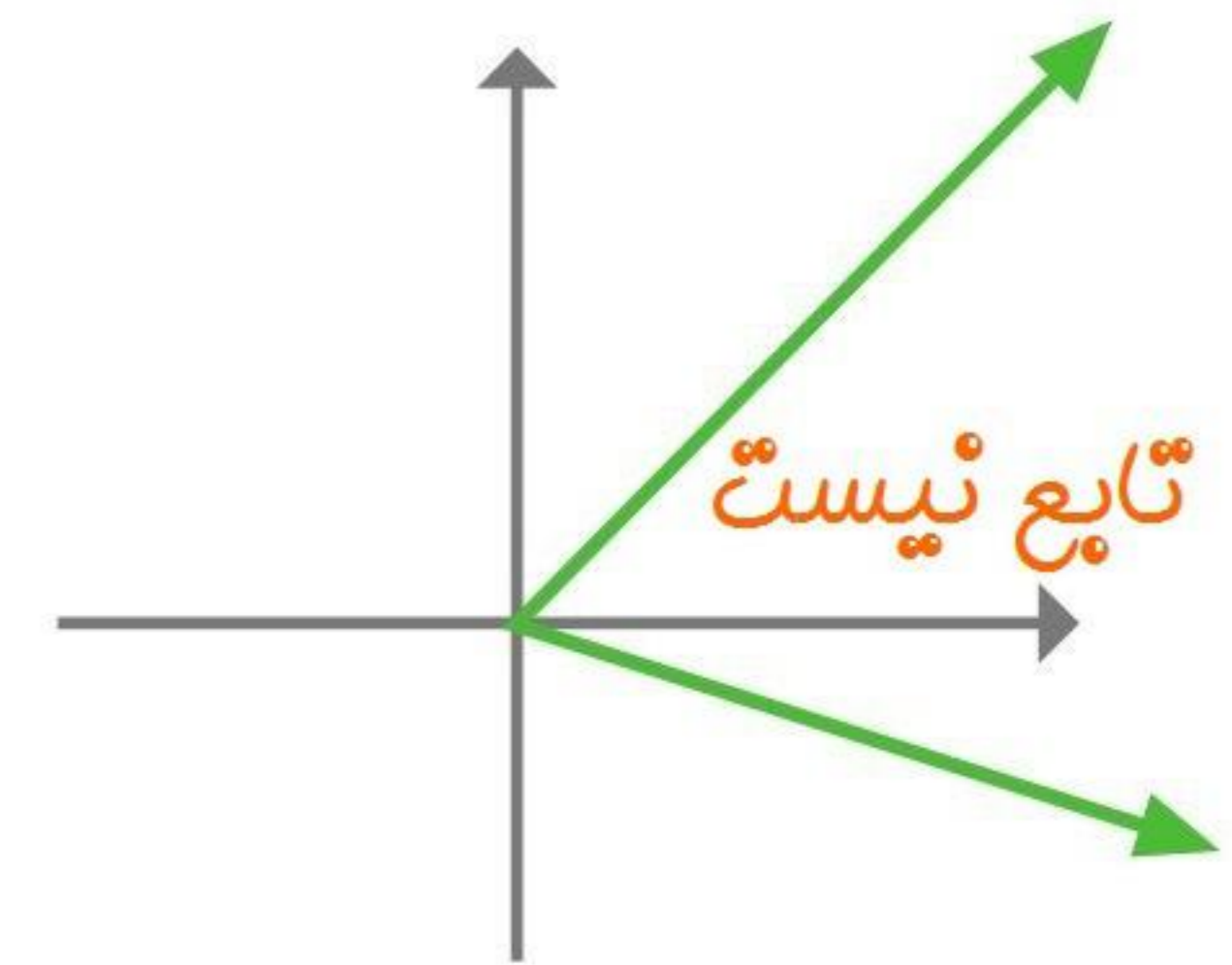
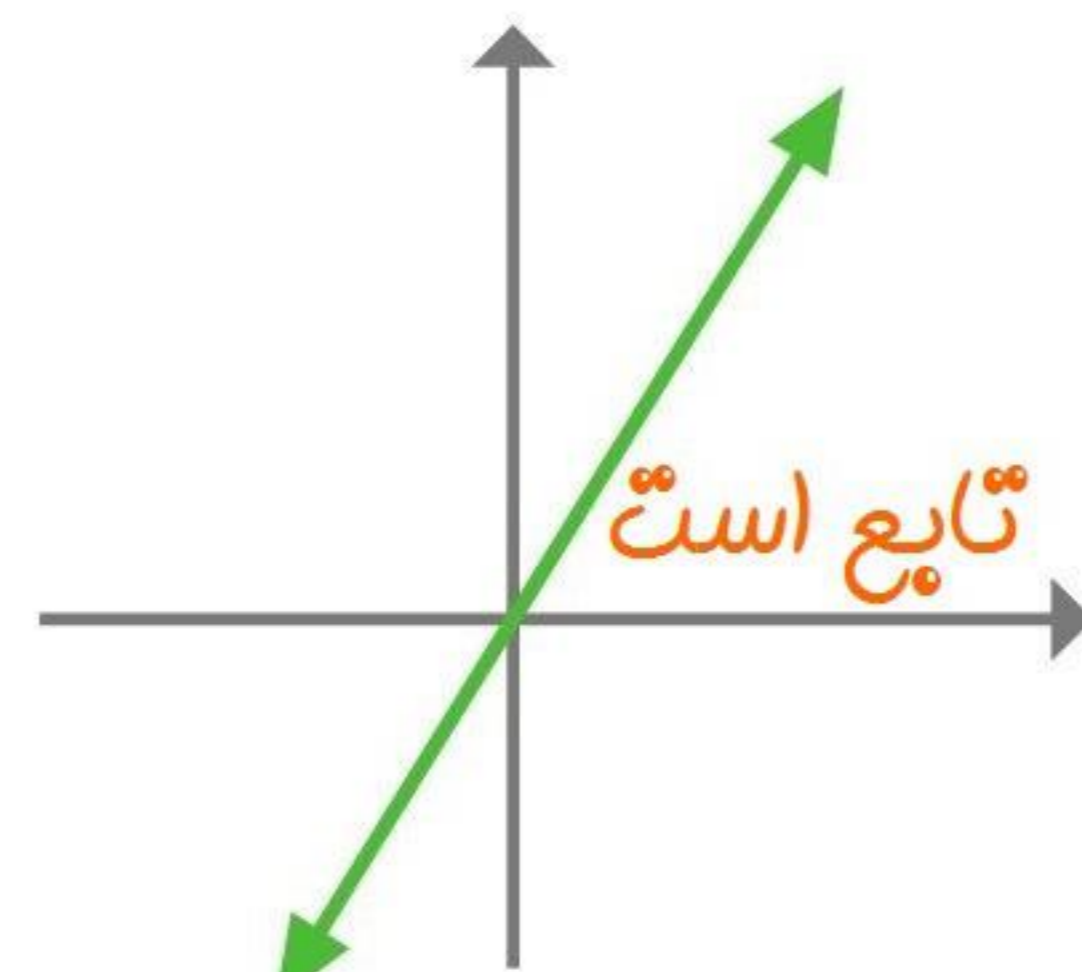
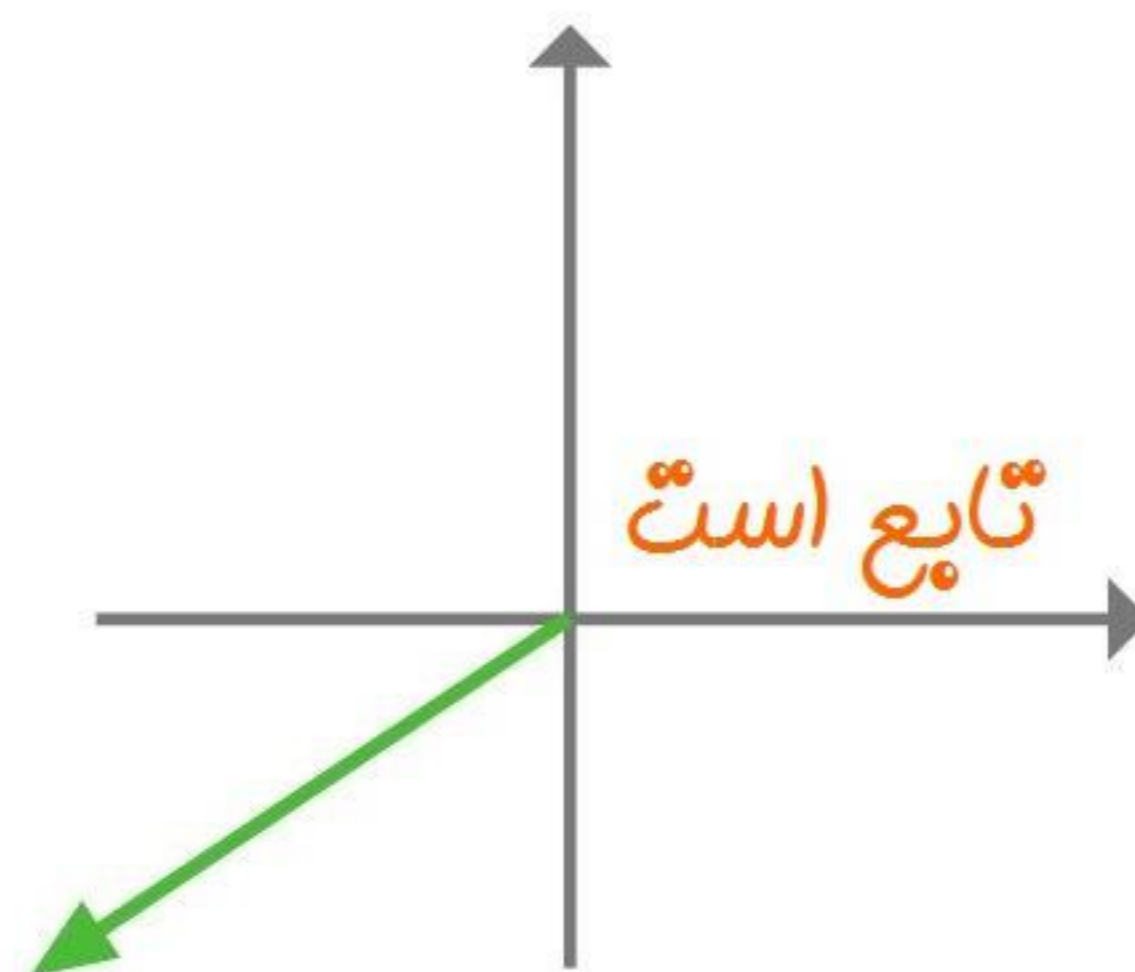
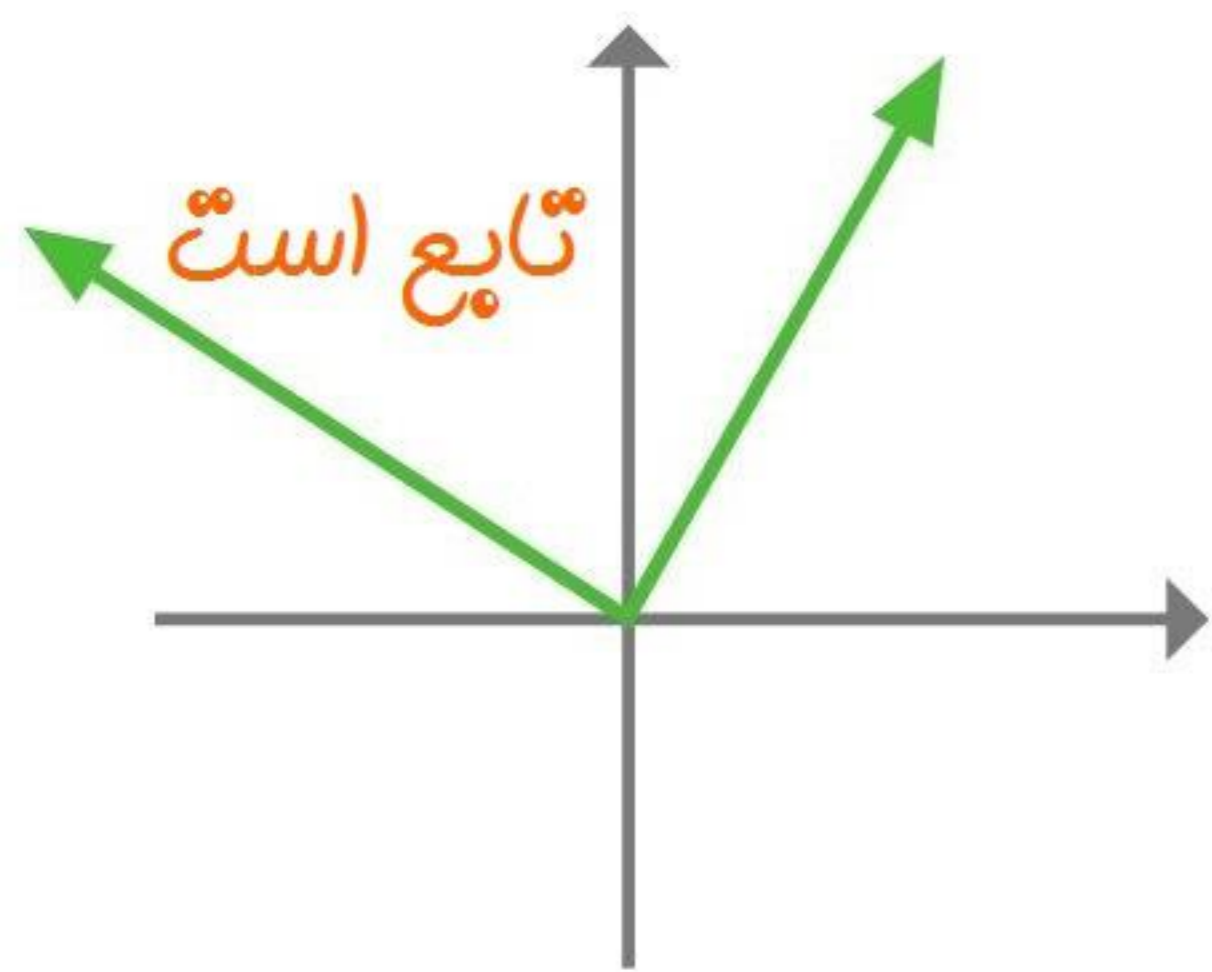
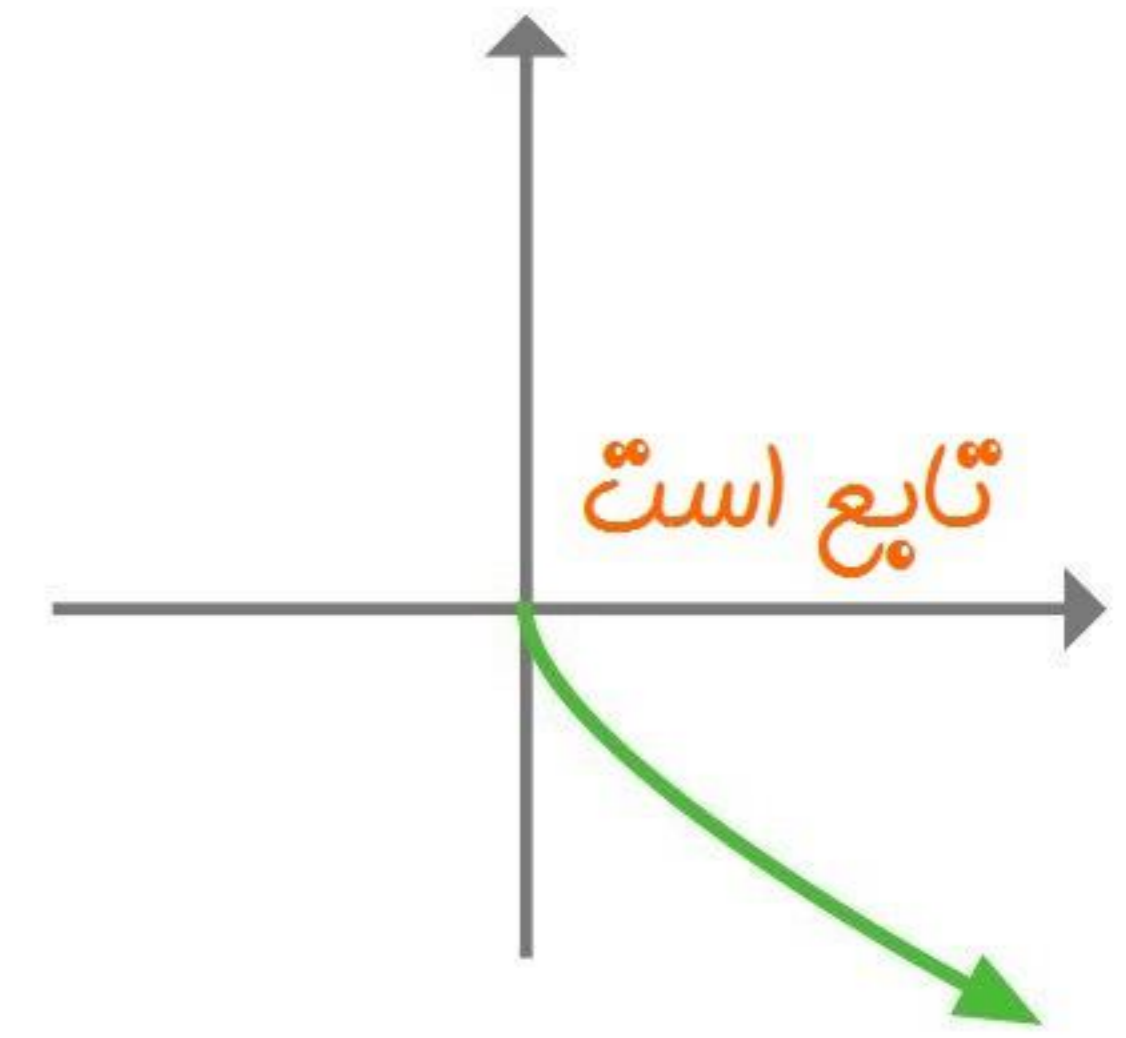
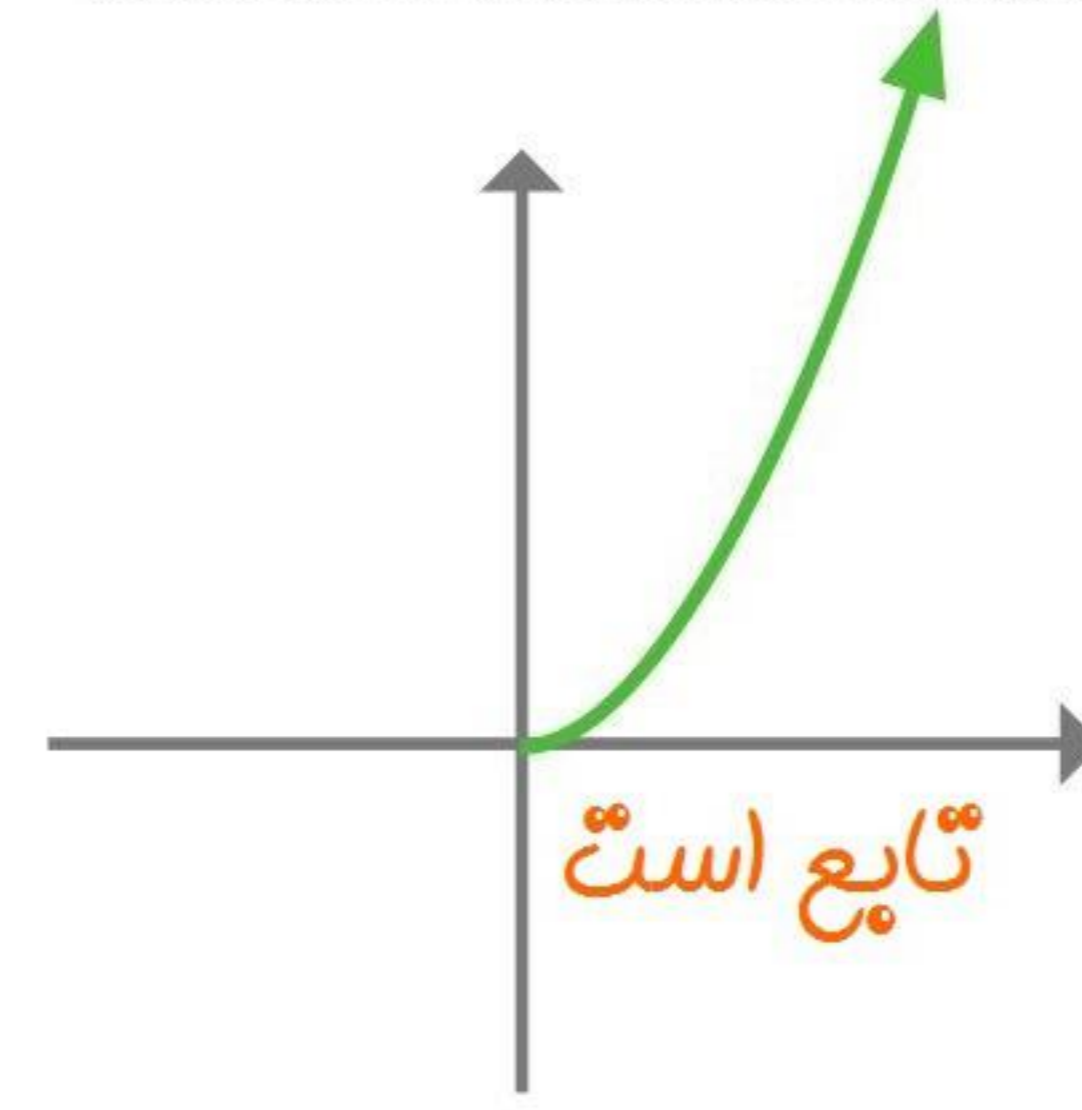
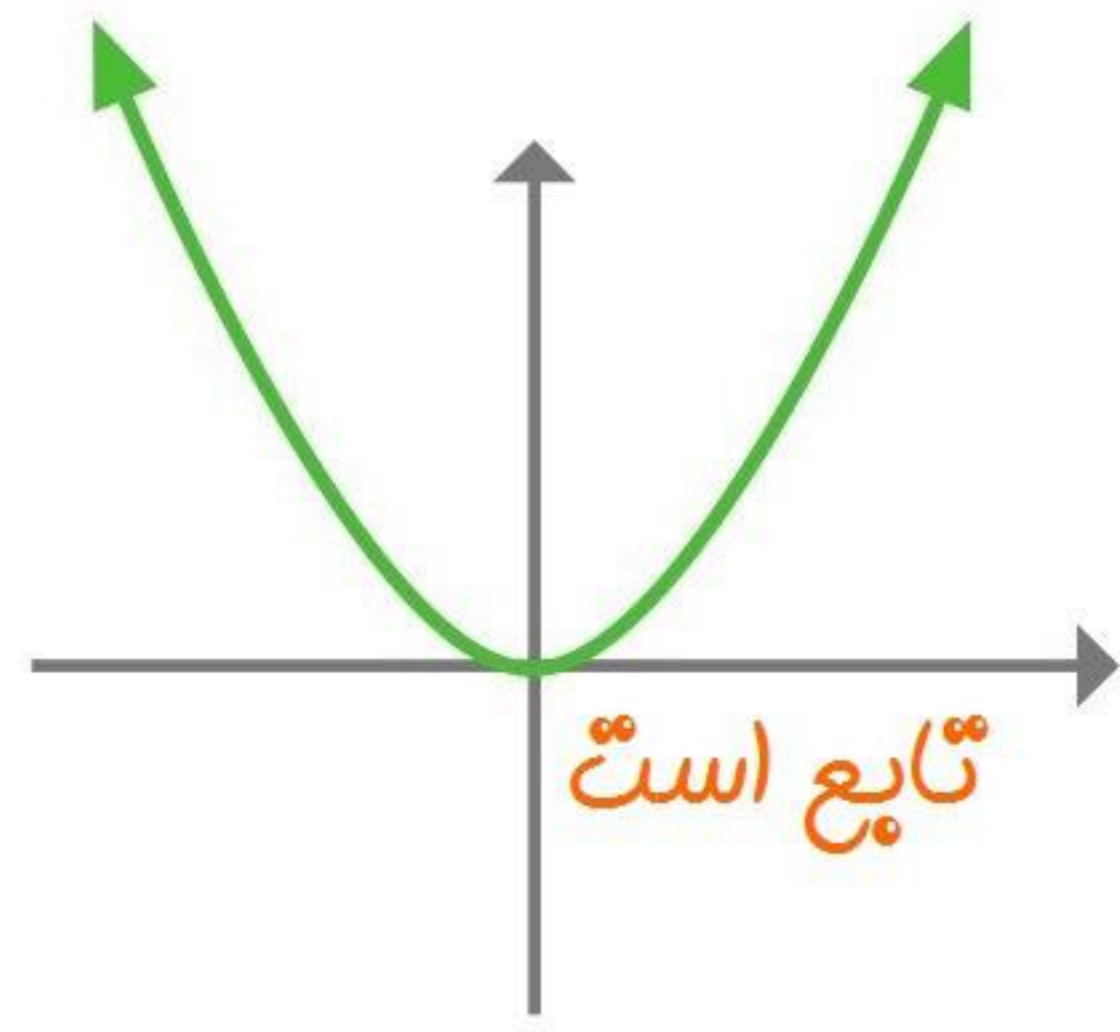
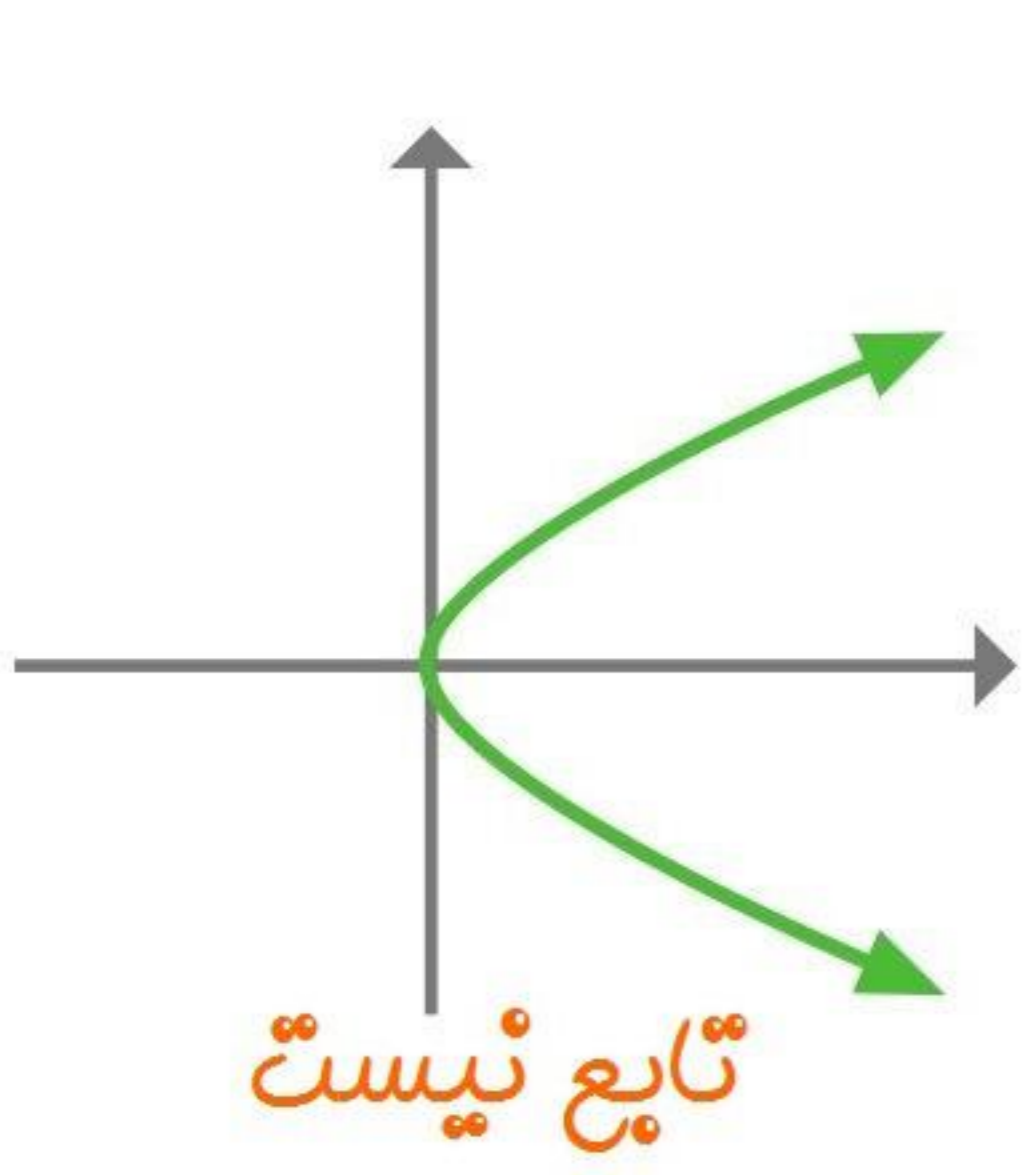
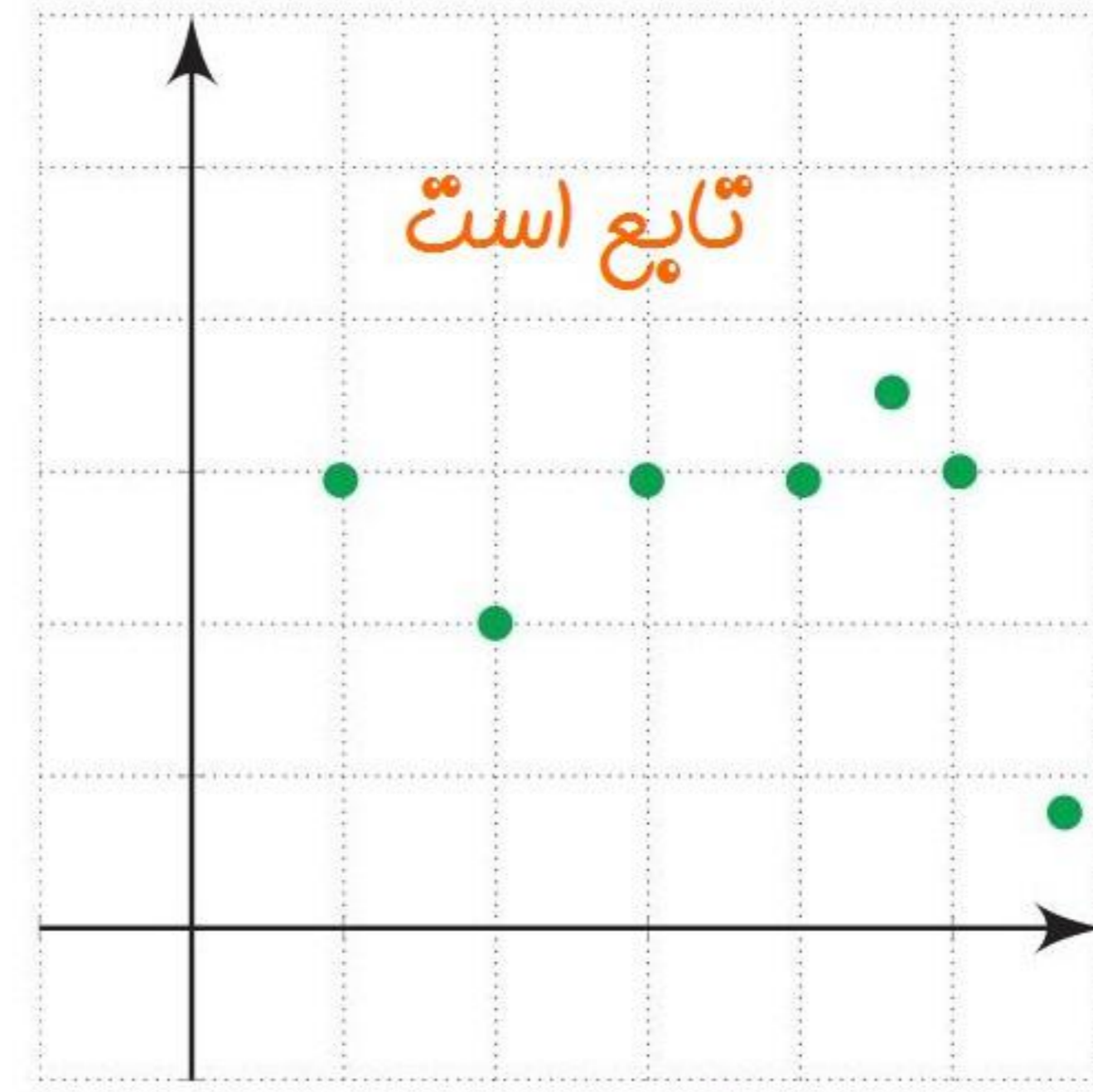
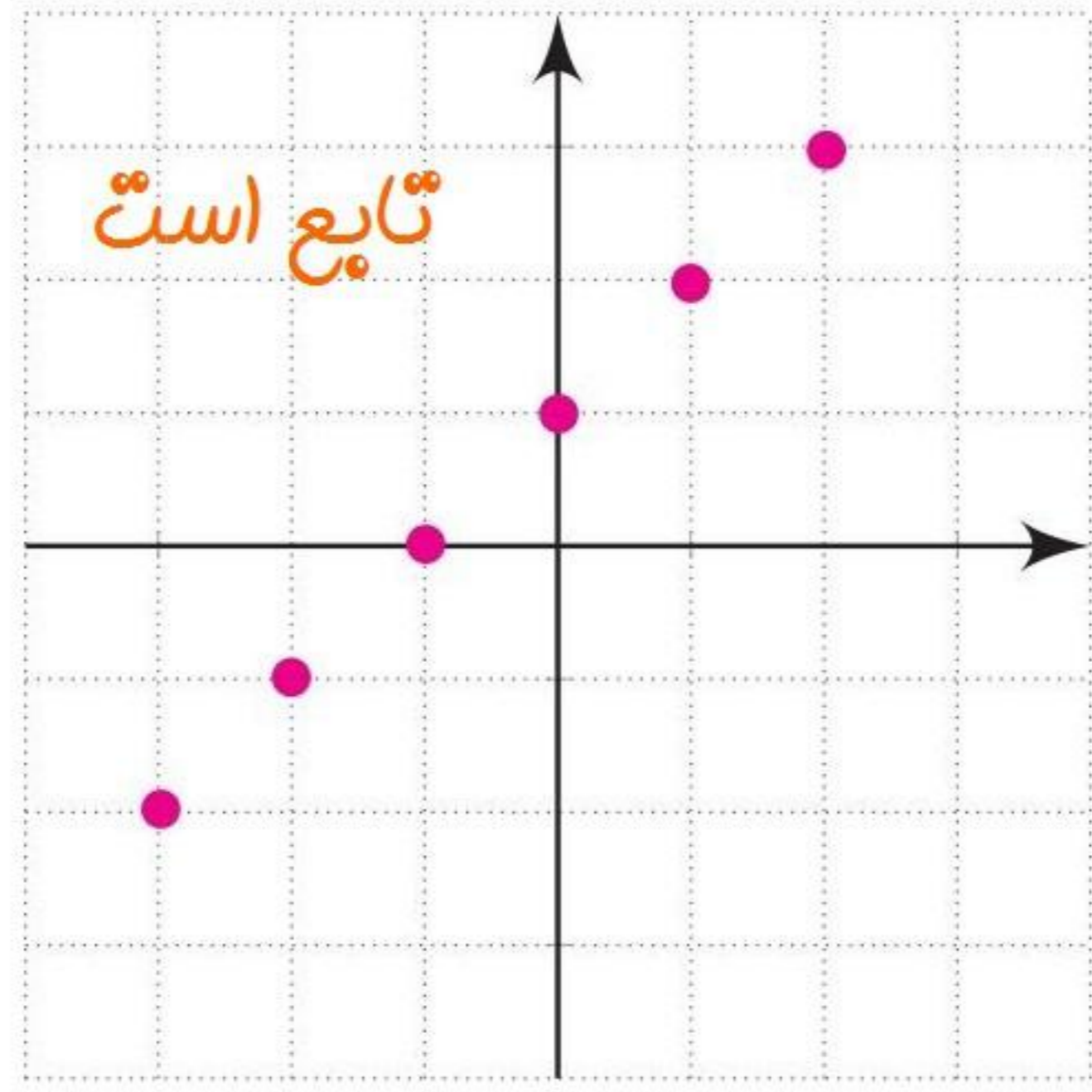
نمودار پیش‌بینی گروه سنی ۶۰ سال و بالاتر



