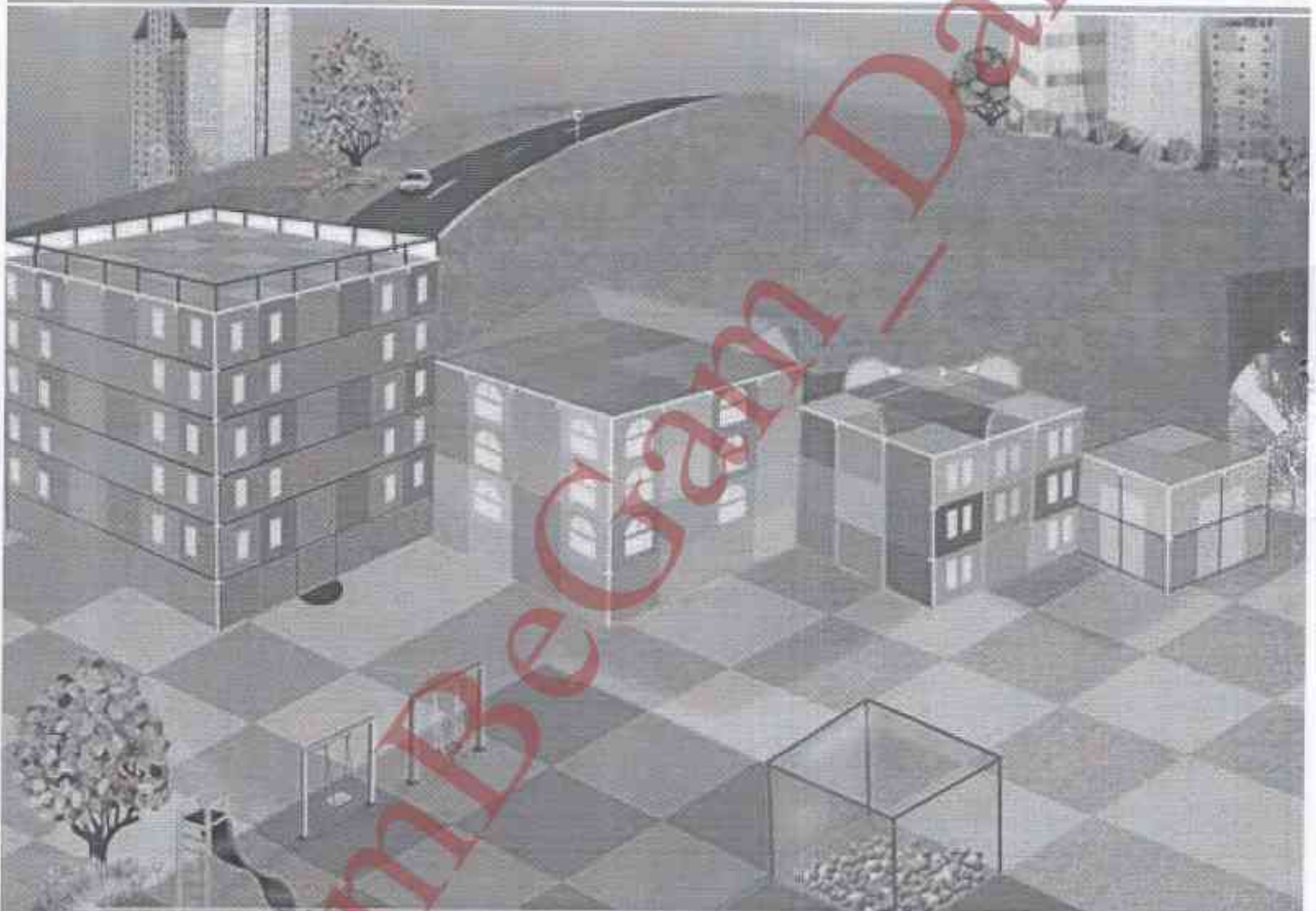


توان و جذر

# فصل ۸



وقتی یک سلول به سلول‌های دیگری تبدیل می‌شود و این عمل تکرار می‌گردد، در مدت کوتاهی تعداد سلول‌ها به سرعت افزایش پیدا می‌کنند.

رشد تعداد سلول‌ها به صورت توانی است. نباید به همین علت است

که چراخت پوست در مدت کوتاهی نرم می‌شود و سلول‌های جدید جایگزین

سلول‌های مرده می‌شوند.

### ● تعریف توان

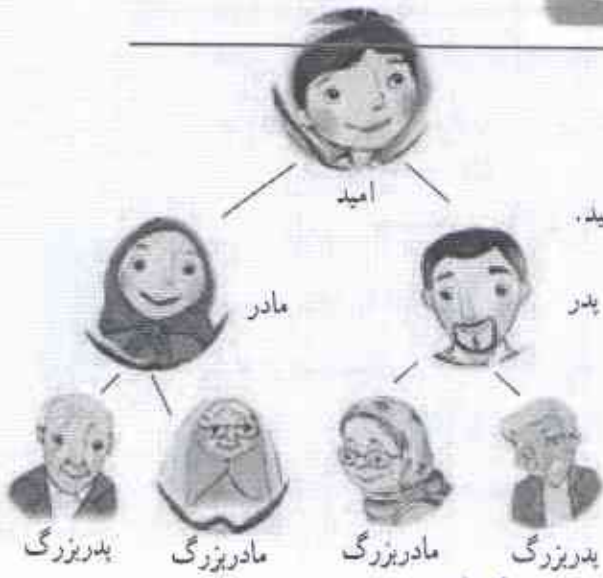
● محاسبه عبارت‌های توان دار

● ساده کردن عبارت‌های توان دار

● جذر و ریشه



## تعریف توان



۱- امید می داند که نوه چهار نفر است. این چهار نفر پدر بزرگ ها و مادر بزرگ های امیدند. او می خواهد بداند که نتیجه چند نفر است؟ (به فرزند نوه، نتیجه می گویند). امید برای پاسخ سوال خود شکل زیر را کشید.

