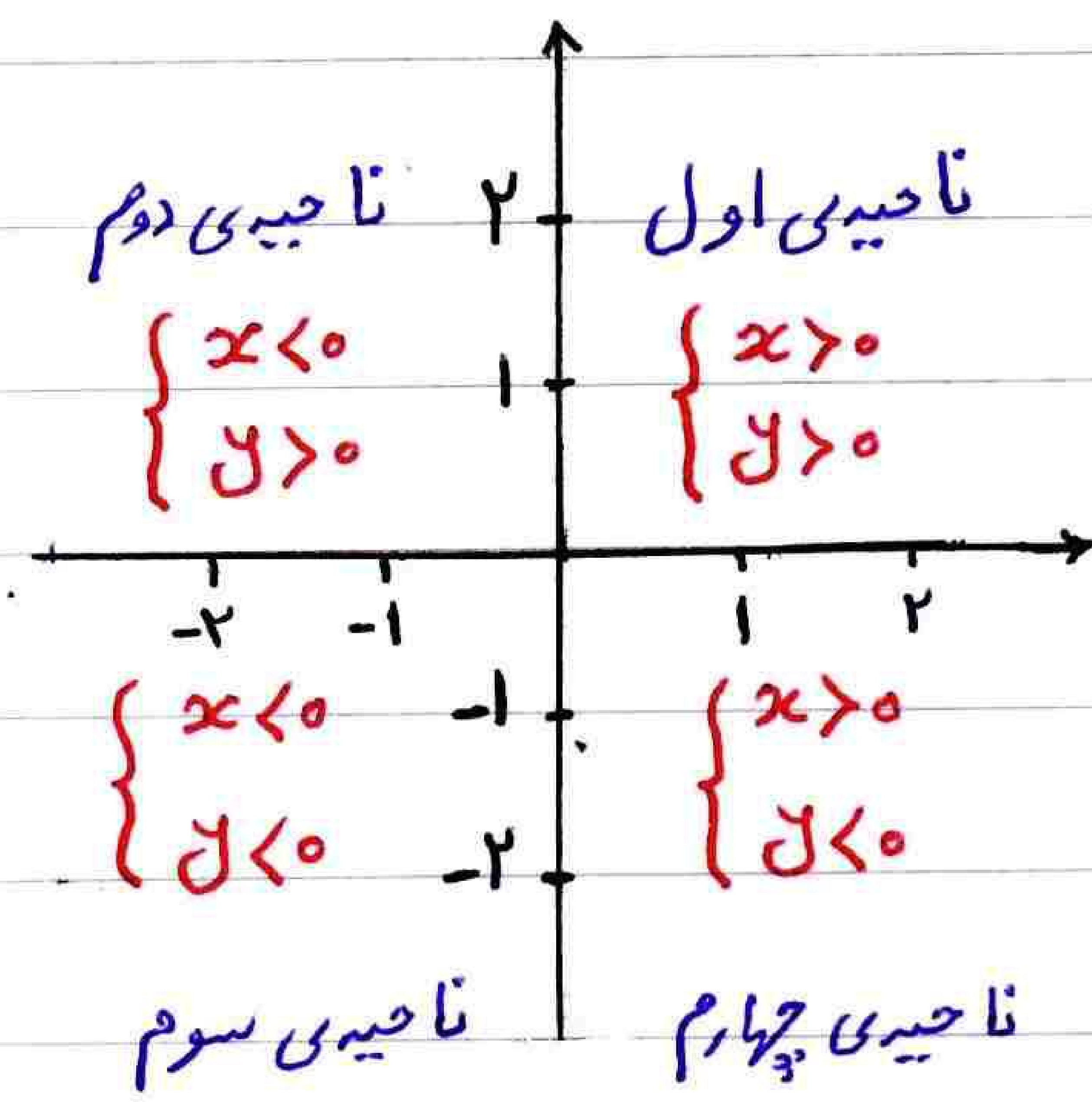
آشنایی با هندسه تحلیلی

نکته (۱) مطابق با شکل مقابل، هر نقطه روی محور طول ها باشد، عرض آن صفر است و هر نقطه روی محور عرضها باشد، طول آن صفر است.



E_1: به ازای چند مقدار صحیح n ، نقطه‌ی $P(2n-5, n+4)$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات واقع است؟

$$\begin{cases} 2n-5<0 \Rightarrow 2n<5 \Rightarrow n<\frac{5}{2} \\ n+4>0 \Rightarrow n>-4 \end{cases} \xRightarrow{n} n=-3, -2, -1, 0, 1, 2$$

به ازای شش مقدار صحیح n ، نقطه‌ی P در ناحیه‌ی دوم است.