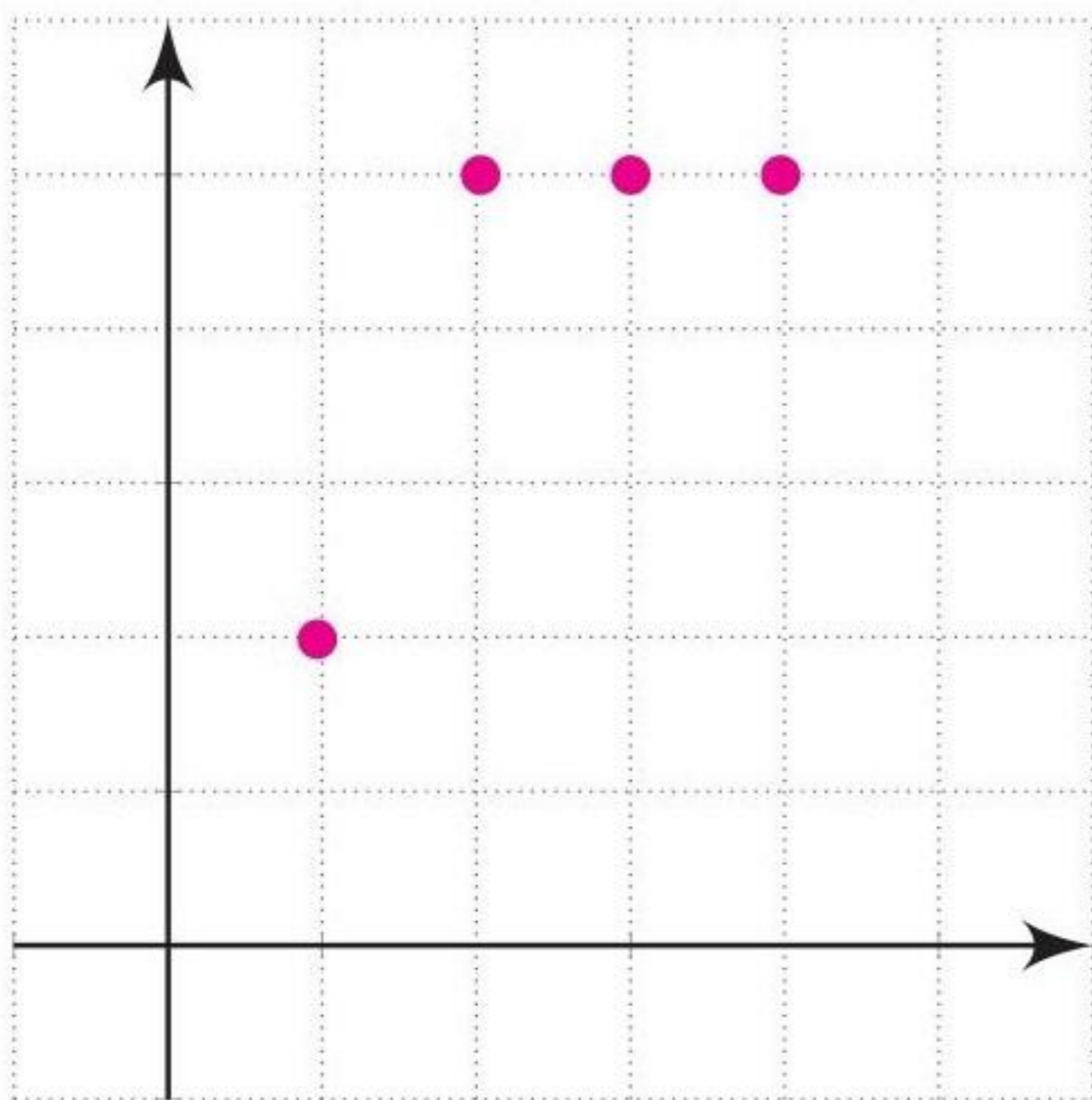
نسبت جمعیت سالمند ایران در طی سال‌های سرشماری



کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



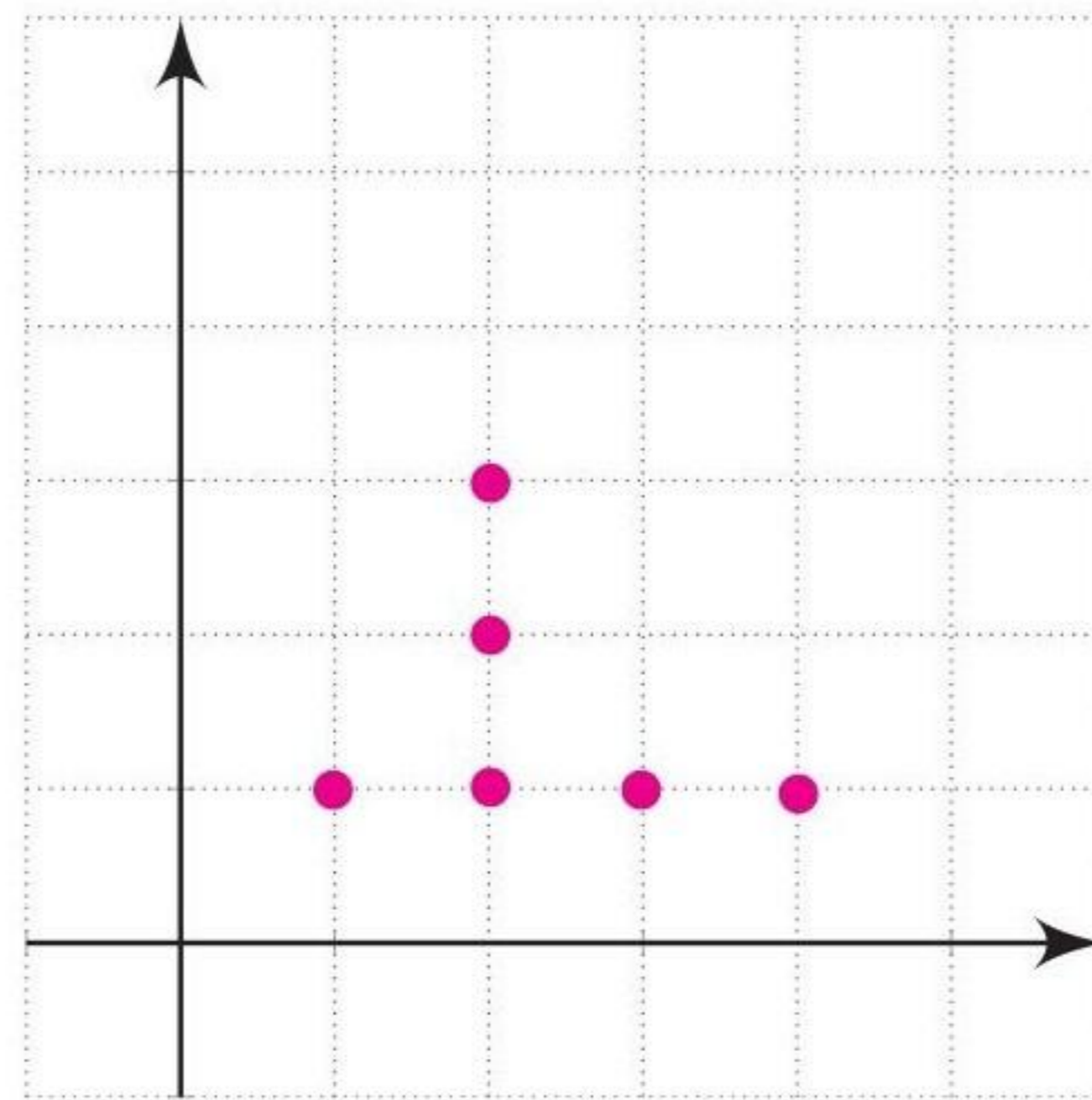
تمرین ۱ کدام یک تابع است؟ دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



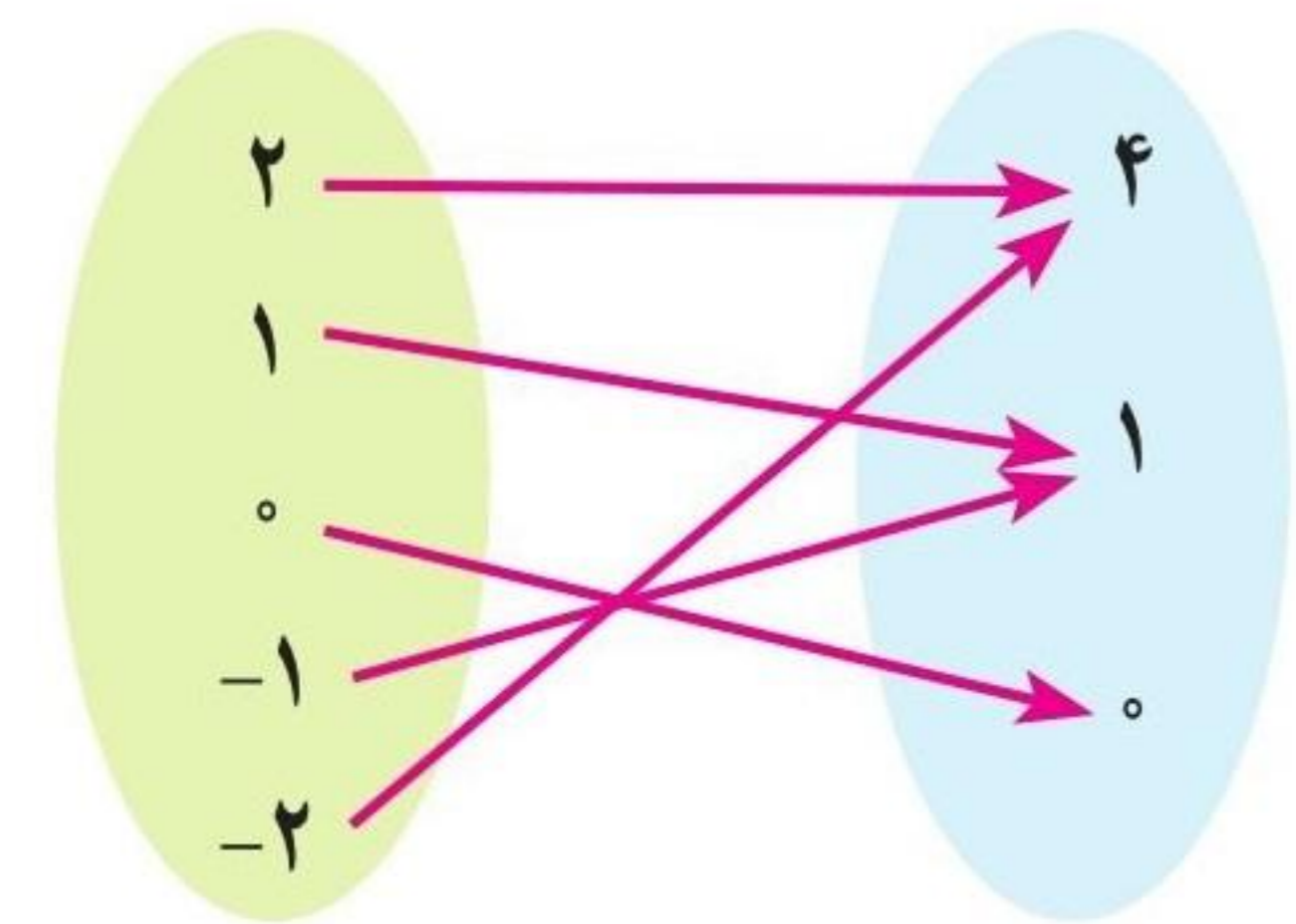
تابع است

$$\text{دامنه} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{برد} = \{2, 5\}$$



تابع نیست



تابع است

$$\text{دامنه} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\text{برد} = \{0, 1, 4\}$$

۲ تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد. $f = \{(1, 2), (2, 3)\}$

ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد. $g = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$

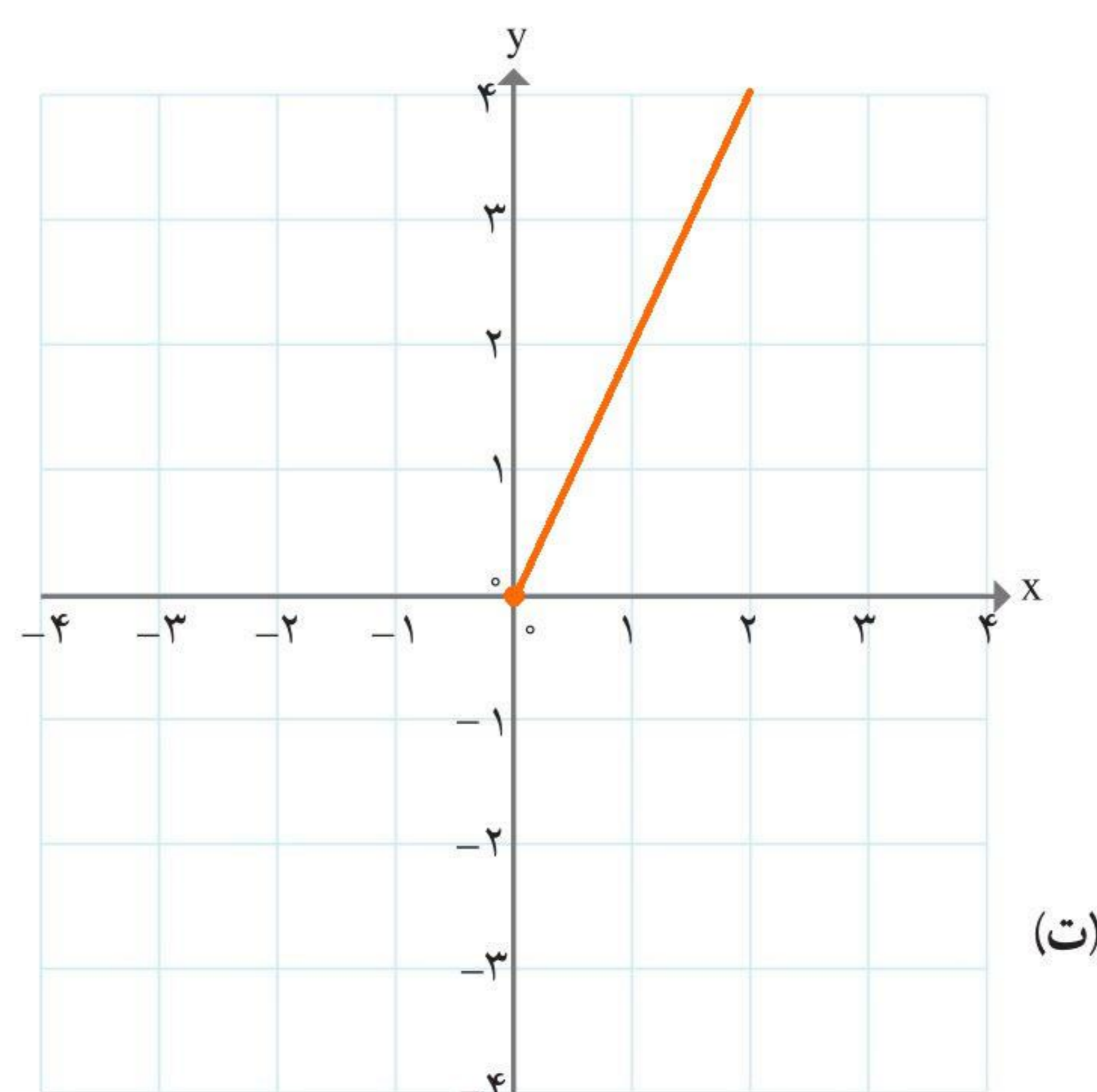
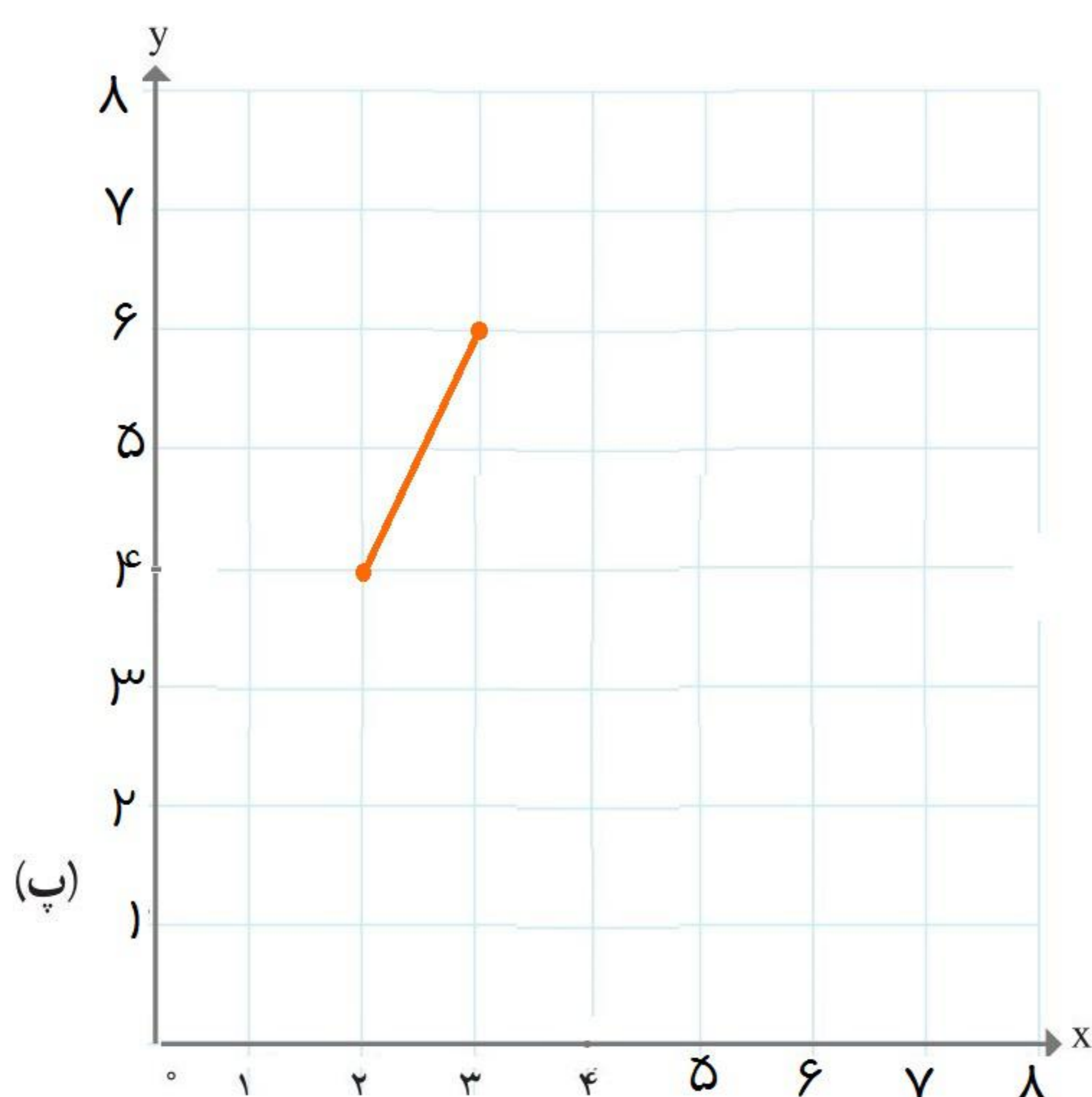
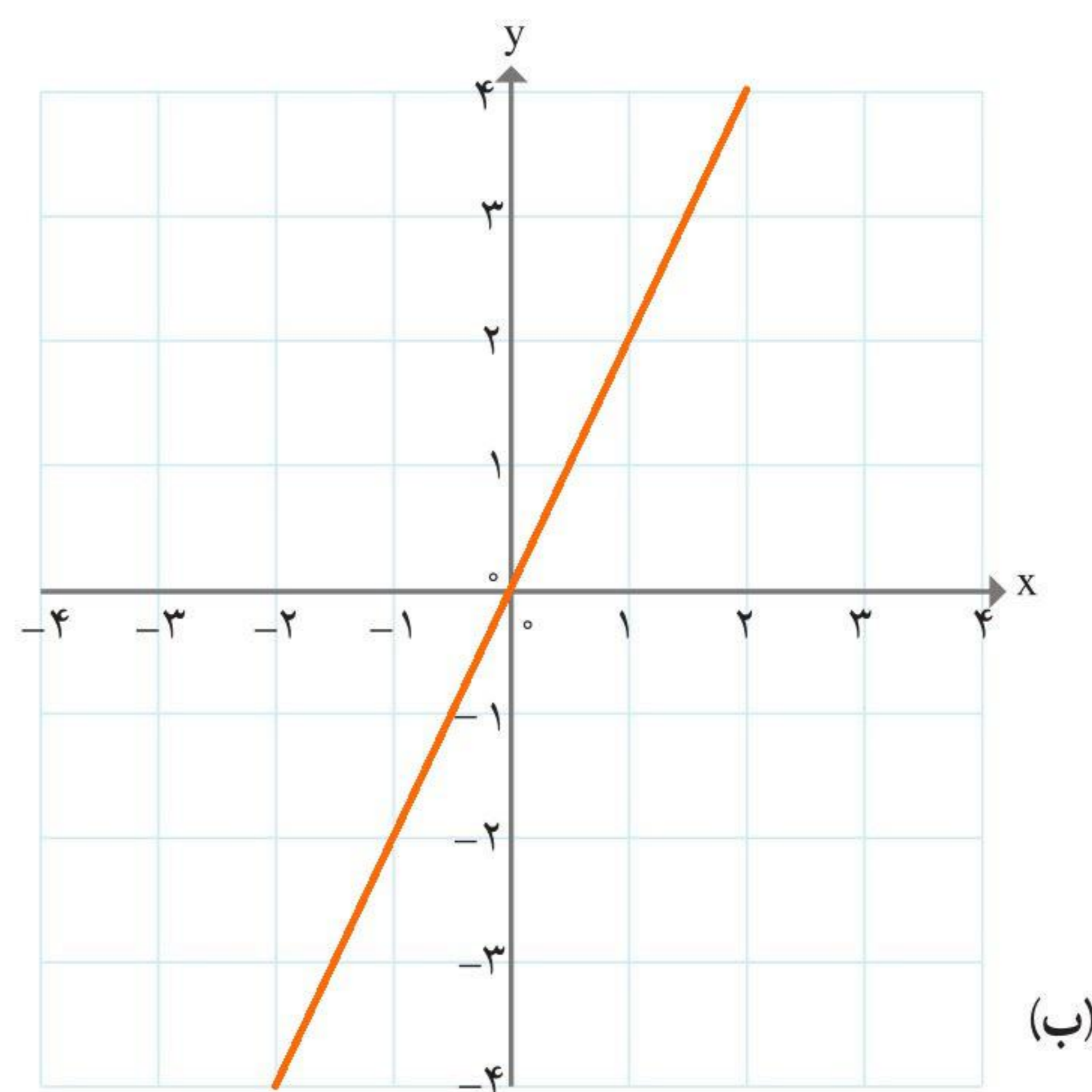
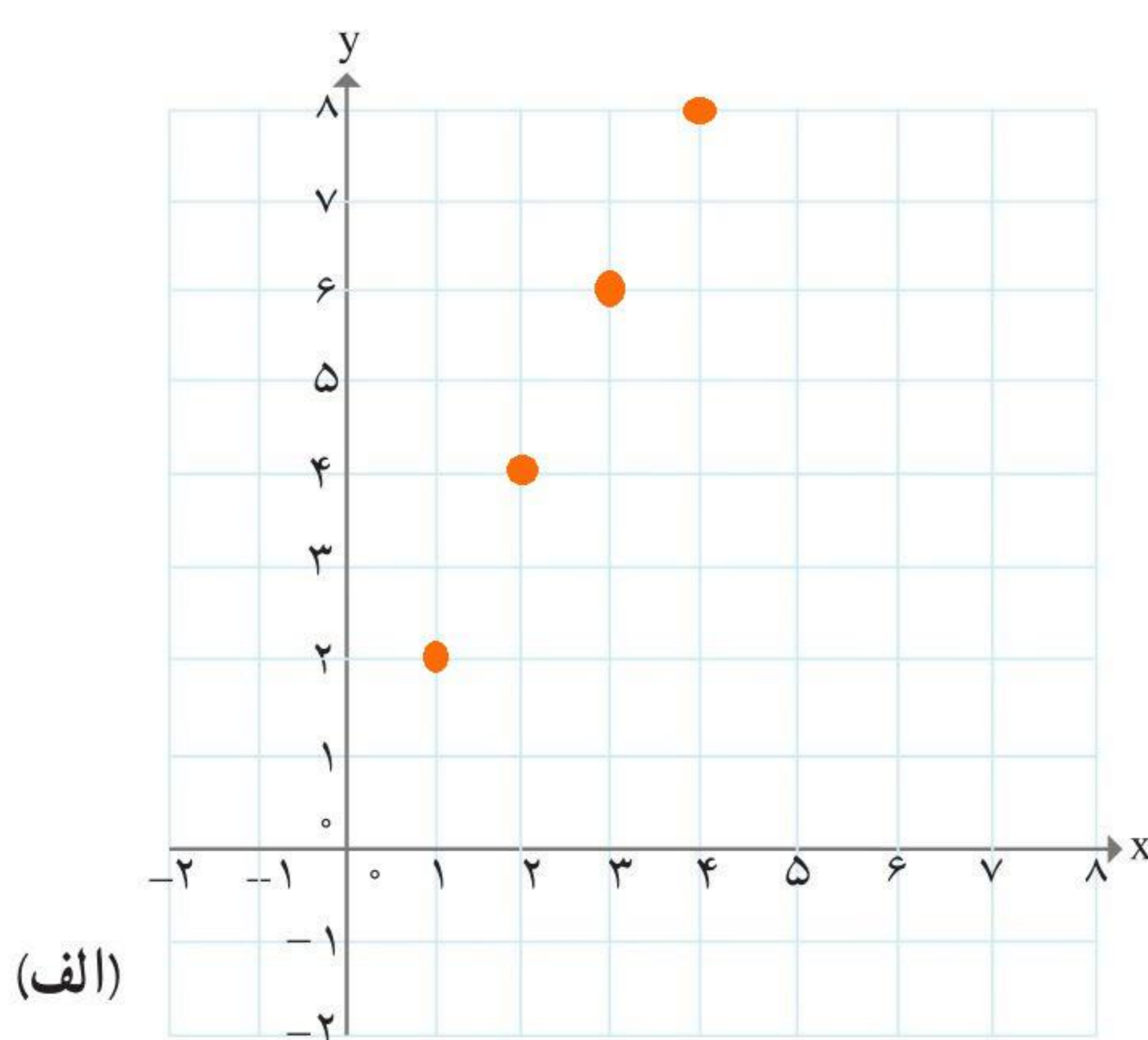
پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد. $h = \{(1, 2)\}$

