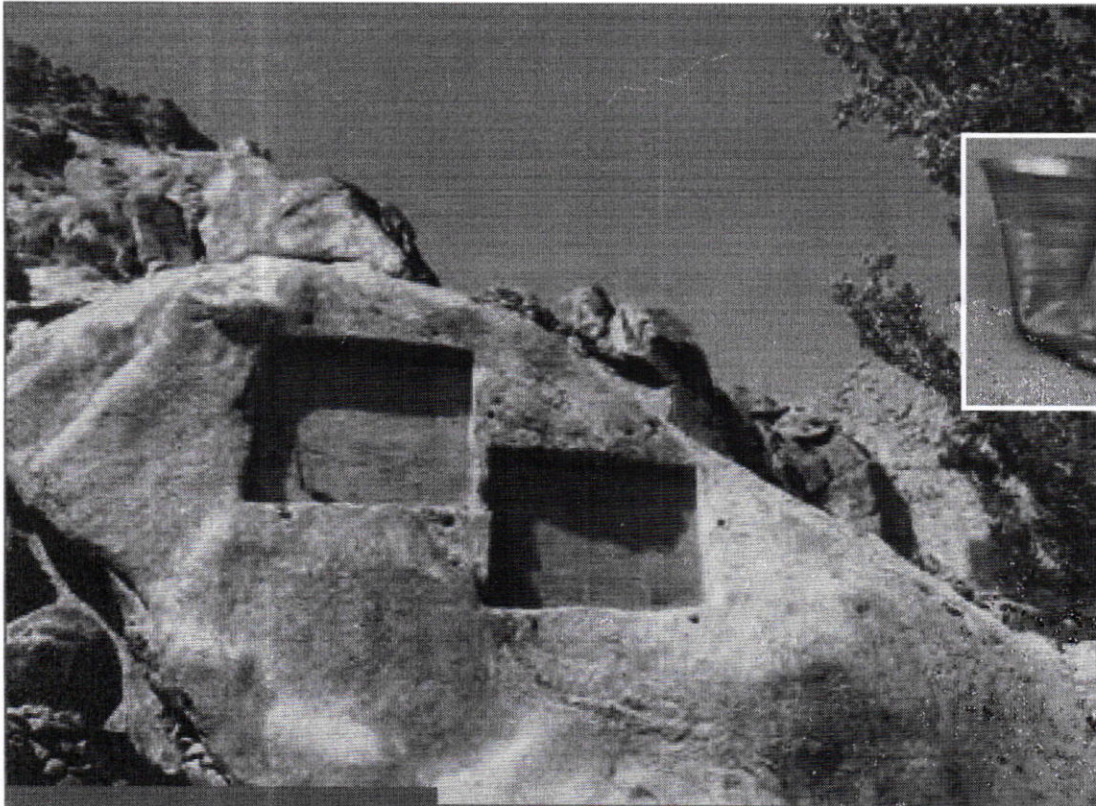


توابع نمایی و لگاریتمی



سنگ نوشته‌های گنج‌نامه (همدان) نوشتارهایی از دوران هخامنشی بر دل صخره‌های الوند (قدمت حدوداً ۲۵۰۰ سال)

ریتون طلایی هگمتانه (کشف شده در همدان) شاهکار هنر فلزکاری عصر هخامنشیان (قدمت بیش از ۲۵۰۰ سال)

آیا تا به حال اندیشیده‌اید که باستان‌شناسان چگونه طول عمر یک اثر باستانی را تخمین می‌زنند؟ با استفاده از روش سال‌بایی کربن ۱۴، می‌توان عمر یک اثر باستانی را محاسبه کرد. در این روش، تعیین قدمت اثر، با یک تابع لگاریتمی مدل‌سازی می‌شود.

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول

درس دوم

درس سوم

نویسنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

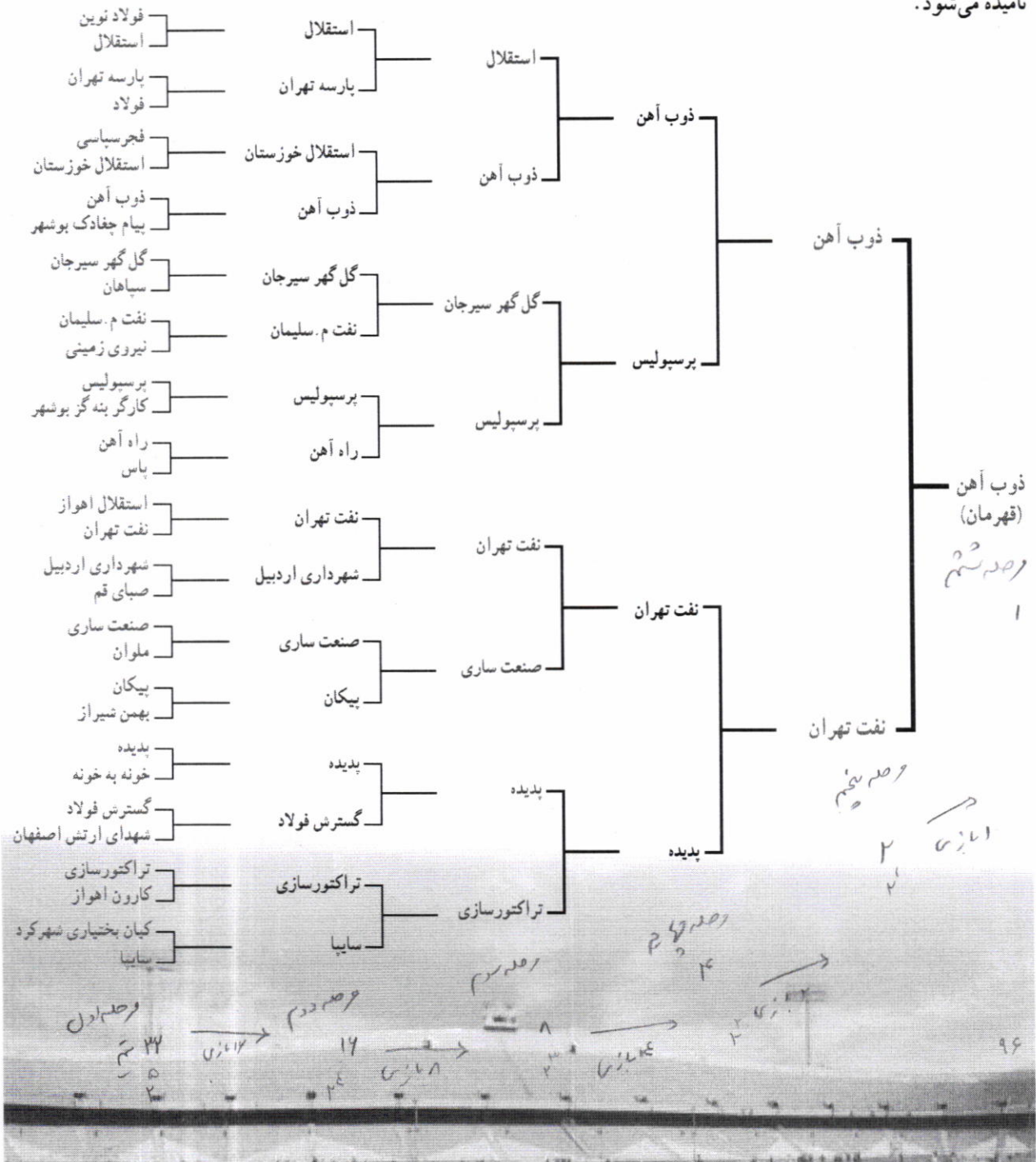
khuzmath1394@chmail.ir

درس اول

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

فعالیت

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۳-۹۴ با شرکت ۳۲ تیم و در پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می‌بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحله بعدی می‌رود و تیم بازنده حذف می‌شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.

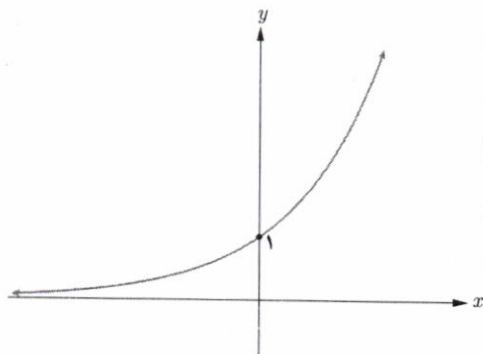
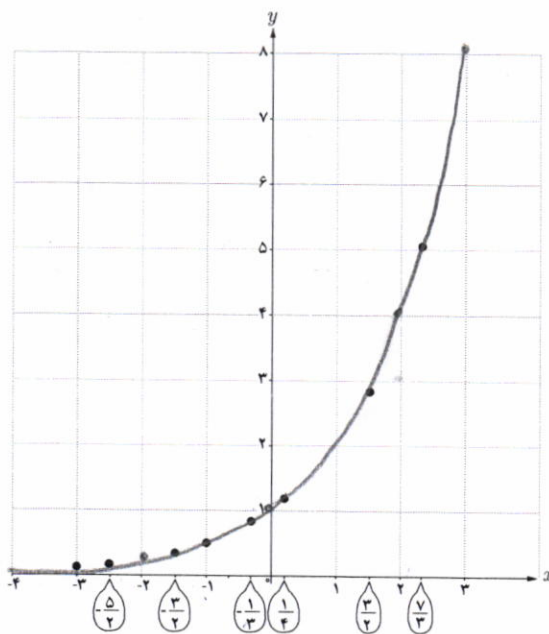


- ۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۲^۶
- ۲ در مرحله قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۲^۴
- ۳ تعداد تیم‌ها در هر مرحله با تعداد تیم‌ها در مرحله قبل از آن چه ارتباطی دارد؟ اضف تیم قبلی است
- ۴ چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟ ۲ⁿ
- ۵ با توجه به الگوی ارائه شده در شکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند تاست؟ ۲^۶
- ۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ y = 2^x

فعالیت

جدول زیر را کامل و نقاط به دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|------|------|----------------|------|----------------|-----|----------------|---|---------------|---|---------------|---|---------------|---|
| x | -4 | -3 | $-\frac{5}{2}$ | -2 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{7}{4}$ | 3 |
| 2^x | 0.04 | 0.12 | 0.18 | 0.25 | 0.35 | 0.5 | 0.79 | 1 | 1.19 | 2 | 2.83 | 4 | 5.04 | 8 |



دیدیم که برای هر عدد گویای a ، مقداری برای 2^a به دست می‌آید و نقطه $(a, 2^a)$ را می‌توان در دستگاه مختصات نشان داد. این موضوع برای اعداد گنگ نیز برقرار است، یعنی برای هر عدد گنگ مانند b نیز مقداری برای 2^b خواهیم داشت و مختصات $(b, 2^b)$ نیز نقطه‌ای را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهد. اگر برای تمام اعداد حقیقی r ، مقادیر 2^r را به دست آوریم و نقاط $(r, 2^r)$ را در دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار مقابل به دست خواهد آمد.

توان‌های حقیقی

در کتاب سال دهم، به ازای هر عدد حقیقی مثبت $a (a \neq 1)$ و عدد گویای $\frac{m}{n}$ ، مقدار $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف کردیم و ویژگی‌های مقدماتی آن را به دست آوردیم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است؛ یعنی اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم:

الف) $a^1 = a$ ب) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ پ) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ت) $(a^x)^y = a^{xy}$
 ث) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ ج) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ ح) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

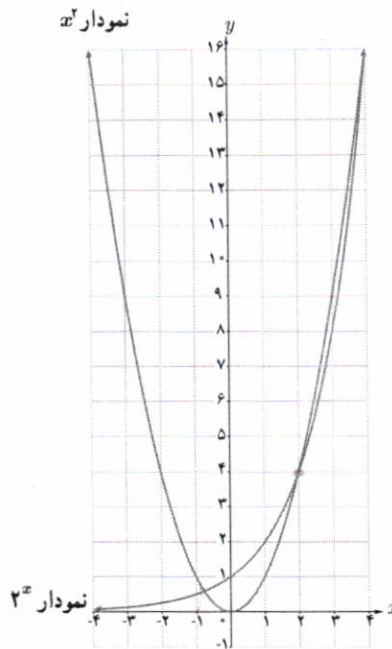
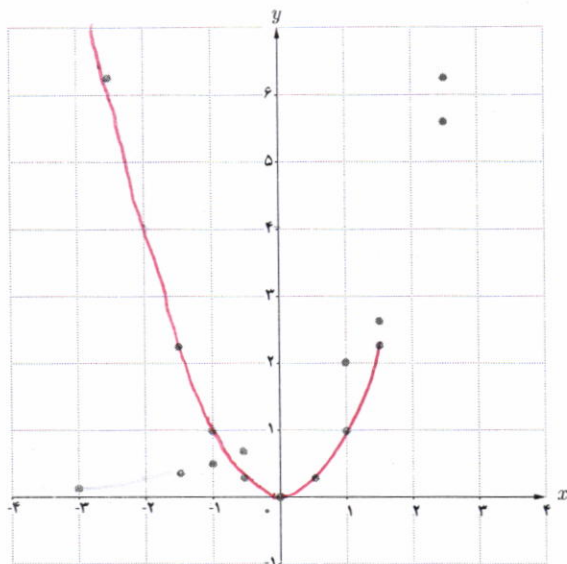
کار در کلاس

۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y=x^2$ و $y=2^x$ را با تکمیل جدول‌های زیر رسم کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

| | | | | | | | | | | |
|---------|---------------|---------------|------|----------------|------|---------------|------|---------------|------|---------------|
| x | $\frac{5}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ |
| $y=x^2$ | ۶/۲۵ | ۴ | ۲/۲۵ | ۱ | ۰/۲۵ | ۰ | ۰/۲۵ | ۱ | ۲/۲۵ | ۶/۲۵ |

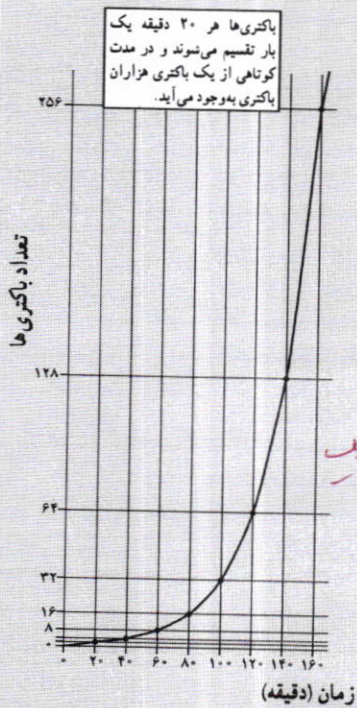
| | | | | | | | | | | | |
|---------|------|------|----------------|------|----------------|-----|---------------|-----|---------------|-----|---------------|
| x | -3 | -2 | $-\frac{3}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ |
| $y=2^x$ | ۰/۱۲ | ۰/۲۵ | ۰/۳۵ | ۰/۵ | ۰/۷۱ | ۱ | ۱/۴ | ۲ | ۲/۸۳ | ۴ | ۵/۶۶ |

- ۲ حال این دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^2 با هم مساوی‌اند؟
 ۳ در 2^x ، متغیر در x^2 و عدد ثابت در 2^x است؛ ولی در 2^x ، متغیر در x^2 و عدد ثابت در 2^x است.



خواندنی

بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و قادر به تولیدمثل می‌شوند. در شرایط محیطی مساعد، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود. ۲۰ دقیقه بعد، از آن دو باکتری، چهار باکتری به وجود می‌آید و به همین ترتیب تعداد باکتری‌ها به ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ و ... می‌رسد. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها تا ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد! باکتری‌ها از طریق تولید سم یا تخریب سلول‌های بدن، باعث بیماری می‌شوند و به بدن آسیب می‌رسانند.

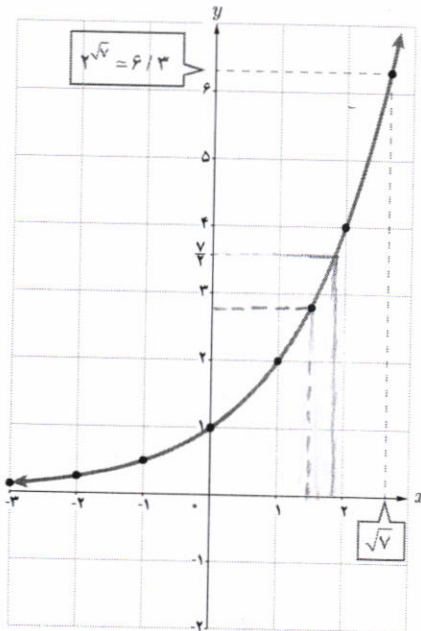


هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن $a \in \mathbb{R}$ و $a > 0$, $a \neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال: توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.

فعالیت

در شکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطه $y = 2^x$ رسم شده است.



۱. محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟
۲. دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.
۳. آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟
۴. عدد $\sqrt{2}$ را روی محور x ‌ها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $2^{\sqrt{2}}$ را به صورت تقریبی به دست آورید.
۵. عدد $\frac{7}{4}$ روی محور y ‌ها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به دست آورید؛ به طوری که $\frac{7}{4} = 2^a$.
۶. اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
۷. در حالت کلی اگر $x < y$ ، چه رابطه‌ای بین 2^y و 2^x برقرار است؟

$D = (-\infty, +\infty)$ $R_f = (0, +\infty)$

نقطه تقاطع می‌تند

برای این تابع یک به یک است؟ چرا؟ زیرا هر خط موازی محور x ‌ها را حداکثر یک بار قطع می‌کند.

عدد $\sqrt{2}$ را روی محور x ‌ها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $2^{\sqrt{2}}$ را به صورت تقریبی به دست آورید.

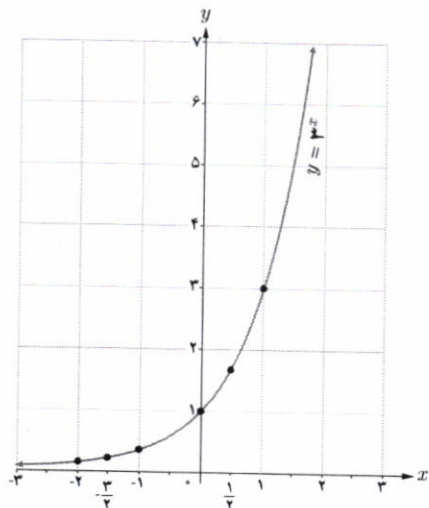
عدد $\frac{7}{4}$ روی محور y ‌ها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به دست آورید؛ به طوری که $\frac{7}{4} = 2^a$.

اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

در حالت کلی اگر $x < y$ ، چه رابطه‌ای بین 2^y و 2^x برقرار است؟

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.



| x | $y = 3^x$ |
|-----|-----------|
| -۲ | ۰/۱۱ |
| -۱ | ۰/۳۳ |
| ۰ | ۱ |
| ۱ | ۳ |
| ۲ | ۹ |

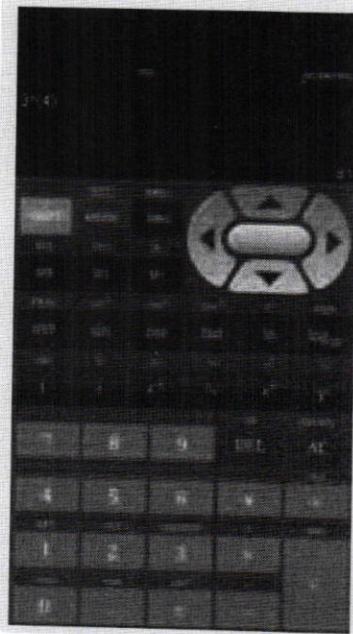
خواندنی

در اغلب ماشین حسابها دکمه x^y (با y^x) وجود دارد که با استفاده از آن می‌توانید مقادیر اعداد توان‌دار را به دست آورید. برای مثال جهت محاسبه 2^5 ابتدا عدد ۲ را وارد می‌کنید؛ سپس دکمه x^y و بعد عدد ۵ و سپس دکمه تساوی را فشار می‌دهید که عدد ۳۲ ظاهر می‌شود. اگر عدد توان، طبیعی نبود، آن را داخل پرانتز قرار می‌دهیم. تذکر: در برخی از ماشین حسابها به جای دکمه x^y نمادی به صورت \square وجود دارد که همان کار را انجام می‌دهد.

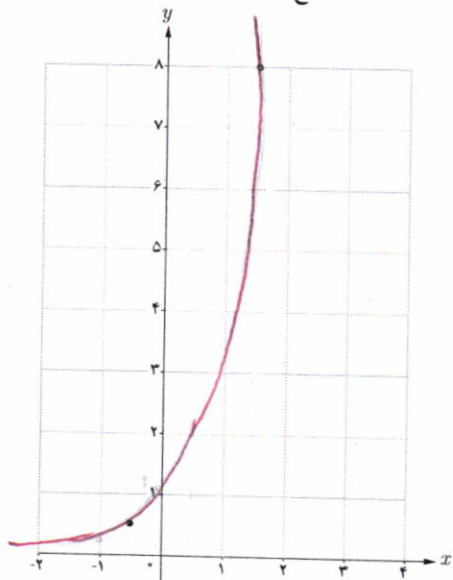
برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید. (تا یک رقم اعشار)

$2 \rightarrow x^y \rightarrow (\rightarrow 2 \rightarrow \sqrt{\ } \rightarrow) \rightarrow = \rightarrow 2/6$

- ۱) $2^{\sqrt{2}}$
- ۲) $2^{\sqrt{8}}$
- ۳) $2^{0.1}$
- ۴) $2^{-0.5}$
- ۵) $2^{(1+\sqrt{3})}$



۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x$ را رسم کنید.



| x | $y = 4^x$ |
|-----|-----------|
| -۱ | ۱/۴ |
| ۰ | ۱ |
| ۱ | ۴ |
| ۲ | ۱۶ |

۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید. دامنه این توابع \mathbb{R} و بردشان $(0, +\infty)$ است.

۳ با استفاده از نمودار، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{2/5} > 3^{3/5}$

ب) $4^{\sqrt{7}} > 4^{\sqrt{5}}$

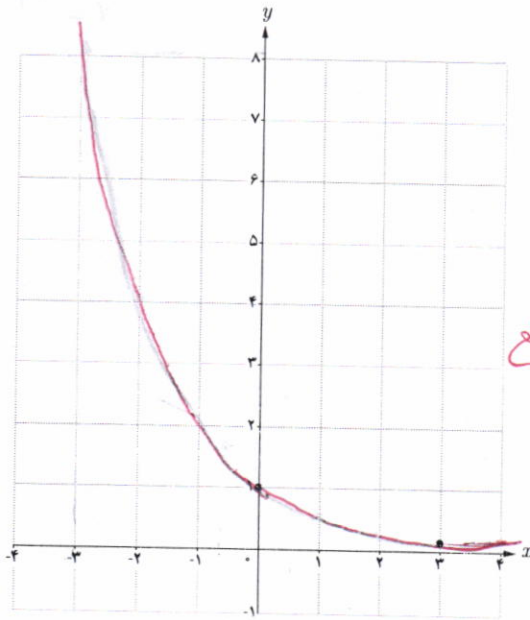
۴ اگر $x < y$ ، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^x < 3^y$

ب) $4^x < 4^y$

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

| | | | | | | | |
|-----------------------|----|----|----------------|---|---------------|---------------|---------------|
| x | -3 | -2 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 3 |
| $y = (\frac{1}{2})^x$ | 8 | 4 | $\sqrt{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |



۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه‌ای است؟

$A (0, 1)$

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$D = (0, \infty)$ برد $R = IR$

۴ آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟

بله، زیرا هر خط موازی محور OX را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۵ با استفاده از نمودار فوق، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

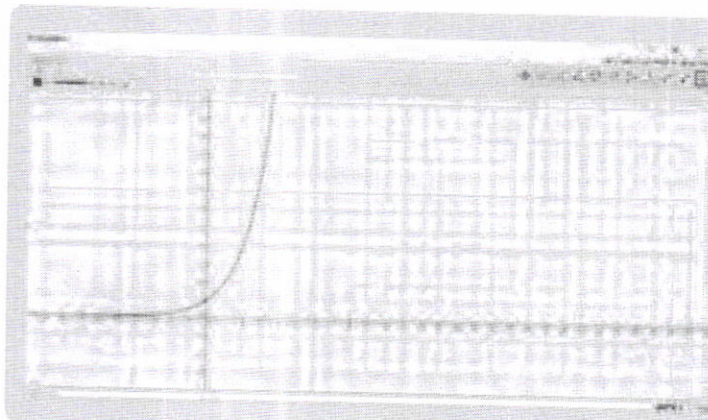
الف $(\frac{1}{2})^{1/5} > (\frac{1}{2})^{1/5}$

ب $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} > (\frac{1}{2})^4$

پ $(\frac{1}{2})^4 > (\frac{1}{2})^3$

$(\frac{1}{2})^m > (\frac{1}{2})^n$

۶ با استفاده از نمودار، اگر $x < y$ ، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{2})^x$ و $(\frac{1}{2})^y$ وجود دارد؟



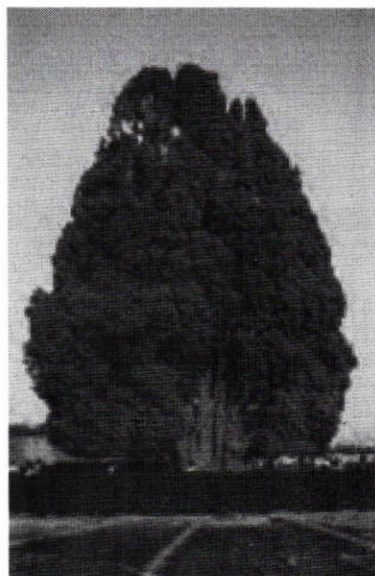
خواندنی

با استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا (GeoGebra) می‌توانید نمودارهای توابع نمایی را به راحتی رسم کنید. برای این کار در نوار دستور، ضابطه تابع را حروف جینی کرده و کلید Enter را بزنید. در پنجره گرافیکی، نمودار مطلوب نمایش داده می‌شود. در تصویر مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = 2^x$ در محیط این نرم‌افزار نمایش داده شده است.

خواندنی

یک داروی بیماری آسم که به صورت قرص ۱۰۰ میلی گرمی موجود است، برای یک بیمار تجویز شده است. اگر او این قرص را مصرف کند و بدانش در زمان مصرف دارو هیچ میزانی از آن در بدن وی موجود نیست، در این صورت می توان پیش بینی کرد که بعد از گذشت t دقیقه، در مجموع از این دارو به میزان A میلی گرم، در جریان خون او وجود خواهد داشت که از رابطه زیر به دست می آید:

$$A = 100 [1 - (0.9)^t]$$

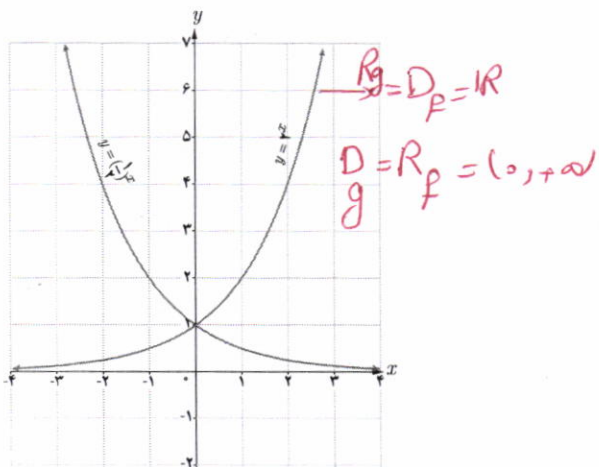


سرو کهن ابرکوه (یزد) با عمر تقریبی ۴۰۰ سال

کار در کلاس

نمودار توابع باضابطه های $y = 2^x$ و $y = (\frac{1}{2})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه اند؟ **محور y ها**



۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع باضابطه $y = 2^x$ به تابع باضابطه $y = (\frac{1}{2})^{-x}$ یا همان $y = 2^x$ می یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه ای با هم دارند؟ **دامنه ۲ همان برد ۲ و برد ۲ همان دامنه ۲**

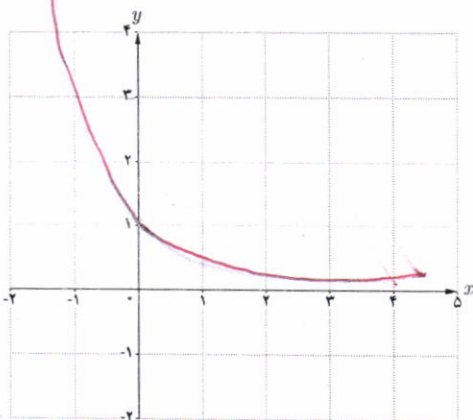
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور y قرینه اند، مثال بزنید.