E_2: اگر نقطه‌ی $F(x^2+1, x^2-3x)$ روی محور طولها باشد، نقطه‌ی $F'(x+1, x-7)$ چه وضعی در دستگاه مختصات دارد؟

$y_F=0 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=3$

اگر $x=0 \longrightarrow F'(1, -7)$

اگر $x=3 \longrightarrow F'(4, -4)$

$\Longrightarrow$ F' در ناحیه‌ی چهارم است

E_3: جاهای خالی را پر کنید:

الف) هرگاه $x\neq 0$ و $y>0$ آنگاه نقطه‌ی $P(x, y)$ در یکی از نواحی اول یا دوم است.

ب) هرگاه $x>0$ و $y\neq 0$ آنگاه نقطه‌ی $P(x, y)$ در یکی از نواحی اول یا چهارم است.

پ) هرگاه $xy>0$ آنگاه نقطه‌ی $P(x,y)$ در یکی از نواحی اول یا سوم است.

ت) هرگاه $xy<0$ آنگاه نقطه‌ی $P(x,y)$ در یکی از نواحی دوم یا چهارم است.

E_4: به ازای چه مقادیری از m نقطه‌ی $Q(3-m, 2m+1)$ در نواحی اول یا سوم است؟

طبق مثال قبل (پ) باید:

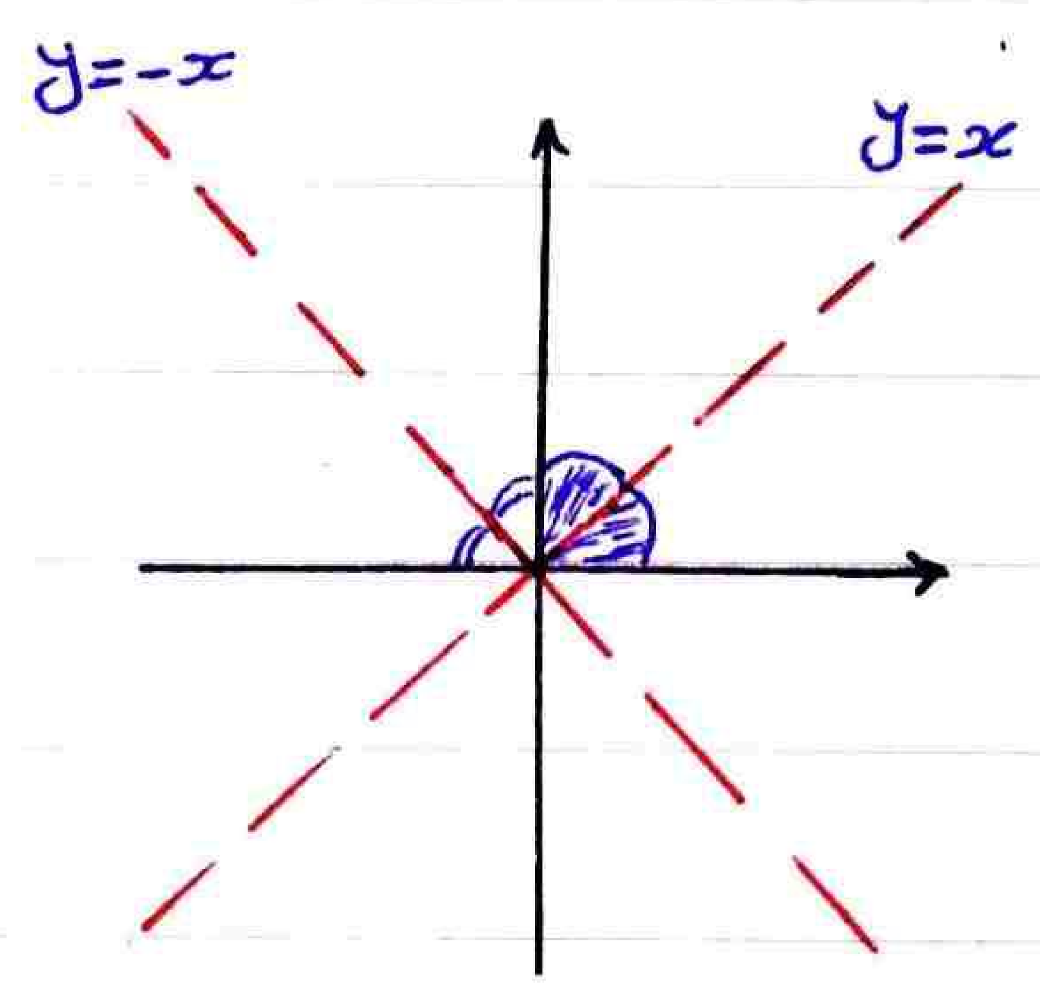
$(3-m)(2m+1)>0$

$3 \quad -\frac{1}{2}$

$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$	

ج

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<m<3$



نکته (۲) اگر نقطه‌ای روی نیمساز نواحی اول و سوم باشد، طول و عرض آن با هم برابرند.