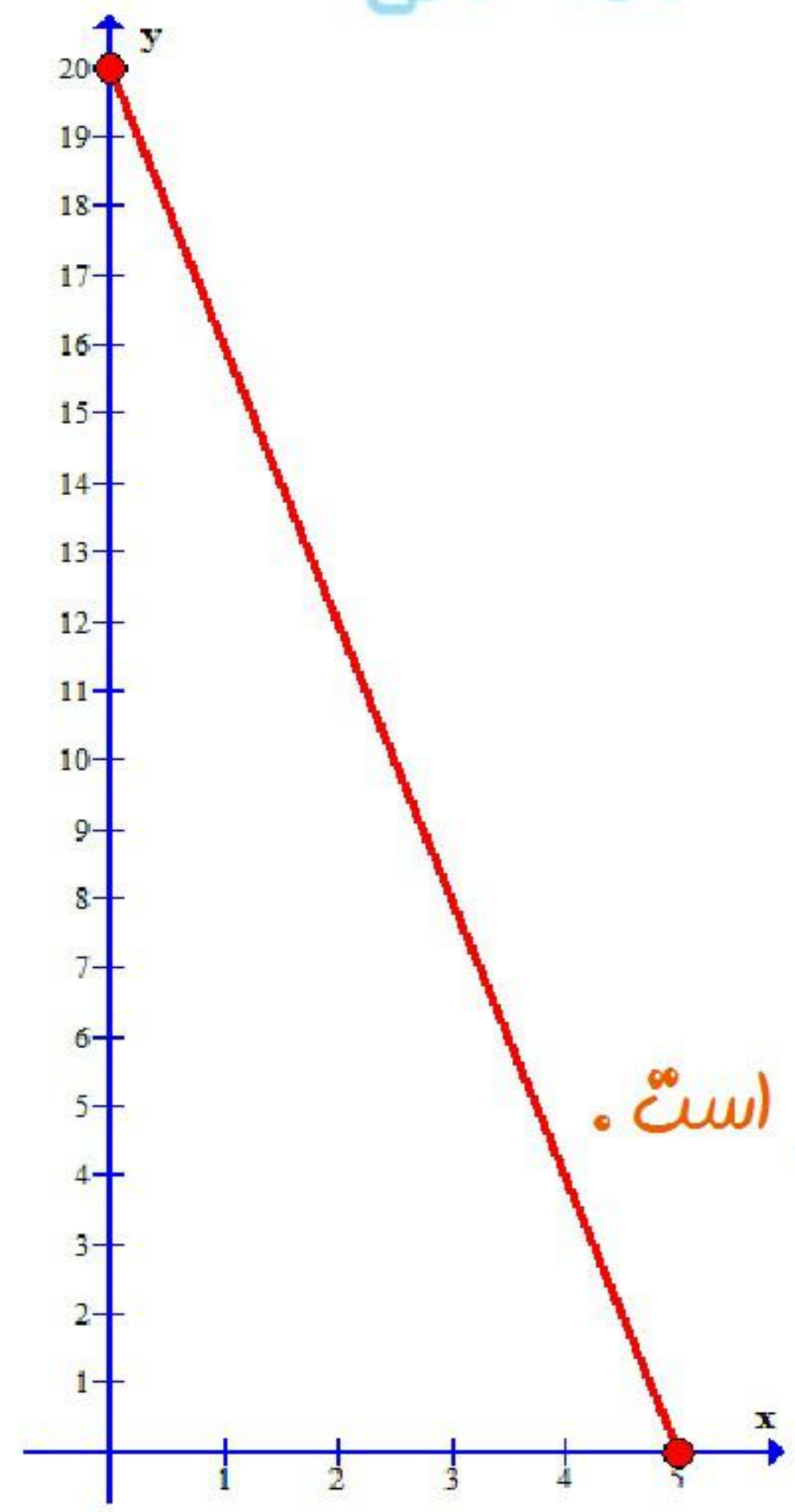
ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد. $k = \{(0, \sqrt{2}), (1, \sqrt{2}), (2, \sqrt{2}), (3, \sqrt{2}), \dots\}$

ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند. $w = \{(0, 0), (1, -1), (2, -2), (3, -3), \dots\}$

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	$\{2, 4, 6, 8\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[4, 6]$	مجموعه ی اعداد حقیقی نامنفی





۴ یک شمع ۲۰ سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی متر آن می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰

نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟ زیرا نمودار آن قسمتی از یک خط راست می باشد و معادله این خط $y = -4x + 20$ است.

۵ آیا خط $x = 2$ را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟

خیر زیرا این خط موازی محور عرض ها است لذا تمام نقاط آن مولفه های اول یکسان دارند.

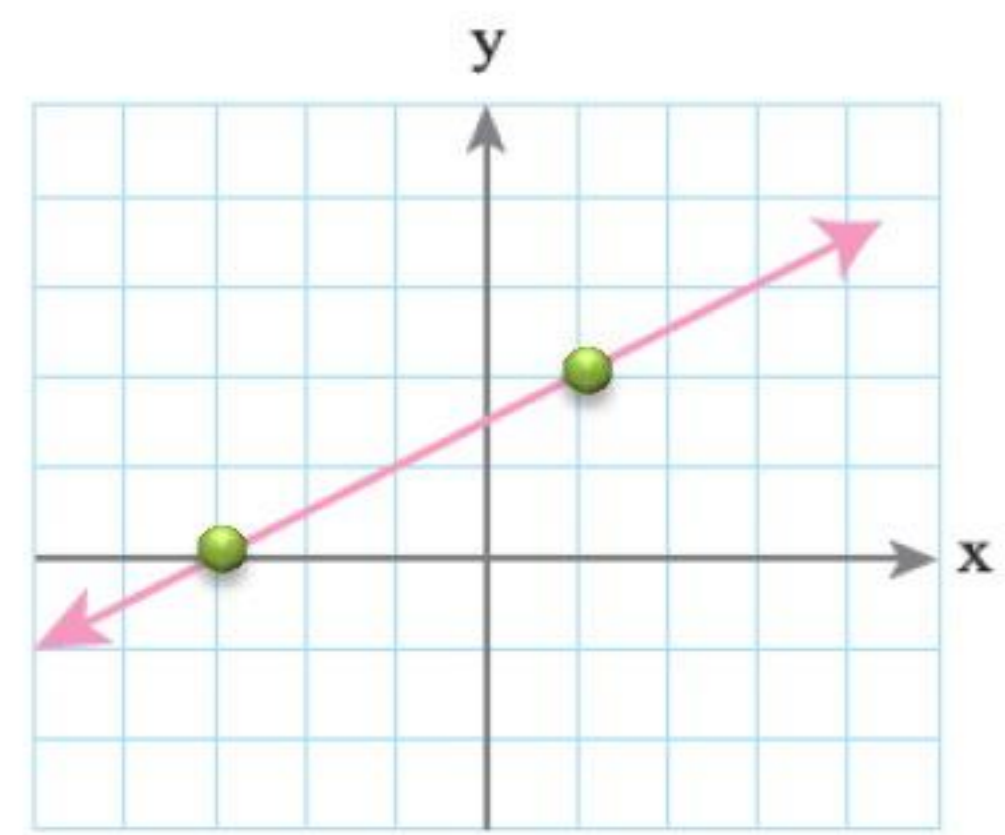
خط $y = 5$ را چگونه؟ بله تابع است زیرا نمودار آن موازی محور طول ها می باشد، و هیچ دو نقطه ای دارای مولفه ی اول یکسان نیستند.

در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان یک تابع نیز در نظر گرفت؟ زمانی تابع است که آن خط موازی محور عرض ها نباشد.

۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[-3, 5]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟ پیشمار

$$y = 1 - x, x \in [-3, 5] \quad , \quad y = 2x, x \in [-3, 5] \quad , \quad y = \frac{2x+3}{5}, x \in [-3, 5]$$

۷ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.



$$(-3, 0) \xrightarrow{y=ax+b} 0 = -3a + b \quad , \quad (1, 2) \xrightarrow{y=ax+b} 2 = a + b$$

$$\begin{cases} 3a - b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

از بین نمایش های مختلفی که برای این تابع می دانید، کدام یک مناسب تر است؟ نمایش چپری مناسب تر است.

۸ جدول زیر دمای سنگ ها در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می دهد. نمودار آن را رسم کنید.

زیرا هیچکدام از مولفه های اول آن تکرار نشده است.

ب) معادله ای برای این تابع به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} (1, 55) \xrightarrow{y=ax+b} 55 = a + b \\ (2, 90) \xrightarrow{y=ax+b} 90 = 2a + b \end{array} \right\} \Rightarrow a = 35 \text{ و } b = 20 \Rightarrow \boxed{y = 35x + 20}$$

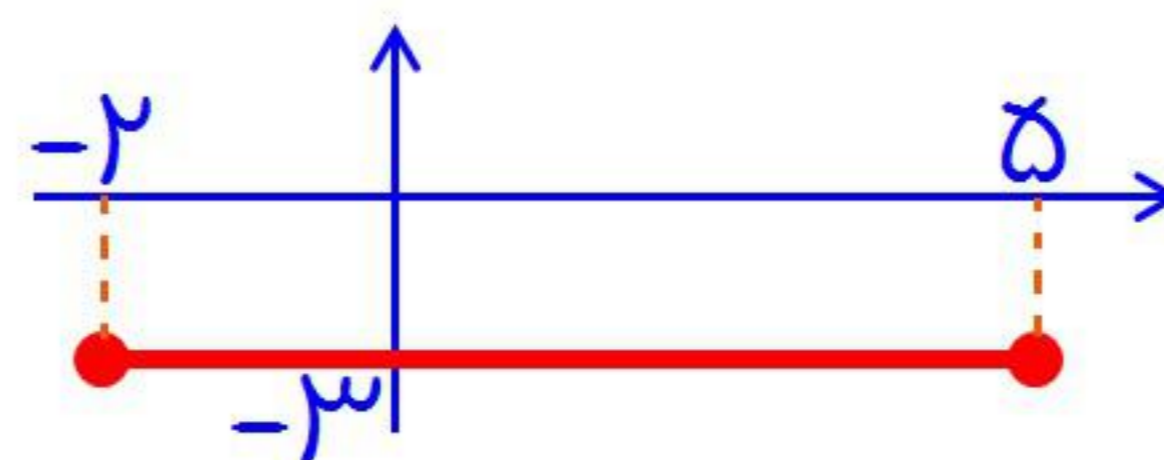
پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید. $x = 10 \xrightarrow{y=35x+20} y = 35 \cdot 10 + 20 = 370$.

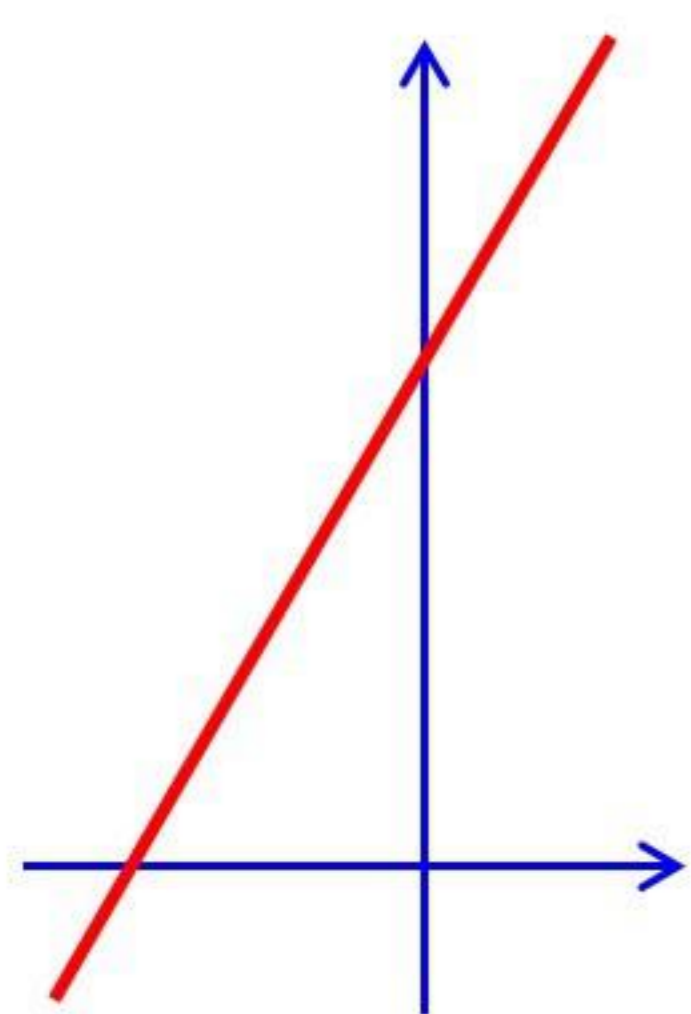
۹ الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به دست آورید.

$$f(2) = f(100) = f(-5) = f(\sqrt{5}) = f(-\frac{3}{4}) = -3$$

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید. همان قسمت الف است و پی مورد تکرار کرده است.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.





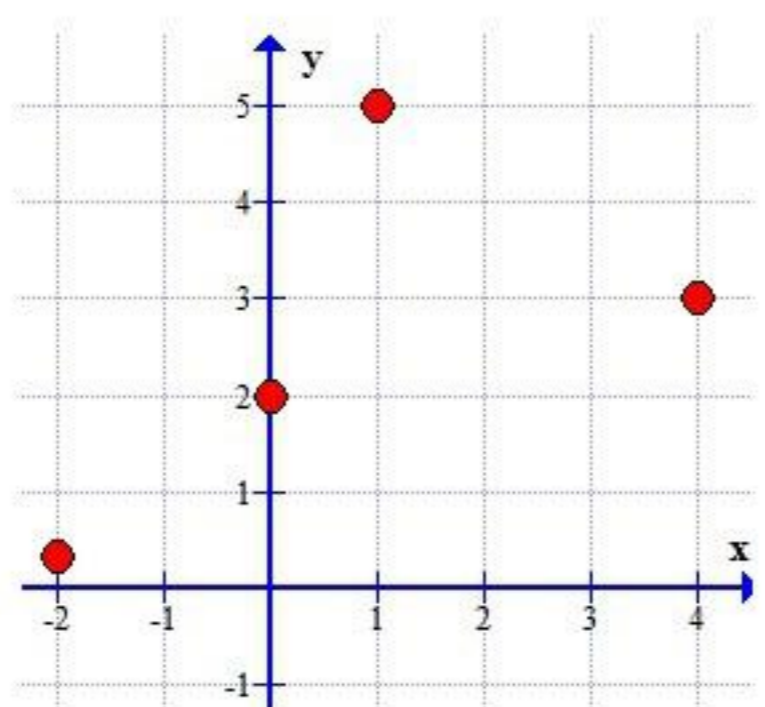
۱۰ برای یک تابع خطی می دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.

$$\left. \begin{aligned} f(0) = 7 &\xrightarrow{f(x)=ax+b} 7 = 0 + b \Rightarrow b = 7 \\ f(2) = 11 &\xrightarrow{f(x)=ax+b} 11 = 2a + b \xrightarrow{b=7} a = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = 2x + 7$$

۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می دهد؟ چرا؟ **پله زیر هیچ یک از مولفه های اول آن تکرار نشده است.**

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

۱۲ علی در هر دقیقه پیاده روی، مسافت ۱/۰ کیلومتر را طی می کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می دهد؟
 الف) $f(t) = t - 0/1$ ب) $f(t) = 0/1 t$ پ) $f(t) = t + 0/1$ ت) $f(t) = 0/1 - t$
گزینه ی (ب) صحیح است.



۱۳ اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(0) = 2, g(1) = 5, g(-2) = \frac{1}{3}, g(4) = 3$ ؛

g را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$g = \left\{ (0, 2), (1, 5), (-2, \frac{1}{3}), (4, 3) \right\}$$

۱۴ برای اندازه گیری دما از واحدهای «سانتی گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته اند.

الف) $20 -$ درجه سانتی گراد، چند درجه فارنهایت است؟
 $F = \frac{9}{5}(-20) + 32 = -36 + 32 = -4 = -8$

ب) 104 درجه فارنهایت چند سانتی گراد است؟
 $104 = \frac{9}{5}C + 32 \xrightarrow{\times 5} 520 = 9C + 160 \Rightarrow 9C = 360 \Rightarrow C = 40$

پ) معادله ای بنویسید که سانتی گراد را بر حسب فارنهایت به دست دهد.

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \xrightarrow{\times 5} 5F = 9C + 160 \Rightarrow 9C = 5F - 160 \xrightarrow{\div 9} C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$$

ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می کند؟ **پله**

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را بر حسب تابعی از عرض آن بیان کند.

$$\begin{array}{c} x + 3 \\ \boxed{x} \\ x + 3 \end{array}$$

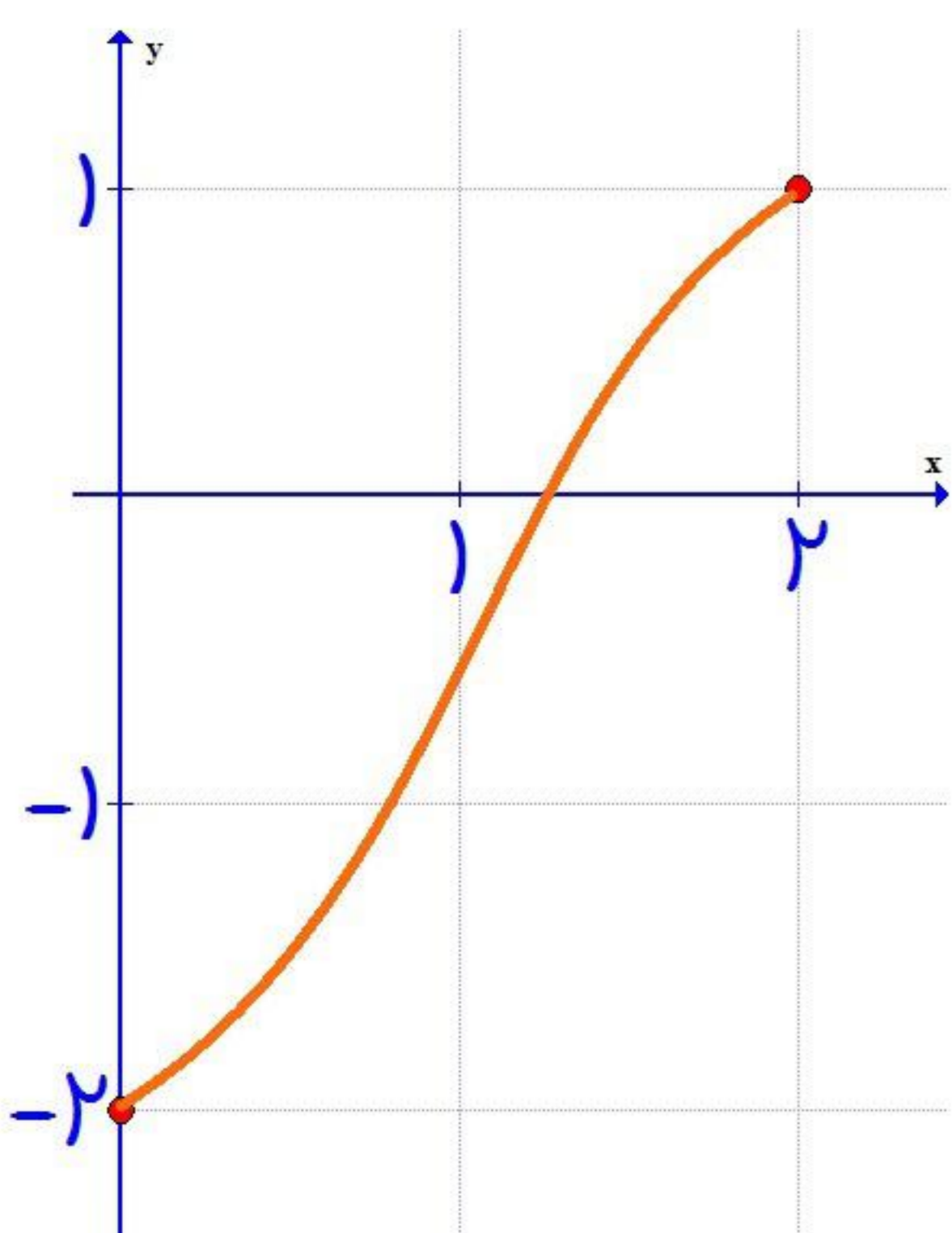
$$P(x) = 2(x + 3 + x) = 2(2x + 3) \Rightarrow P(x) = 4x + 6$$

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

$$f = \{(-1, 1), (1, 3)\} \quad \text{و} \quad g = \{(-1, 3), (1, 1)\}$$

۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع می توان رسم کرد؟

پی شمار تابع تحت این شرایط قابل رسم است.



درس سوم: انواع توابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارند. در این درس با برخی از آنها آشنا می‌شویم.

فعالیت

۱ جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{1}{2}$	۱	۳	۴	$\frac{2}{5}$	۱۰	۱۲	x
مساحت آن	۰/۰۱	$\frac{1}{4}$	۱	۹	۱۶	$\frac{6}{25}$	۱۰۰	۱۴۴	x^2

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵	۱۰	r
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	4π	9π	25π	100π	$r^2\pi$

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت $f(x) = x^2$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از r است و به صورت $g(r) = r^2\pi$ قابل نمایش است. چون f و g به صورت یک چند جمله‌ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم. حجم یک کره را برحسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای‌اند:

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

$$g(x) = 4x^2 - 3$$

$$h(a) = a^3 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t) = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$$

تابع f را به صورت $y = 2x^2 + 5x + 1$ نیز نمایش می‌دهند. بقیه توابع رانیز به این صورت نمایش دهید.

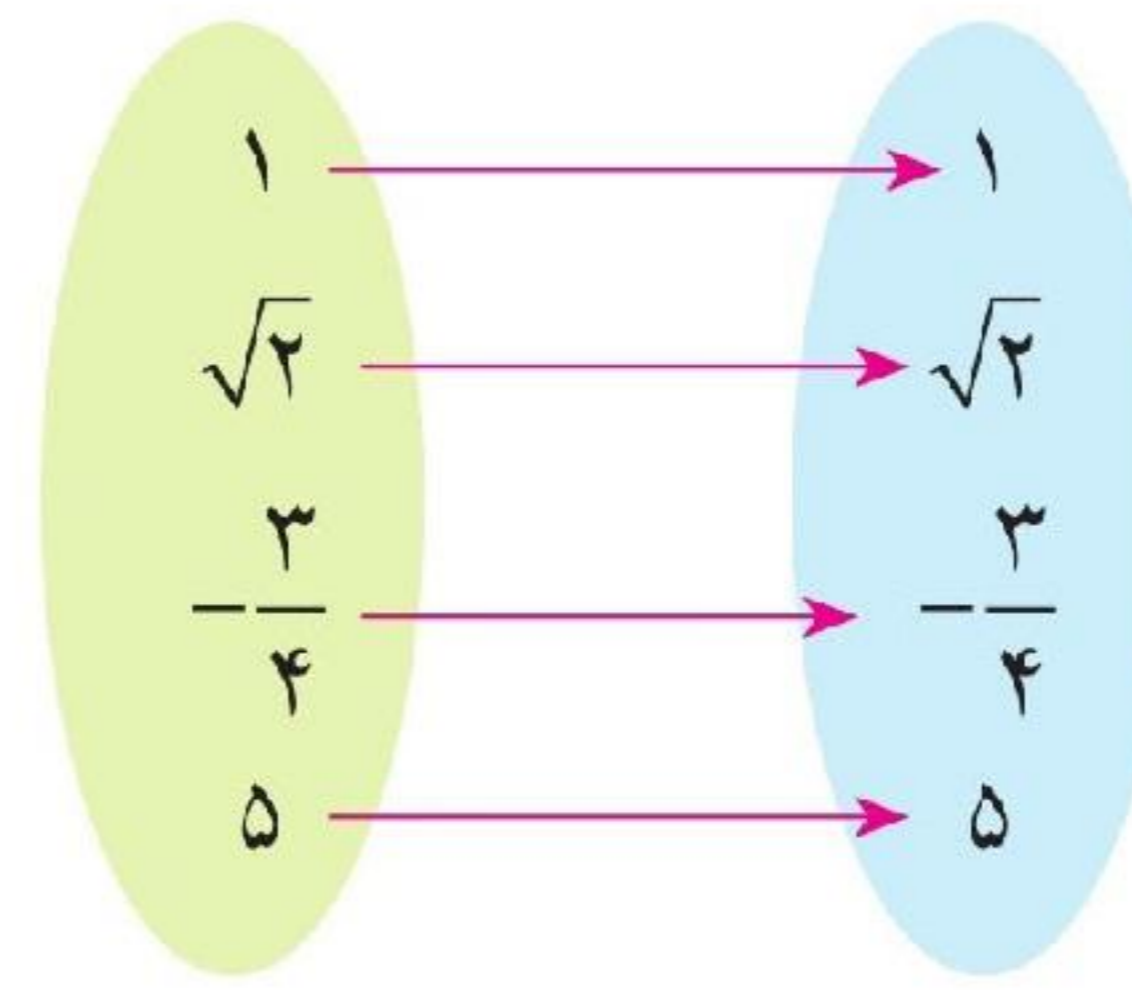
۲ دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟

شباهت: در هر سه تابع، هر عضو از دامنه دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شده است.