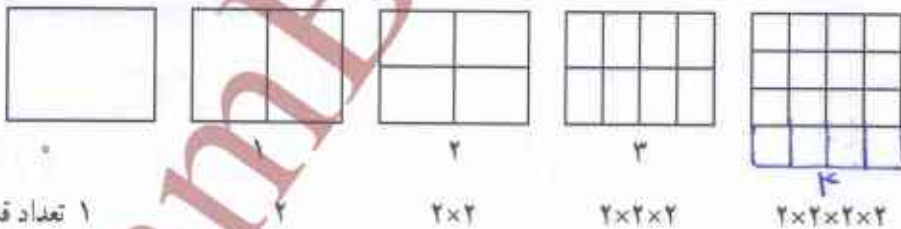
پدر و مادرها نسبت خویشاوندی ندارند

- الف) شکل را کامل کنید و با استفاده از آن بگویید که امید نتیجه چند نفر است؟ **۸ نفر**
- ب) به نظر شما تعداد افرادی که امید نیره آنها است، چند نفرند؟ (به فرزند نتیجه، نیره می گویند). **۱۶ نفر**
- ج) جدول زیر را کامل کنید. برای محاسبه تعداد از ماشین حساب نیز می توانید کمک بگیرید.

تعداد در نسل  $n$  ام چند نفر است  
 $(2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2) = 2^n$

امید	بستگان امید	روش محاسبه	تعداد
فرزند	پدر و مادر	۲	۲
نوه	پدر بزرگ و مادر بزرگ	$2 \times 2$	۴
نتیجه	نسل سوم	$2 \times 2 \times 2$	۸
نیره	نسل چهارم	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	۱۶
	نسل هشتم	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	۱۲۸

۲- یک کاغذ را چند بار تا می زنیم و هر بار تعداد قسمت هایی را که کاغذ تقسیم شده است، می شماریم. چه الگویی در



تعداد قسمت ها می بینید؟  
اصلاحیه  
باید در زیر اضافه شود

تعداد تا ۰  
تعداد قسمت ها ۱  
 $(2 \times 2 \times \dots \times 2) = 2^5$

اگر تا زدن را به همین ترتیب ادامه دهیم، در تای هشتم چند تا قسمت خواهیم داشت؟

در تای دهم چند قسمت خواهیم داشت؟  
 $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 1024$

در تای  $n$  ام چند قسمت خواهیم داشت؟

در تای  $n$  ام چند قسمت خواهیم داشت؟  
 $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$

چه راهی برای خلاصه کردن عبارت های بالا پیشنهاد می کنید؟

# MATH-HOME.IR

عبارتی مانند  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  را در ریاضیات برای ساده تر شدن به صورت  $2^5$  می نویسیم و آن را چنین می خوانیم: ۲ به توان ۵. در عبارت  $2^5$ ، ۲ را پایه و ۵ را توان می نامیم. درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می دادیم.

$$(2+2+2+2+2 = 5 \times 2)$$

توان  $\rightarrow$  ۵  
پایه  $\rightarrow$  ۲  $\rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$  (برخیزیم روی توان و بیخ)

عبارت	شکل ساده شده	خوانده می شود	حاصل
$7 \times 7$	$7^2$	هفت به توان ۲	۴۹
$7+7$	$2 \times 7$	دو ضربدر ۷	۱۴
$2/5 \times 2/5 \times 2/5$	$(2/5)^3$	دو پنجم به توان ۳	۱۵/۱۲۵
$1 \times 1 \times 1$	$1^3$	یک به توان ۳	۱
$1+1$	$2 \times 1$	دو ضربدر ۱	۲
$\frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$	$(\frac{5}{3})^2$	پنج سوم به توان ۲	$\frac{25}{9}$

۱- جدول مقابل را کامل کنید.

پس از آن عبارت های زیر را به صورت ساده شده بنویسید.

$2 \times 2 \times 2 = 2^3$   
 $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^5$   
 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$   
 $a \times a \times a = a^3$        $b \times b = b^2$

۲- عددهای داده شده را مانند نمونه تجزیه کنید و به صورت عدد توان دار بنویسید.

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$        $144 = 2^4 \times 3^2$        $200 = 2^3 \times 5^2$        $125 = 5^3$   





۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ در صورت امکان موارد نادرست را اصلاح کنید.