اگر نقطه‌ای روی نیمساز نواحی دوم و چهارم باشد، طول و عرض آن با هم قرینه‌اند به عبارت دیگر: $0=$ عرض + طول

E_5: به ازای چه مقدار از x نقطه‌ی $P(x^2, x+6)$ روی نیمساز ربع اول و سوم و نقطه‌ی $Q(9-x^2, x^2)$ روی محور عرض‌ها واقعند؟

$x_P=y_P \Rightarrow x^2=x+6 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \rightarrow x=3$, $x=-2$

$x_Q=0 \Rightarrow 9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9 \rightarrow x=3$, $x=-3$

$\xleftarrow{\text{اشتراک}}$ به ازای $x=3$ هر دو مورد خواسته شده برقرار است.

نکته (۳) اگر نقطه‌ی M وسط دو نقطه‌ی A و B باشد، آنگاه: $M=\frac{A+B}{2}$

E_6: اگر $P(-1,2)$ و $Q(3,4)$ مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط PQ را بنویسید.

M وسط PQ $\Rightarrow M=\frac{P+Q}{2}=\left(\frac{3+(-1)}{2},\frac{4+2}{2}\right) \Rightarrow M(1,3)$

E_7: قرینه‌ی نقطه‌ی $F(-3,7)$ نسبت به نقطه‌ی $O(2,4)$ کدام نقطه است؟

گیریم قرینه‌ی F نسبت به O، نقطه‌ی F' باشد، پس O وسط FF' است:

$O=\frac{F+F'}{2} \Rightarrow F+F'=2O \Rightarrow F'=2O-F=(4,8)-(-3,7)=(7,1)$

نکته (۴) فاصله‌ی بین دو نقطه:

اگر A و B دو نقطه در صفحه‌ی مختصات باشند، آنگاه طول پاره خط AB برابر است با: $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

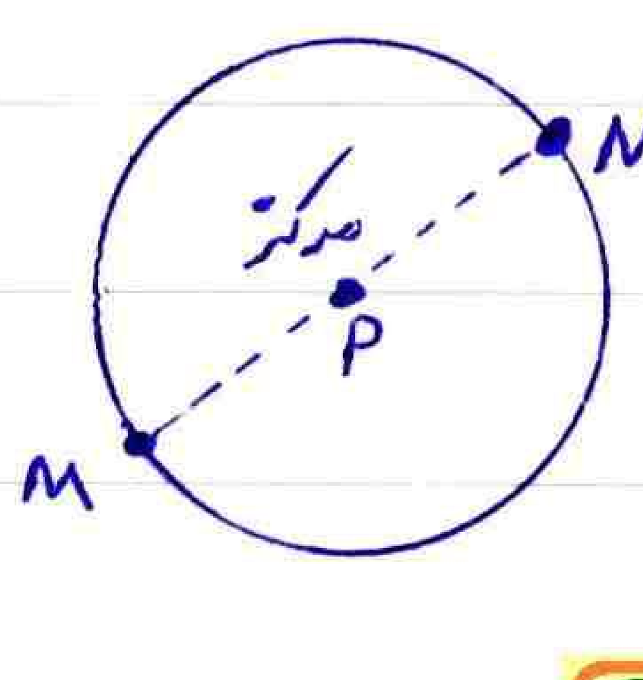
E_8: اگر نقاط $A(1,4)$ و $B(3,0)$ و $C(-1,0)$ سه رأس یک مثلث باشند، با محاسبه‌ی طول اضلاع آن، نوع مثلث را تعیین کنید.

$AB=\sqrt{(1-3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{20}$ و $AC=\sqrt{20}$ و $BC=4$

$\Rightarrow AB=AC \Rightarrow$ مثلث در رأس A متساوی‌الساقین است

E_9: درصورتی که نقاط $M(-2,2)$ و $N(0,6)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مطلوبست:

الف) مختصات نقطه‌ی مرکز دایره



P وسط MN است $\Rightarrow$ P مرکز دایره $\Rightarrow P=\frac{M+N}{2} \Rightarrow P(-1,4)$

ب) اندازه‌ی شعاع دایره

قطر دایره است $MN = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \xrightarrow{\div 2}$ شعاع دایره $= \sqrt{5}$

پ) آیا نقطه‌ی $F(1,7)$ درون دایره واقع است؟ چرا؟

فاصله‌ی F تا مرکز (یعنی FP) را حساب می‌کنیم، اگر کمتر از شعاع دایره باشد نقطه درون دایره است، اگر برابر شعاع دایره باشد، نقطه روی دایره است و در صورتی که بیشتر از شعاع دایره باشد نقطه خارج دایره است.

$FP = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \longrightarrow FP > 2 \longrightarrow$ نقطه خارج دایره است

E_{10}: نقطه‌ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه‌ی $A(2,4)$ برابر $\sqrt{5}$ باشد.