$y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{3})^x$

نمودار توابع باضابطه های $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ ($a > 0$ و $a \neq 1$) نسبت به محور y قرینه اند.

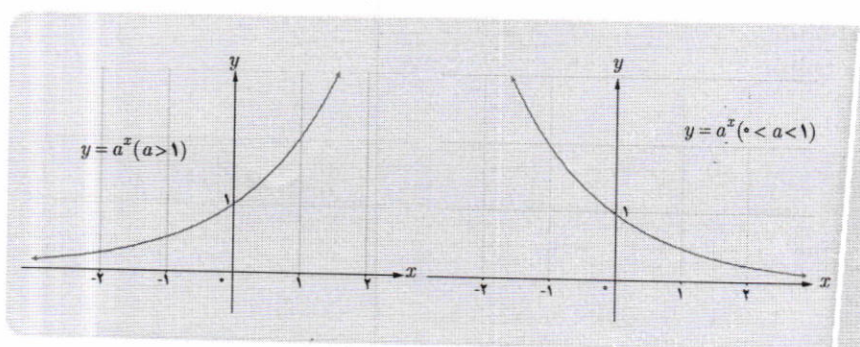
کار در کلاس

نمودار تابع باضابطه $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید.



| | | | | | |
|-------------------|----|----|---|-----|-----|
| $(\frac{1}{3})^x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| | 9 | 3 | 1 | 1/3 | 1/9 |

- با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.
- ۱ دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($a > 1$) مجموعه اعداد حقیقی و برد آن $(0, +\infty)$ است.
 - ۲ دامنه تابع با ضابطه $y = a^x$ ($0 < a < 1$) \mathbb{R} و برد آن بازه $(0, +\infty)$ است.
 - ۳ نمودار توابع فوق محور y ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کند و محور x ها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.
 - ۴ این دو تابع، یک به یک **رسمند** زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در **یک** نقطه قطع می‌کند. نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادله نمایی می‌نامند. برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم. اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x = a^y$ آنگاه $x = y$ و برعکس.

الف) $3^{2x-3} = 81 \rightarrow 3^{2x-3} = 3^4 \rightarrow 2x-3=4 \rightarrow x = \frac{7}{2}$

مثال: معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

ب) $4^{2x-1} = 8^{x+1} \rightarrow (2^2)^{2x-1} = (2^3)^{x+1} \rightarrow 4x-2=3x+3 \rightarrow x=5$

پ) $5^{2n-1} = 125^{2n+1} \rightarrow 5^{2n-1} = 5^{6n+3} \rightarrow 2n-1=6n+3 \rightarrow n = -\frac{4}{3}$

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = 2x^2 - 3x + 1$ ✗

ب) $y = x^2$ ✗

پ) $y = (0/1)^x$ ✓

ت) $y = (\frac{3}{7})^x$ ✓

ث) $y - 3x = 2$ ✗

ج) $y = \sqrt{x-1}$ ✗

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1, 0)$ ✗

ب) $(3, 1)$ ✗

پ) $(0, 1)$ ✓

ث) $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$ ✗

ج) $(1, 3)$ ✓

د) $(-1, \frac{1}{3})$ ✓

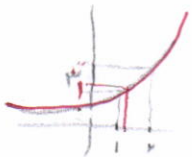
۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه $(\frac{1}{5}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد. ✓

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 10^x$ با محور y ها، نقطه $(0, 10)$ است. ✗

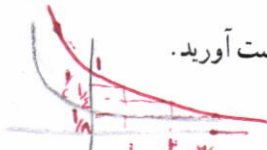
پ) دامنه توابع با ضابطه‌های $y = x^2$ و $y = 2^x$ مساوی اند. ✓

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه $y = 6^x$ با محور x ها، نقطه $(6, 0)$ است. ✗



$1.771 \approx \log_3 6$

۴ الف) نمودار تابع با ضابطه $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.



ب) نمودار تابع با ضابطه $y = (\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{1}{3})^{\sqrt{5}}$ را با توجه به نمودار به دست آورید.

$0.212 \approx \log_{1/3} \sqrt{5}$

۵ فرض کنیم $f(x) = 3^x$ ، $g(x) = (\frac{1}{16})^x$ و $h(x) = 10^x$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(3) = 27$

ب) $g(-1) = (\frac{1}{16})^{-1} = 16$

پ) $h(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

الف) $2^{3n-2} = \frac{1}{32}$ $\rightarrow 3n-2 = -5 \rightarrow n = -1$

ب) $9^{3y-2} = 27^{y+1}$ $\rightarrow 3^{2(3y-2)} = 3^{3(y+1)}$ $\rightarrow 6y-4 = 3y+3 \rightarrow 3y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{3}$

ت) $9^x = 3^{x^2-2x}$ $\rightarrow 3^{2x} = 3^{x^2-2x}$ $\rightarrow 2x = x^2-2x \rightarrow x^2-4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0$ و $x = 4$

ث) $(\frac{3}{5})^{x+1} = \frac{25}{9}$ $\rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1} = (\frac{5}{3})^2 \rightarrow x+1 = -2 \rightarrow x = -3$



خواندنی

جمعیت جهان در طول قرن گذشته به سرعت رشد کرده است. در نتیجه تقاضای افزایش یافته‌ای برای منابع جهان ایجاد شده است. در بیشتر مواقع، از توابع و معادلات نمایی برای مدل‌سازی رشد‌های سریع استفاده می‌شود. جمعیت جهان که با P نشان داده می‌شود، در سال ۱۹۶۰ برابر با ۳ میلیارد نفر و در سال ۲۰۰۸ برابر با ۶/۷ میلیارد نفر بوده است. این رشد جمعیت را می‌توان با رابطه $P(x) = 3(1/0.17)^{x-1960}$ که در آن x نشان‌دهنده سال است، نمایش داد. به کمک این رابطه می‌توان سالی را که در آن جمعیت جهان برابر ۸ میلیارد نفر خواهد شد، تخمین زد.

تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

خواندنی

روش لگاریتم گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان نپر (۱۶۱۷-۱۵۵۰)، ریاضی دان اسکاتلندی در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت انگیز لگاریتم» ارائه شد.

در فیزیک مفهومی به نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایه ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مبنا. تراز شدت صوت را با β نشان می دهند و یکای آن را به افتخار بل فیزیکدان امریکایی مخترع تلفن، بل (B) و دسی بل (dB) نام گذاری کرده اند. هر بل برابر ده دسی بل است. I شدت صوت میناست که برابر آستانه شنوایی گوش سالم است.

$$\beta = \log_{10} I$$

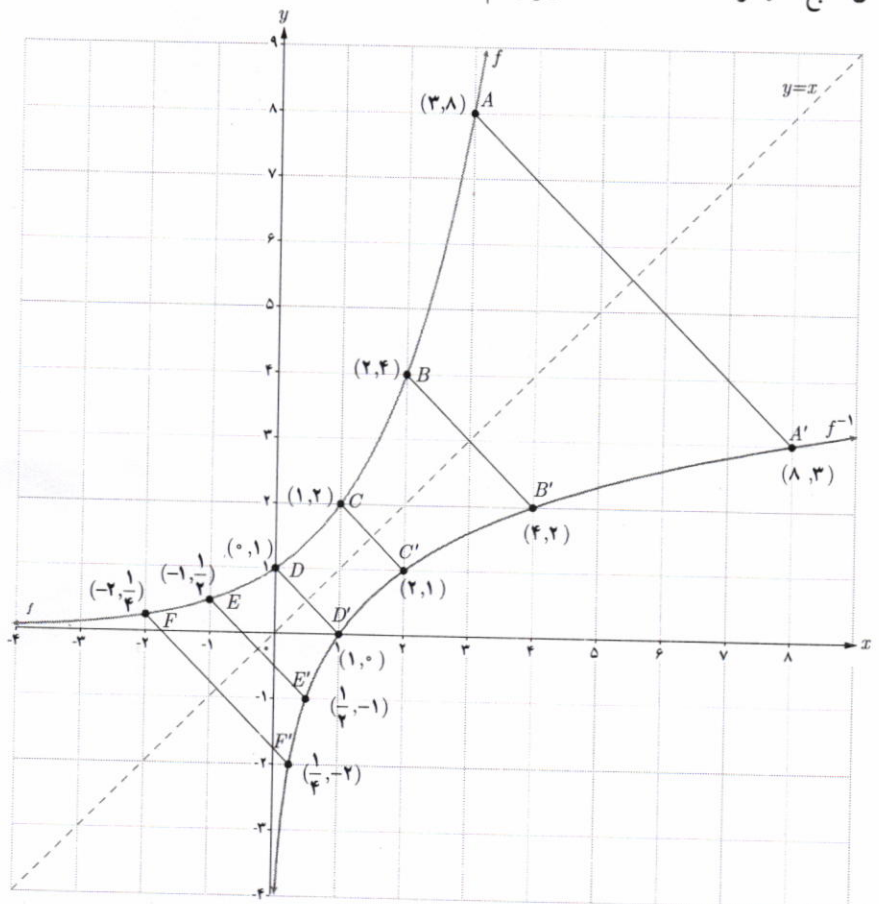
| تراز شدن صوت dB | صدا |
|-----------------|-------------------------------------|
| ۰ | شدت صوت مبنا |
| ۱۰ | نفس کشیدن |
| ۲۰ | برگ درختان در نسیم |
| ۴۰ | صحبت کردن از فاصله یک متری |
| ۶۰ | همهمه در فروشگاه |
| ۷۰ | سروصدای خودروها در خیابان شلوغ |
| ۱۲۰ | آستانه دردناکی (برای بسامد ۱۰۰۰ Hz) |
| ۱۳۰ | مسلسل |
| ۱۴۰ | غرش هواپیمای جت در حین بلند شدن |
| ۱۷۰ | راکت فضایی، در موقع بلند شدن |

بسیاری از اندازه گیری ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی گیرد که برای سادگی محاسبات، می توان آنها را توان هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک تری نشان داد یا اندازه های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست شناسی، زمین شناسی، جمعیت شناسی، مهندسی و... مشهود است.