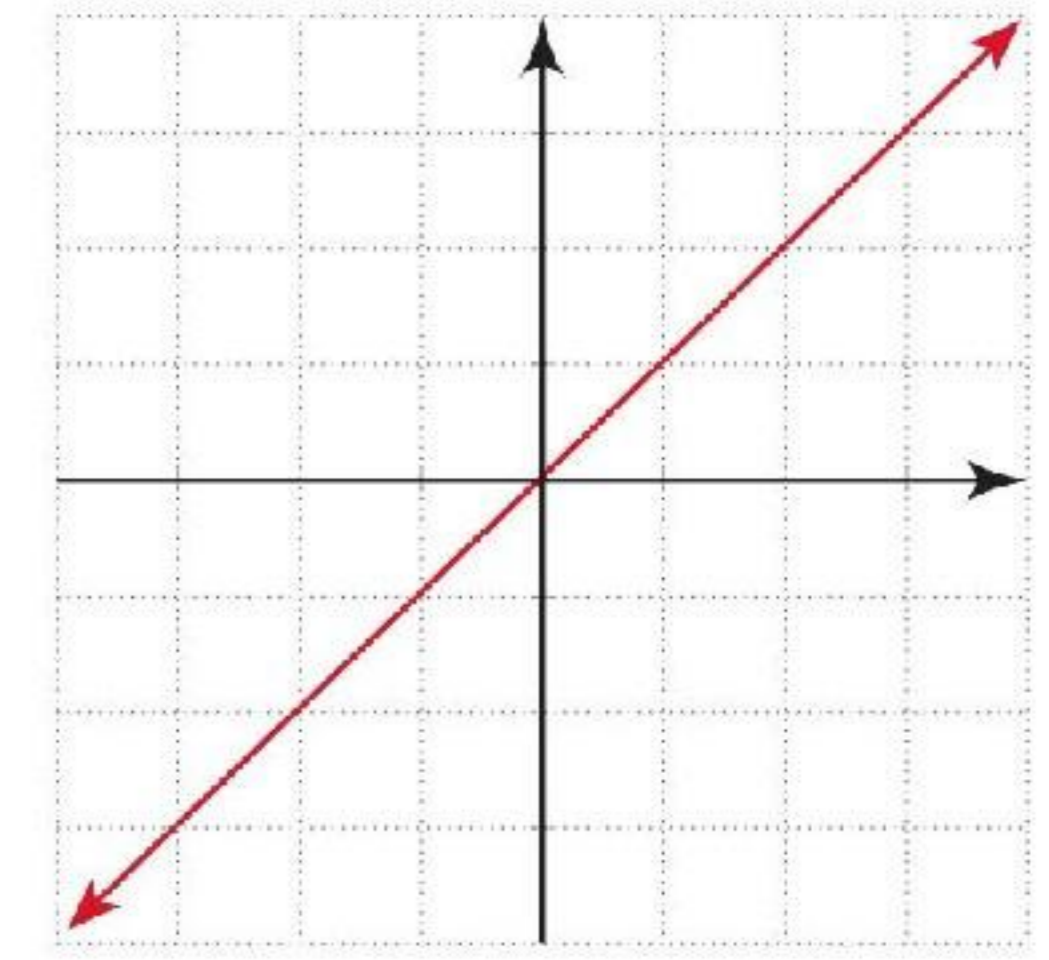
تفاوت: دامنه این توابع از مجموعه های متفاوتی انتخاب شده است.

$$f = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$$

$$D = R = \{a, b, c\}$$



$$D = R = \{1, \sqrt{2}, \frac{3}{4}, 5\}$$



$$D = R = \mathbb{R}$$

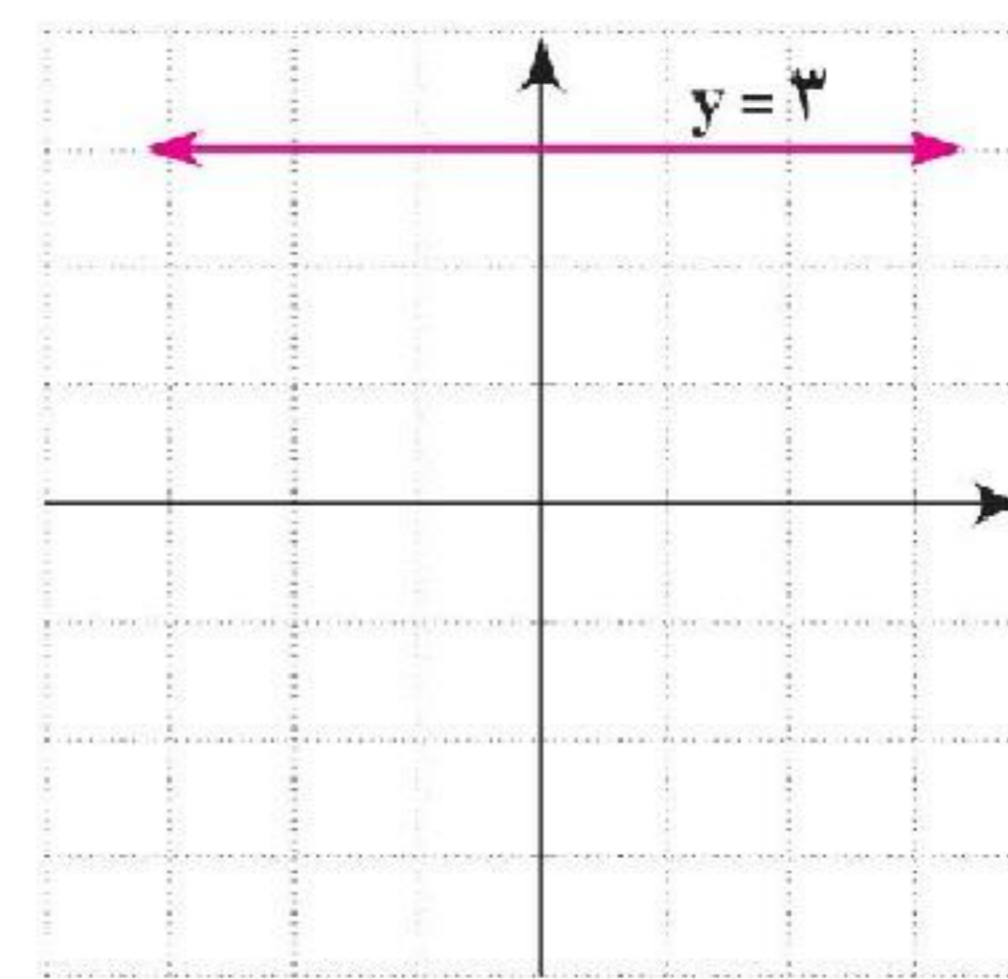
اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می نامند. اگر دامنه تابع همانی را \mathbb{R} در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می شود.

۳ سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی ای مشترک اند؟ بُرد همگی تک عضوی می باشد.

ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹

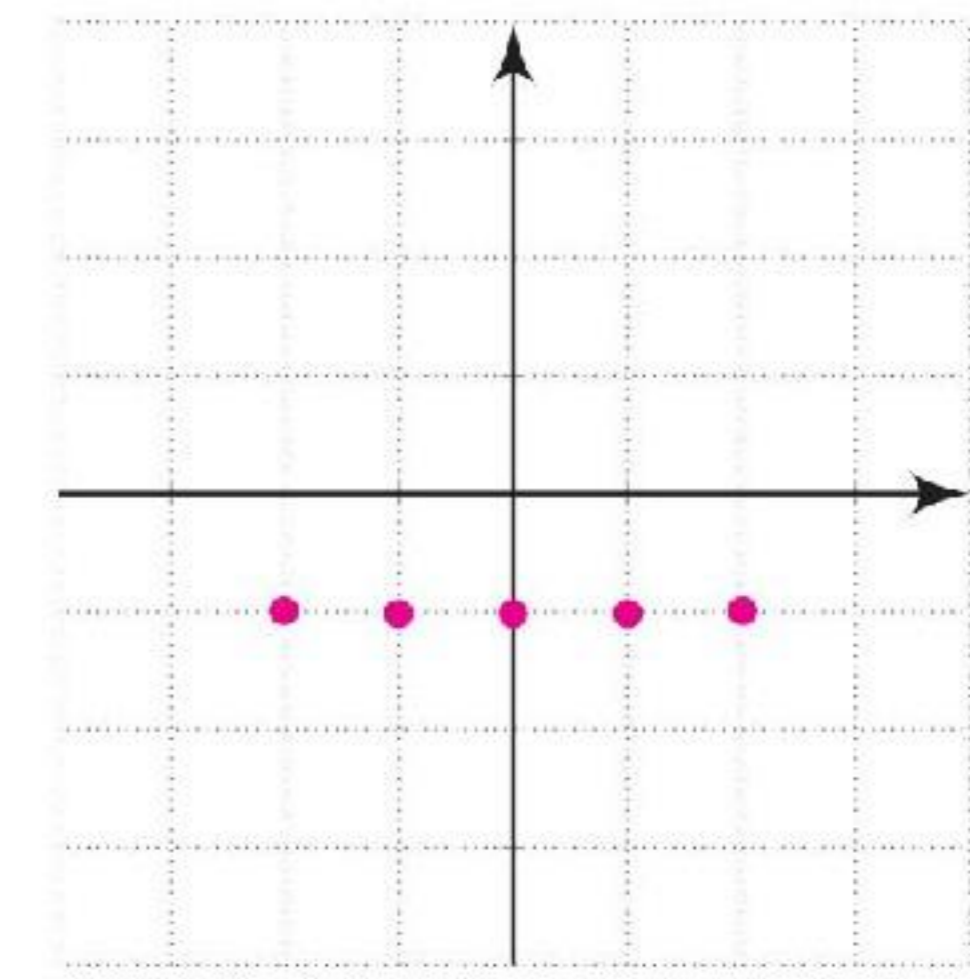
$$D = \{8, 9, 10\}$$

$$R = \{19\}$$



$$D = \mathbb{R}$$

$$R = \{3\}$$



$$D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$R = \{-1\}$$

تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می دهیم.

کار در کلاس

۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چند جمله ای ارائه کنید. $f(x) = 3x^2 - x - 1$

یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد. $g = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (2, 2), (5, 5)\}$

یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد. $h = \{(1, 2), (2, 1)\}$

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد. $k = \{(1, \sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}), (2, \sqrt{2}), (3, \sqrt{2}), (6, \sqrt{2})\}$

مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید. کتاب آسمانی مسلمان ها ثابت است لذا تابع را به صورت زیر تعریف می کنیم:

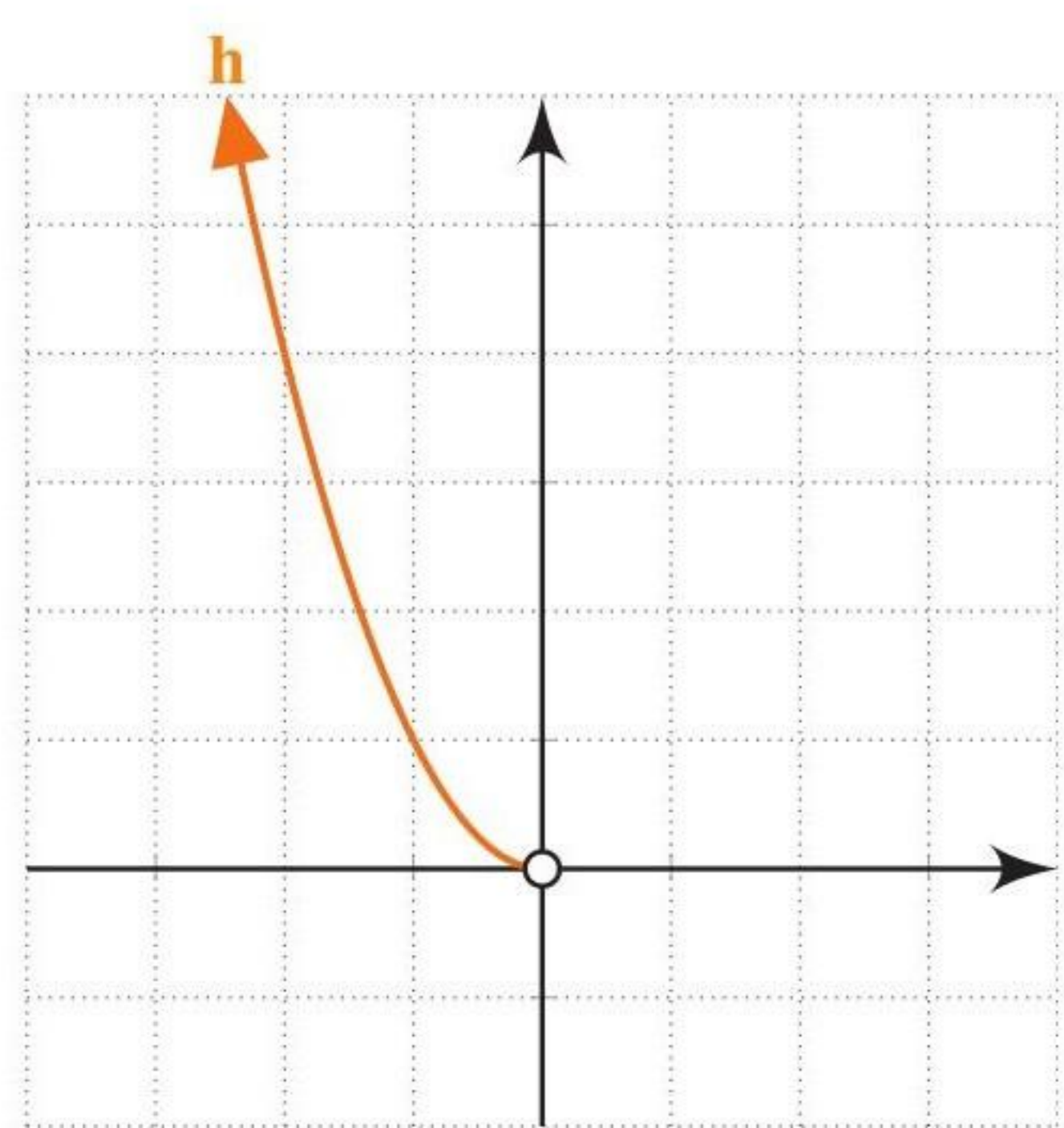
$$F = \{(قرآن و سنی) و (قرآن و شیعه)\}$$



۲ نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.

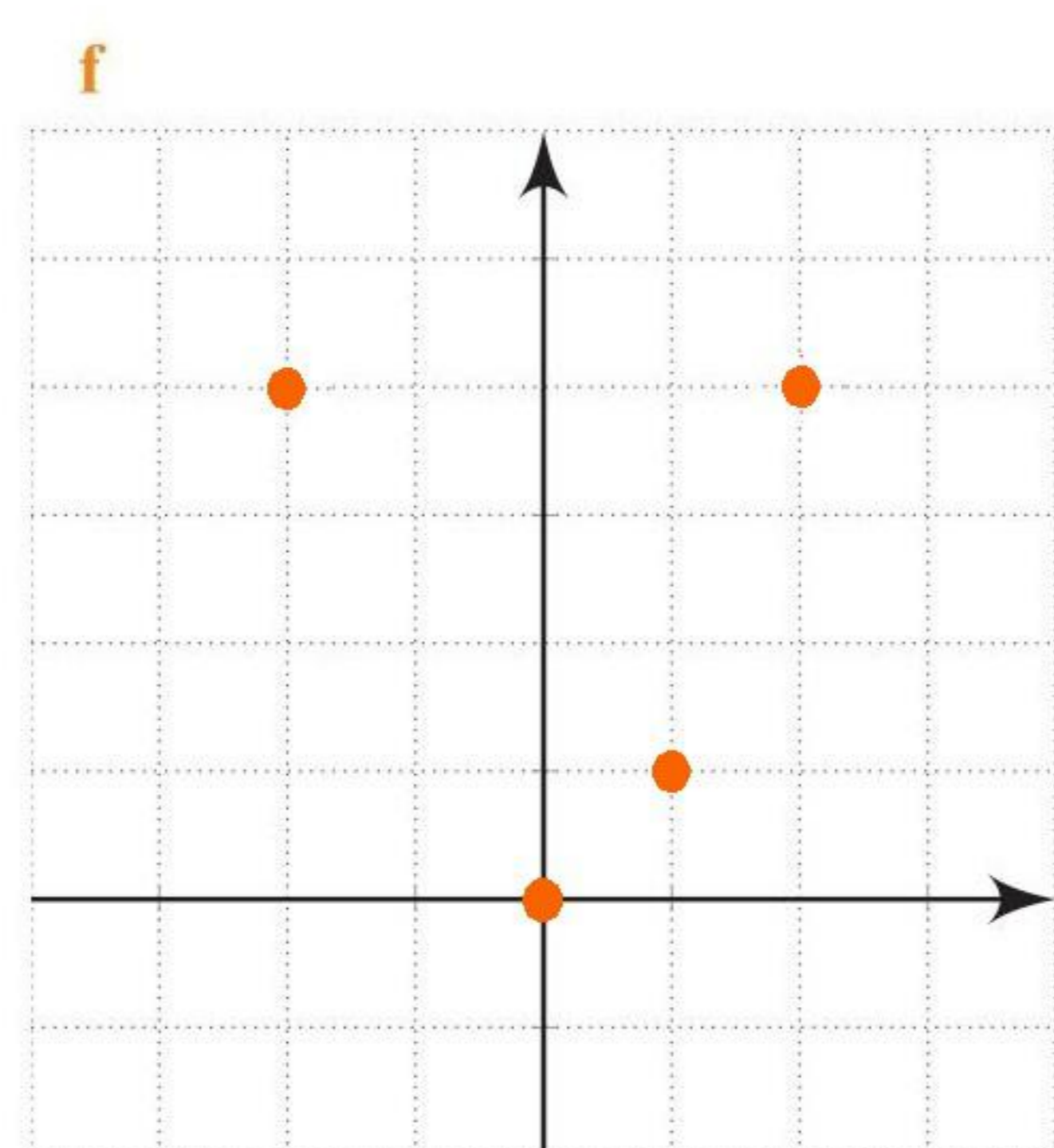
تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^2$	$t(x) = x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد	$\{0, 1, 4\}$	$[0, 9]$	مجموعه اعداد حقیقی مثبت	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی $[0, +\infty)$

دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



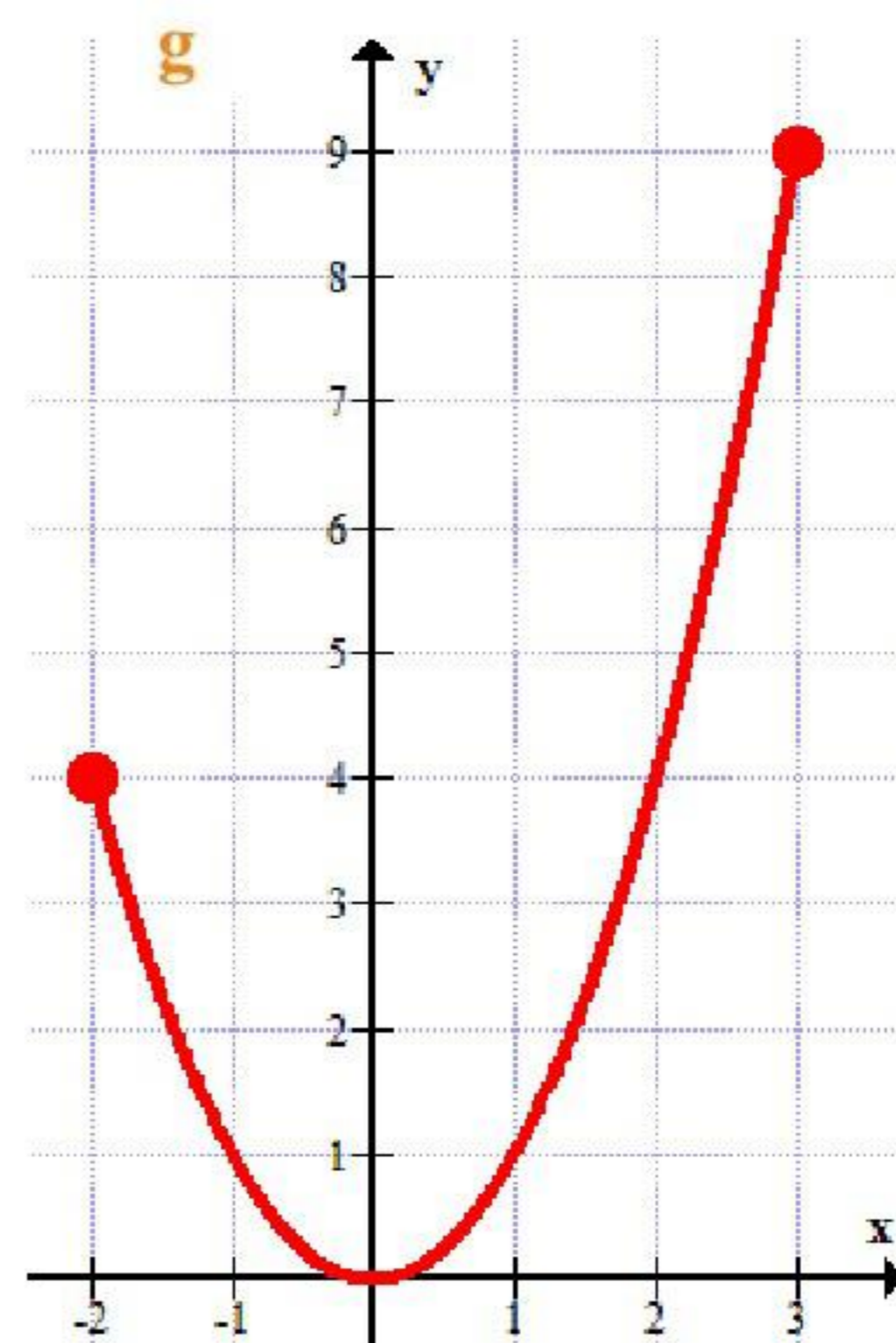
$$D = (-\infty, 0)$$

$$R = (0, +\infty)$$



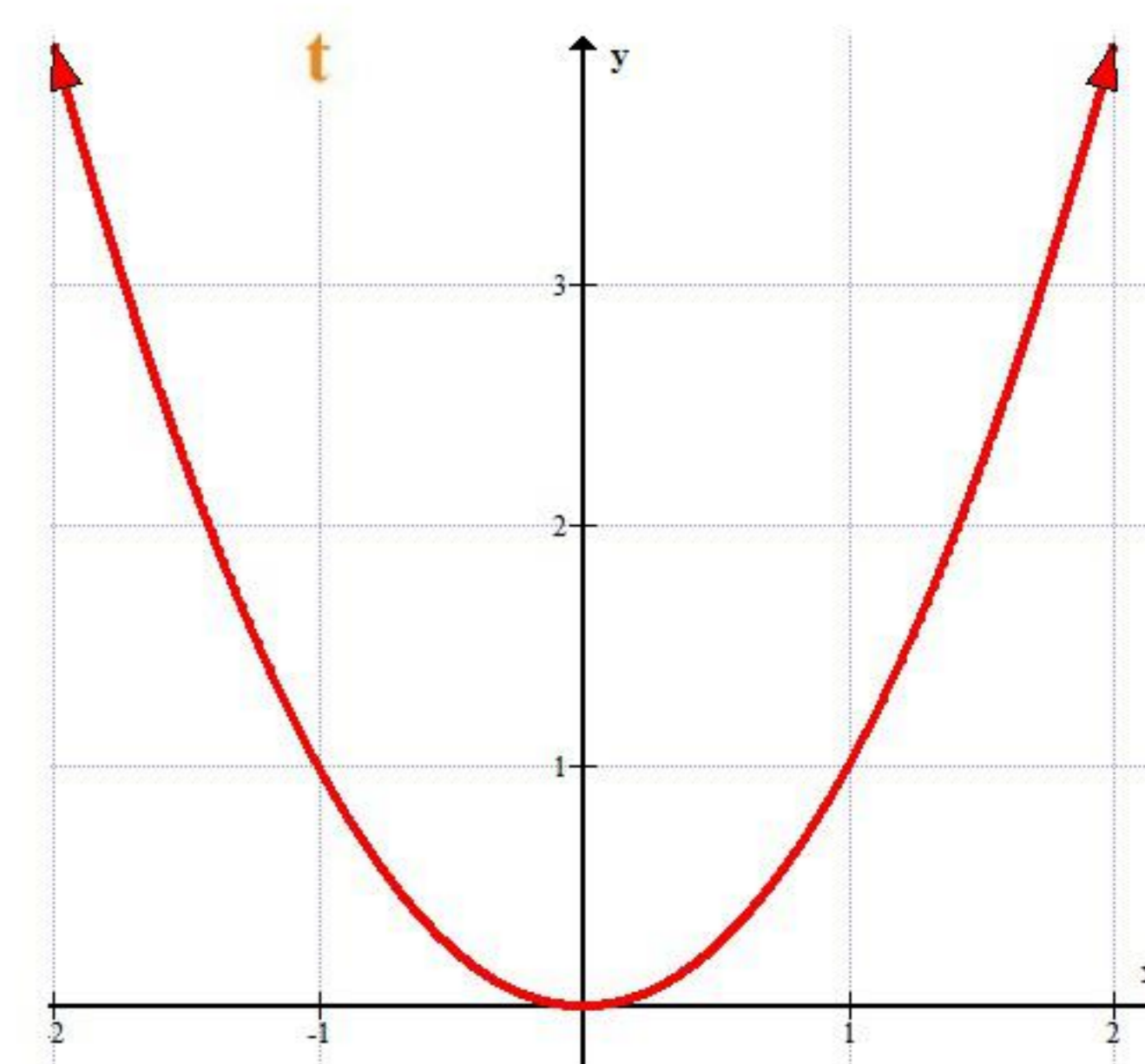
$$D = \{-2, 0, 1, 2\}$$

$$R = \{0, 1, 4\}$$



$$D = [-2, 3]$$

$$R = [0, 9]$$



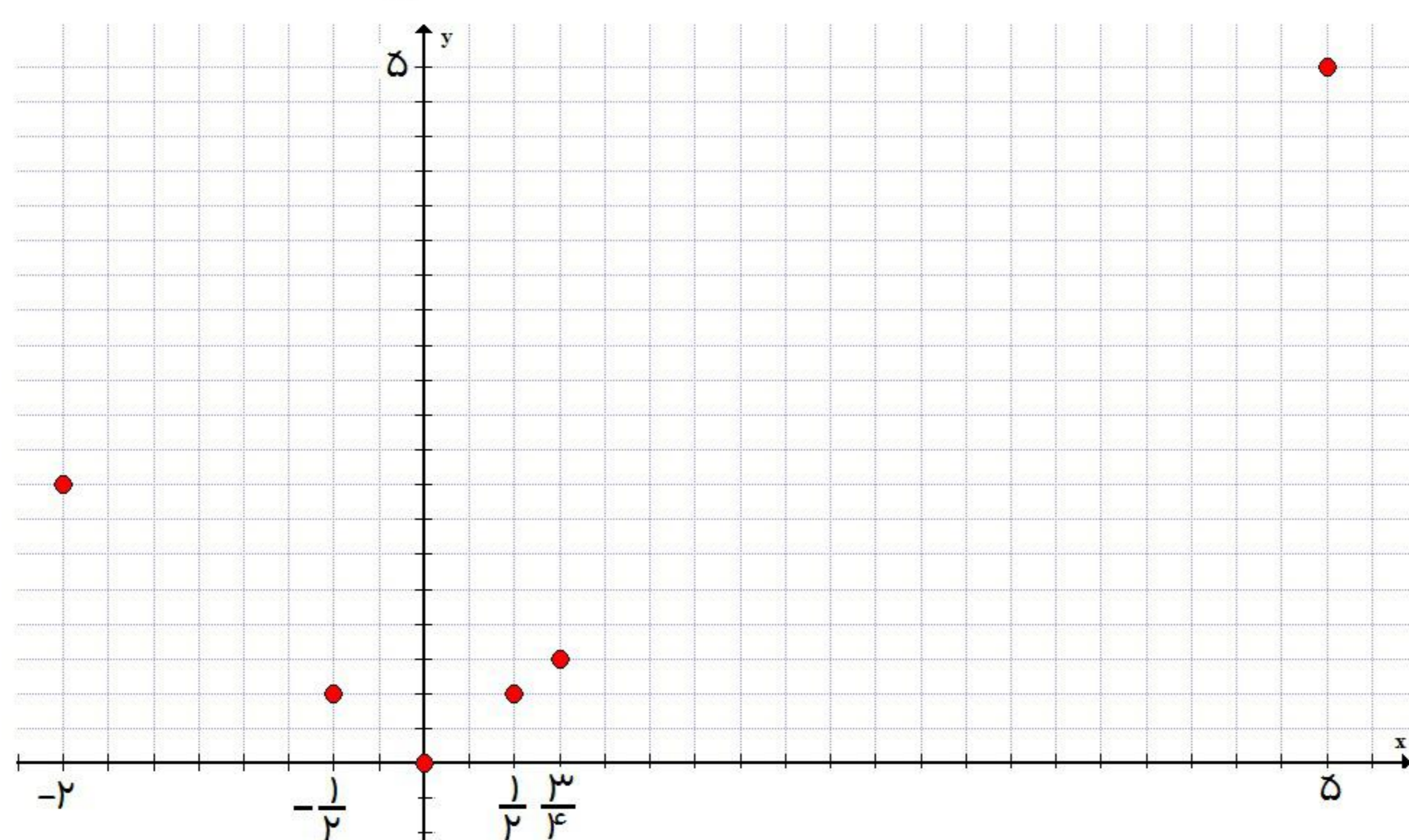
$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [0, +\infty)$$

تذکر: اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد؛ ولی دامنه آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگ‌ترین مجموعه ممکن را دامنه در نظر می‌گیریم. مثلاً دامنه تابع $f(x) = x^2$ را مجموعه اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

فعالیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدرمطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید.



x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	5

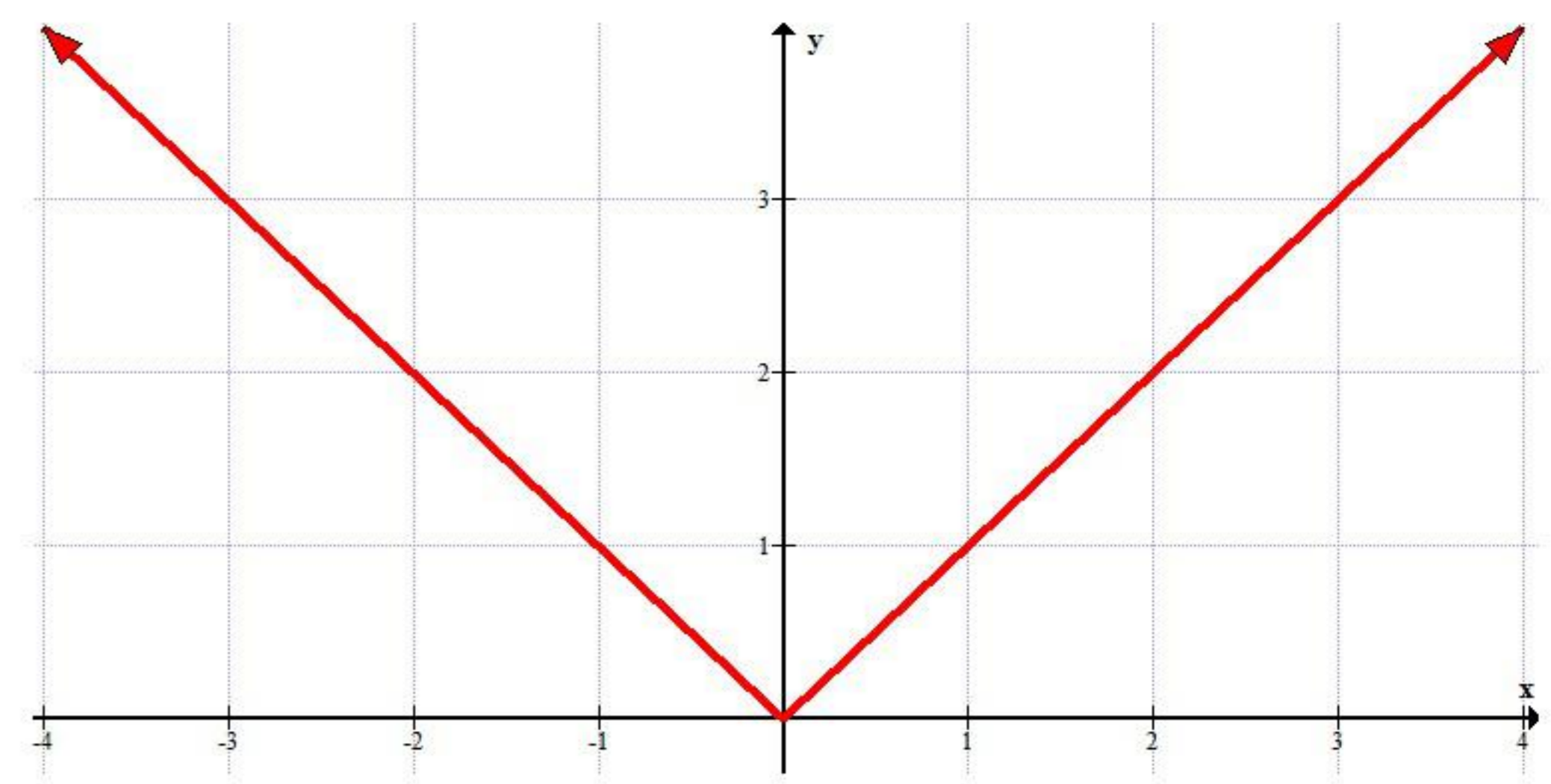
تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x) = |x|$ یا $y = |x|$ نمایش می‌دهند.

