به نام خداوند بخشنده مهربان

حل فعالیتها و کار در کلاسها و تمرینهای درس چهارم از فصل پنجم

حسابان ۱

درس ۴

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

محرم مهدی

09213102271- 09125102271- @moharrammahdi

کار در کلاس صفحه ۱۴۱

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{2^2-4(2)+4}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

مبهم

$x\to 2 \Rightarrow (x-2)$ عامل ابهام

رفع ابهام $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}^{1}(x-2)}{\cancel{(x-2)}_{1}(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}=\frac{2-2}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

کار در کلاس صفحه ۱۴۲

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2}=\frac{3^2-9}{\sqrt{\underbrace{3\times 3-5}_{4}}-2}=\frac{9-9}{2-2}=\frac{0}{0}$$

مبهم

$x\to 3 \Rightarrow (x-3)$ عامل ابهام

رفع ابهام $\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2} \times \frac{\sqrt{3x-5}+2}{\sqrt{3x-5}+2}$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{(\sqrt{3x-5})^2-2^2}$$ مزدوج

$3x-5-4=3x-9$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}^{1}(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3\cancel{(x-3)}_{1}}$$

$$= \frac{(3+3)(\sqrt{9-5}+2)}{3} = \frac{6\times 4}{3} = 8$$

کار در کلاس صفحه ۱۴۳ بالای صفحه

مقدار حد زیر را بیابید.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{\sin(2\times 0)}{3(0)} = \frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x\cos x}{3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x}{3}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \to 1$

$$= 1 \times \frac{\boxed{2\cos 0^+}^{\,1}}{3} = 1\times\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

راه دوم $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{\frac{3}{2}\times 2x}$

$$= \frac{2}{3} \boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{2}{3}$$

1

کار در کلاس صفحه ۱۴۳ پایین صفحه

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi} = \frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) - 1}{4\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi} = \frac{\overset{\sin\frac{\pi}{2}}{1} - 1}{\pi - \pi} = \frac{0}{0}$$ مبهم

تغییر متغیر $x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t$ $\quad x\to\frac{\pi}{4}$, $t \to 0$

$$x = t + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = 2t + \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right) - 1}{\underbrace{4\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \pi}_{4t + \pi - \pi}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos 2t - 1}{4t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos 2t - 1}{4t} \times \frac{\cos 2t + 1}{\cos 2t + 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos^2 2t - 1}{4t(\cos 2t + 1)}$$

$$\cos^2 2t - 1 = \cos^2 2t - (\sin^2 2t + \cos^2 2t) = -\sin^2 2t$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin^2 2t}{4t(\cos 2t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{2t} \times \frac{-\sin 2t}{2(\cos 2t+1)}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{2t}} \times \boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{\cos 2t+1}} = 0$$

$$1 \qquad\qquad \frac{0}{1+1} = 0$$

تمرین صفحه ۱٤٤

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2[x]-8}{x-2}$

پ) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}$

ت) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

ث) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$

ج) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

الف) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x} = \frac{2-1-1}{3-3} = \frac{0}{0}$ مبهم

$x\to -1 \Rightarrow (x+1)$ عامل ابهام

تجزیه عبارت صورت به روش هورنر

صورت

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 0 & -2 & 1 \\ \hline & 2 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow (x+1)(2x-1)$$ عبارت صورت

$3x^2+3x = 3x(x+1)$ عبارت مخرج

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{3x\cancel{(x+1)}} = \dfrac{2(-1)-1}{3(-1)} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2[x]-8}{x-2}$

$x \to 2^+ \Rightarrow [x] = [2^+] = 2$

بعد از جایگذاری $= \dfrac{2^2(2)-8}{2-2} = \dfrac{8-8}{0} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$x \to 2 \Rightarrow (x-2) =$ عامل ابهام

رفع ابهام $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x^2-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2(x^2-4)}{(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 2(\overbrace{2+2}^{4}) = 8$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} = \dfrac{\sqrt{2+2}-2}{2^2-4} = \dfrac{2-2}{4-4} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$x \to 2 \Rightarrow (x-2)$ عامل ابهام

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(\sqrt{x+2}-2)}{(x^2-4)} \times \dfrac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)} =$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{(x\cancel{+۲}^{۱}-۴)}{\cancel{(x-۲)}_{۱}\underbrace{(x+۲)}_{\underbrace{۲+۲}_{۴}}\underbrace{(\underbrace{\sqrt{x+۲}}_{۲}+۲)}_{۴}} = \frac{۱}{۱۶}$$

نزدیک $(x-۲)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}$ $= \frac{۲-\sqrt{۴}}{۳-\sqrt{۸+۱}} = \frac{۲-۲}{۳-۳} = \frac{۰}{۰}$ مبهم