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطه $f(x) = 2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y = x$ قرینه اند.



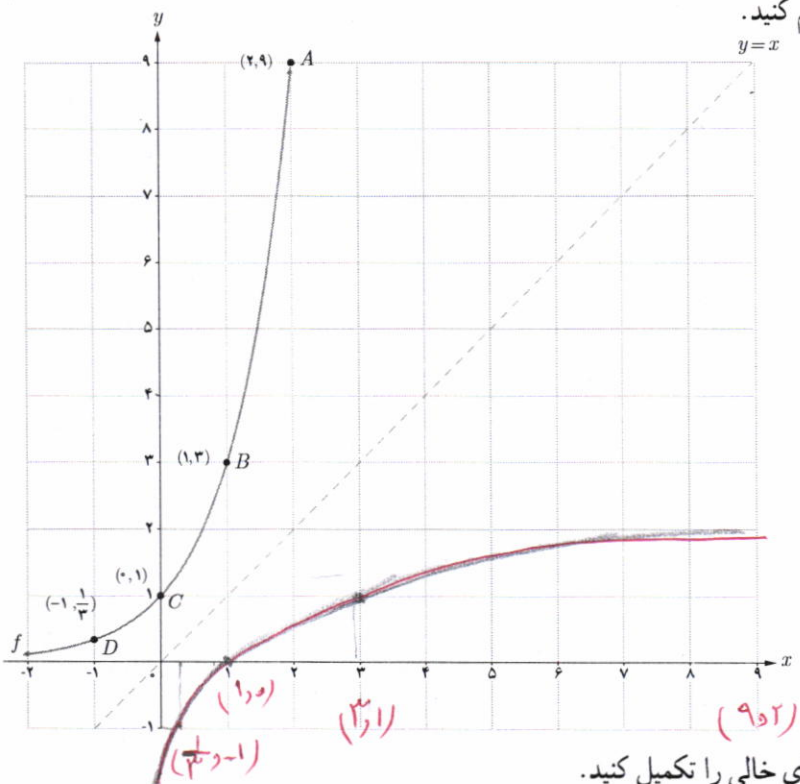
- ۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به دست آورید.
 $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = (-\infty, +\infty)$
 $D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$ و $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
- ۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

| | | | |
|----------------------------|----------------------------|-----------------|-----------------|
| $f(-2) = \frac{1}{4}$ | $f(-1) = \frac{1}{2}$ | $f(0) = 1$ | $f(2) = 4$ |
| $f^{-1}(\frac{1}{4}) = -2$ | $f^{-1}(\frac{1}{2}) = -1$ | $f^{-1}(1) = 0$ | $f^{-1}(4) = 2$ |

فعالیت

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 3^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

- ۱ با توجه به نقاط نمودار f ، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



- ۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

| | | | |
|----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $f(-2) = \frac{1}{9}$ | $f(0) = 1$ | $f(1) = 3$ | $f(2) = 9$ |
| $f^{-1}(\frac{1}{9}) = -2$ | $f^{-1}(1) = 0$ | $f^{-1}(3) = 1$ | $f^{-1}(9) = 2$ |

- ۳ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به دست آورید.
 $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = (-\infty, +\infty)$
 $D_{f^{-1}} = (0, +\infty)$ و $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$
- با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطه $f(x) = 3^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_3 x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای ۳ می‌نامیم.
 به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

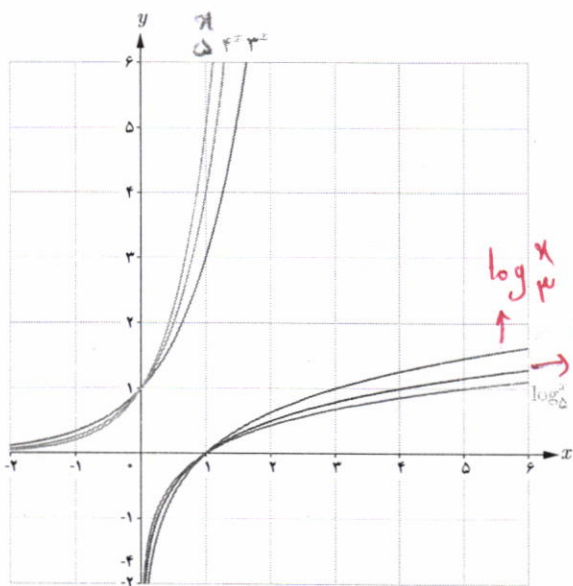
- ۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به طور کلی بنویسید.

دامنه تابع نمایی $(-\infty, +\infty)$ و برد آن $(0, +\infty)$
 دامنه تابع لگاریتمی $(0, +\infty)$ و برد آن $(-\infty, +\infty)$

وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x) = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a ($a \neq 1$) داریم:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

کار در کلاس



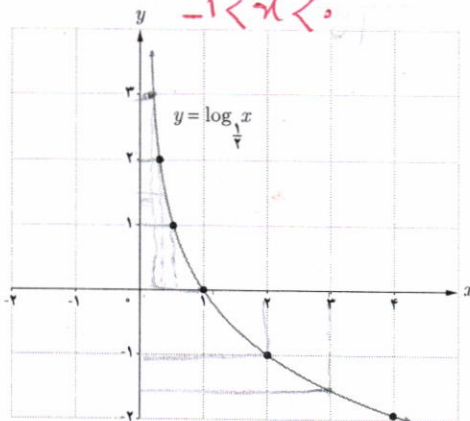
در شکل مقابل، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطه آنها نوشته شده، ضابطه وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

کار در کلاس

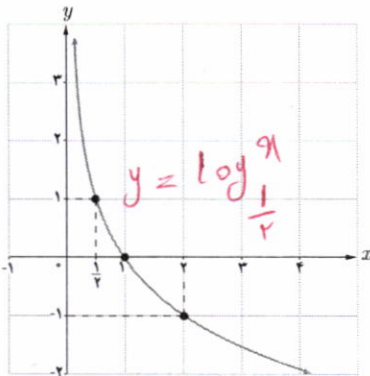
نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = x \rightarrow (\frac{1}{2})^x = 3$

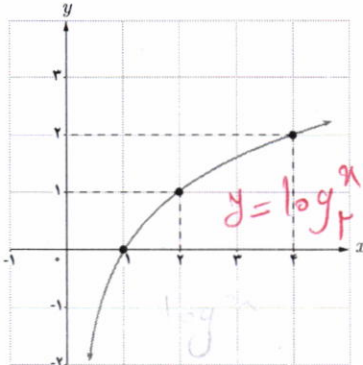
ب) $\log_{\frac{1}{5}} (1/5) = x \rightarrow (\frac{1}{5})^x = 1/5$



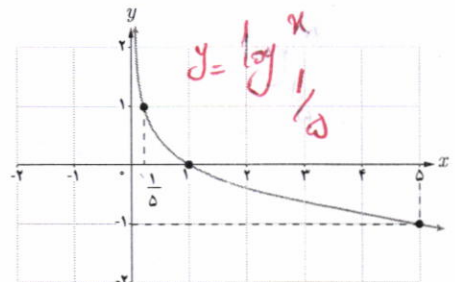
نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطه مربوط به هر کدام را بنویسید.