اگر دامنه یک تابع قدرمطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تابع قدرمطلق را به صورت نیز نمایش می دهند.

با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه ای (قطعه ای) نامیده می شود.

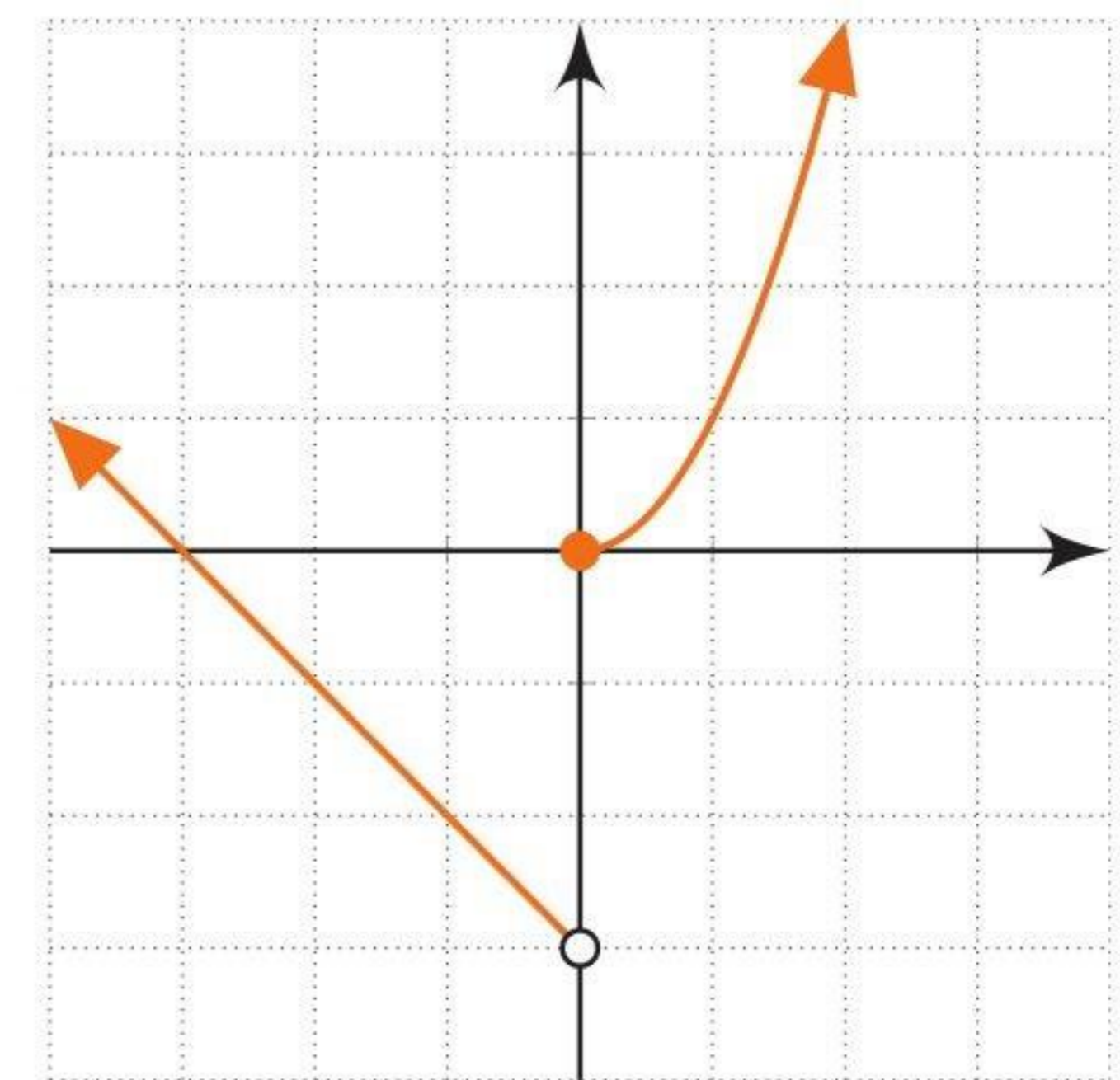


مثال

تابع مقابل نیز یک تابع قطعه ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی $y = x^2$ است و برای اعداد منفی نمودار تابع با نمودار خط $y = -x - 3$ برابر است. نمودار $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.



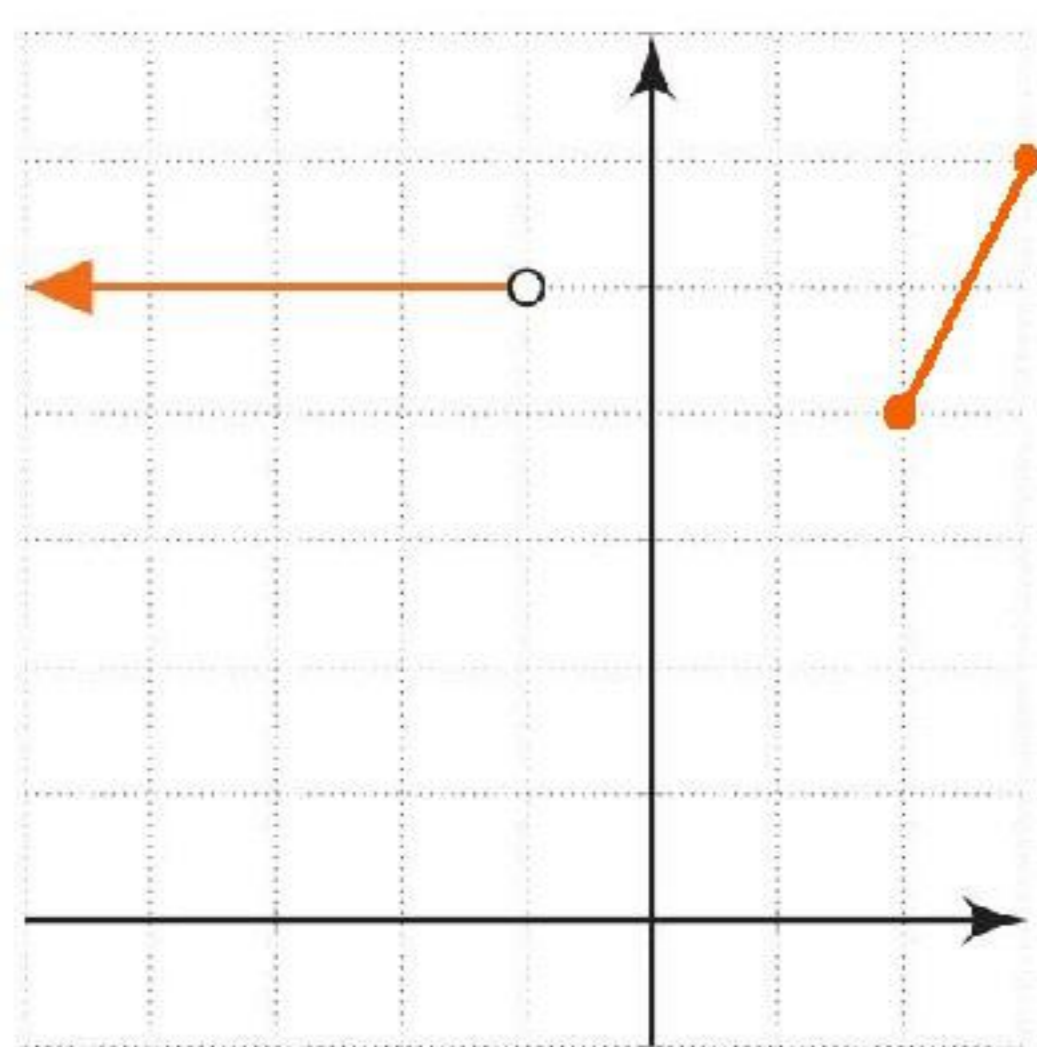
فعالیت

توابع f, g, h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

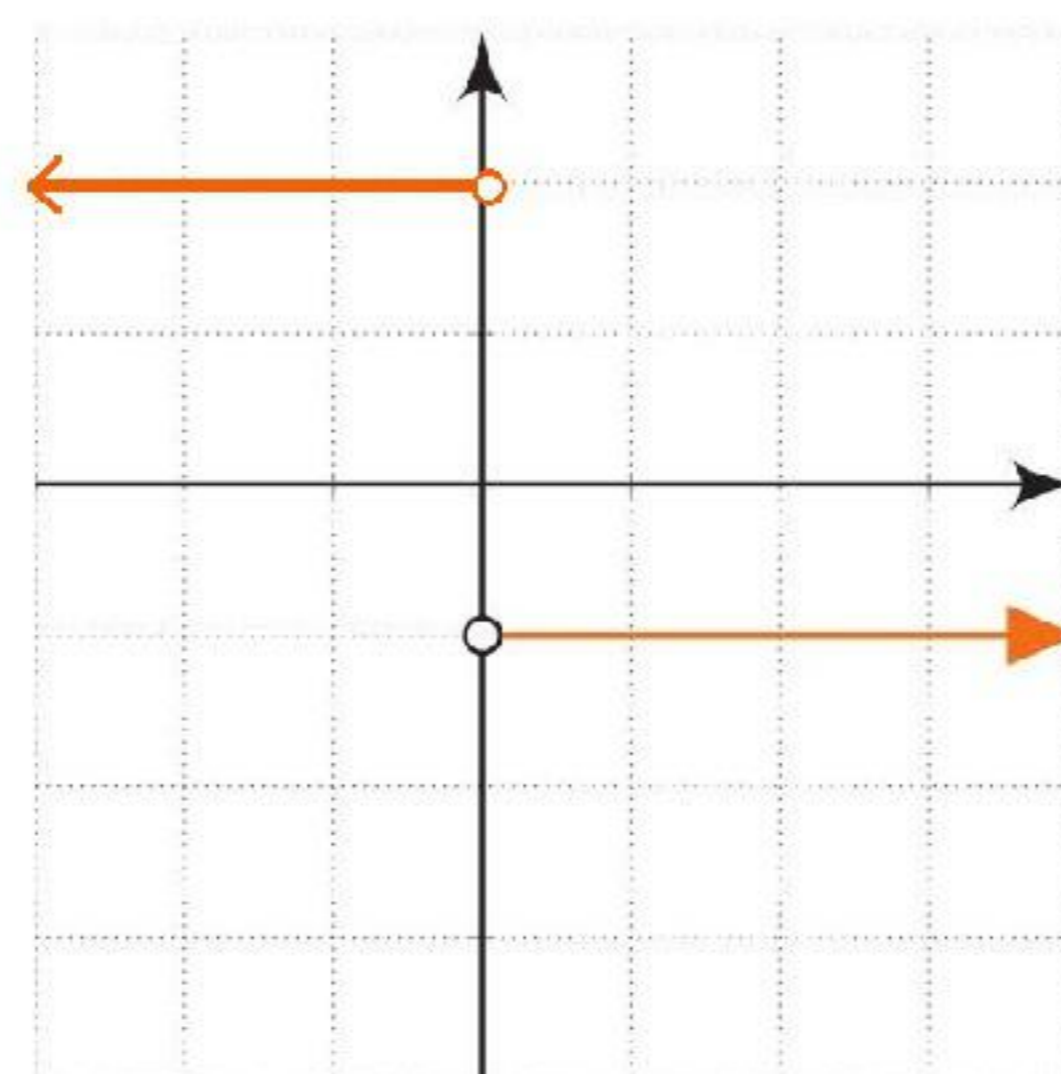
$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$



تابع h است.

$$D = (-\infty, -1) \cup [2, 3]$$

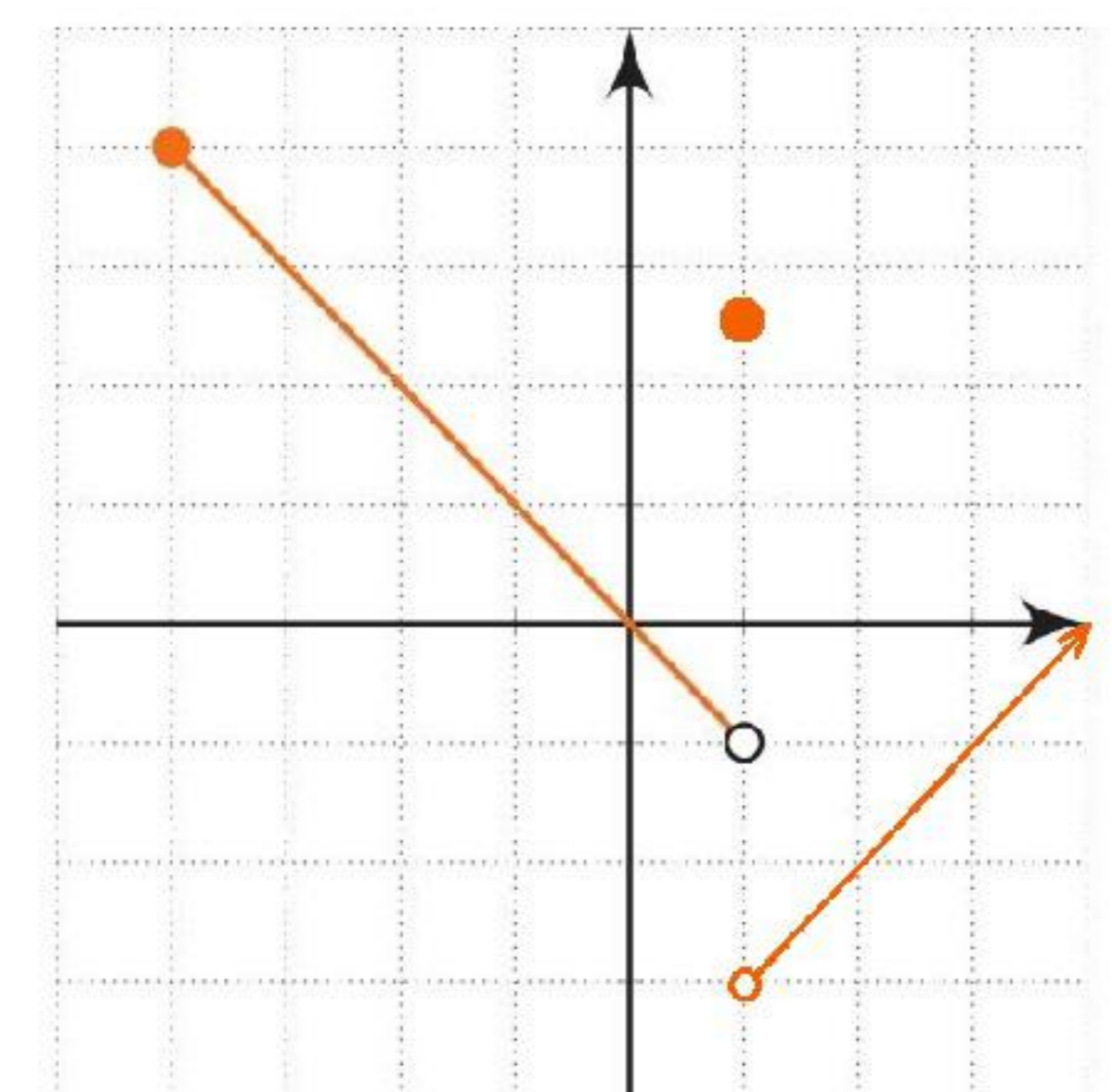
$$R = [4, 6]$$



تابع f است.

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R = \{-1, 2\}$$



تابع g است.

$$D = [-4, +\infty)$$

$$R = (-3, +\infty)$$

مقادیر $f(3)$ ، $g(-2)$ ، $f(-\frac{1}{5})$ ، $h(\sqrt{5})$ و $g(0)$ را بیابید.

$$f(3) = -1, g(-2) = 2, f(-\frac{1}{5}) = 2, h(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}, g(0) = 0$$

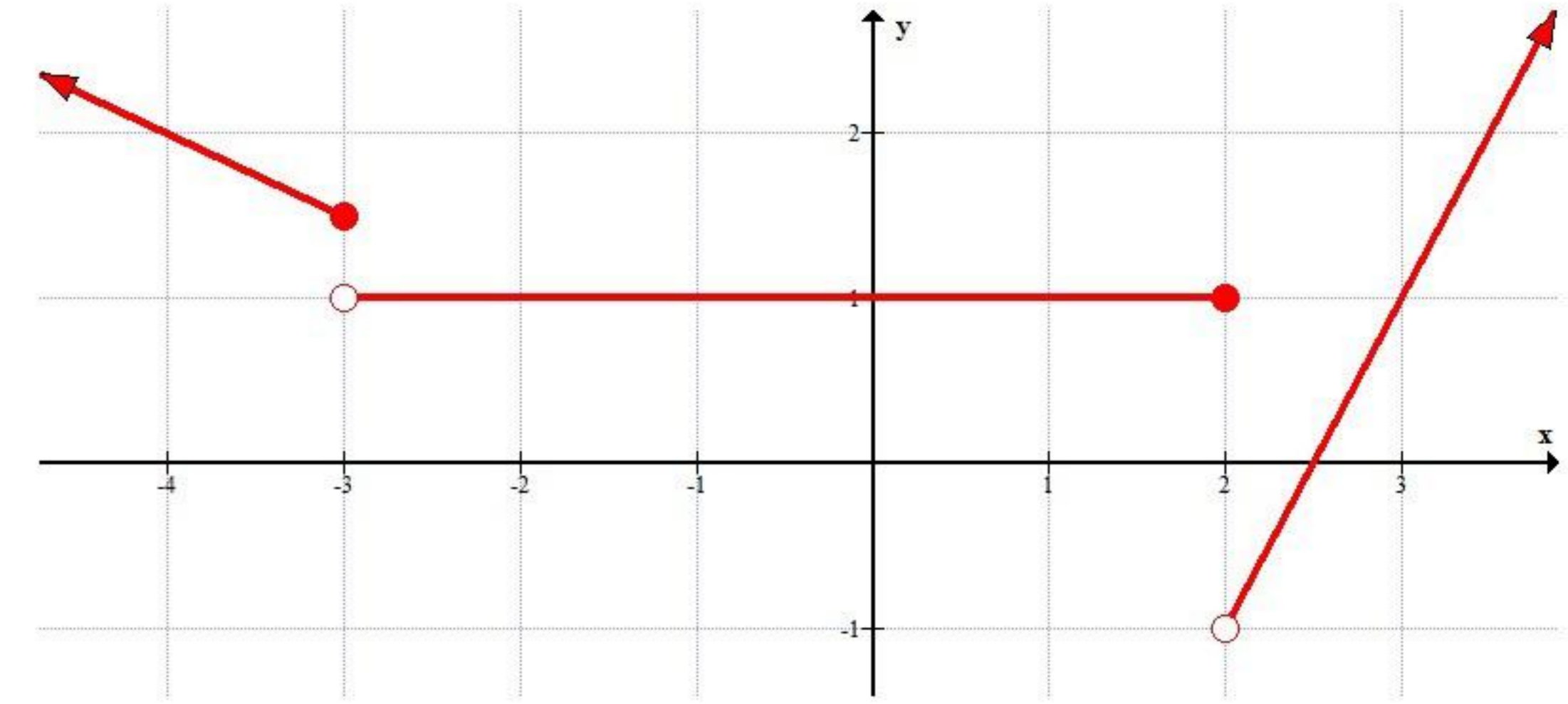
۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$D_f = R_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

$$D_g = \mathbb{R}, R_g = (-1, +\infty)$$

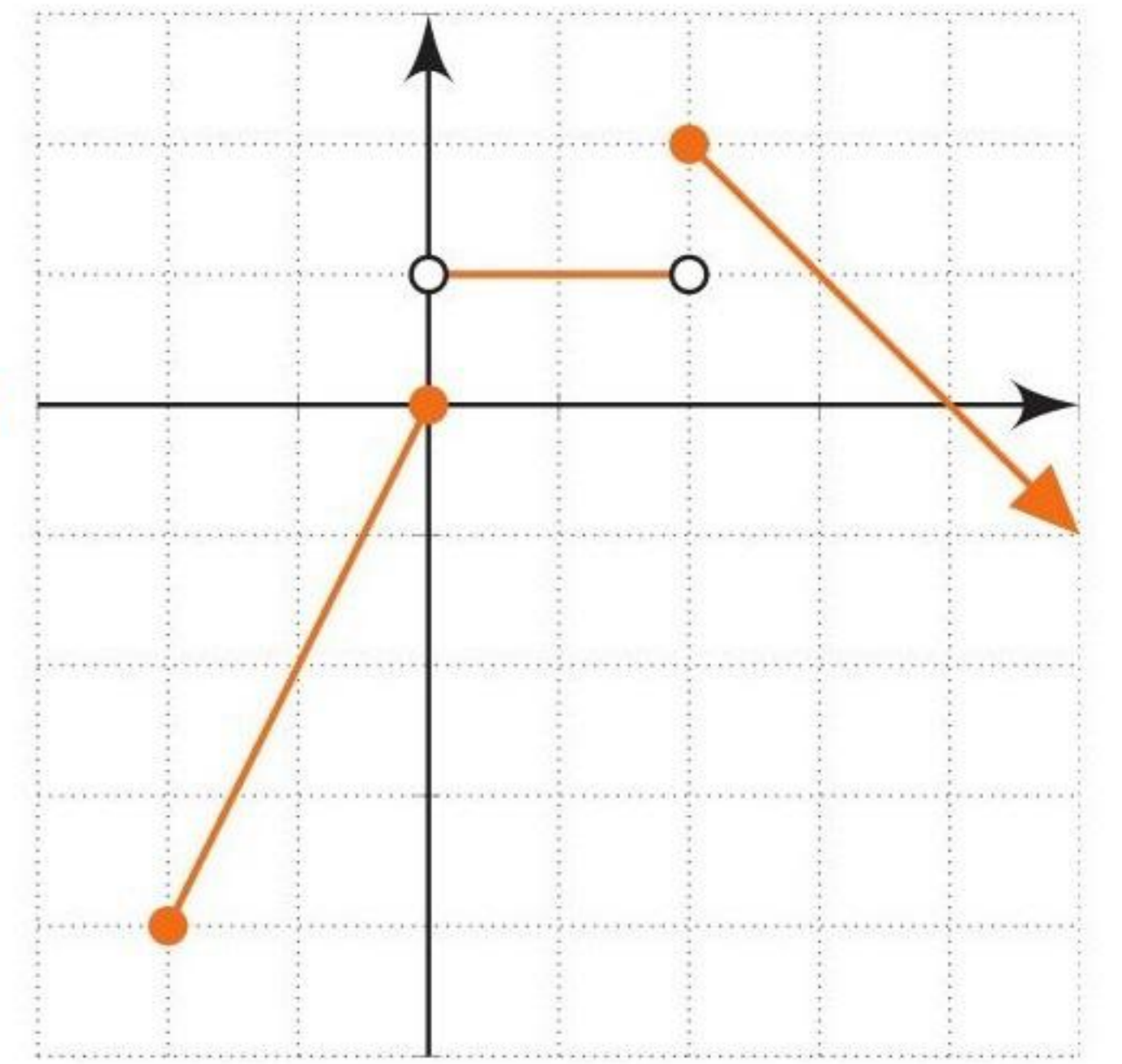


مقادیر $f(0)$, $f(5)$, $g(2)$, $g(0)$ و $f(-2)$ و $g(-\frac{1}{5})$ را به دست آورید.

$$f(0) = 1, g(0) = 1, f(5) = 25, g(2) = 1, f(-2) = -5, g(-\frac{1}{5}) = 1$$

۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع

را به دست آورید.



$$y = ax + b \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases} \rightarrow -2a + b = -4$$

$$y = ax + b \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین در حالت $-2 \leq x \leq 0$ تابع $y = 2x$ است.

