

## جزوه ریاضی ۱ پایه دهم \* مجتمع استعداد های ناب صالحین آبادان \* آقای ملاسعیدی



دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله ی قبل از خودش به دست می آید ، یک دنباله ی حسابی نامیده می شود . به آن عدد ثابت ، قدر نسبت گفته و با نماد  $d$  نمایش می دهند .

به عنوان نمونه دنباله ی  $1, 5, 9, \dots$  یک دنباله ی حسابی با قدر نسبت  $d = 4$  می باشد .

**نکته:** دنباله ی حسابی ، همان دنباله با الگوی خطی می باشد .

**نکته:** هر جمله منهای جمله ی قبلی ، برابر قدر نسبت دنباله است به عبارت بهتر  $d = t_n - t_{n-1}$  می باشد .

مثال : از بین دنباله های زیر ، دنباله ی حسابی را به همراه قدر نسبت آن مشخص کنید .

الف) دنباله ی حسابی با قدر نسبت  $d = (-4) - (-7) = 3$  است  $\rightarrow -7, -4, -1, \dots$

ب) دنباله حسابی نیست .  $\rightarrow 1, 3, 9, \dots$

پ) دنباله حسابی  $d = 4 - 9 = -5$  است  $\rightarrow 9, 4, -1, \dots$

ت) دنباله ی حسابی با قدر نسبت  $d = 4 - 4 = 0$  است  $\rightarrow 4, 4, 4, \dots$

**تعیین جمله ی عمومی:** اگر  $a$  جمله ی اول و  $d$  قدر نسبت دنباله فرض شوند ، جمله ی عمومی دنباله حسابی  $t_n = a + (n - 1)d$  می باشد .

مثال : جملات دهم و صدم و همچنین جمله ی عمومی دنباله  $4$  و  $1$  و  $-2$  را تعیین کنید .

پاسخ : دنباله حسابی بوده و جمله ی اول آن  $a = -2$  و قدرنسبت آن  $d = 3$  می باشد بنابراین :

$$t_{10} = a + 9d = -2 + 9 \times 3 = -2 + 27 = 25$$

$$t_{30} = a + 29d = -2 + 29 \times 3 = -2 + 87 = 85$$

$$t_n = a + (n - 1)d = -2 + (n - 1) \times 3 = -2 + 3n - 3 \Rightarrow t_n = 3n - 5$$

**نکته:** ضریب  $n$  در جمله ی عمومی دنباله حسابی ، همان قدر نسبت می باشد . به طور مثال اگر جمله ی عمومی دنباله ی حسابی به صورت  $t_n = 4n - 1$  باشد ، قدر نسبت این دنباله  $d = 4$  است .

مثال : در یک دنباله ی حسابی با جمله ی عمومی  $t_n = \frac{1-3n}{4}$  نسبت جمله ی پنجم به قدر نسبت را بیابید .

$$t_n = \frac{1-3n}{4} \Rightarrow d = -\frac{3}{4} , t_5 = \frac{1-15}{4} = -4 \Rightarrow \frac{t_5}{d} = \frac{-4}{-\frac{3}{4}} = \frac{16}{3} \quad \text{پاسخ:}$$

**نکته:** اگر  $t_m$  و  $t_n$  دو جمله ی متمایز دنباله ی حسابی باشند ، قدر نسبت طبق رابطه ی  $d = \frac{t_n - t_m}{n - m}$  به دست می آید .

مثال : در یک دنباله ی حسابی جمله ی هفتم  $1$  و جمله ی یازدهم  $13$  می باشد . جمله ی بیستم آن را تعیین کنید .

پاسخ :

$$\left. \begin{array}{l} t_7 = 1 , t_{11} = 13 \Rightarrow d = \frac{t_{11} - t_7}{11 - 7} = \frac{13 - 1}{4} = 3 \\ t_7 = a + 6d = 1 \xrightarrow{d=3} a + 18 = 1 \Rightarrow a = -17 \end{array} \right\} \Rightarrow t_{20} = a + 19d = -17 + 57 = 40$$



## جزوه ریاضی ۱ پایه دهم \* مجتمع استعداد های ناب صالحین آبادان \* آقای ملاسعیدی

مثال: بین دو عدد ۲- و ۲۳، چهار عدد چنان بنویسید، که رشته ی اعداد تشکیل شده، دنباله ی حسابی باشد.  
پاسخ: دنباله به صورت ۲۳، \*، \*، \*، \*، -۲ خواهد بود. بنابراین جمله ی اول ۲- و جمله ی ششم ۲۳ می باشد.

$$t_1 = -2, \quad t_6 = 23 \Rightarrow d = \frac{t_6 - t_1}{6 - 1} = \frac{23 - (-2)}{5} = 5$$

در نتیجه دنباله به صورت ۲۳ و ۱۸ و ۱۳ و ۸ و ۳ و -۲ می باشد و واسطه ها عبارتند از: ۱۸ و ۱۳ و ۸ و ۳.