$4^2 = 64$  ~~x~~       $5^2 = 14$  ~~x~~       $5^2 = 5 \times 2$  ~~x~~  $\rightarrow 25$        $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$   $\checkmark$   
 $2^2 = 3^2$  ~~x~~  $8 \neq 9$        $4^2 = 18$  ~~x~~  $\rightarrow 16$        $(\frac{3}{1})^2 = \frac{4}{11}$  ~~x~~       $3^2 = 11$  ~~x~~  
 $\frac{2^2}{5} = \frac{9}{25}$  ~~x~~  $\frac{2^2}{5} = \frac{4}{25}$        $5^2 = 25$  ~~x~~  $\rightarrow 25$        $(\frac{2}{4})^2 = \frac{9}{4}$  ~~x~~       $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{14}$  ~~x~~

۴- تساوی ها را کامل کنید.

$a \times a \times a \times a = a^4$        $b^2 = b \times b \times b$        $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$   
 $\frac{a \times a \times a}{b} = \frac{a^3}{b}$        $x \times x = x^2$        $(y+x)(y+x) = (y+x)^2$   
 $(ab)^2 = ab \times ab$        $\frac{x \times x \times x}{y \times y \times y \times y \times y} = \frac{x^3}{y^5}$

۵- در تکثیر سلول ها، هر سلول به ۲ سلول تقسیم می شود. دوباره هر کدام از آن سلول ها خودشان به ۲ سلول تقسیم

می شوند و این کار ادامه پیدا می کند. جدول زیر را کامل کنید و حاصل را به صورت عدد توان دار بنویسید.

مرحله تکثیر	۱	۲	۳	۴	۷	n
تعداد سلول	۲	$2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$
به صورت توان دار	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^7$	$2^n$

کاربر کاغذی



$$11^0 = 1 \rightarrow 1 \quad 0+1=1$$

$$11^1 = 11 \rightarrow 2 \quad 1+1=2$$

$$11^2 = 121 \rightarrow 3 \quad 2+1=3$$

$$11^3 = 1331 \rightarrow 4 \quad 3+1=4$$

الگویابی  
 بس عدد ۱۱  
 رقم دوازده (۱۲+۱=۱۳)

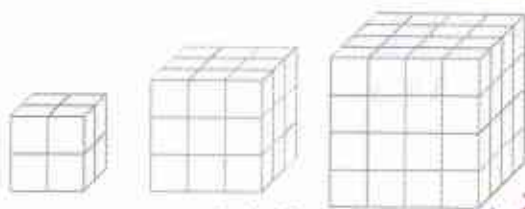
۱- با توجه به شکل های زیر مساحت و حجم های خواسته شده را با عبارت های توان دار جبری نمایش دهید.



$S = a \times a = a^2$      
  $S = 2 \times 1/2 \times r \times r = r^2$      
  $V = a \times a \times a = a^3$      
  $V = a \times b$

۲- جمله های کلامی زیر را به صورت عبارت جبری نشان دهید.

- هر عدد به توان یک برابر خودش می شود:  $a^1 = a$
- یک به توان هر عدد برابر یک می شود:  $1^a = 1$
- مجذور هر عدد یعنی آن عدد به توان ۲:  $a^2 =$  مجذور  $a$
- مکعب یک عدد یعنی آن عدد به توان ۳:  $x^3 =$  مکعب  $x$
- صفر به توان هر عدد به جز صفر برابر است با ۱:  $0^a = 0$



۳- تعداد مکعب های کوچک  $1 \times 1 \times 1$  را در هر شکل با یک عدد

توان دار نشان دهید.  $n^3 =$  مکعب  $n$  تایی

۴- حاصل هر عبارت توان دار را به دست آورید.

$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$	$7^3 = 343$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	$6^4 = 1296$	$7^4 = 2401$

۵- مقدار عبارت  $3^n$  را به ازای عددهای داده شده به دست آورید.

مکعب دو = ۸	مکعب یک = ۱	مکعب دو = ۸	مکعب یک = ۱
$\frac{2^3}{5^2} = \frac{8}{25}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$	$\frac{2^4}{7} = \frac{16}{7}$	$0.2^3 = 0.008$
$0.01^2 = 0.0001$	$1/1^3 = 1/1$	$2/1^2 = 2/1$	$0.5^3 = 0.125$

n	۱	۲	۳	۴
$3^n$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$

۶- حاصل عددهای  $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$  را به دست آورید و به صورت نمودار ستونی در دفتر خود رسم کنید (باید واحد مناسبی برای محور عددی رسم کنید). در مورد نحوه رسم هر ستون توضیح دهید. آیا می توانید  $2^6$  یا  $2^7$  را در دفتر خود رسم کنید؟ چرا؟



تقریباً غیر ممکن است یا نه یعنی می توان این کار را انجام داد  
 ۷- عدد  $11^{12}$  به طور تقریبی چند رقمی است؟ چرا؟  
 بس ۱۳ رقم داره  $11^{12} \approx 10^{13}$   
 $11^{12} = 3,138,167,640,000$

آموزش الویتها (یادآوری)

۳۳

توان

ترتیب انجام عملیات را در دوره دبستان آموخته‌اید. با توجه به درس توان، ترتیب انجام دادن عملیات مختلف ریاضی به صورت (۱) برانز (۲) توان (۳) ضرب و تقسیم (۴) جمع و تفریق انجام می‌شود. با کامل کردن مراحل محاسبه عبارت و همچنین ترتیب انجام عملیات و نحوه نوشتن راه حل توجه کنید.