$x \to ۴ \Rightarrow (x-۴)$ عامل ابهام

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴} \frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}} \times \frac{۲+\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}} \times \frac{۳+\sqrt{۲x+۱}}{۳+\sqrt{۲x+۱}}$

$۴-x = -(x-۴)$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{(۲-\sqrt{x})(۲+\sqrt{x})(۳+\sqrt{۲x+۱})}{(۳-\sqrt{۲x+۱})(۳+\sqrt{۲x+۱})(۲+\sqrt{x})}$$

$۹-(۲x+۱)$

$-۲x+۸ = -۲(x-۴)$

$$= \lim_{x\to ۴} \frac{\cancel{-}\cancel{(x-۴)}(۳+\sqrt{۲x+۱})}{\cancel{-}۲\cancel{(x-۴)}(۲+\sqrt{x})} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\overbrace{۳+۳}^{۶}}{\underbrace{۲+۲}_{۴}}$$

$$= \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

ث) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x} = \dfrac{\sqrt{1+0}-\sqrt{1-0}}{0^2+0} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$x\to 0 \Rightarrow x-0 = x$ عامل ابهام

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\overbrace{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}^{A}}{x^2+x}\times\dfrac{\overbrace{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}^{B}}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

مزدوج

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{A\times B = \overbrace{(1+x)-(1-x)}^{2\cancel{x}}}{\cancel{x}(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2}{\underbrace{(0+1)}_{1}\underbrace{(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0})}_{2}}$

$= \dfrac{2}{2} = 1$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{1-\sqrt{1}}{\sqrt{1}-1} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$x\to 1 \Rightarrow (x-1)$ عامل ابهام

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\overset{A}{x-\sqrt{x}}}{\underset{C}{\sqrt{x}-1}}\times\dfrac{\overset{B}{x+\sqrt{x}}}{\underset{D}{x+\sqrt{x}}}\times\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\overset{\text{مزدوج}}{A\times B}\times(\sqrt{x}+1)}{\underset{\text{مزدوج}}{C\times D}\times(x+\sqrt{x})}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cancel{(x-1)}^{1}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}_{1}(x+\sqrt{x})}$

$= \dfrac{1\times(\sqrt{1}+1)}{(1+\sqrt{1})} = \dfrac{2}{2} = 1$

۲ اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)g(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{\underbrace{2x^2-x-1}_{A}} \times \frac{2x+1}{x} \xrightarrow{\text{جایگذاری}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}+1}{\underbrace{2(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})-1}} \times \frac{\overbrace{2(-\frac{1}{2})+1}^{0}}{-\frac{1}{2}} = \frac{0}{0}$$ مبهم

$$x\to -\frac{1}{2} \Rightarrow x-(-\frac{1}{2}) \Rightarrow (x+\frac{1}{2})$$ عامل ابهام

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{(x+1)\,2\,\cancel{(x+\frac{1}{2})}}{x\,\cancel{(x+\frac{1}{2})}\,(2x-2)}$

A	۲	-۱	-۱
$-\frac{1}{2}$	۰	-۱	۱
	۲	-۲	۰

$\underbrace{2 \quad -2}_{(2x-2)}$

$A=(x+\frac{1}{2})(2x-2)$

تجزیه عبارت A به روش هورنر

$$= \frac{(-\frac{1}{2}+1)(2)}{(-\frac{1}{2})(2(\frac{-1}{2})-2)} = \frac{\frac{1}{2}\times 2}{-\frac{1}{2}\times -3} = \frac{2}{3}$$

۲ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin x}{\cos x}$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x}$

پ) $\lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲}{|۱-\cos x|}$

ت) $\lim_{x\to ۰} \frac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}$

ث) $\lim_{x\to -\pi} \frac{\cos x+۱}{x+\pi}$

ج) $\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۳}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}$

ح) $\lim_{x\to ۱} \frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}$

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin\frac{\pi}{۲}}{\cos\frac{\pi}{۲}} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام $\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{(1-\sin x)}{\cos x} \times \frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{1-\sin^۲ x}{\cos x(1+\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos^{\cancel{۲}} x}{\cancel{\cos x}(1+\sin x)}$

$= \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos\frac{\pi}{۲}}{1+\sin\frac{\pi}{۲}} = \frac{0}{1+1}$

$= 0$

ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x} = \dfrac{\cos(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})}{\cos\frac{\pi}{۴}-\sin\frac{\pi}{۴}} = \dfrac{\cos \pi/۲}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \dfrac{۰}{۰}$ مبهم