گیریم آن نقطه $B(x,2x)$ باشد و $O(0,0)$ مبدأ مختصات، بنابراین:

$OB = \sqrt{x^2+4x^2} = \sqrt{5x^2}$

$AB = \sqrt{(x-2)^2+(2x-4)^2} = \sqrt{5x^2-20x+20}$

$\xrightarrow{OB+AB=\sqrt{5}} \sqrt{5x^2} + \sqrt{5x^2-20x+20} = \sqrt{5}$

$\xrightarrow{\div\sqrt{5}} \sqrt{x^2-4x+4} = 1-\sqrt{x^2}$

$\xrightarrow{\text{توان } 2} x^2-4x+4 = 1-2\sqrt{x^2}+x^2$

$\Longrightarrow -4x+3 = -2\sqrt{x^2}$

$\xrightarrow{\text{توان } 2} 16x^2-24x+9 = 4x^2$

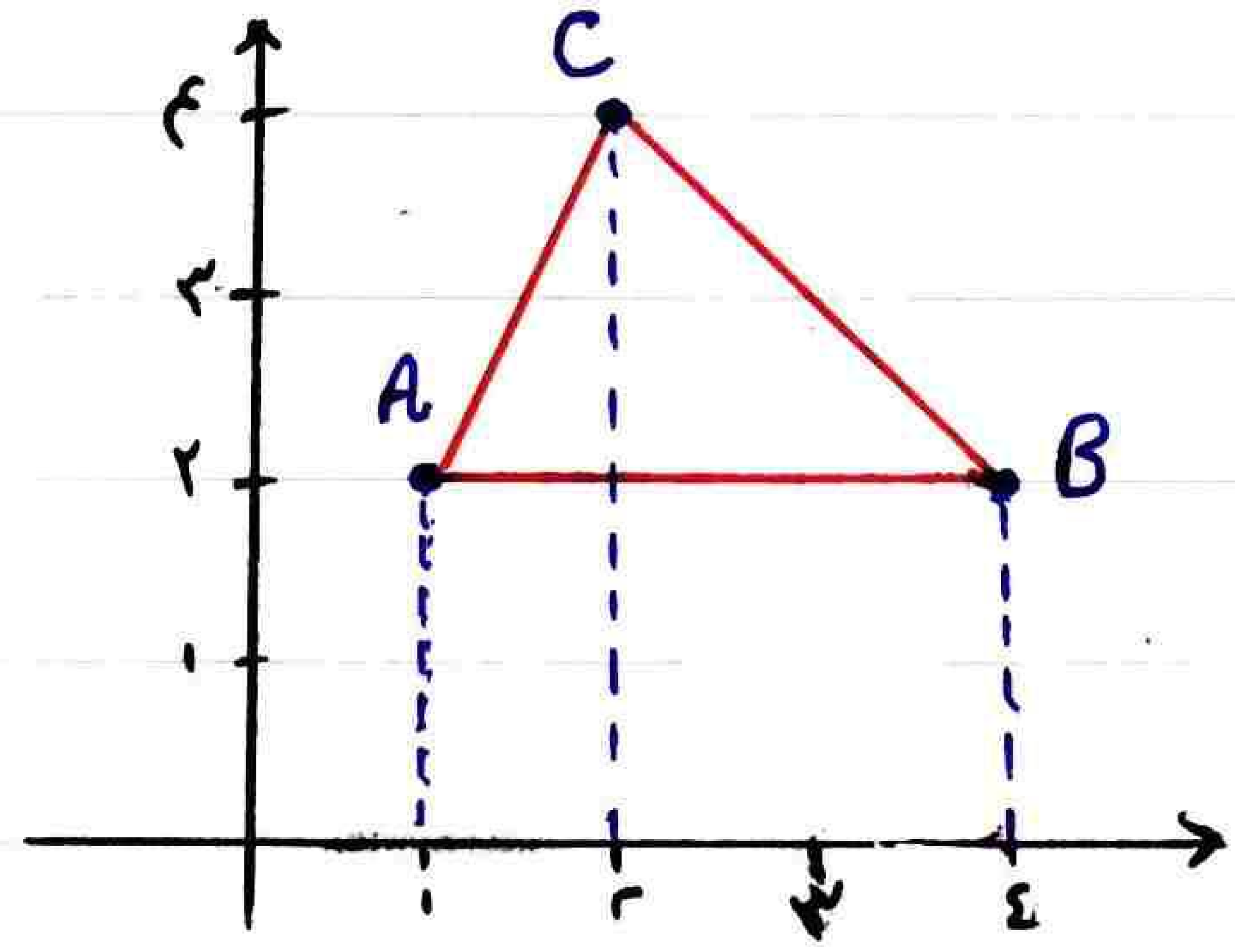
$\Longrightarrow 12x^2-24x+9=0 \Longrightarrow 3(2x-1)(2x-3)=0$