مثال: جمله ی عمومی دنباله ی حسابی را بیابید که در آن  $t_3 + t_8 = 36$  و  $t_5 + t_9 = 15$  می باشد.

پاسخ:

$$\begin{cases} t_3 + t_8 = 36 \Rightarrow a + 2d + a + 7d = 36 \Rightarrow 2a + 9d = 36 \\ t_5 + t_9 = 15 \Rightarrow a + 4d + a + 8d = 15 \Rightarrow 2a + 12d = 15 \end{cases} \xrightarrow{\times(-)} \begin{cases} -2a - 9d = -36 \\ 2a + 12d = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3d = -21 \Rightarrow d = -7 \Rightarrow a = \frac{99}{2}$$

بنابراین جمله ی عمومی برابر است با:

$$t_n = a + (n-1)d = \frac{99}{2} + (n-1)(-7) \Rightarrow t_n = \frac{113}{2} - 7n$$

**نکته:** هرگاه  $a, b, c$  سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی باشند،  $b$  را میانگین حسابی (واسطه ی حسابی) نامیده و خواهیم داشت:

$$a + c = 2b$$

(اولی بعلاوه آخری، مساوی دوبرابر وسطی است.)

مثال: واسطه ی حسابی بین دو عدد ۱۳ و ۲۳ را بنویسید.

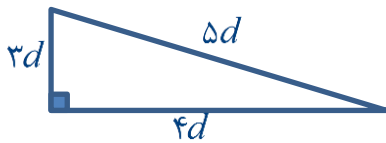
پاسخ: اگر  $b$  واسطه ی حسابی فرض شود داریم:

$$2b = 13 + 23 = 36 \Rightarrow b = 18$$

مثال:  $m$  را چنان بیابید که  $3m - 1$  و  $5m + 3$  و  $6m + 11$  سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی باشند.

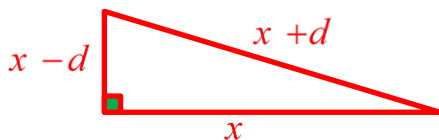
پاسخ: باید اولی بعلاوه آخری، مساوی دوبرابر وسطی باشد، پس:

$$(6m + 11) + (3m - 1) = 2(5m + 3) \Rightarrow 9m + 10 = 10m + 6 \Rightarrow m = 4$$



**نکته:** اگر طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای تشکیل دنباله ی حسابی دهند،

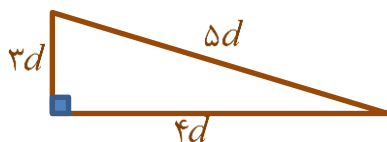
آن مثلث به صورت روبرو است.



اثبات: فرض کنید اضلاع مثلث به صورت شکل مقابل تشکیل دنباله حسابی دهند.

بنابراین باید قضیه ی فیثاغورث برای آن برقرار باشد:

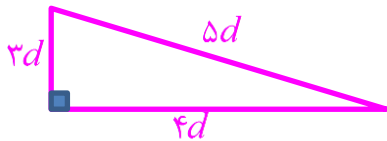
$$(x-d)^2 + x^2 = (x+d)^2 \Rightarrow x^2 - 2xd + \cancel{d^2} + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 2xd + \cancel{d^2} \Rightarrow x^2 = 4xd \xrightarrow{\div x} x = 4d$$



حال کافیست در شکل به جای  $x$  قرار دهیم  $4d$ ، در نتیجه:



مثال : محیط مثلث قائم الزاویه ای که اندازه ی اضلاع آن تشکیل دنباله ی حسابی می دهند برابر ۳۶ است . مساحت آن چقدر است ؟



پاسخ : طبق نکته فوق مثلث به صورت روبرو خواهد بود . بنابراین :

$$\text{محیط} = 12d = 36 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow \begin{array}{c} 9 \\ \triangle \\ 12 \end{array} \Rightarrow \text{مساحت} = \frac{9 \times 12}{2} = 54$$

**نکته :** مجموع  $n$  جمله ی نخست در دنباله ی حسابی طبق دستور  $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$  بدست می آید .