$$\frac{2^2 \times 4 + 10}{9^2 - 5^2} = \frac{8 \times 4 + 10}{81 - 25} = \frac{32 + 10}{56} = \frac{42}{56} = \frac{3}{4}$$

ساده کردن محاسبه جمع و تفریق محاسبه ضرب محاسبه توان‌ها

محاسبه‌های بعدی را کامل کنید.

$$2 \times 3^2 - (2^2 + 2) = 2 \times 9 - (4 + 2) = 9 - 6 = 3$$

$$\frac{10 + (5 - 6) + 9 \times 4}{2^5 + 3^5} = \frac{10 + 2 + 36}{32 + 243} = \frac{48}{275}$$

۱- حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

$$2^5 + 3^2 = 32 + 9 = 41 \quad 2^5 \times 3^2 = 32 \times 9 = 288 \quad 2^5 - 3^2 = 32 - 9 = 23$$

$$2^5 \div 8 = 32 \div 8 = 4 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \quad 5^2 - 5 \times 2 = 25 - 10 = 15$$

$$\frac{420 - 14}{100} = \frac{406}{100} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25}{16} - \frac{4}{25} \quad \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{1}$$

$$2^2 - 3^2 + 10 = 4 - 9 + 10 = 5 \quad 5^2 + 10 + 0 = 25 + 10 + 0 = 35$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

$$(2+2)^2 = 2^2 + 2^2 \quad \times \quad 25 \neq 13 \quad (4 \times 3)^2 = 3^2 \times 4^2 \quad \checkmark \quad 144 = 9 \times 16 \Rightarrow 144 = 144$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} \quad \times \quad \frac{4}{9} \neq \frac{22}{32} \quad 5 \times 6^2 = (6 \times 5)^2 \quad \times \quad 5 \times 36 \neq 30^2 \Rightarrow 180 \neq 900$$

$$1^2 \times 5^2 = 1^2 \quad \times \quad 100 \neq 10000 \quad 2^2 \times 2^2 = 2^2 \quad \checkmark \quad 1 \times 14 = 14$$

۳- نحوه محاسبه را توضیح دهید.

$$2^8 + 8^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 8 \times 8 = 256 + 64 = 320$$

۱) چون الویت اول توان است پس ابتدا حاصل  $2^8$  را محاسبه می‌کنیم

۲) و سپس  $8^2$  را محاسبه می‌کنیم

۳) حاصل را با هم جمع می‌کنیم

توان

۱- مانند نمونه عبارت‌های توان‌دار را محاسبه کنید.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = \quad (-2)^2 = (-2) \times (-2) \quad (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2)$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \quad (-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$$

با توجه به توان‌ها و حاصل عبارت‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  
۲- عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

اصلاح شود

$$-(2 \times 2 \times 2) = -8$$

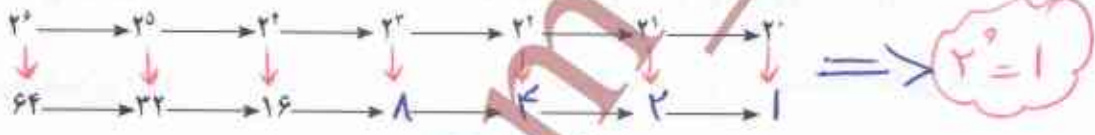
$$-2^3 = 2 \times 2 \times 2 = -8$$

$$-2^4 = -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16$$

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

۳- الگوی عددی زیر را کامل کنید.



ارتباط بین عددهای توان‌دار و حاصل آنها را توضیح دهید. اعداد توان‌دار در ردیف اول با عدد مناسب در ردیف دوم به نظر شما در جای خالی چه عددی باید نوشت؟

مثال  $2^5 = 32$        $2^0 = 1$

هر عدد توان صفر (به غیر صفر) برابر یک است

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$-3^2 = -9 \quad (-5)^2 = +25 \quad -1^5 = -1$$

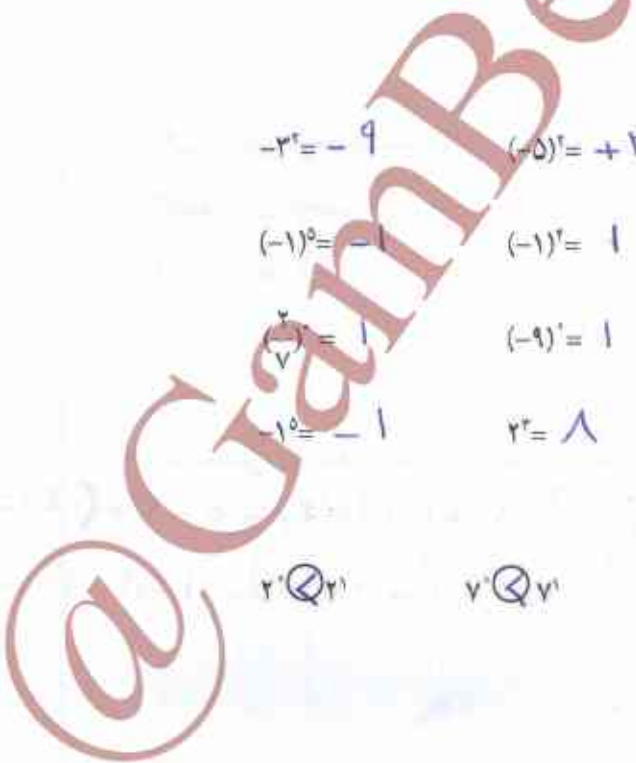
$$(-1)^5 = -1 \quad (-1)^2 = 1 \quad -1^2 = -1 \quad 7^0 = 1$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1 \quad (-9)^0 = 1 \quad 0^0 + 1/1^0 = 0 + 1 = 1 \quad 4 + 2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$-1^5 = -1 \quad 2^2 = 4 \quad (-2)^2 = -4 \quad 5^0 = 1$$