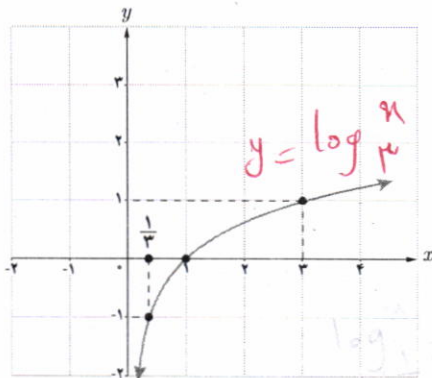
(۱)



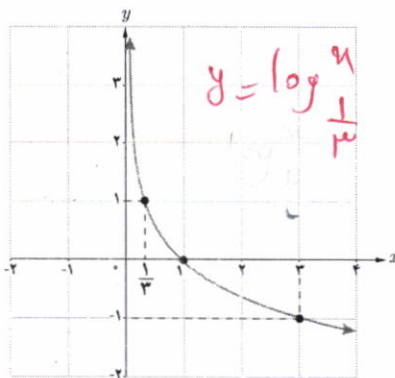
(۲)



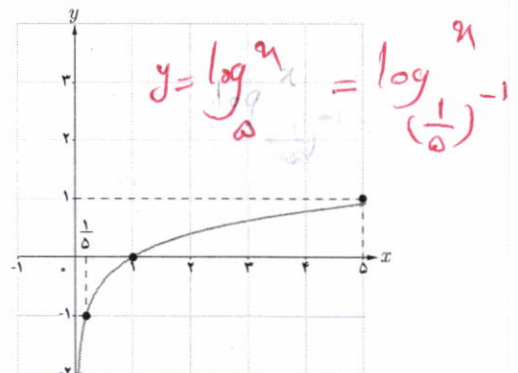
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

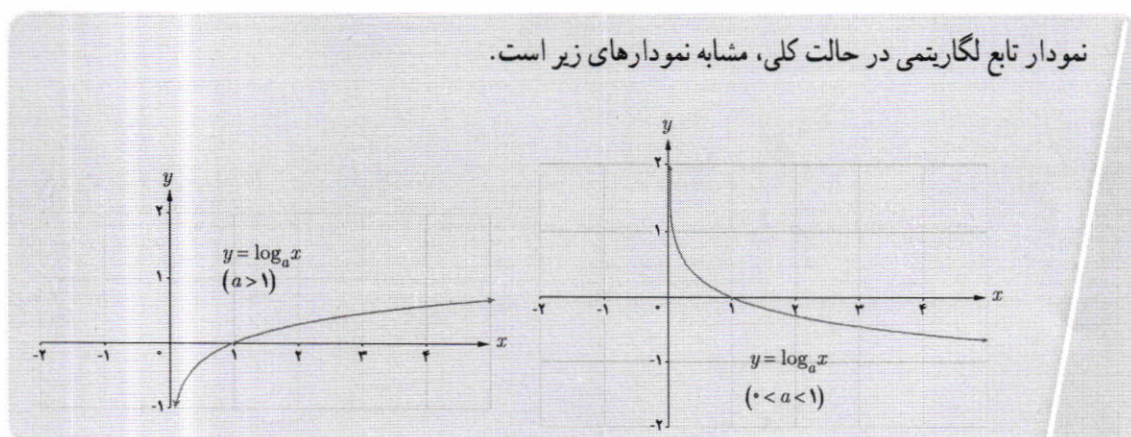
فعالیت

با توجه به مطالبی که تا به حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

- ۱ دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($a > 1$)، مجموعه اعداد حقیقی مثبت و برد آن $(0, +\infty)$ است.
- ۲ دامنه تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)، بازه $(-\infty, 0)$ و برد آن $(-\infty, +\infty)$ است.
- ۳ نمودار توابع فوق، محور x ها را در نقطه \dots یک \dots قطع می‌کند و محور y ها را قطع نمی‌کند.
- ۴ این دو تابع، یک به یک \dots هستند زیرا خطوط موازی محور x ها، نمودار آنها را حداکثر در \dots نقطه قطع می‌کند.
- ۵ وارون تابع نمایی، تابع \dots لگاریتمی است و وارون تابع لگاریتمی، تابع \dots نمایی است.

اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، داریم: $a^1 = a$ ، بنابراین همواره:

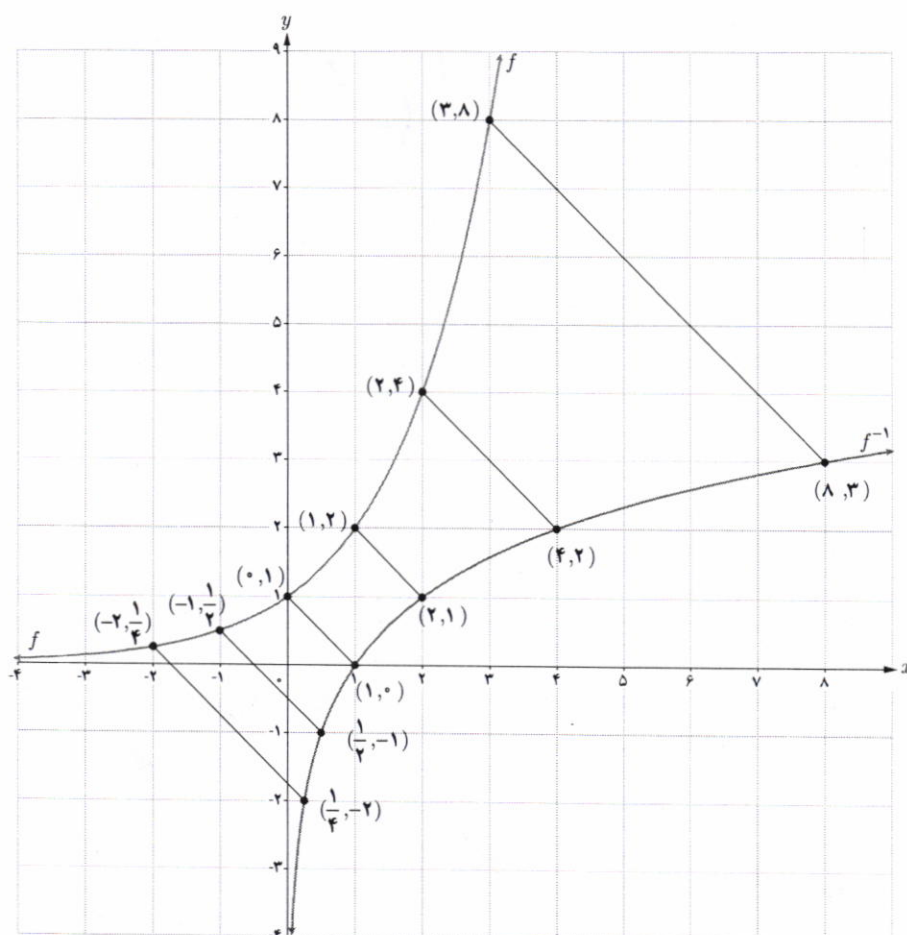
$$\log_a a = 1$$



لگاریتم یک عدد

فعالیت

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2^x$ و $f^{-1}(x) = \log_2 x$ را در نظر بگیرید.



تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

| | | | | | | |
|----------|---------------------------|---------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| نمایی | $2^{-2} = \frac{1}{4}$ | $2^{-1} = \frac{1}{2}$ | $2^0 = 1$ | $2^1 = 2$ | $2^2 = 4$ | $2^3 = 8$ |
| لگاریتمی | $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ | $\log_2 \frac{1}{2} = -1$ | $\log_2 1 = 0$ | $\log_2 2 = 1$ | $\log_2 4 = 2$ | $\log_2 8 = 3$ |

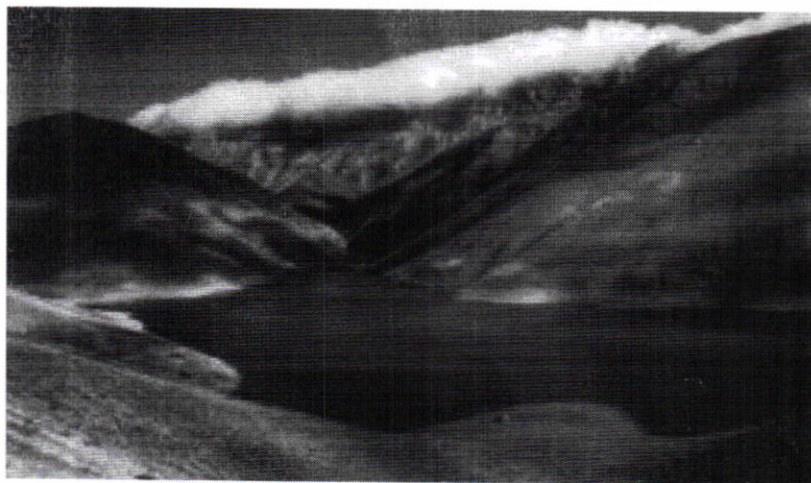
به طور کلی اگر $a^y = x$ آن گاه $\log_a x = y$ و به عکس. ($x > 0, a \neq 1, a > 0$)

$$b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \quad (c > 0, b > 0, b \neq 1)$$

کار در کلاس

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

| | |
|--|--|
| $10^3 = 1000 \rightarrow \log_{10} 1000 = 3$ | $\log_8 1 = 0 \rightarrow 8^0 = 1$ |
| $9^{\frac{1}{2}} = 3 \rightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$ | $\log_2 (\frac{1}{16}) = -4 \rightarrow 2^{-4} = \frac{1}{16}$ |
| $4^2 = 64 \rightarrow \log_4 64 = 3$ | $\log_5 125 = 3 \rightarrow 5^3 = 125$ |
| $2^5 = 32 \rightarrow \log_2 32 = 5$ | $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3 \rightarrow (\frac{1}{3})^{-3} = 27$ |
| $2^3 = 8 \rightarrow \log_2 8 = 3$ | $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3 \rightarrow (\frac{1}{5})^{-3} = 125$ |
| $3^2 = \frac{1}{9} \rightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$ | $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4 \rightarrow (\frac{1}{2})^{-4} = 16$ |



دریاچه تار (همارند)

تپه گنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می شود.



خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر (جو زمین) کاهش می یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به صورت $a = 15500(5 - \log p)$ است، که در آن a ارتفاع بر حسب متر و p نیز فشار بر حسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قله دماوند به ارتفاع 5610 متر محاسبه کنید.

تذکر

لگاریتم در مبنای 10 را لگاریتم اعشاری می نامیم. در این حالت معمولاً مبنای نوشته نمی شود، یعنی به جای $\log_{10} a$ می نویسیم $\log a$.