توجه

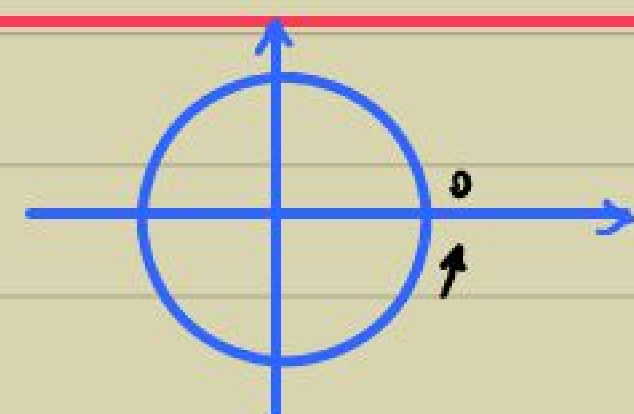
$$\cos(x+\frac{\pi}{۴}) = \cos x \cos \pi/۴ - \sin x \sin \pi/۴$$
$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x$$
$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos x - \sin x)$$

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}} \dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cancel{(\cos x-\sin x)}^{\,۱}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}_{\,۱}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{x^۲}{|۱-\cos x|}$

$x \to ۰^-$

رفع ابهام



جایگذاری $= \dfrac{۰^۲}{|۱-\underset{۱}{\cos ۰}|} = \dfrac{۰}{۰}$ مبهم

$x<۰ \rightarrow ۰<\cos x<۱$

$-۱<-\cos x<۰$

$۰<۱-\cos x<۱$

$* \quad |۱-\cos x| = ۱-\cos x$

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{x^۲}{(۱-\cos x)^{*}} \times \dfrac{(۱+\cos x)}{(۱+\cos x)}$

$$= \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲(۱+\cos x)}{۱-\cos^۲ x} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲(۱+\cos x)}{\sin^۲ x}$$

$$= \boxed{\lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲}{\sin^۲ x}}^{\,۱} \times \lim_{x\to ۰^-}(۱+\cos x) = ۱\times ۲ = ۲$$

ث) $\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{x\sin x}=\frac{2-2\cos 0}{0\times\sin 0}=\frac{2-2}{0-0}=\frac{0}{0}$ مبهم

$2-2\cos 2x=2(1-\cos 2x)=4\sin^2 x$

میدانیم $\cos 2x=1-2\sin^2 x \to \boxed{1-\cos 2x=2\sin^2 x}$

رفع ابهام $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^{\cancel{2}} x}{x\,\cancel{\sin x}}=4\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}^{1}=4$

ث) $\lim_{x\to -\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}=\frac{\cos(-\pi)+1}{-\pi+\pi}=\frac{-1+1}{0}=\frac{0}{0}$ مبهم

$x+\pi=t \Rightarrow x=t-\pi \Longrightarrow \begin{cases} x\to -\pi \\ t\to 0\end{cases}$

رفع ابهام $\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\cos(t-\pi)+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{\cos(\pi-t)}^{-\cos t}+1}{t}$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\times\frac{1+\cos t}{1+\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos^2 t}^{\sin^2 t}}{t(1+\cos t)}$

$=\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}\times\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1+\cos t}=1\times\frac{0}{2}=0$

ج) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\dfrac{\sin a-\sin a}{a-a}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

$x-a=t \Rightarrow x=t+a$ توجه

$x\to a \Rightarrow t\to 0$

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t+a)-\sin a}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t\cos a+\sin a(\cos t-1)}{t}$

$=\boxed{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}}\times\cos a+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(\cos t-1)}{t}\times\sin a$ *

1

$=\cos a+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\cancel{2}\sin^2\frac{t}{2}}{\cancel{2}\,\frac{t}{2}}\times\sin a$

$=\cos a+\boxed{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin\frac{t}{2}}{t/2}}\times\lim\limits_{t\to 0}\sin\frac{t}{2}\times\sin a$

1 0

$=\cos a$

*

$\cos 2t=1-2\sin^2 t$

$2\sin^2 t=1-\cos 2t$

$-2\sin^2 t=\cos 2t-1$

$-2\sin^2\frac{t}{2}=\cos t-1$

t را به $\frac{t}{2}$ و $2t$ را به t تبدیل کردم

ج) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6x-2\pi} = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})}{6(\frac{\pi}{3})-2\pi} = \dfrac{\sin 0}{2\pi-2\pi} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$x-\frac{\pi}{3}=t \Rightarrow x=t+\frac{\pi}{3} \Rightarrow 6x=6t+2\pi$

$x\to\frac{\pi}{3} \Rightarrow t\to 0$

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{6t+2\pi-2\pi} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{6t}$

$= \dfrac{1}{6} \underbrace{\boxed{\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}}}_{1} = \dfrac{1}{6}$