مثال : مجموع ۱۳ جمله ی نخست دنباله ی  $20, -16, -12, \dots$  را محاسبه نمایید .

$$a = -20, d = 4 \Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}(2a + 12d) = \frac{13}{2}(-40 + 48) = \frac{13}{2} \times 8 = 52$$

پاسخ :

مثال : در یک دنباله ی حسابی جمله ی سوم ۱۱ و جمله ی ششم ۲۳ می باشد ، مجموع ده جمله ی نخست آن را بیابید .

$$\left. \begin{array}{l} t_3 = 11, t_6 = 23 \Rightarrow d = \frac{t_6 - t_3}{6 - 3} = \frac{23 - 11}{3} = 4 \\ t_3 = a + 2d \Rightarrow 11 = a + 8 \Rightarrow a = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2a + 9d) = 5(6 + 36) = 210$$

پاسخ :

۱- در یک دنباله ی حسابی جمله ی اول ۶۳ و قدر نسبت ۴- است . این دنباله دارای چند جمله ی مثبت است ؟

۲- در یک دنباله ی حسابی جمله ی سوم ۶- و جمله ی نهم دو برابر جمله ی هفتم آن است . این دنباله را یافته و مجموع ۱۰ جمله ی نخست آن را بنویسید .

۳- بین دو عدد ۲۰ و ۲ ، پنج عدد چنان بنویسید که این اعداد با هم تشکیل دنباله ی حسابی نزولی دهند .

۴- اندازه های اضلاع یک مثلث قائم الزاویه به مساحت ۲۴ ، به صورت دنباله ی حسابی اند . طول بزرگترین ضلع آن چقدر است ؟



۵- در یک دنباله ی حسابی  $t_5 + t_8 = 21$  می باشد . مجموع دوازده جمله ی نخست آن را حساب کنید .

۶- در یک دنباله ی حسابی با جمله ی عمومی  $t_n = 5 - 2n$  مجموع هفت جمله ی نخست را بیابید .

۷- اگر مجموع شش جمله ی اول دنباله ی حسابی ۳۰ و مجموع هشت جمله ی نخست آن ۷۲ باشد . جمله ی عمومی آن چیست ؟

۸- در دنباله ی حسابی  $10, \dots, 6$  و  $2$  حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود ؟

۹- در یک دنباله ی حسابی  $t_5 + t_8 + t_{17} = 300$  می باشد . جمله ی دهم آن چیست ؟

۱۰- در یک دنباله ی حسابی  $t_{13} = 5$  و  $t_{15}^2 - (t_{11})^2 = 120$  می باشد . جمله ی دهم این دنباله را بیابید .

۱۱- در یک دنباله ی حسابی  $t_3 + t_4 + t_5 = 6$  می باشد ، میانگین هفت جمله ی نخست آن را بیابید .

۱۲- اعداد  $5p - 1$  و  $3p + 4$  و  $2p + 3$  سه جمله ی متوالی یک دنباله ی حسابی هستند . قدر نسبت این دنباله را تعیین کنید .

۱۳- به جملات اول و دوم دنباله ی حسابی ۴ واحد افزوده و دنباله ی حسابی دیگری تشکیل می دهیم . اختلاف جملات  $n$  ام دو دنباله چقدر

است ؟

۱۴- در دو دنباله ی حسابی زیر ، چند جمله ی مشترک کمتر از ۵۰۰ وجود دارد ؟

$$3, 7, 11, 15, \dots \quad \text{و} \quad 1, 7, 13, 19, \dots$$



\*\*\*\*\* جواب نهایی ترین ها \*\*\*\*\*

۱- شانزده جمله ی مثبت دارد .

۲- دنباله  $... -6, -9, -12$  بوده و  $S_{15} = 15$  است .

۳-  $5, 8, 11, 14, 17$

۴- ده

۵-  $S_{12} = 126$

۶-  $S_7 = -21$

۷-  $t_n = 4n - 9$

۸- حداقل یازده جمله

۹-  $t_{10} = 100$

۱۰-  $t_{10} = -4$

۱۱- ۲

۱۲- ۷

۱۳- ۴

۱۴- ۴۲