ویژگی های لگاریتم

فعالیت

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$) باشد، همواره داریم:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{و} \quad \log_a a = 1 \quad \text{و} \quad \log_a \left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq 1$) داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات: فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$ ، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$ ، از این رو $ab = c^m \cdot c^n = c^{m+n}$ بنا بر این طبق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c ab = \log_c c^{m+n}$ در نتیجه:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال: فرض کنید $\log 2 = 0/3$ و $\log 3 = 0/48$ ، مقدار $\log 6$ را حساب کنید.

$$\log 6 = \log(3 \times 2) = \log 3 + \log 2 = 0/48 + 0/3 = 0/78$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات:

$$\log_a b^n = \log_a \underbrace{b \dots b}_n = \underbrace{\log_a b + \dots + \log_a b}_n = n \log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq 1$) داریم:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات: فرض می کنیم $\frac{a}{b} = d$ ، بنا بر این:

$$a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

مثال: اگر $\log 2 = 0/3$ ، مقدار $\log 5$ را محاسبه کنید.

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2 = 1 - 0/3 = 0/7$$

تپه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

$$\log \frac{25}{18} = \log 25 - \log 18 = 5 \log 5 - \log 2 \cdot 3^2 = 5(1 - \log 2) - (2 \log 3 + \log 2) = 5(1/7) - (2 \times 1/48 + 2/3) = 5/7 - 1/24 = 1/24$$

کار در کلاس

اگر $\log 2 \approx 0/3$ و $\log 3 \approx 0/48$ ، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به دست آورید.

۱) $\log 12 = \log (3 \times 4) = \log 3 + \log 2^2 = \log 3 + 2 \log 2 \approx 0/48 + 0/6 = 1/8$

۲) $\log \frac{1}{\sqrt{5}} = \log 5^{-1/2} = -\frac{1}{2} \log 5 = -\frac{1}{2} \log 10 + \frac{1}{2} \log 2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2 \approx -0/5 + 0/15 = -0/35$

۳) $\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} (\log 10 - \log 2) = \frac{1}{2} (1 - 0/3) = 0/35$

۴) $\log \frac{25}{18} = \log 25 - \log 18 = 5 \log 5 - \log 2 \cdot 3^2 = 5(1 - \log 2) - (2 \log 3 + \log 2) \approx 5(1/7) - (2 \times 1/48 + 2/3) = 5/7 - 1/24 = 1/24$

یکی از مهم ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل سازی یک مسئله واقعی به دست می آید. مانند محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه هایی از معادلات لگاریتمی اند:

$\log_4 x + 1 = 3$, $\log_3 x = \log_3 7$, $\log_5 x + \log_5 (x-1) = \log_5 12$

منظور از حل معادله لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

به طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت ($a \neq 1$)، باشد آن گاه با توجه به یک به یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y$ ($x, y > 0$) می توان نتیجه گرفت $x = y$ و به عکس، اگر $x = y$ ($x, y > 0$) آن گاه $\log_a x = \log_a y$.

فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$

۲) $\log_5 (x+6) = \log_5 (2x-3) \rightarrow x+6 = 2x-3 \rightarrow x = 9$

که $x = 9$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۳) $\log_5 (x+6) + \log_5 (x+2) = 1 \rightarrow \log_5 [(x+6)(x+2)] = 1$

$\rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \rightarrow x^2 + 8x + 12 = 5$

$\rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \rightarrow x = -7$ یا $x = -1$

توجه کنید که $x = -7$ قابل قبول نیست؛ از این رو تنها جواب $x = -1$ قابل قبول است که در

معادله اصلی صدق می کند.

خواندنی

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی درباره لگاریتم گفته است:

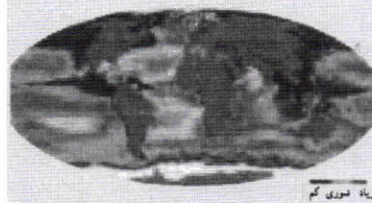
«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می کند و از خطاهای کوچک می گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است.»

خواندنی

شوری آب اقیانوس ها با عرض جغرافیایی (فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر می کند. در مناطق استوایی میزان شوری آب در سطح اقیانوس ها به دلیل تبخیر سریع آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک تر می شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث می شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع مربوطه عبارت است از:

$S(x) = 31/5 + 1/11 \log(x+1)$

که در این رابطه x نشان دهنده عمق به متر و $S(x)$ نشان دهنده مقدار گرم نمک موجود در هر کیلو گرم آب اقیانوس است.



ریشه شوری کم

- ۴ $\log_4(x+2) = \log_4 8 \rightarrow x+2=8 \rightarrow x=6$
- ۵ $3 \log_2 x = -\log_2 27 \rightarrow \log_2 x^3 = \log_2 27^{-1} \rightarrow x^3 = \frac{1}{27} = 27^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \rightarrow x = \frac{1}{3}$
- ۶ $\log(x+1) - \log(x-3) = 3 \rightarrow \log \frac{x+1}{x-3} = 3 \rightarrow \frac{x+1}{x-3} = 10^3 \rightarrow x+1 = 1000x - 3000 \rightarrow x = \frac{3001}{999}$

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

- ۱ $\log_5 x = 2 \rightarrow 5^2 = x \rightarrow x = 25$
- ۲ $\log_2(2x+1) = 2 \rightarrow 2x+1 = 2^2 = 4 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$
- ۳ $\log_2(x+1) + \log_2(x+4) = 2 \rightarrow \log_2(x+1)(x+4) = 2 \rightarrow x^2 + 5x + 4 = 4 \rightarrow x^2 + 5x = 0 \rightarrow x(x+5) = 0 \rightarrow x=0$ یا $x=-5$
- ۴ $\log_3 243 = 2x+1 \rightarrow \log_3 3^5 = 2x+1 \rightarrow 5 = 2x+1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$
- ۵ $\log_2(x-1) = 4 \rightarrow x-1 = 2^4 = 16 \rightarrow x = 17$
- ۶ $\log(x+2) - \log(x-3) = 1 \rightarrow \frac{x+2}{x-3} = 10^1 \rightarrow x+2 = 10x - 30 \rightarrow 9x = 32 \rightarrow x = \frac{32}{9}$
- ۷ $2 \log_2(x-1) = 2 \rightarrow (x-1)^2 = 2^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \rightarrow x=3$ یا $x=-1$

تمرین

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ ($c \neq 1$ و d و c و b و a اعداد حقیقی مثبت‌اند)

$$\log_c^a(bd) = \log_c^a b + \log_c^a d = \log_c^a b + \log_c^a c + \log_c^a d$$

ب) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (b و $c \neq 1$ و a اعداد حقیقی مثبت‌اند)

$$\log_c^a = m \rightarrow c^m = a \quad \log_c^b = n \rightarrow c^n = b \rightarrow \log_b^a = \log_c^a = \log_c c^m = \frac{m}{n} \log_c^c = \frac{m}{n} = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

ب) $a^{\log_a b} = b$ ($a \neq 1$ و b و a اعداد حقیقی مثبت‌اند)

$$\log_a^a \log_a^b = \log_a^b \rightarrow \log_a^b \cdot \log_a^a = \log_a^b \cdot 1 = \log_a^b$$

ت) $\log_b a \times \log_a b = 1$

$$\log_b^a = \frac{\log_a^a}{\log_a^b} = \frac{1}{\log_a^b} \rightarrow \log_b^a \times \log_a^b = 1$$

۲) حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

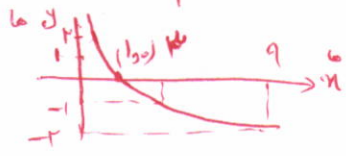
ا) $\log_{\sqrt{5}} 49^{\frac{1}{5}} = \log_{\sqrt{5}} 7^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \log_{\sqrt{5}} 7 = \frac{2}{5}$
 ب) $\log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{2}} = \log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
 ج) $-\log_{\sqrt{5}} 5^3 = -3 \log_{\sqrt{5}} 5 = -3$
 د) $\log_{10} (10^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = \log_{10} 10^{\frac{3}{8}} = \frac{3}{8}$

الف) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[5]{49}$ ب) $\log_{\sqrt{2}} 2^{\frac{1}{2}}$ ج) $-\log_{\sqrt{5}} 125$ د) $3 \log_{10} \sqrt{1000}$

۳) اگر $f(x) = 3 - 2 \log_{\sqrt{2}} (x - 5)$ ، مقدار $f(42)$ را به دست آورید. $f(x) = 3 - 2 \log_{\sqrt{2}} (x - 5) = 3 - 2 \log_{\sqrt{2}} 37 = 3 - 2 \times 7 = -11$

۴) الف) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید. $\log_a 2 = 2 \rightarrow a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}$

ب) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{4}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟ $\log_a \frac{1}{4} = -4 \rightarrow a^{-4} = \frac{1}{4} \rightarrow a = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$



۵) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

| | | | | | |
|---|---|---|---|-----|-----|
| x | 1 | 3 | 9 | 1/3 | 1/9 |
| y | 0 | 1 | 2 | -1 | -2 |

۶) کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_a x$ ، آنگاه $a^x = y$. ❌

ب) نمودار تابع با ضابطه $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$) از نقطه $(1, 0)$ عبور می‌کند. ✓

ب) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓

۷) معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

$p^2 - 2 = p \rightarrow p^2 - p - 2 = 0 \rightarrow (p-2)(p+1) = 0$
 $p = 2$ یا $p = -1$

ا) $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = 1$ $D = (1, +\infty)$

الف) $\log_{\sqrt{2}}(p^2 - 2) = \log_{\sqrt{2}} p$
 $D = (\sqrt{2}, +\infty)$
 ب) $3 \log_{\sqrt{2}} a - \log_{\sqrt{2}} 5 = \log_{\sqrt{2}} 25$