۲- در جای خالی علامت < یا = یا > بگذارید.

$$2^0 \text{ } \textcircled{>} \text{ } 2^1 \quad 7^0 \text{ } \textcircled{>} \text{ } 7^1 \quad \left(\frac{2}{5}\right)^0 \text{ } \textcircled{>} \text{ } 2^1 \quad (-2)^0 \text{ } \textcircled{=} \text{ } (-2)^1$$



۱- کدام درست و کدام نادرست هستند؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

$(2+2)^2 = 2^2 + 3^2$ <span style="color: red;">X</span> $1 \neq 2$	$(\frac{2}{1})^2 > (-\frac{1}{2})^2$ <span style="color: green;">✓</span> $1 > \frac{1}{4}$	$(-\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 > 1$ <span style="color: green;">✓</span> $1 + 1 > 1$
$2 + 2^2 = 6$ <span style="color: red;">X</span> $2 + 1 \neq 6$	$2^2 + 3^2 + 5^2 = 1$ <span style="color: red;">X</span> $1 + 1 + 1 \neq 1$	$2^2 < (-2)^2$ <span style="color: red;">X</span> $1 < 4$

۲- الف) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$2 \times 10^2 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0 = 2000 + 400 + 70 + 2 = 2472$

$5 \times 10^2 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0 = 5000 + 0 + 10 + 9 = 5019$

ب) با توجه به تمرین‌های بالا عددهای زیر را به صورت گسترده و سپس توانی نمایش دهید.

$2225 = 4000 + 200 + 20 + 5 = 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

$9207 = 9000 + 200 + 0 + 7 = 9 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 7 \times 10^0$

۳- به جای n عددهای ۱ تا ۵ را قرار دهید و در عبارت  $4^n$  و  $n^4$  را با هم مقایسه کنید. برای محاسبات از ماشین حساب استفاده کنید.

n	۱	۲	۳	۴	۵
$4^n$	$4^1 = 4$	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$
$n^4$	$1^4 = 1$	$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$

$4^1 = 1, 4, 16, 64, 256$

$10^4 = 10000$

برای  $n=10$  کدام یک بزرگ‌تر از دیگری است؟

۴- در بعضی از ماشین حساب‌ها کلید توان به صورت زیر استفاده می‌شود. عددهای توان‌دار را محاسبه می‌کنند. برای

مثال  $2^3$  به صورت زیر محاسبه می‌شود. حالا شما عددهای مختلف را در ماشین حساب وارد و حاصل آنها را ملاحظه کنید. چه

راه دیگری برای پیدا کردن جواب  $2^3$  وجود دارد؟

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

۵- حاصل عبارت‌ها را به ازای عددهای داده شده به دست آورید.

$a^2 - b^2 + ab$      $a = -2$      $b = 2$      $\Rightarrow (-2)^2 - 2^2 + (-2) \times 2 = 4 - 4 + (-4) = -4$

$a^2 - 2b^2 + a^2b$      $a = 1$      $b = -2$      $\Rightarrow 1^2 - 2 \times (-2)^2 + 1 \times (-2) = 1 - 8 - 2 = -9$



ضرب اعداد توان دار  
با پایه های برابر

ساده کردن عبارت های توان دار

فعالیت

۱- زهره می خواست مسئله هایی را که معلم داده بود، حل کند. معلم ریاضی خواسته بود که دانش آموزان مساحت مستطیل به طول  $2^4$  و عرض  $2^3$  را به دست آورند. زهره به صورت زیر عمل کرد و عبارت ها را به صورت ضرب نوشت.

$$S = a \times b = 2^4 \times 2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{مرتبۀ ۴}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{مرتبۀ ۳}}$$

سیمما با مشاهده عبارت زهره به او گفت: هفت تا ۲ ضرب شده است. پس عبارت تو با  $2^7$  برابر است. نتیجه گیری سیمما

$$2^4 \times 2^3 = 2^7$$

را با یک تساوی نشان دهید.

$$5^2 \times 5^3 = \underbrace{5 \times 5}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{\text{مرتبۀ ۳}} = 5^5$$

۲- مانند نمونه عمل کنید.

$$2^2 \times 2^3 = \underbrace{2 \times 2}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{مرتبۀ ۳}} = 2^5$$

$$7^2 \times 7^3 = \underbrace{7 \times 7}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{7 \times 7 \times 7}_{\text{مرتبۀ ۳}} = 7^5$$

$$x^2 \times x^3 = \underbrace{x \times x}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{x \times x \times x}_{\text{مرتبۀ ۳}} = x^5$$

$$a^2 \times a^3 = \underbrace{a \times a}_{\text{مرتبۀ ۲}} \times \underbrace{a \times a \times a}_{\text{مرتبۀ ۳}} = a^5$$

با توجه به تساوی های بالا یک رابطه برای ساده کردن عبارت های توان دار با پایه های مساوی بنویسید.