واضح است که در حالت $0 < x < 2$ تابع از نوع ثابت بوده و ضابطه‌ی آن $y = 1$ است.

$$y = ax + b \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow 2a + b = 2$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه معادلاتی}} a = -1, b = 4$$

$$y = ax + b \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow 4a + b = 0$$

پس در حالت $x \geq 2$ تابع $y = -x + 4$ است.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x + 4 & x \geq 2 \end{cases}$$

در نتیجه ضابطه تابع به صورت روبرو خواهد بود:

$$D_f = [-2, +\infty) \quad R_f = (-\infty, 2]$$

رسم برخی توابع به کمک انتقال

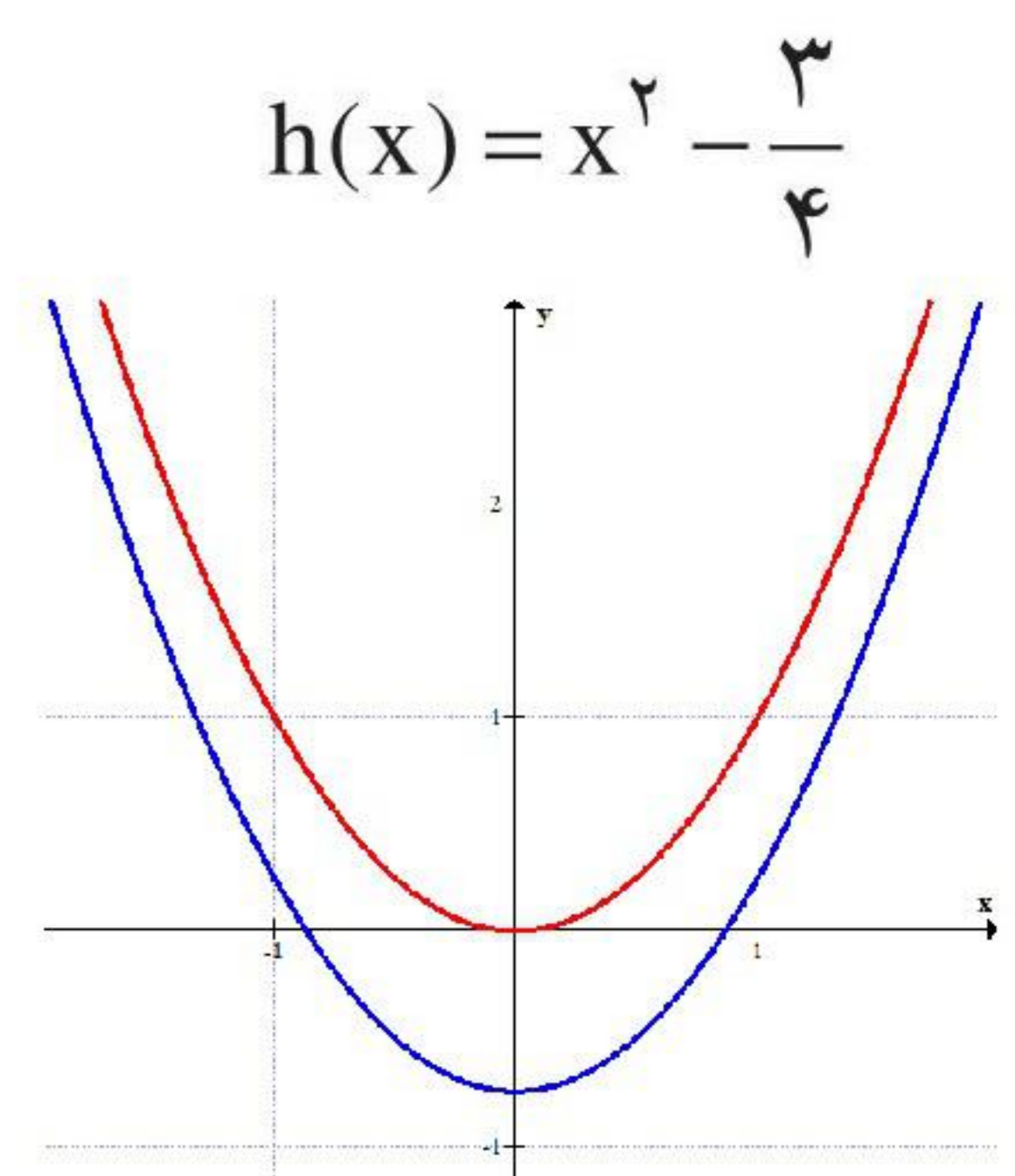
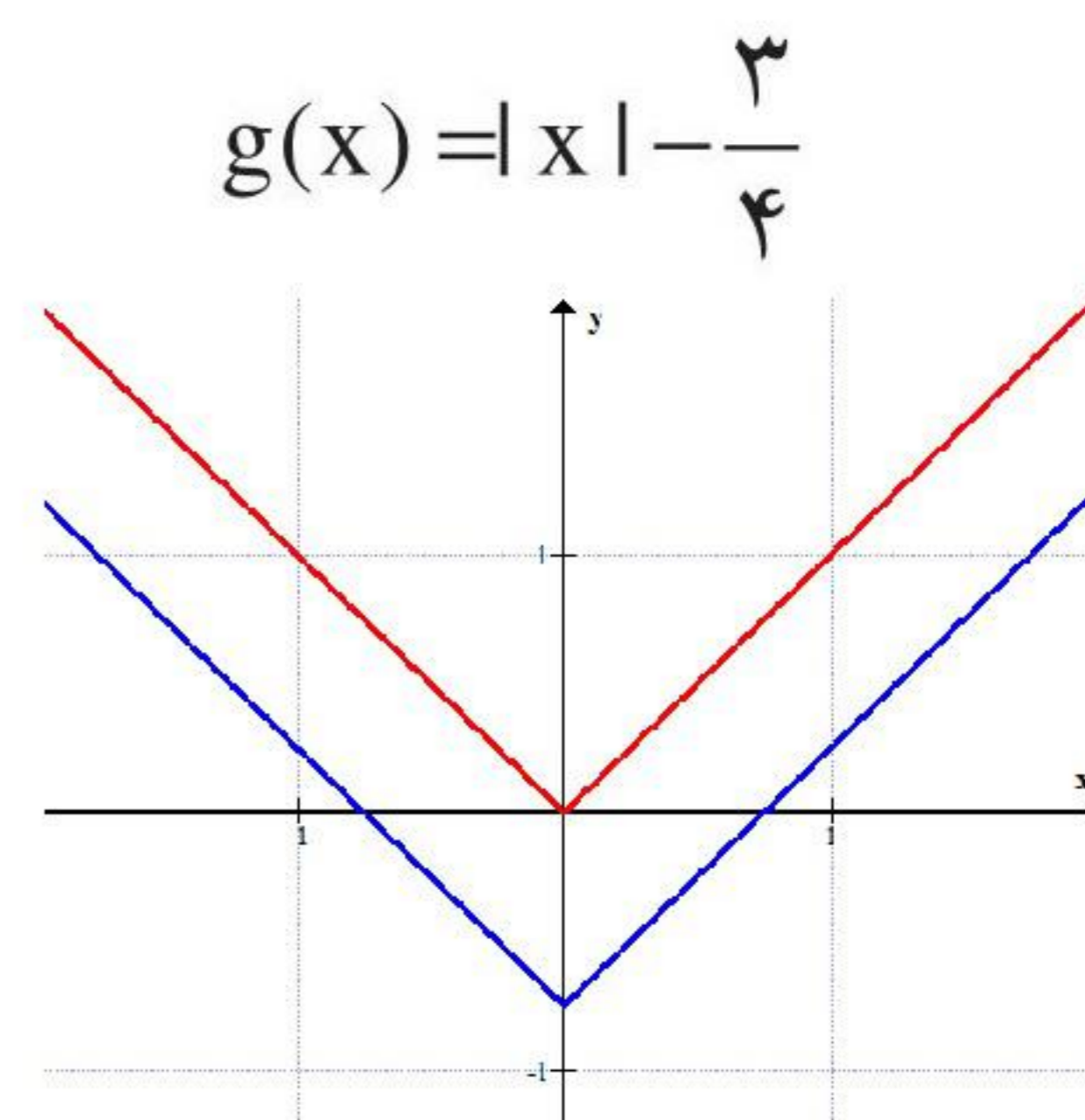
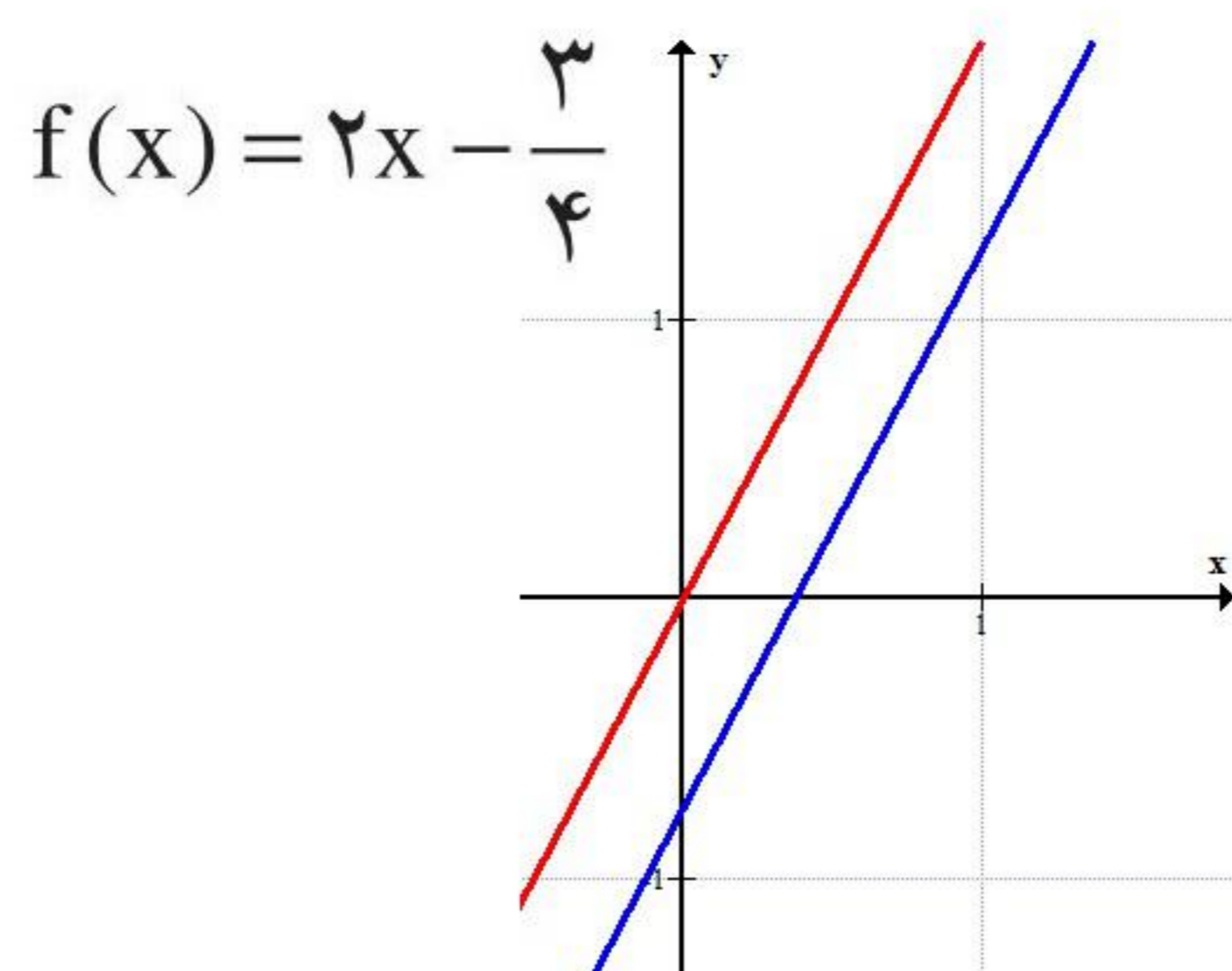
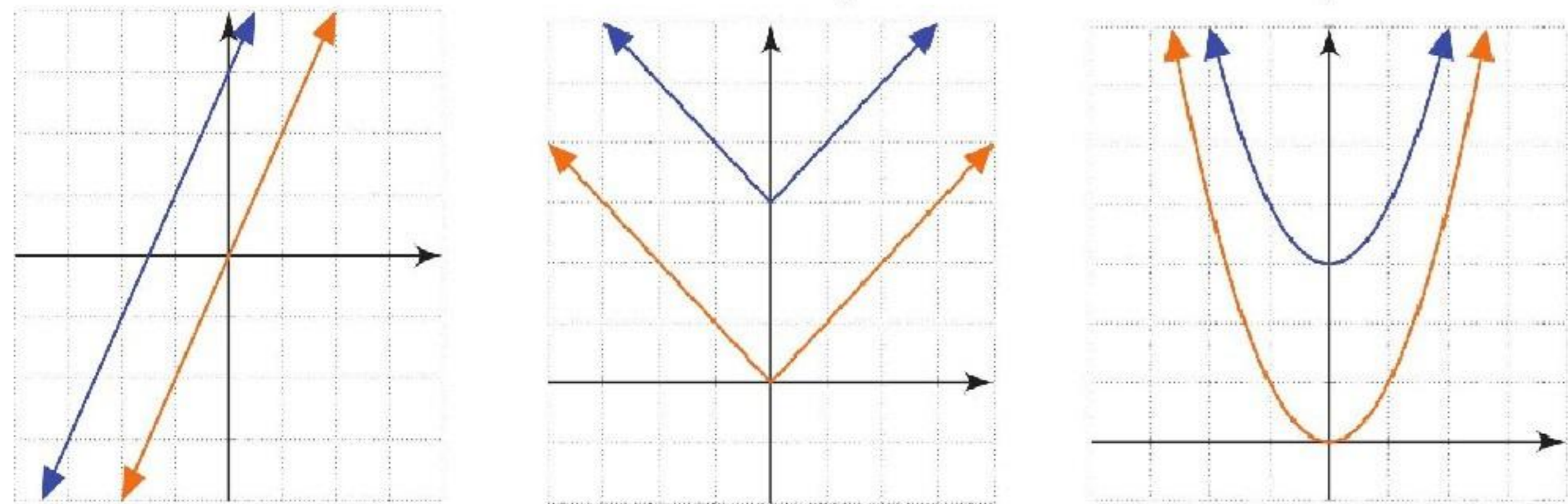
فعالیت

نمودارهای توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = |x|$ و $h(x) = x^2$ و توابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = |x| + 3$ و $h(x) = x^2 + 3$ داده شده‌اند. توضیح دهید

که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$ و $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$ و $h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ را به

همین روش رسم کنید.

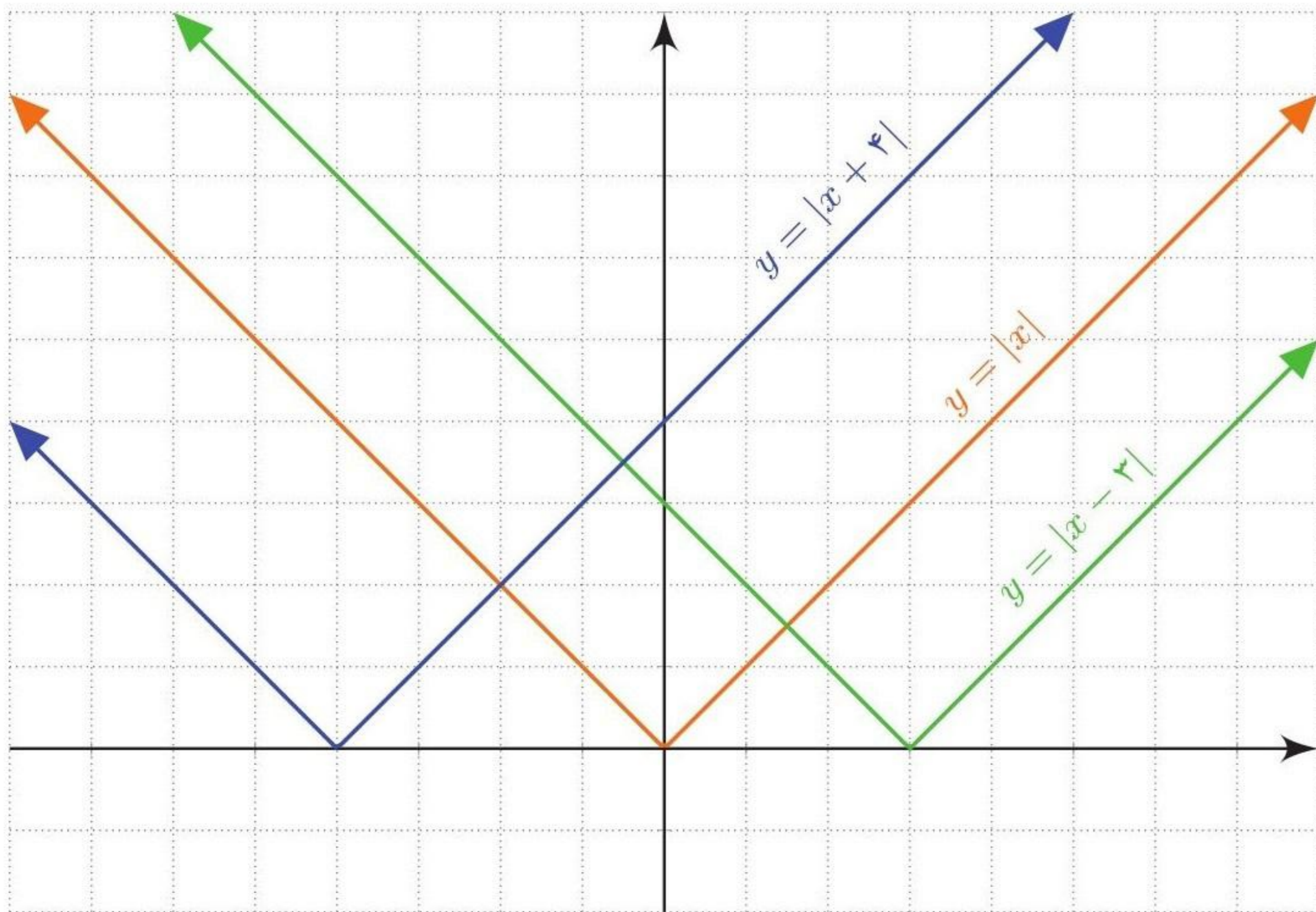
نمودار هر کدام از این توابع به اندازه ۳ واحد بالا آمده‌اند.



با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ ، می‌توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y ها به دست آورد. اگر $k > 0$ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

کار در کلاس

۱ در شکل زیر دامنه و برد تابعی را که به کمک تابع $f(x) = |x|$ رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟



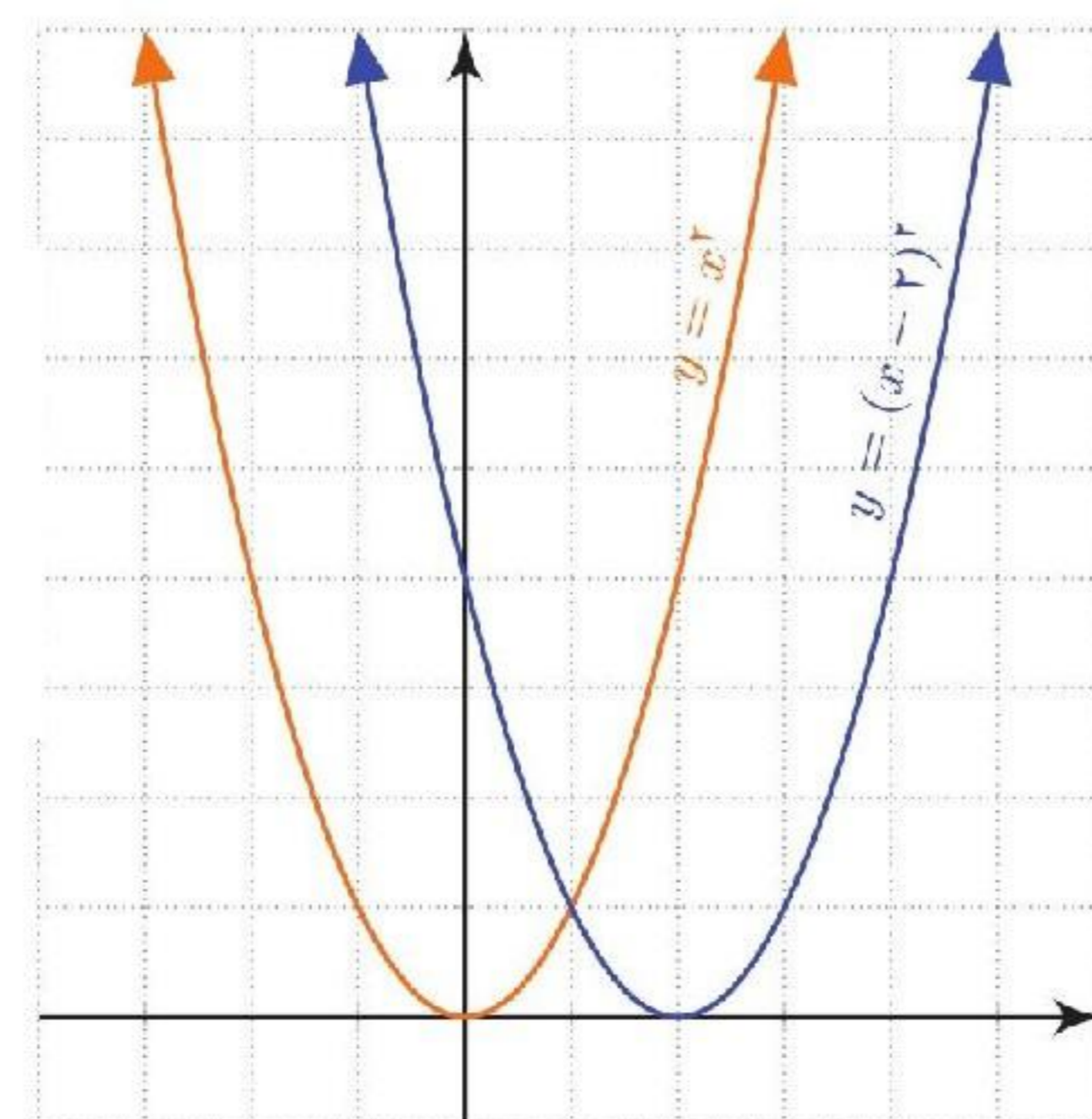
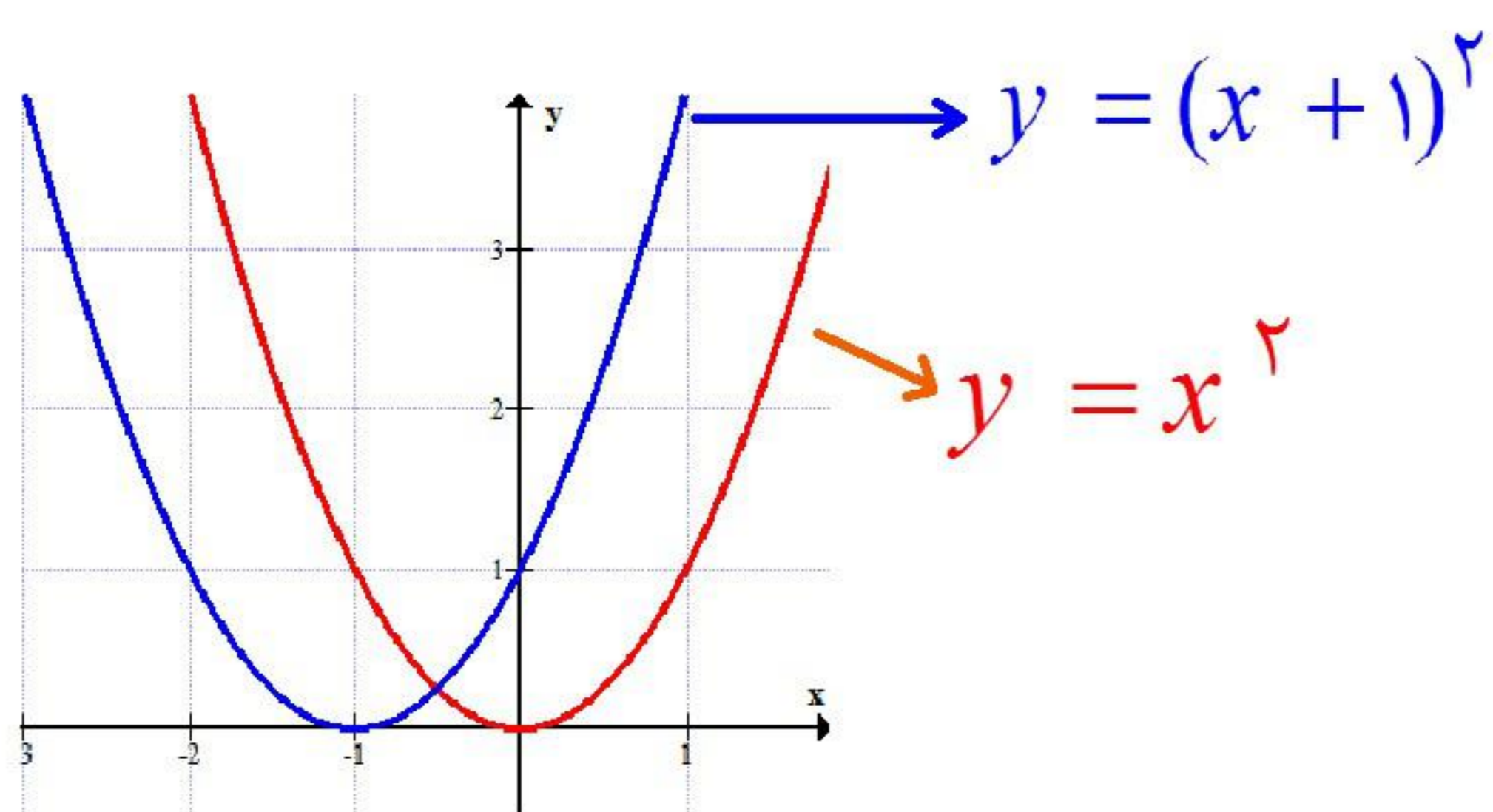
$$D = \mathbb{R} , R = [0, +\infty)$$

در مورد تابع $y = |x - 3|$ ، تابع به اندازه ۳ واحد به سمت راست رفته است.

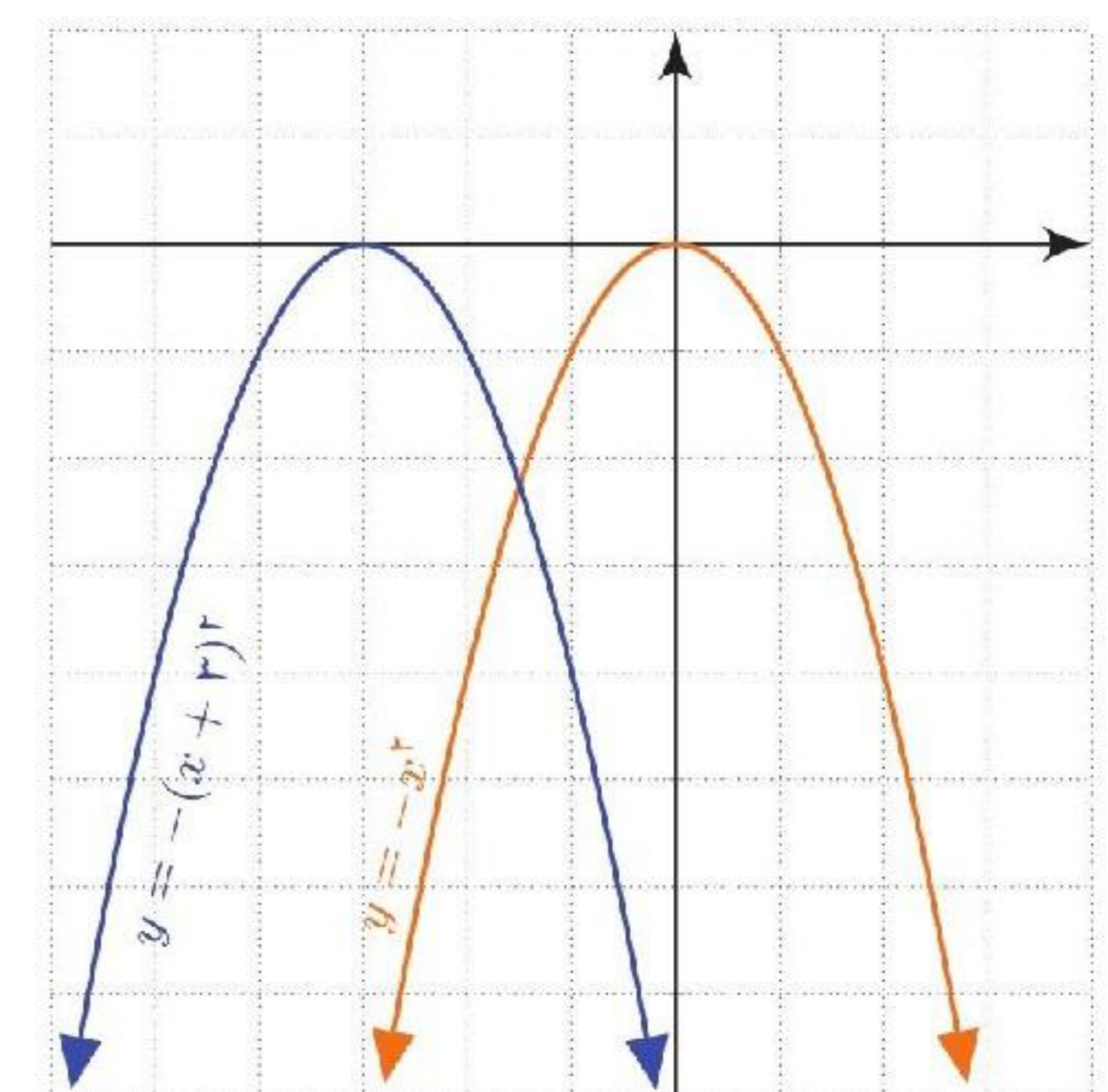
در مورد تابع $y = |x + 4|$ ، تابع به اندازه ۴ واحد به سمت چپ رفته است.

برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور x ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

۲ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار $f(x) = (x+1)^2$ را نیز رسم کنید.



$$D = \mathbb{R} , R = [0, +\infty)$$

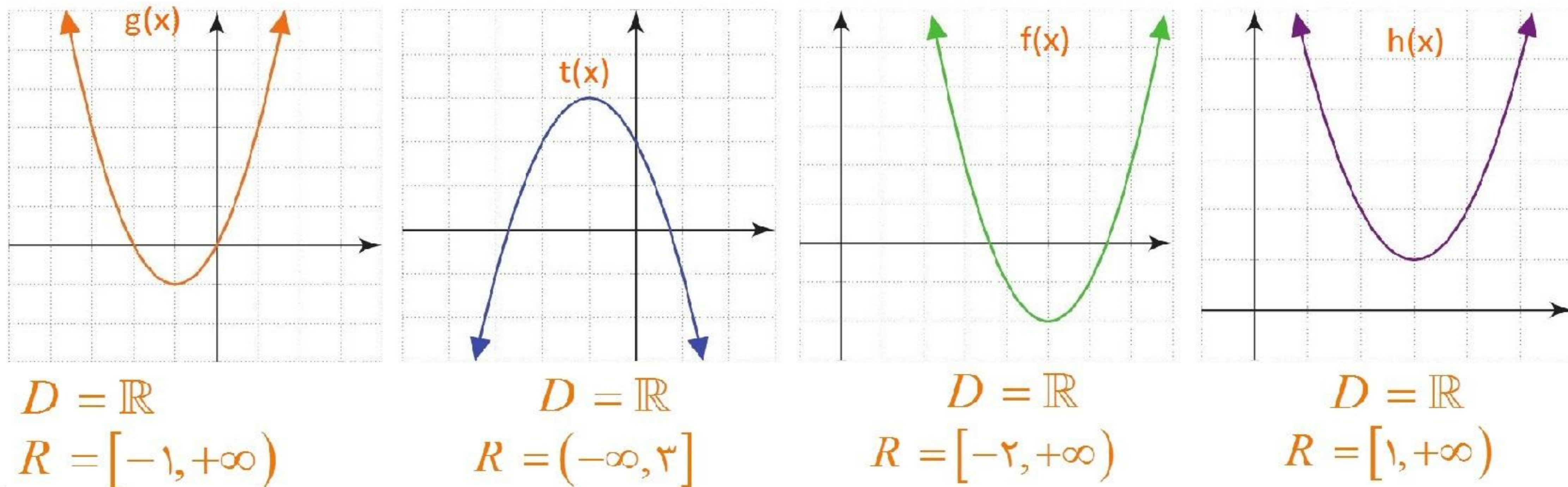


$$D = \mathbb{R} , R = (-\infty, 0]$$

$$t(x) = -(x+1)^2 + 3 \quad g(x) = (x+1)^2 - 1$$

$$f(x) = (x-5)^2 - 2 \quad h(x) = (x-3)^2 + 1$$

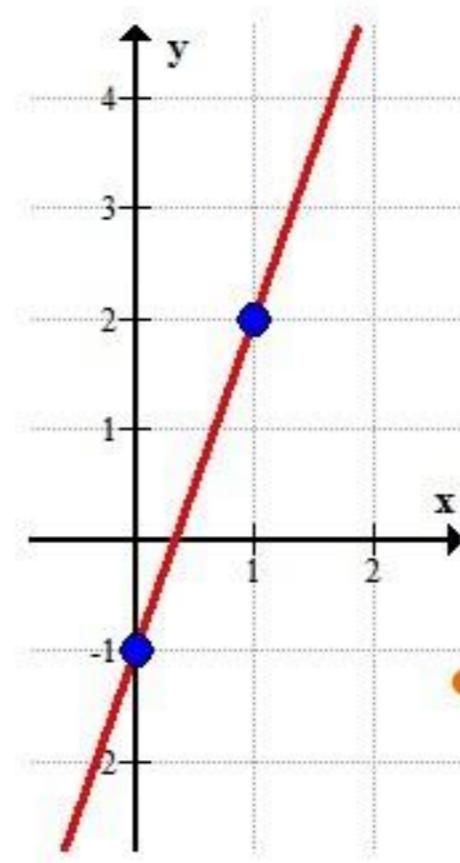
در شکل های زیر نمودار توابع درجه دوم f, g, h و t رسم شده اند.
الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می دهند؟
ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:



تمرین

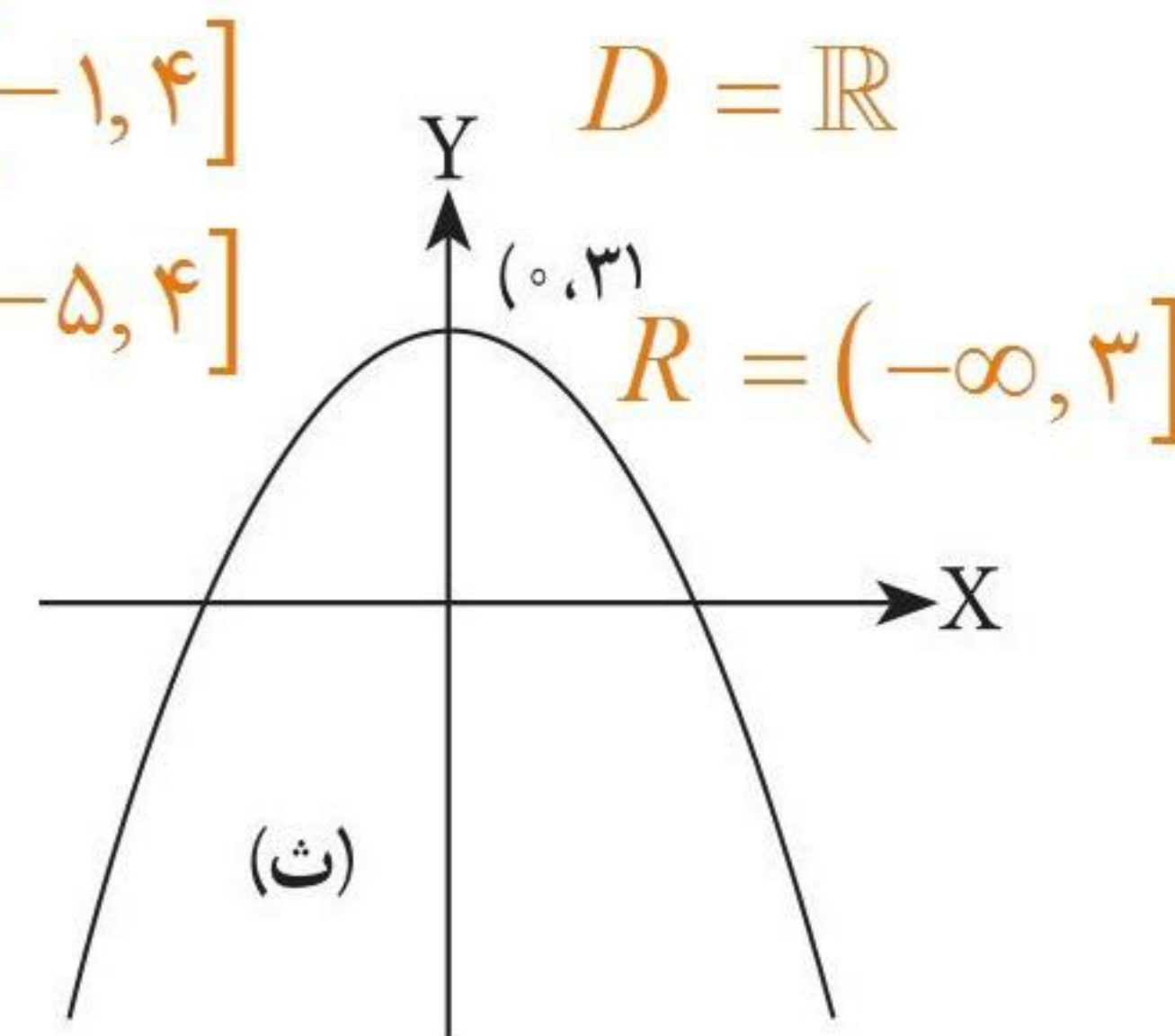
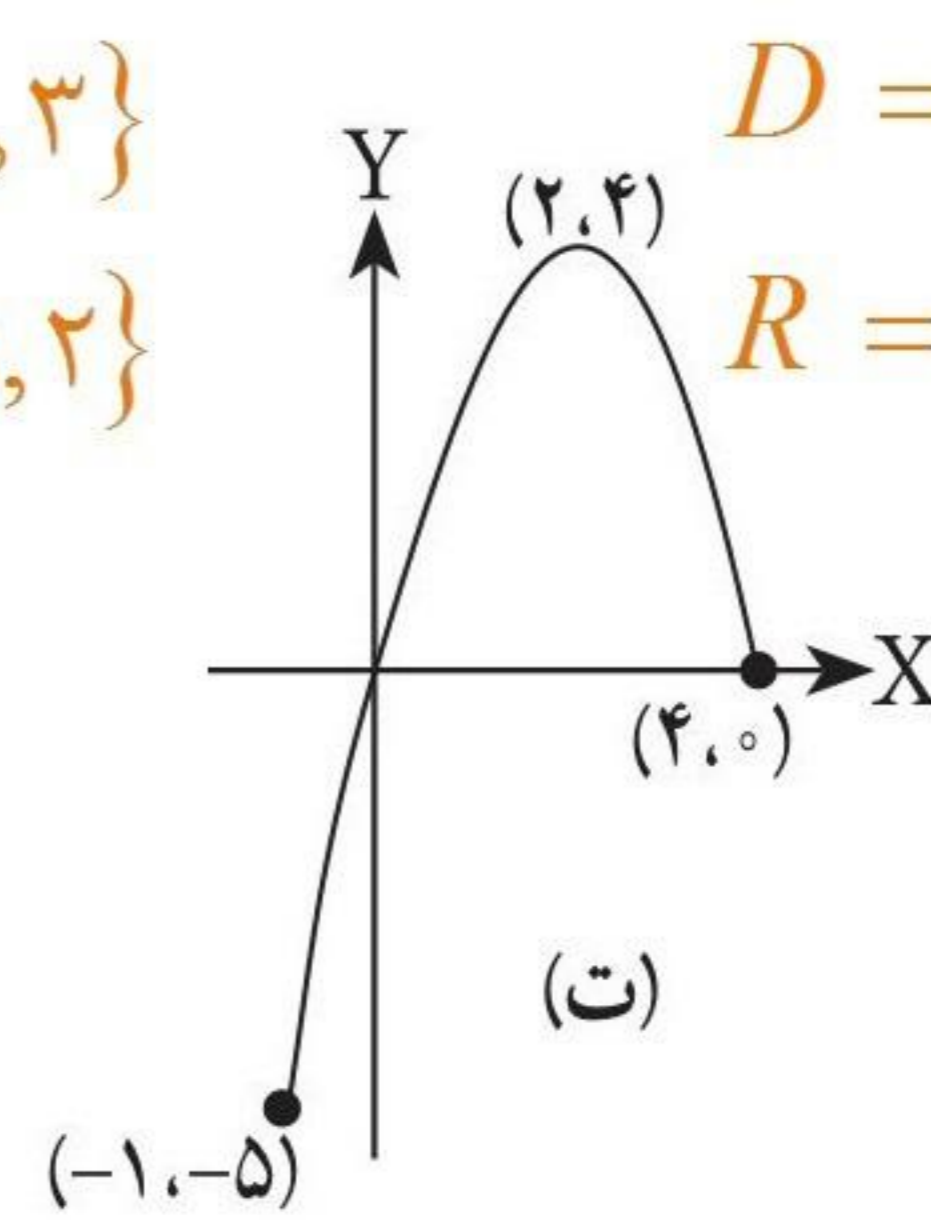
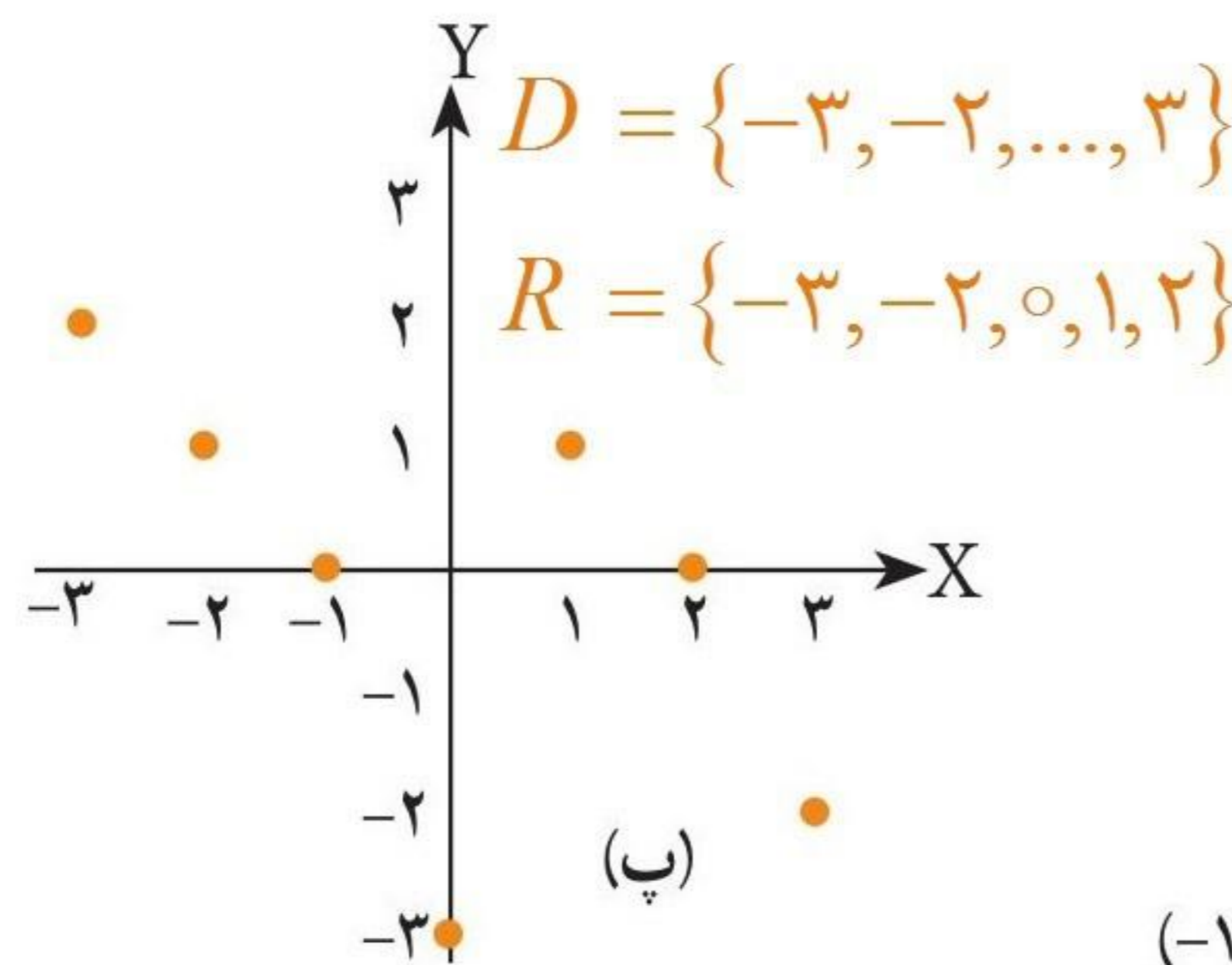
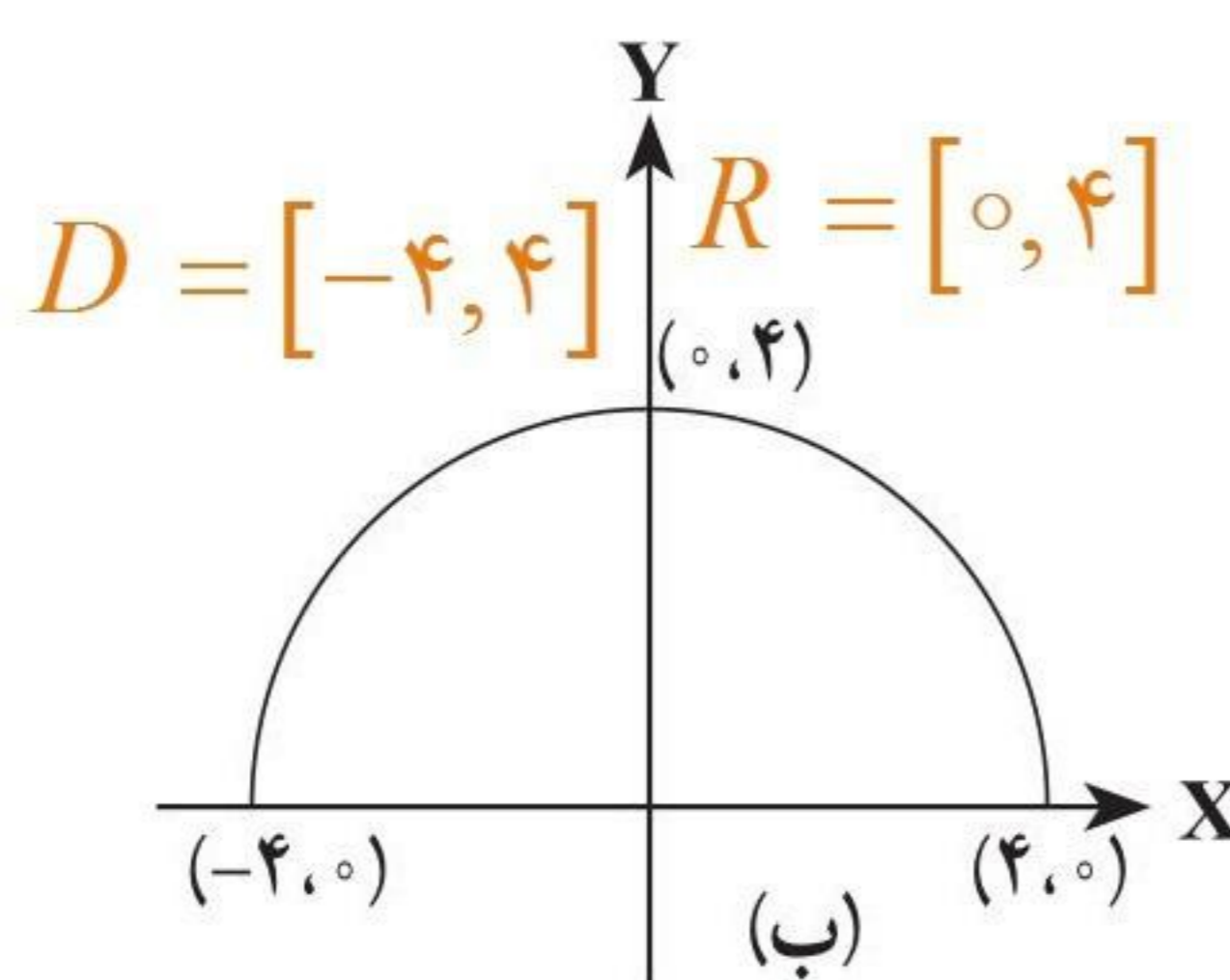
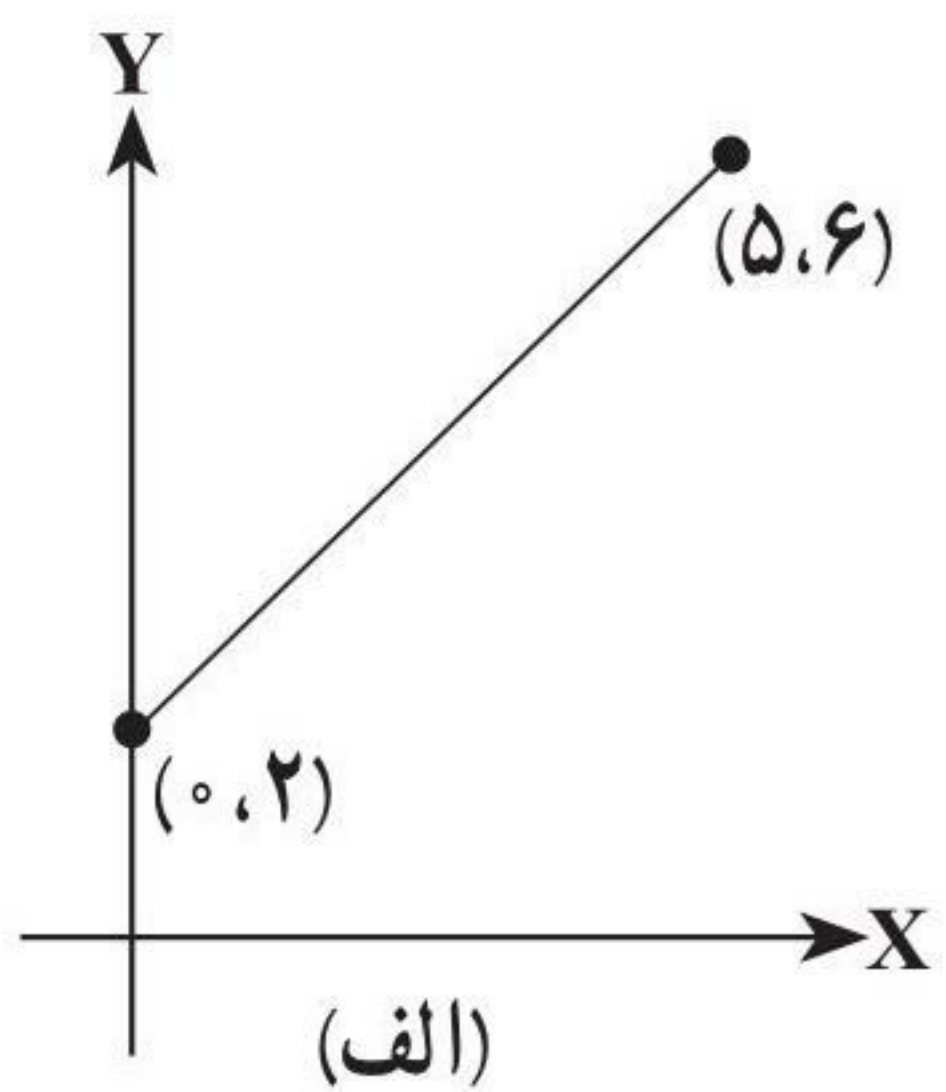
۱) تابع $f(x) = 3x - 1$ را که دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{2}, 0, 5\}$ است، رسم کنید.
 $f = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, -1), (5, 14)\}$
 $f = \{\frac{1}{2}, -1, 14\}$

برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار پیکانی آن را ارائه دهید.
اگر دامنه این تابع \mathbb{R} باشد، پاسخ ها چگونه خواهد بود؟
پُرد این تابع \mathbb{R} است.



تابع را نمی توان به صورت پیکانی یا زوج مرتب نمایش داد.

۲) در شکل های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.

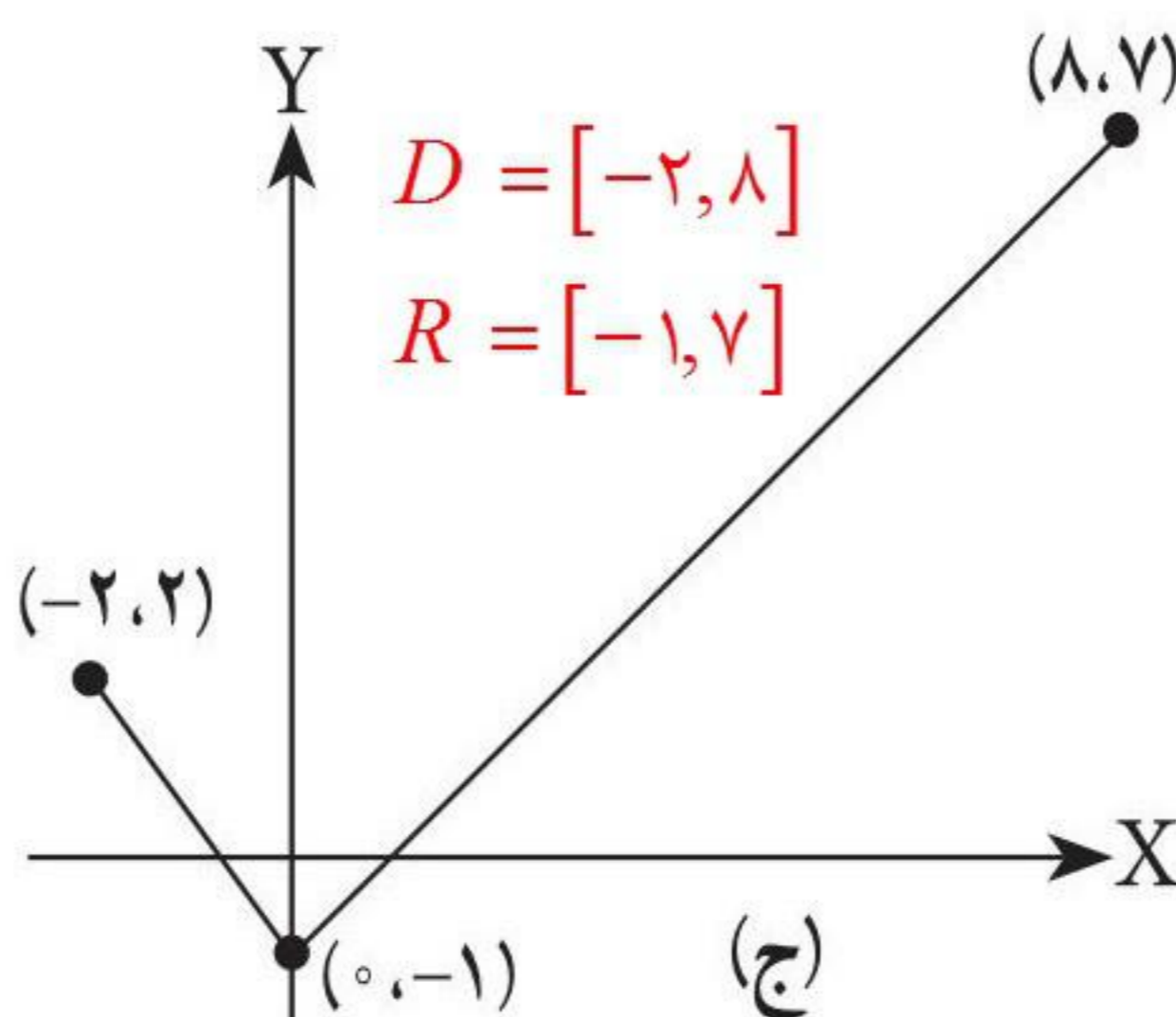


$y = ax + b$

$x=0 \rightarrow 2 = 0 + b \Rightarrow b = 2$
 $y=2$
 $x=5 \rightarrow 6 = 5a + b$
 $y=6$
 $b=2 \rightarrow 4 = 5a \Rightarrow a = \frac{4}{5}$
 $\Rightarrow y = \frac{4}{5}x + 2$

$D = [0, 5]$

$R = [2, 6]$



$y = ax + b$
 $x=-2 \rightarrow -2a + b = 2$
 $y=2$
 $x=0 \rightarrow 0 + b = -1 \Rightarrow b = -1$
 $y=-1$
 $\Rightarrow -2a - 1 = 2$
 $\Rightarrow a = -\frac{3}{2}$
 $\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - 1$

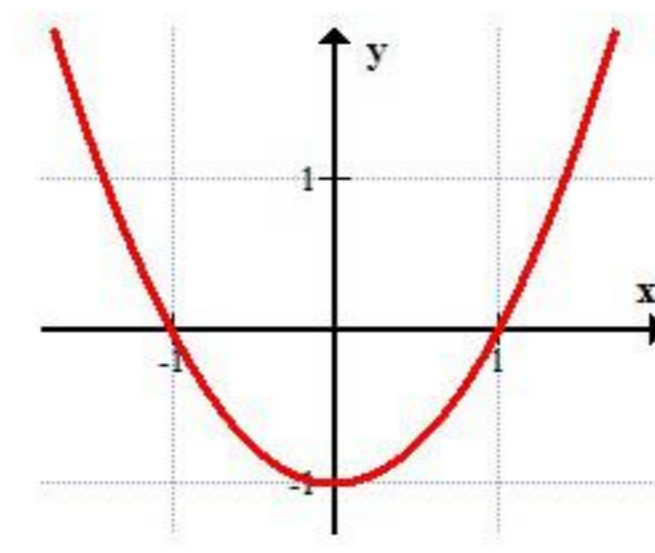
$y = ax + b$

$x=0 \rightarrow 0 + b = -1 \Rightarrow b = -1$
 $y=-1$
 $x=8 \rightarrow 8a + b = 7$
 $y=7$
 $\Rightarrow 8a - 1 = 7 \Rightarrow a = 1$
 $\Rightarrow y = x - 1$

$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 1 & -2 \leq x \leq 0 \\ x - 1 & 0 \leq x \leq 8 \end{cases}$

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

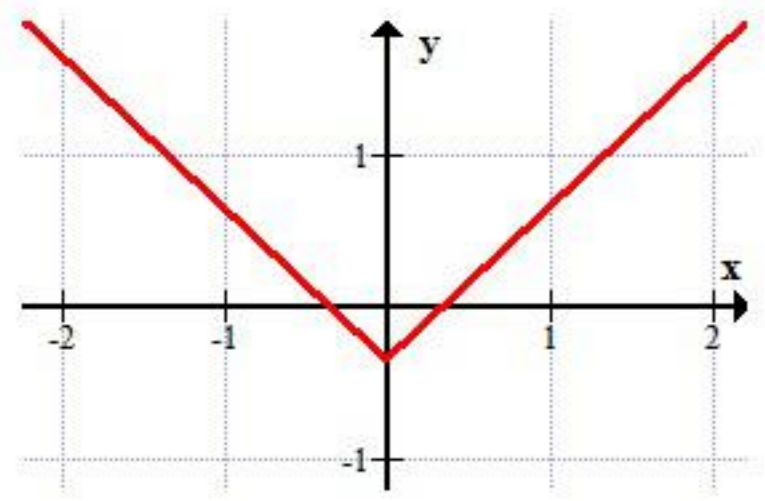
الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن نیز $(0, +\infty)$ است.



نادرست، زیرا مطابق با شکل برد آن $(-1, +\infty)$ می‌باشد.

ب) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است. درست.

ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, +\infty)$ است.