$x = \frac{1}{2}$ غیر قابل قبول

$x = \frac{3}{2} \Longrightarrow B(\frac{3}{2}, 3)$

تمرین: اگر $A(1,2)$ و $B(4,2)$ و $C(2,4)$ سه رأس یک مثلث باشند، مطلوبست

الف) رسم مثلث

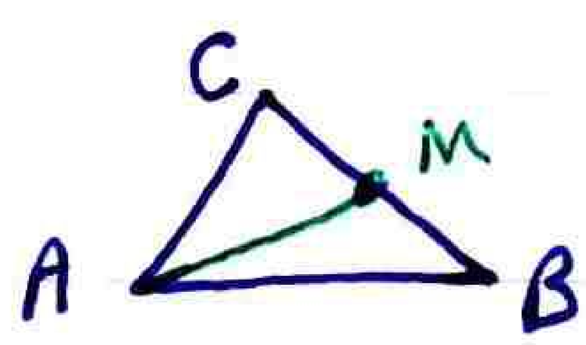


ب) محیط مثلث

$$AB = \sqrt{9+0} = 3$$
$$AC = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\xrightarrow{+} \text{محیط} = 3 + \sqrt{5} + \sqrt{8}$$

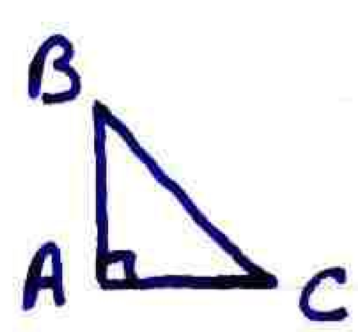
پ) طول میانه‌ی وارد بر ضلع BC



M وسط $BC \Rightarrow M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M(3,3)$

$$AM = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

تمرین: به ازای چه مقدار از x مثلثی با رئوس $A(1,1)$ و $B(x,3)$ و $C(5,1)$ در رأس A قائمه است؟



$AB = \sqrt{(x-1)^2+4}$ و $AC = \sqrt{16+0} = 4$ و $BC = \sqrt{(x-5)^2+4}$

طبق قضیه فیثاغورث داریم: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \cancel{4} + 16 = (x-5)^2 + \cancel{4} \Rightarrow \cancel{x^2} - 2x + 1 + 16 = \cancel{x^2} - 10x + 25$$

$$\Rightarrow 8x = 8 \Rightarrow x = 1$$

نکته (۵) شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی A و B برابر $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ است.

همچنین اگر خطی با محور طولها زاویه‌ی θ بسازد شیب آن $m=\tan\theta$ است.

مثال: به ازای چه مقدار از a خط گذرا از دو نقطه‌ی $P(3, a+2)$ و $Q(2, 1)$ با محور x ها زاویه‌ی 60° می‌سازد؟

$$m=\frac{a+2-1}{3-2}=\tan 60^\circ \Rightarrow \frac{a+1}{1}=\sqrt{3} \Rightarrow a=\sqrt{3}-1$$

نکته (۶) معادله‌ی خطی که با شیب m، از نقطه‌ی (x_0, y_0) می‌گذرد به صورت $y-y_0=m(x-x_0)$ است.

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $A(3, 2)$ و B به طول ۴ واقع بر محور طولها بگذرد.

$$A(3,2)\ ,\ B(4,0) \Rightarrow m=\frac{2-0}{3-4}=-2$$

معادله‌ی خط: $y-0=-2(x-4) \Longrightarrow y=-2x+8$

نکته (۷) اگر معادله‌ی خط به صورت $y=ax+b$ باشد، شیب آن $m=a$ است.

اما در صورتی که معادله‌ی خط $ax+by+c=0$ باشد، شیب آن $m=\frac{-a}{b}$ است.

مثال: شیب هر یک از خطوط زیر را تعیین کنید.

الف) $y=\frac{3x-1}{2} \rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2} \rightarrow m=\frac{3}{2}$

ب) $2x - 5y + 1 = 0 \rightarrow m = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

پ) $2y - 7 = 0 \rightarrow m = 0$ اگر معادله‌ی خط فاقد متغیر x باشد شیب آن صفر است.

ت) $3x + 1 = 0 \rightarrow m =$ تعریف نشده — درصورتی‌که معادله‌ی خط فاقد متغیر y باشد شیب آن تعریف نشده است.

نکته (۸) اگر دو خط باهم موازی باشند، شیب های یکسان دارند.

مثال: به ازای چه مقدار از a، دو خط $ax - 3y + 1 = 0$ و $(a-2)x + y - 5 = 0$ باهم موازی هستند؟

$m_1 = \frac{-a}{-3} = \frac{a}{3}$ ، $m_2 = \frac{-(a-2)}{1} = -a + 2$

$\xrightarrow{m_1 = m_2} \frac{a}{3} = -a + 2 \Rightarrow a = -3a + 6 \Rightarrow 4a = 6 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

نکته (۹) دو خط برهم عمودند هرگاه شیب های آن‌ها معکوس و قرینه‌ی یکدیگر باشند به طور مثال اگر شیب یکی $\frac{2}{3}$ باشد شیب دیگر $-\frac{3}{2}$ باشد به عبارت دیگر حاصلضرب شیب های آن‌ها -1 شود.