۳- با توجه به رابطه بالا، مانند نمونه عبارت توان دار را به صورت ضرب ۲ یا چند عبارت توان دار بنویسید.

$$\begin{matrix} b & c & b+c \\ a \times a & = & a \end{matrix}$$

$$2^5 = 2^2 \times 2^3$$

$$2^5 = 2^4 \times 2^1$$

$$2^5 = 2^2 \times 2^2 \times 2^1$$

$$5^4 = 5^2 \times 5^2$$

$$5^5 = 5^3 \times 5^2$$

$$5^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^0$$

باسخ بازرس

۱- حاصل عبارت های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$5^2 \times 5^3 = 5^5$$

$$(-2)^2 \times (-2)^3 = (-2)^5 = 2^5$$

$$(-4)^2 \times (-4)^3 = (-4)^5$$

$$7^2 \times 7^3 = 7^5$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^5$$

$$1/5^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 1/5^5$$

۲- با باز کردن عبارت توان دار جواب را ساده تر کنید و محاسبات را مانند نمونه پاسخ دهید.

$$3^2 = 3^2 \times 3^0 = 9 \times 1 = 9$$

$$2^2 = 2^2 \times 2^0 = 4 \times 1 = 4 \quad 4^2 = 4^2 \times 4^0 = 16 \times 1 = 16 \quad 5^2 = 5^2 \times 5^0 = 25 \times 1 = 25$$

$$5^2 = 5^2 \times 5^0 = 25 \times 1 = 25$$

۳- اگر  $2^2 = 1024$  باشد حاصل  $2^{12}$  را به دست آورید.

$$2^{12} = 2^{10} \times 2^2 = 1024 \times 4 = 4096$$





# MATH-HOME.IR

تغیبات

۱- مانند نمونه عبارات‌ها را باز کرده و دوباره به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$2^2 \times 5^2 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$2^2 \times 2^2 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) = (2 \times 2) \times (2 \times 2) = \frac{2}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$a^x \times b^x = a \times a \times \dots \times b \times b = (a \times b) \times (a \times b) \times \dots \times (a \times b) = (a \times b)^x$$

با مقایسه تساوی‌ها یک قانون کلی برای ساده کردن عبارات‌های توان دار با توان‌های مساوی به دست آورید. *پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم*

۲- با قانونی که به دست آوردید، عبارات‌های زیر را ساده کنید.

$a^m \times b^m = (ab)^m$

$$2^2 \times 3^2 = 6^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

$$(-2)^2 \times (-1)^2 = (+2)^2 = 2^2$$

$$(-2)^2 \times 3^2 = (-6)^2$$

$$x^2 \times y^2 = (xy)^2$$

$$(ab)^2 = a^2 \times b^2$$

$$6^2 = (2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2$$

۳- به تساوی‌های رویه‌رو توجه کنید.

مانند نمونه‌های بالا عددهای توان دار زیر را باز کنید.

$$10^2 = (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$$

$$1^2 = 2^2 \times 5^2$$

$$12^2 = 2^2 \times 2^2 \times 3^2 = 2^4 \times 3^2$$

$$(xy)^2 = x^2 \times y^2$$

$$(xyz)^2 = x^2 \times y^2 \times z^2$$

$$2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

۱- مانند نمونه عبارات‌های توان دار را تا حد امکان ساده کنید.

$$5^2 \times 5^2 \times 7^2 = 5^4 \times 7^2 = 35^2$$

$$7^2 \times 7^2 \times 9^2 = 7^4 \times 9^2 = 63^2$$

ضرب بانوان‌های مساوی ضرب پایه‌های مساوی

$$2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^4 \times 2^4 = 2^8$$

$$(2^2 \times 3^2 \times 5^2) \times (2^2 \times 3^2 \times 5^2) = (2^2 \times 2^2) \times (3^2 \times 3^2) \times (5^2 \times 5^2) = 2^4 \times 3^4 \times 5^4 = 30^4$$

$2^a \times 2^b = 2^{a+b}$

۲- عبارت توان دار مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

بجای a و b عددهای ۲ و ۵ و یک بار ۴ و ۷ قرار دهید و تساوی‌ها را به صورت عددی بنویسید.

$$2^3 \times 2^5 = 2^8$$

$$4 + 7 = 11$$

$$5 + 2 = 7$$

$$2^4 \times 2^7 = 2^{11}$$



توان عدد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
شماره ی عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
تعداد ارقام	۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵	۶	۷	۷	۸	۸	۹

پاسخ ناز است

مصارف ۳ یک بار تکرار شده است  

$$تعداد ارقام = \left[ \frac{3n}{5} \right] + 1$$

$a = 5$   
 $b = 3$   
 $c = 2$

۱- در تساوی های زیر به جای a و b و c عددهای مختلفی قرار دهید و تساوی های عددی بسازید.  
 $a^n \times a^m = a^{n+m}$      $5 \times 5 = 5^{2+2}$      $a^m \times b^n = (a \times b)^m$      $5 \times 3^2 = (5 \times 3)^2$

۲- با استفاده از تجزیه به عددهای اول، هر عدد را به صورت توان دار بنویسید.