دامنه درست ولی برد آن نادرست است زیرا

با توجه به شکل برد آن برابر است با:

$$\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

ت) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 2 + 1 = 3 \\ f(2) &= \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned} \right\}$$

نادرست \Rightarrow تساوی برقرار نیست \Rightarrow

۴ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 30 متر باشد، حجم

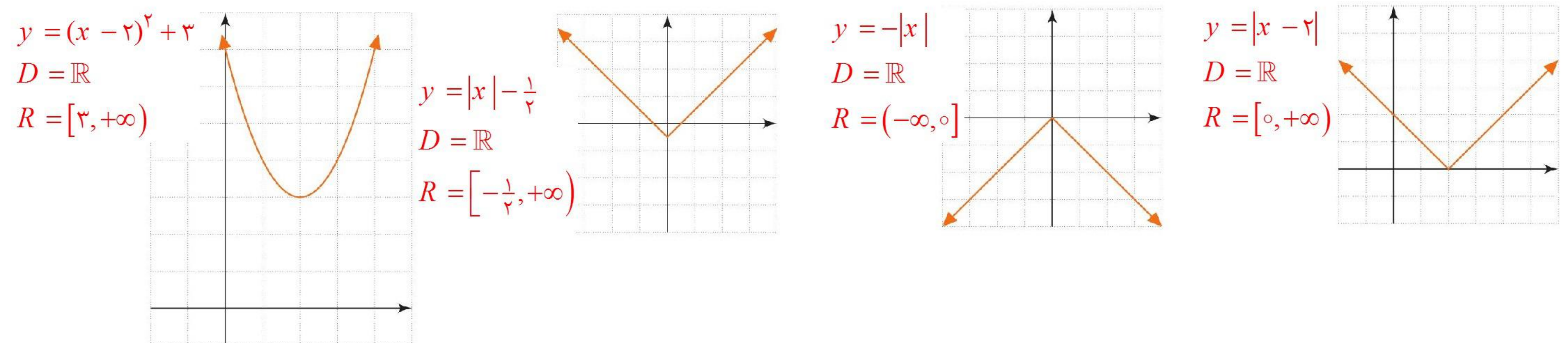
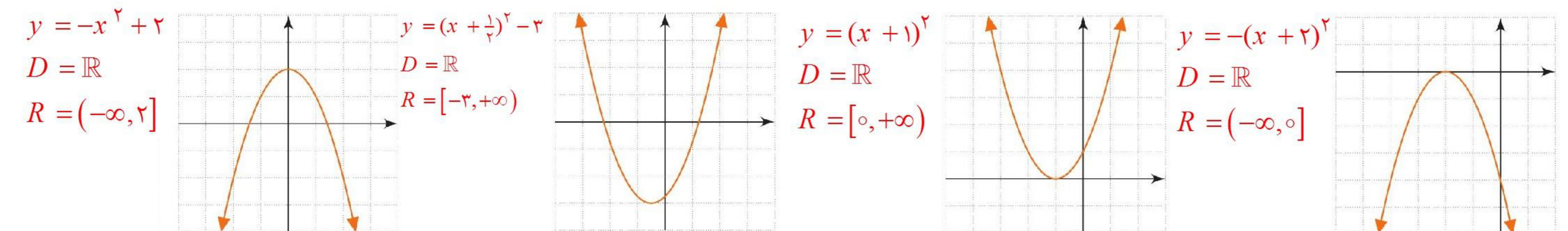
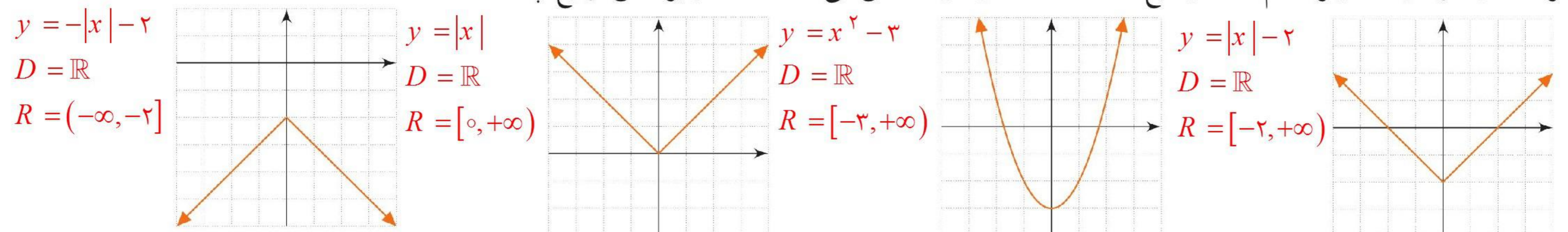
$$V_1 = \pi r^2 h \xrightarrow{h=30} V_1 = 3 \cdot \pi r^2$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{حجم دو نیم کره (یک کره)}$$

$$V(r) = V_1 + V_2 = 3 \cdot \pi r^2 + \frac{4}{3} \pi r^3$$

تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۵ هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^2 - 3$

ب) $y = -x^2 + 2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{4}$

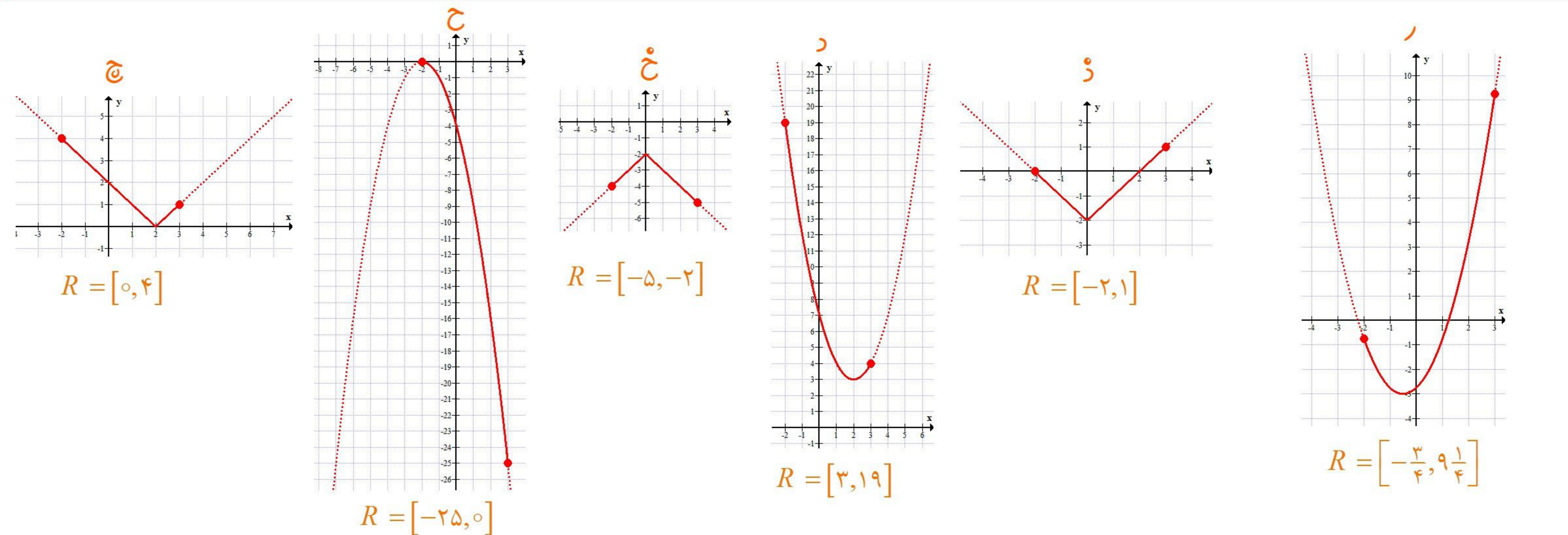
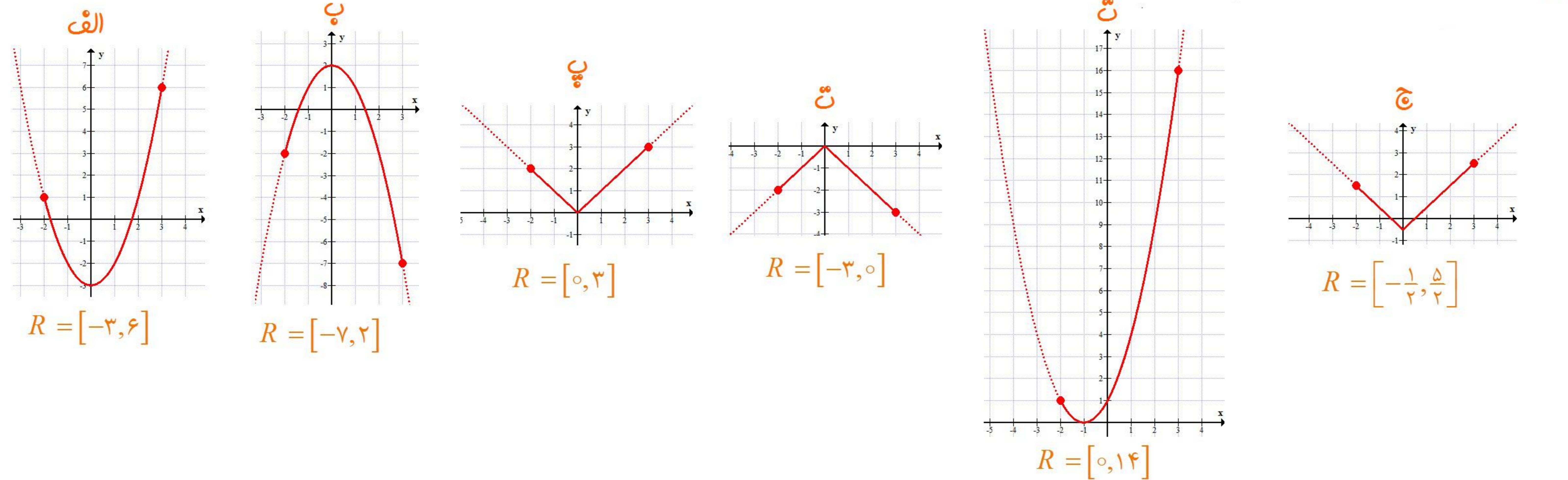
د) $y = (x - 2)^2 + 3$

ه) $y = -|x|$

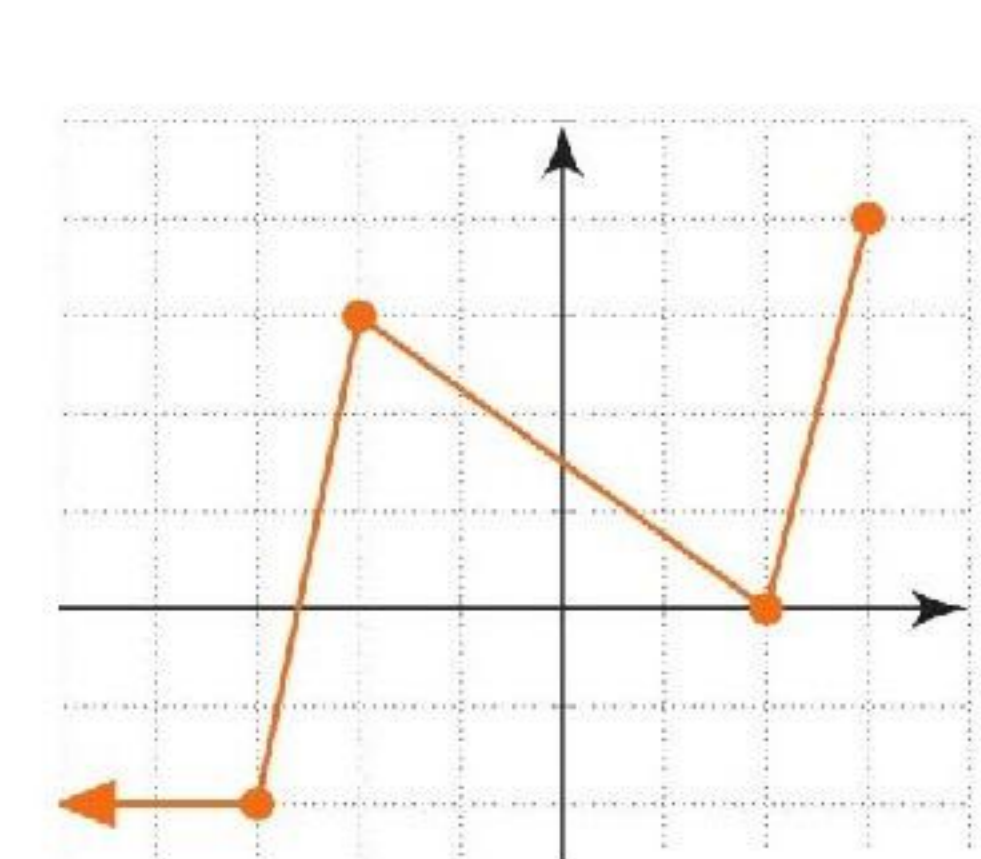
و) $y = |x - 2|$

ز) $y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3$

۶ فرض کنیم دامنه هریک از توابع تمرین ۵ به بازه $[-۲, ۳]$ محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.



۷ نمودار تابع f داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.



$f(\sqrt{۵})$ $f(۶)$ $f(۳)$ $f(\frac{1}{۲})$ $f(۰)$ $f(-\frac{۵}{۲})$

اگر $x \leq -۳$ واضح است که: $y = -۲$

اگر $-۳ \leq x \leq -۲$ آنگاه $y = ax + b$ بوده که باید مقادیر a و b را محاسبه نماییم:

$$\frac{x = -۳}{y = -۲} \rightarrow -۳a + b = -۲ \quad \text{و} \quad \frac{x = -۲}{y = ۳} \rightarrow -۲a + b = ۳ \quad \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \quad a = ۵, b = ۱۳ \Rightarrow y = ۵x + ۱۳$$

اگر $-۲ \leq x \leq ۲$ آنگاه $y = ax + b$ بوده که باید مقادیر a و b را محاسبه نماییم:

$$\frac{x = -۲}{y = ۳} \rightarrow -۲a + b = ۳ \quad \text{و} \quad \frac{x = ۲}{y = ۰} \rightarrow ۲a + b = ۰ \quad \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \quad a = -\frac{۳}{۴}, b = \frac{۳}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲}$$

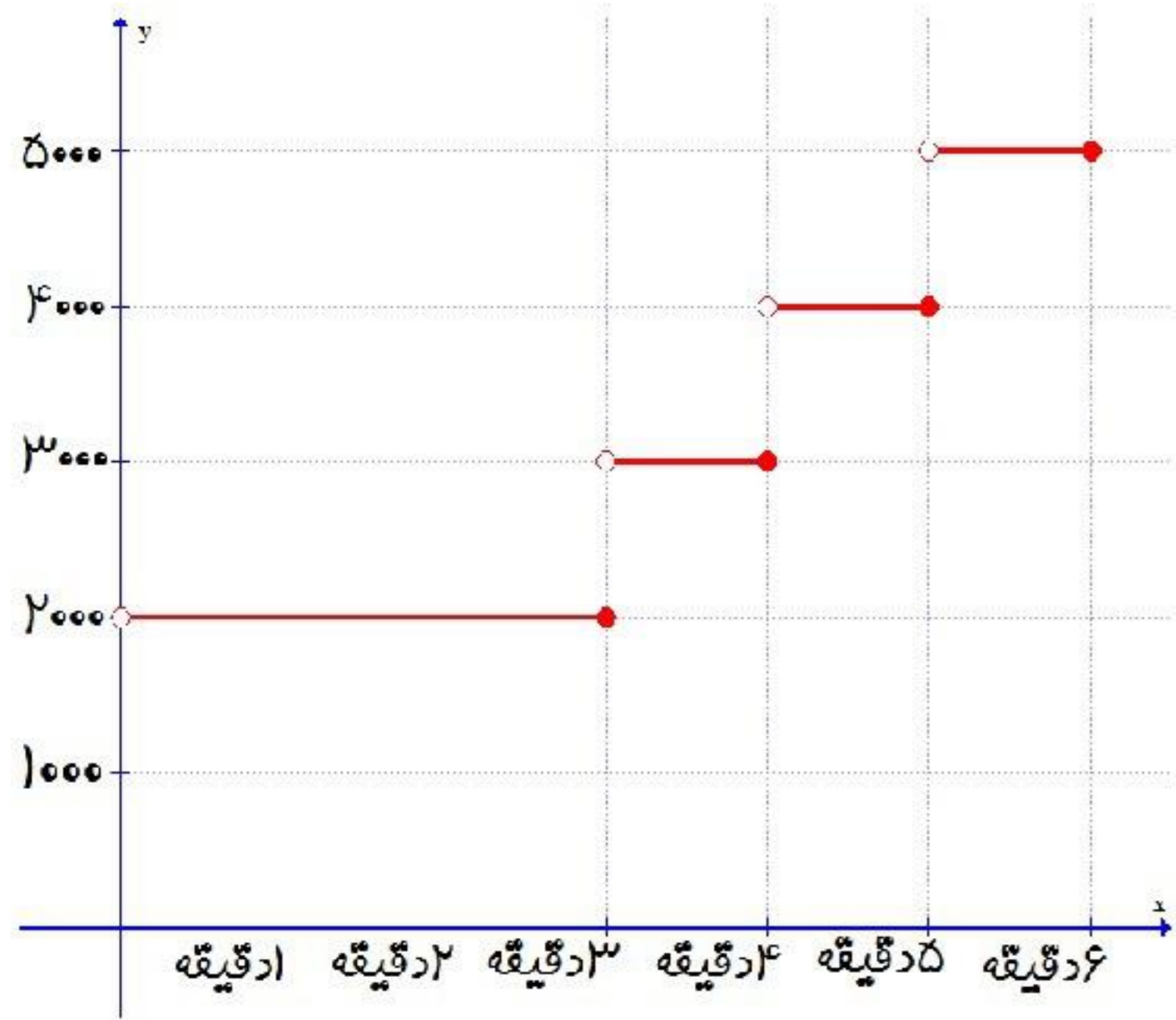
اگر $۲ \leq x \leq ۳$ آنگاه $y = ax + b$ بوده که باید مقادیر a و b را محاسبه نماییم:

$$\frac{x = ۲}{y = ۰} \rightarrow ۲a + b = ۰ \quad \text{و} \quad \frac{x = ۳}{y = ۴} \rightarrow ۳a + b = ۴ \quad \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \quad a = ۴, b = -۸ \Rightarrow y = ۴x - ۸$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -۲ & x \leq -۳ \\ ۵x + ۱۳ & -۳ \leq x \leq -۲ \\ -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳}{۲} & -۲ \leq x \leq ۲ \\ ۴x - ۸ & ۲ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط $(0, 3)$ و $(4, 3)$ می‌گذرد. $f(-1)$ و $f(-4)$ را به دست آورید.

با توجه به ثابت بودن عرض‌ها، واضح است که تابع $f(x) = 3$ بوده و در نتیجه: $f(-1) = f(-4) = 3$



۹ هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را بر حسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

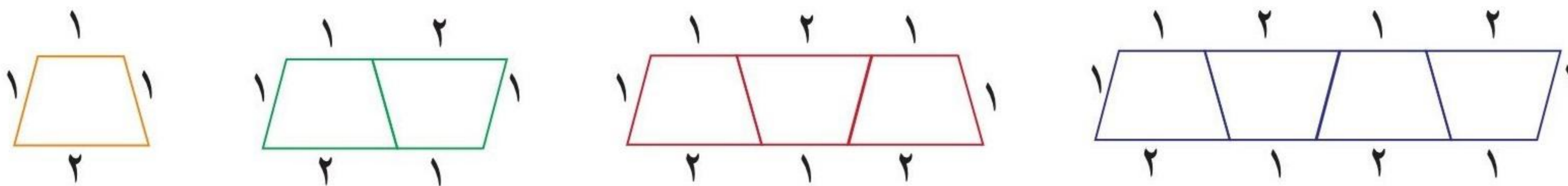
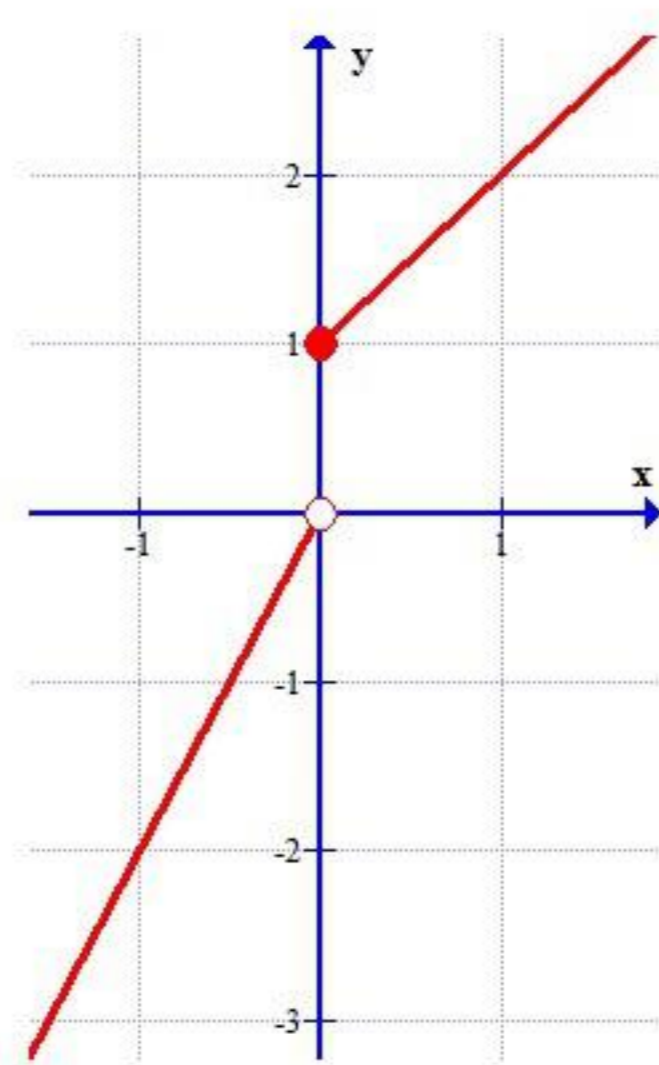
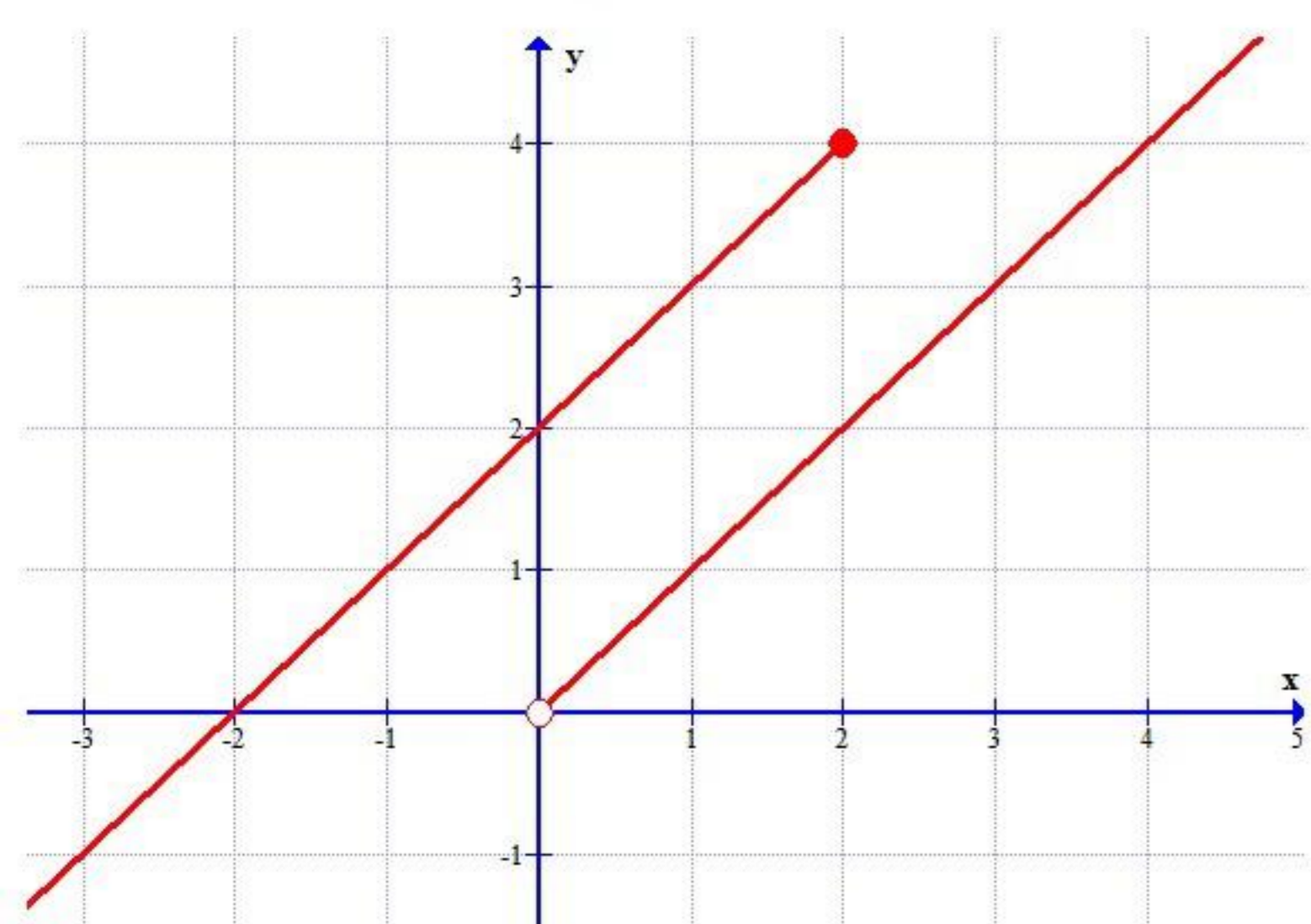
۱۰ کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

معادله f تابع نیست زیرا به ازای $x=1$ ، $y=1$ و $y=3$ بدست می‌آید.

ولی معادله g یک تابع است.



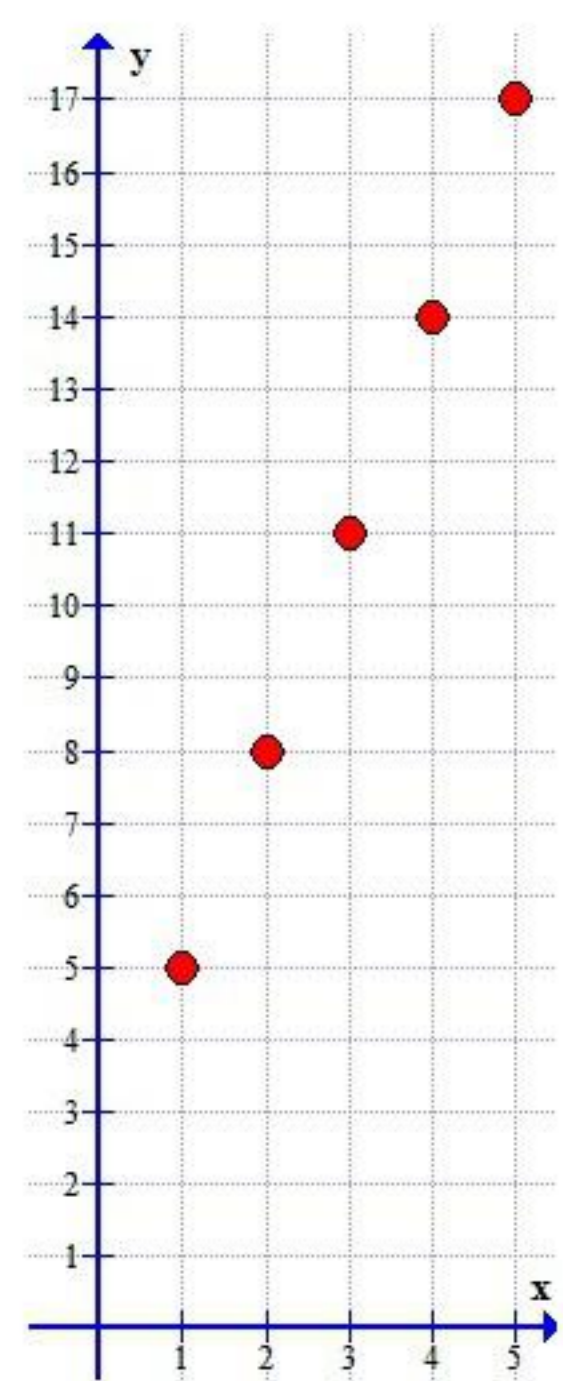
۱۱ الگوی زیر از تعدادی ذوزنقه تشکیل شده است.

تعداد ذوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	$3n+2$

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) چرا رابطه بین تعداد ذوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ زیرا به ازای هر مولفه اول فقط یک مولفه دوم تعریف شده است. دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

ضابطه این تابع به صورت $f(n) = 3n + 2$ است، که دامنه‌ی آن اعداد طبیعی یعنی $D = \mathbb{N}$ است. و برد این تابع $R = \{3n + 2 | n \in \mathbb{N}\}$ می‌باشد.



۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(1, -2)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند.

نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

فرم کلی معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد که باید مختصات نقاط $(1, -2)$ ، $(2, -3)$ و $(0, 1)$ در معادله صدق کند.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x=0}{y=1} &\rightarrow 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1 \\ \frac{x=2, c=1}{y=-3} &\rightarrow -3 = 4a + 2b + 1 \Rightarrow 4a + 2b = -4 \\ \frac{x=1, c=1}{y=-2} &\rightarrow -2 = a + b + 1 \Rightarrow a + b = -3 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = 1, b = -4 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 1$$

دامنه‌ی این تابع تمامی اعداد حقیقی یعنی $D = \mathbb{R}$ است و

برد این تابع مطابق با شکل $R = [-3, +\infty)$ می‌باشد.