مثال: آیا دو خط $2x - 3y + 1 = 0$ و $6x + 4y - 5 = 0$ برهم عمودند؟

$m_1 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ ، $m_2 = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{m_1 \times m_2 = -1}$ برهم عمودند

مثال: معادله‌ی عمود منصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطه‌ی $A(-2,1)$ و $B(3,4)$ را به هم وصل کرده است.

روش اول: می‌گیریم P وسط AB باشد بنابراین:

$$P=\frac{A+B}{2} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{شیب } AB=\frac{4-1}{3-(-2)}=\frac{3}{5} \longrightarrow m_{\text{خط عمود}}=-\frac{5}{3}$$

معادله‌ی خط عمود: $y-\frac{5}{2}=\frac{-5}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y-\frac{5}{2}=\frac{-5}{3}x+\frac{5}{6}$

$$\Rightarrow y=\frac{-5}{3}x+\frac{10}{3}$$

روش دوم: عمود منصف شامل تمام نقاط همچون $P(x,y)$ است که فاصله‌ی آن‌ها از دو سر پاره‌خط یعنی A و B به یک اندازه باشد یعنی:

$$PA=PB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

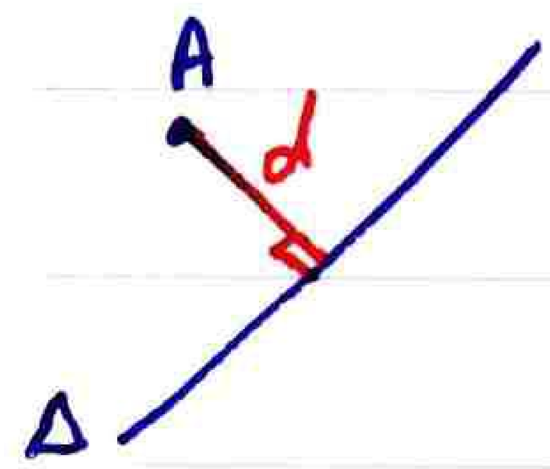
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}-2y+1=\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-8y+16$$

$$\Rightarrow 10x+6y-20=0 \xrightarrow{\div 2} 5x+3y-10=0$$

تمرین: نشان دهید نقطه‌ی $P(-12,11)$ روی عمود منصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $A(0,-3)$ و $B(6,15)$ است.

باید نشان داد $PA=PB$ است:

$$\left.\begin{array}{l} PA=\sqrt{144+196}=\sqrt{340} \\ PB=\sqrt{324+16}=\sqrt{340} \end{array}\right\} \longrightarrow PA=PB$$



نکته (۱۰) فاصله‌ی یک نقطه از یک خط:

خط Δ به معادله‌ی $ax+by+c=0$ و نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ مفروض است. کوتاهترین فاصله‌ی A از خط Δ، طول عمودی است که از A بر خط وارد می‌آید که مقدار آن طبق دستور زیر محاسبه می‌شود:

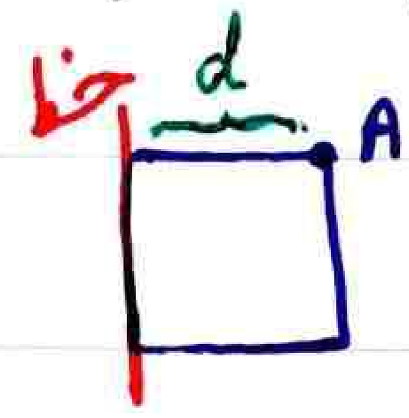
$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-2,4)$ از خط $y=\frac{4}{3}x+4$ را به دست آورید.

$$\xrightarrow{\times 3} 3y=4x+12 \Rightarrow 4x-3y+12=0$$

$$d=\frac{|4(-2)-3(4)+12|}{\sqrt{16+9}}=\frac{8}{5}$$

مثال: اگر نقطه‌ی $A(2,3)$ رأس یک مربع و معادله‌ی یک ضلع مربع $3x-4y-9=0$ باشد، مساحت مربع را به دست آورید.



$$d=\frac{|6-12-9|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3 \longrightarrow \text{مساحت}=3^2=9$$

تمرین: فاصلهٔ نقطهٔ $A(1,-4)$ از خط $8x+6y=k$ برابر 4 است. مقدار k را بدست آورید.

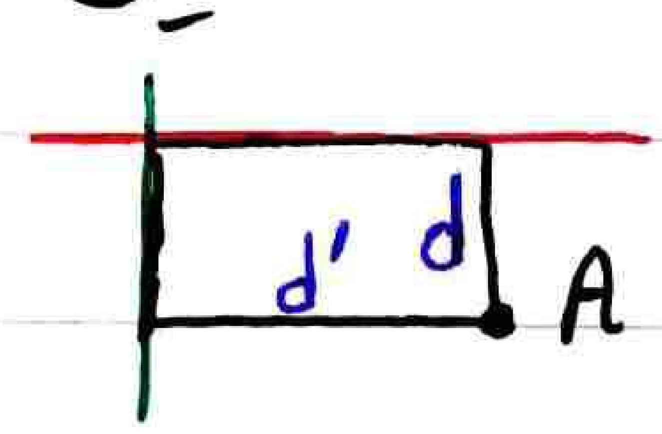
معادلهٔ خط: $8x+6y-k=0$

$$d=\frac{|8-24-k|}{\sqrt{64+36}}=4 \Rightarrow \frac{|-16-k|}{10}=4 \Rightarrow |-16-k|=40$$