$121 = 11 \times 11 = 11^2$      $256 = 2^8$      $441 = 3^2 \times 7^2$      $10000 = 2^4 \times 5^4$

ج) مساحت مربعی به ضلع ۵ را بدست آورید

۳- مسئله هایی طرح کنید که پاسخ آنها: الف) ۲۲ (ب)  $2 \times 3$  (ج) ۵ باشد.

الف) حجم یک بلوک به ضلع ۲ چند است؟ (ب) مساحت مستطیلی به طول عرضی ۲، ۳، ۲، ۳ را بدست آورید

۴- عددهای توان دار را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$4^0, 8^1, 9^2, 3^5, 4^{10}$

۵- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟ توضیح دهید.

$4^2 \times 4^2 = 4^{12}$  ✗     $3^2 \times 2^2 = 6^5$  ✗     $2^2 + 2^2 = 6^2$  ✗     $6^4 + 8 \neq 216$

$4^2 \times 4^2 = 4^4$  ✓     $3^2 \times 2^2 = 6^2$  ✓     $4^1 + 3^1 = 7^1$  ✓     $4 + 3 = 7$

$\checkmark (-2^6) \times 7^2 = (-14)^2$      $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^{13}$

۶- کدام یک از عبارت های زیر  $\left(\frac{2}{3}\right)^2$  را نشان می دهد؟

$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$      $\frac{2+2+2}{3}$      $\frac{3 \times 2}{3}$      $\frac{2}{3} \times 3$      $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$      $\frac{2}{3} + 3$

۷- به جدول زیر توجه کنید و با توجه به آن سوال ها را جواب دهید.

۲	۴	۷	۱۰	۱۴	۱۹	۲۵	۳۲	۴۰	۴۹	۵۰
۱	۲	۱۶	۶۴	۲۵۶	۱۰۲۴	۴۰۹۶	۱۶۳۸۴	۶۵۵۳۶	۲۷۲۱۴۴	۱۰۴۸۵۷۷
۱	۱	۲	۲	۳	۴	۴	۵	۵	۶	۷

تعداد ارقام

حاصل عبارت  $4096 \times 65536$  را به صورت توان دار بنویسید.

تعداد رقم های  $4^{10}$  را پیش بینی کنید.  $4^{20}$  چند رقمی می شود؟ چرا؟  $13^3$  رقمی است

۸- جاهای خالی را کامل کنید. چه الگویی مشاهده می کنید؟ یک تساوی دیگر بنویسید.

$1^2 - 0^2 = 1$      $2^2 - 1^2 = 3$      $3^2 - 2^2 = 5$      $4^2 - 3^2 = 7$      $5^2 - 4^2 = 9$      $6^2 - 5^2 = 11$      $7^2 - 6^2 = 13$

۹- در جای خالی یکی از عمل های + یا - یا  $\times$  یا  $\div$  را قرار دهید تا تساوی برقرار باشد.

$2^0 \div 8 = 4$      $3^2 + 7^2 = 58$      $(-7)^0 + 8^1 = 3^2$      $2^2 \div 16 = 2^0 + 3^1$

$$\left[ \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \left( \frac{(n-1)n}{2} \right)^2 \right] = n^3$$

اصلاحیه  
 فرمول منتهایی  
 $(1+2+3+\dots+n)^2 - (0+1+2+3+\dots+(n-1))^2 = n^3$

۱- یک شرکت برای محوطه‌سازی، سنگ‌های مرمر در اندازه‌های  $25 \times 50$  سانتی متر خریداری کرده است. سنگ فروش در مجموع ۸۱ متر مربع سنگ به این شرکت فروخته است. ضلع بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان با این سنگ‌ها ساخت چند متر است؟

۲- مساحت یک زمین بازی کودکان که به شکل مربع است، برابر ۱۴۴ متر مربع است. طول ضلع این مربع چند متر است؟

$10 \times 10 = 100 \times$   $12 \times 12 = 144 \checkmark$

$11 \times 11 = 121 \times$

۳- جدول زیر طول ضلع تعدادی مربع و مساحت آنها داده شده است. جاهای خالی را کامل کنید.

طول ضلع	۳	۴	۱/۵	۲/۵	۹	۷/۲	۱۱/۶	۲۰	۰/۹
مساحت مربع	۹	۱۶	۲,۲۵	۴/۲۵	۸۱	۵۴,۷۶	۱۲۱/۳۶	۴۰۰	۰/۸۱

۴- در الگوی عددی زیر آیا عدد ۱۵ قرار می‌گیرد؟ چرا؟ **خیر**، **مجدور هیچ عددی ۱۵ نمی‌شود**

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots, n^2$

با کمک ماشین حساب، حدس و آزمایش عددی پیدا کنید که بتوان به جای  $x$  قرار داد. **وجود ندارد**  $x^2 = 15$

در تساوی  $3^2 = 9$ ، عدد ۹ را توان دوم یا مجذور عدد ۳ و عدد ۳ را نیز ریشه دوم یا جذر ۹ می‌نامند. آیا ۳- نیز

ریشه دوم ۹ است؟ چرا؟ **بله**  $(-3) \times (-3) = 9$

پس ۲- هم جذر یا ریشه دوم عدد ۹ می‌باشد

جدول زیر را کامل کنید.