ح) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1} = \dfrac{2(1)-3\sqrt{1}+1}{1-1} = \dfrac{2-3+1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$x\to 1 \Rightarrow (x-1)$ عامل ابهام

رفع ابهام $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x+1)-3\sqrt{x}}{(x-1)} \times \dfrac{(2x+1)+3\sqrt{x}}{(2x+1)+3\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x+1)^2-(3\sqrt{x})^2}{(x-1)\left((2x+1)+3\sqrt{x}\right)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\boxed{4x^2 + 4x + 1 - 9x}}{(x-1)\left((2x+1) + 3\sqrt{x}\right)} \rightarrow 4x^2 - 5x + 1 \quad A$$

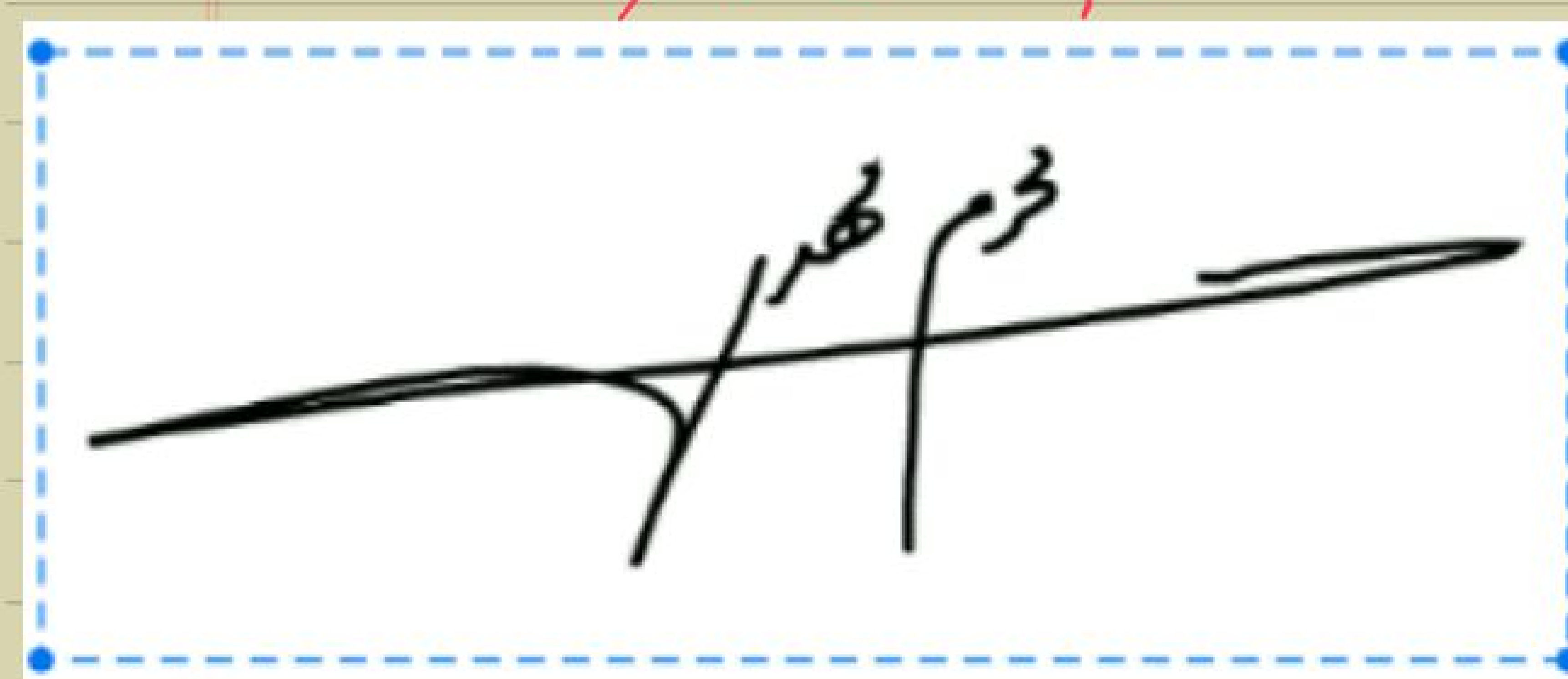
A	4	−5	1
1	0	4	−1
	4	−1	0

$$\Rightarrow A = (x-1)(4x-1)$$

تجزیه A

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(4x-1)}{\cancel{(x-1)}\left(\underbrace{(2x+1)}_{3} + \underbrace{3\sqrt{x}}_{3}\right)} = \frac{4-1}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

پیروز و سربلند باشید



09213102271-09125102271-@moharrammahdi

24 فروردین ماه 1400 تهران

لطفاً در ایام ماه مبارک رمضان ما را از دعای خیر محروم نفرمائید.