$$-16-k=40 \Rightarrow k=-56$$

$$-16-k=-40 \Rightarrow k=24$$

تمرین: دو خط $3x+2y=1$ و $2x-3y=2$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطهٔ $A(2,5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟



$$d=\frac{|6+10-1|}{\sqrt{9+4}}=\frac{15}{\sqrt{13}}$$

$$d'=\frac{|4-15-2|}{\sqrt{4+9}}=\frac{13}{\sqrt{13}}$$

مساحت مستطیل $= d\times d'=\frac{15}{\sqrt{13}}\times\frac{13}{\sqrt{13}}=15$

تمرین: خط $4x+3y-5=0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(-1,2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

$$d=\frac{|-4+6-5|}{\sqrt{16+9}}=\frac{3}{5}$$

تمرین: ثابت کنید فاصله‌ی دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.

نقطه‌ی دلخواه (x_0, y_0) را روی خط $ax+by+c'=0$ در نظر می‌گیریم.

بنابراین:

$$ax_0+by_0+c'=0 \longrightarrow ax_0+by_0=-c' \quad ①$$

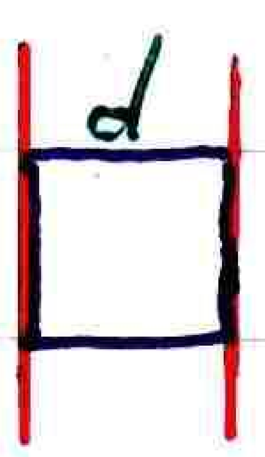
حال طبق فرمول نکته‌ی (۱۰) فاصله‌ی (x_0, y_0) را از خط $ax+by+c=0$ بدست می‌آوریم:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\xrightarrow{①} d=\frac{|-c'+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تمرین: اگر دو خط موازی $2x+y-1=0$ و $6x+3y+1=0$ معادله‌های دو ضلع یک مربع باشند، مساحت مربع را حساب کنید.

ابتدا معادله‌ی اول را در ۳ ضرب کرده، تا ضرایب x و y در دو معادله یکسان شوند سپس با استفاده از فرمول تمرین قبل طول ضلع مربع را بدست می‌آوریم:



$$6x+3y-3=0 \quad , \quad 6x+3y+1=0$$

$$d=\frac{|-3-1|}{\sqrt{36+9}}=\frac{4}{\sqrt{45}} \longrightarrow \text{مساحت}=\left(\frac{4}{\sqrt{45}}\right)^2=\frac{16}{45}$$

تمرین: مثلث ABC به رأس های $A(-1,7)$ و $B(-6,2)$ و $C(3,3)$ را در نظر بگیرید.

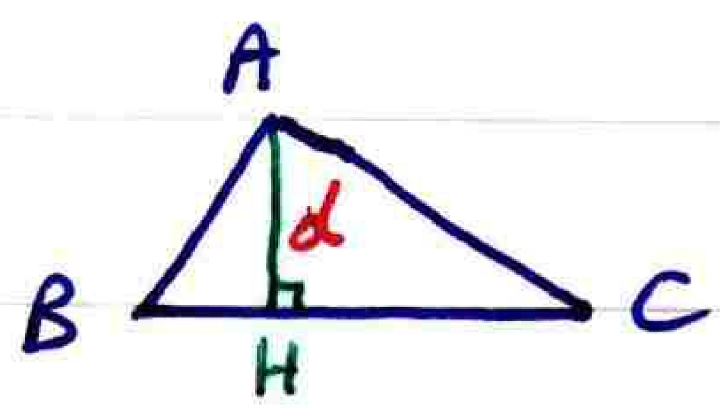
الف) معادله عمود منصف ضلع BC را بنویسید.

هر نقطه روی عمود منصف مانند $P(x,y)$ از دو نقطه B و C به یک فاصله است بنابراین:

$$PB=PC \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{x^2}+12x+36+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-6y+9$$

$$\Rightarrow 18x+2y+22=0 \xrightarrow{\div 2} \boxed{9x+y+11=0}$$



ب) طول ارتفاع AH چقدر است؟

طول ارتفاع AH همان فاصله A از خط BC است.