ت) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2$

حل: $(n+1)(n-1) = 5 \rightarrow n^2 - 1 = 5 \rightarrow n^2 = 6 \rightarrow n = \sqrt{6}$

حل: $\log_{\sqrt{5}} a^3 - \log_{\sqrt{5}} 5 = \log_{\sqrt{5}} 25 \rightarrow \log_{\sqrt{5}} \frac{a^3}{5} = \log_{\sqrt{5}} 25 \rightarrow \frac{a^3}{5} = 25 \rightarrow a^3 = 125 \rightarrow a = 5$

حل: $n^2 - 21 = (\frac{1}{10})^{-2} = 100 \rightarrow n^2 = 121 \rightarrow n = \pm 11 \in D$

حرف قابل قبول



تخت جمشید (فارس)

توجه کننده:

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

نمودار هر تابع را به ضابطه آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_2 x$

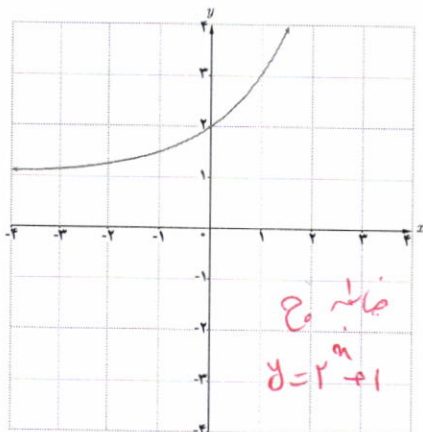
ت) $g(x) = \log(x-1)$

ب) $l(x) = 2 + \log x$

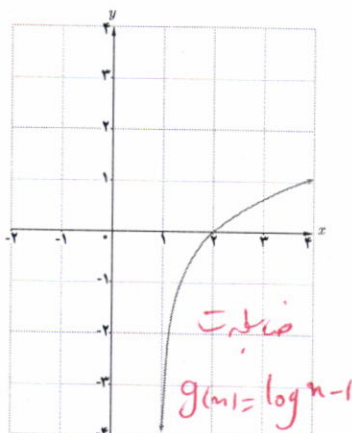
ث) $z(x) = 3^{(x-1)}$

پ) $h(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$

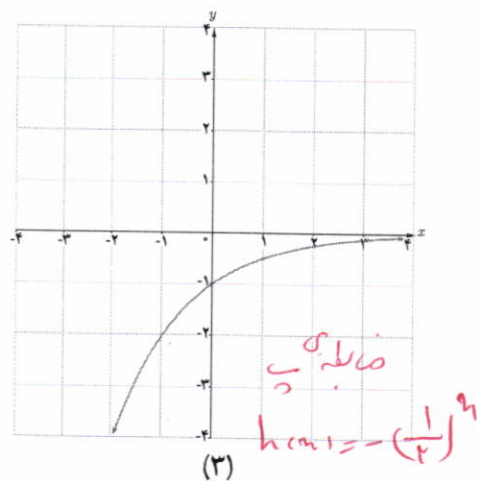
ج) $f(x) = 2^x + 1$



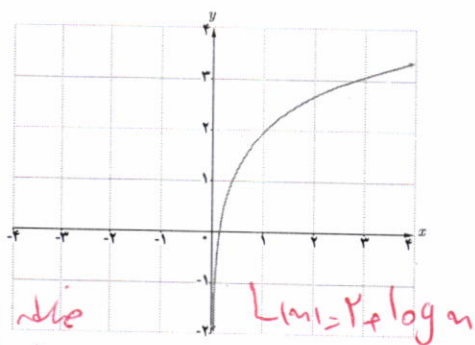
(۱)



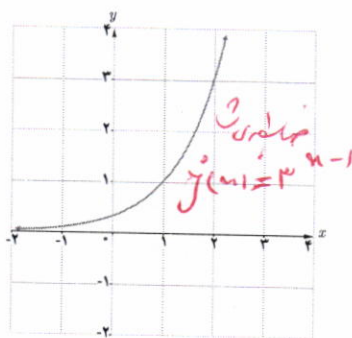
(۲)



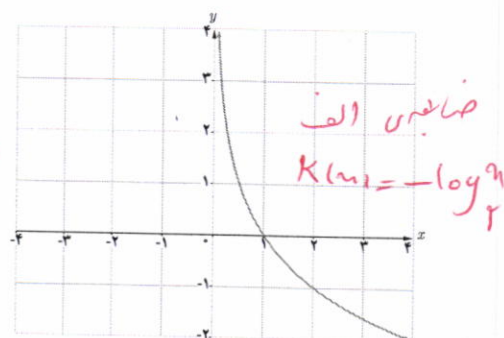
(۳)



(۴)



(۵)

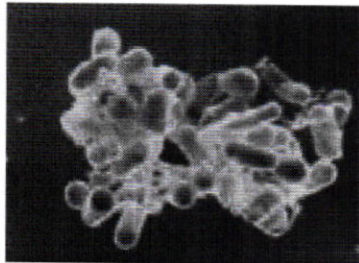


(۶)

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی :

در حالت کلی یک تابع به صورت $h(x) = ka^x$ ($a \neq 1, a > 0$) مانند یک تابع نمایی رفتار می کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می شود.



توده باکتری اشریشیاکلی

مثال : اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می شود. نوع خاصی از این بیماری با 10^6 باکتری شروع می شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطه زیر به دست می آید :

$$p(t) = 100 \times 2^{2t} \quad (0 \leq t \leq 16)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری ها از بین نروند، تعداد باکتری ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با :

$$p(3) = 100 \times 2^6 = 6400$$

تابع لگاریتمی :

ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می دهد. اگر بزرگی زلزله ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه زیر به دست می آید :

$$\log E = 11.8 + 1.5M$$

انرژی یک زلزله ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن ماده انفجاری TNT است.

مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$$\log E = 11.8 + 1.5M \rightarrow$$

$$\log E = 11.8 + 1.5(6/6)$$

$$\rightarrow \log E = 21.7 \rightarrow E = 10^{21.7} \text{ Erg}$$

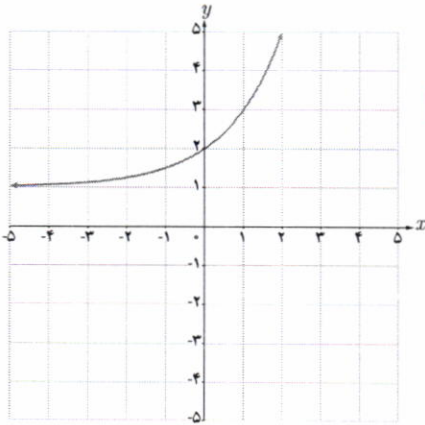
کار در کلاس



زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار - منجیل
به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقه بامداد
رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را
محاسبه کنید.

| | | | | | |
|--------|-----|---------------|-----|---------------|------|
| t | ۰ | $\frac{1}{2}$ | ۱ | $\frac{3}{2}$ | ۲ |
| $P(t)$ | ۱۰۰ | ۲۰۰ | ۴۰۰ | ۸۰۰ | ۱۶۰۰ |

هر نیم ساعت برابر و هر ربع برابر $P(t) = 100 \times (2^2)^t = 100 \times 4^t$



۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به دست آورید.

$$\begin{aligned} a + 2^{-b} &= 2 \rightarrow a + 2^{-b} = 2 \\ a + 2^{-b-b} &= 3 \rightarrow a + 2^{-2b} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + 2^{-b} - a - 2^{-2b} &= 2 - 3 \rightarrow 2^{-b} - 2^{-2b} = -1 \end{aligned}$$

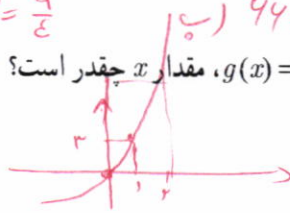
$$2^{-b}(2^b - 1) = -1 \rightarrow 2^{-b} = 1 \rightarrow 2^{-b} = 2^0 \rightarrow -b = 0 \rightarrow b = 0$$

$$a + 2^0 = 2 \rightarrow a = 1 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

الف $g(-1) = \varepsilon^{-1} + 2 = \frac{1}{\varepsilon} + 2 = \frac{9}{\varepsilon}$

| | | | | | |
|-----|------------------|--------------------------|---|---|----|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | $-\frac{15}{14}$ | $-\frac{3}{\varepsilon}$ | 0 | 3 | 15 |

۲ فرض می‌کنیم $g(x) = 4^x + 2$. الف) $g(-1)$ را به دست آورید. ب) اگر $g(x) = 66$ مقدار x چقدر است؟



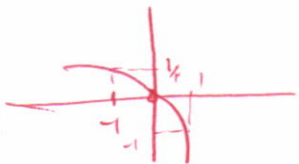
۳ نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

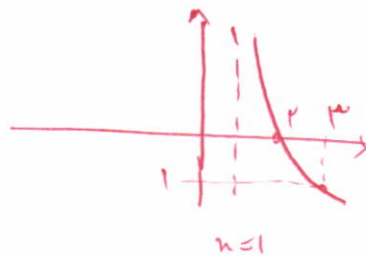
الف) $y = -2^x + 1$

ب) $y = -\log_2(x - 1)$

| | | | |
|-----|---------------|---|----|
| x | -1 | 0 | 1 |
| y | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |



$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$



توپه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن دلمان ریاضی، استان خوزستان