لذا ابتدا معادله ضلع BC را می نویسیم:

$$m_{BC}=\frac{3-2}{3+6}=\frac{1}{9}$$

$$y-3=\frac{1}{9}(x-3) \Rightarrow x-9y+24=0 \quad \text{و} \quad A(-1,7)$$

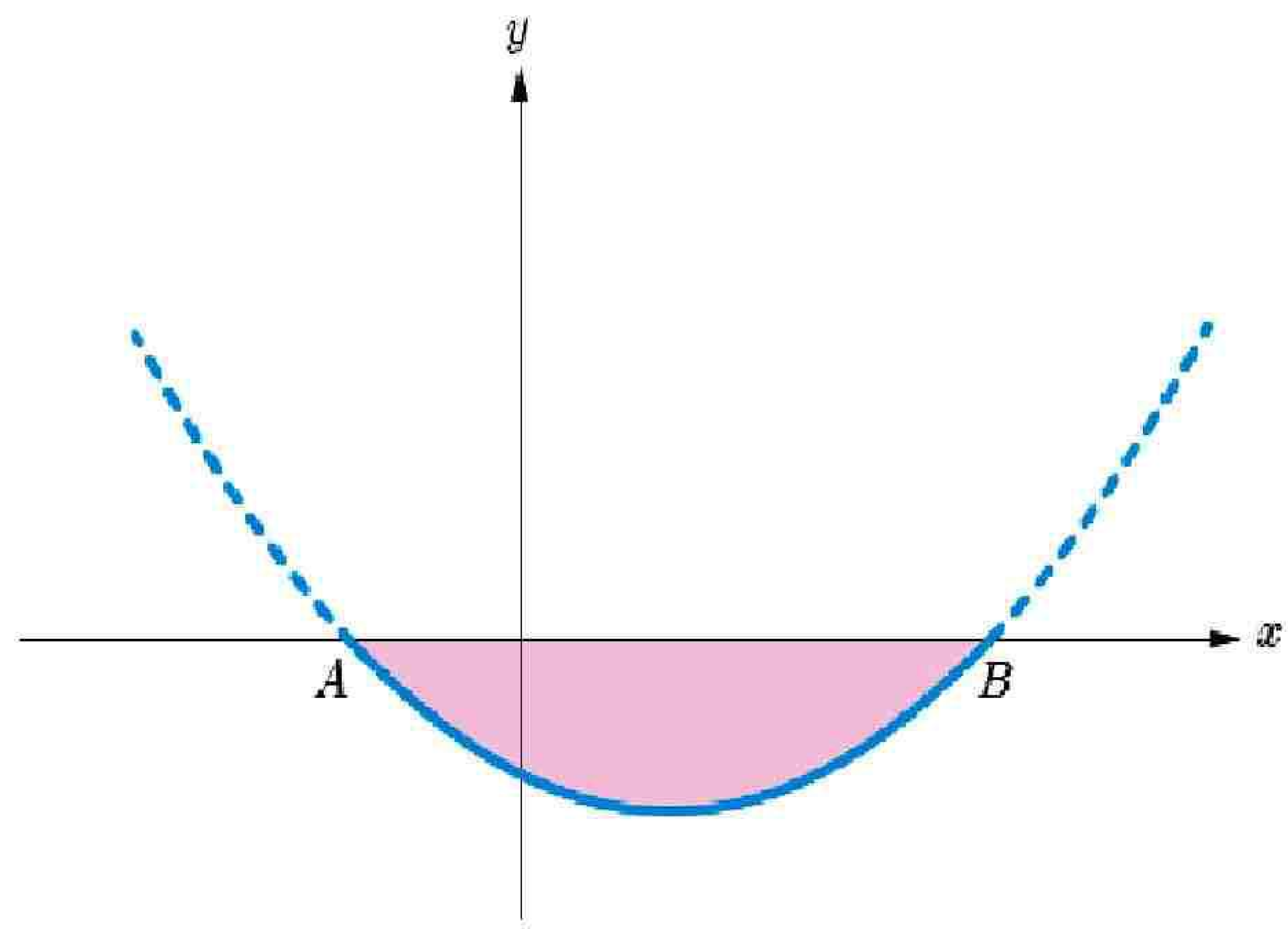
$$d=\frac{|-1-63+24|}{\sqrt{1+81}}=\frac{40}{\sqrt{82}}$$

تمرین : شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۸x-۲۰$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به‌دست آورید.

ب) اگر x برحسب سانتی‌متر باشد طول AB را به‌دست آورید.

پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y برحسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟



الف) واضح است که عرض این نقاط صفر است، بنابراین:

$x^۲-۸x-۲۰=۰ \longrightarrow (x-۱۰)(x+۲)=۰$

$x=۱۰ \Rightarrow B(۱۰,۰)$

$x=-۲ \Rightarrow A(-۲,۰)$

ب) $AB=\sqrt{۱۴۴+۰}=۱۲$

پ) بیشترین ضخامت عدسی، فاصله‌ی رأس سهمی از محور x هاست.
یعنی اندازه‌ی عرض رأس سهمی:

$y=x^۲-۸x-۲۰ \longrightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۸}{۲}=۴$

معادله سهمی $\xrightarrow{x=۴} y=۱۶-۳۲-۲۰=-۳۶ \longrightarrow$ بیشترین ضخامت $=۳۶$