عدد	۹	۲۵	۱/۴	۴۹
ریشه دوم (مخرج)	۳ و -۳	۵ و -۵	۱/۲ و -۱/۲	۷ و -۷
رابطه ریاضی	$(-3)^2 = 9$ $3^2 = 9$	$(-5)^2 = 25$ $5^2 = 25$	$(-1/2)^2 = 1/4$ $(1/2)^2 = 1/4$	$(-7)^2 = 49$ $7^2 = 49$

توان دوم یا مجذور عدد ۳ را با ۳<sup>۲</sup> و توان دوم یا مجذور عدد ۳- را با ۳<sup>۲</sup> (-) نمایش می‌دهیم. برای نمایش ریشه دوم از نماد  $\sqrt{\quad}$  (بخوانید رادیکال) استفاده می‌کنیم.

اصلاح شود

ریشه‌های دوم عدد ۹ را با  $\sqrt{9}$  و  $-\sqrt{9}$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر  $\sqrt{9} = 3$  و  $-\sqrt{9} = -3$ .

مثبت

۱- تساوی‌ها را کامل کنید.

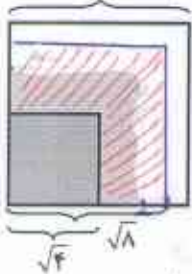
$$\begin{array}{cccc} \sqrt{16} = 4 & -\sqrt{16} = -4 & \sqrt{36} = 6 & -\sqrt{36} = -6 \\ \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} & -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} & \sqrt{49} = 7 & \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9} \end{array}$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست هستند؟ علت نادرستی را توضیح دهید.

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{25} = 5 & \sqrt{25} > 5 \quad \times & \sqrt{25} = 5 \quad \checkmark & \sqrt{25} = 5 \times 2 \quad \times \\ \sqrt{25} = 5^2 \quad \times & \sqrt{25} = -5 \quad \times & -\sqrt{25} = -5 \quad \checkmark & \sqrt{25} < 5 \quad \times \end{array}$$

در این درس منظور از جذرها همان چیز مثبتی است

۱- مربع به مساحت‌های ۸، ۴ و ۹ سانتی متر مربع در شکل زیر نمایش داده شده است. طول ضلع‌های مربع‌ها نیز مشخص شده است. با کمک شکل عبارت را کامل کنید.



شکل اصلاح شود

$$\sqrt{16} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$$

به نظر شما به کدام یک از این دو عدد نزدیک‌تر است؟

۲- به کمک روش فوق و با توجه به سطر اول جدول زیر، جذر تقریبی عددهای داده‌شده را به دست آورید و جدول را

کامل کنید.

مربع کامل قبلی	عدد	مربع کامل بعدی	جذر تقریبی
۴	۵	۹	$\sqrt{5}$ بین عددهای ۲ و ۳ است
۱۶	۱۷	۲۵	$\sqrt{17}$ بین دو عدد ۴ و ۵ است
۴۹	۶۱	۶۴	$\sqrt{61}$ بین عددهای ۷ و ۸ است
۲۵	۳۰	۳۶	$\sqrt{30}$ بین عددهای ۵ و ۶ است

# MATH-HOME.IR

۵/۳ به ۵/۲ نزدیک تر است یا ۵/۲

$$\sqrt{25} < \sqrt{28} < \sqrt{36} \Rightarrow 5 < \sqrt{28} < 6$$

۱- من خواهیم مقدار تقریبی  $\sqrt{28}$  را به دست آوریم.

الف)  $\sqrt{28}$  بین کدام دو عدد قرار دارد؟ چرا؟

ب) به کدام یک نزدیک تر است؟ چرا؟

ج) با توجه به جدول زیر جای خالی را کامل کنید:  $\sqrt{28} \approx 5/2$  (اصلاح:  $5/2$  نیست)

خواهی در نظر گرفته شود که با ماشین حساب مطابقت دارد

عدد	5	5/1	5/2	5/3	5/4
مجذور	25	26/01	27/04	28/09	29/16

با ماشین حساب انجام شود

۲- به همین روش مقدار تقریبی عددهای زیر را به دست آورید. راهبرد حدس و آزمایش

$$\sqrt{20} \approx \quad \sqrt{14} \approx \quad \sqrt{8} \approx$$

۱- چرا عددهای منفی جذر ندارند؟ یعنی عبارت مقابل بی معناست؟  $\sqrt{-25} = ?$

چون حاصل ضرب دو عدد مثبت و یا دو عدد منفی عددی مثبت است

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست اند؟

- $\sqrt{5} > 4$  ✗
- $\sqrt{6}$  بین ۲ و ۵ است ✗
- $\sqrt{15} < \sqrt{21}$  ✓
- $\sqrt{12} < 4$  ✓
- $\sqrt{40}$  بین ۵ و ۷ است ✓
- $\sqrt{3} > 2$  ✗

۳- به جای  $\square$  در محور اعداد زیر یکی از عددهای  $\sqrt{9}, \sqrt{4}, -\sqrt{4}, \sqrt{1}, \sqrt{1/4}, -\sqrt{1/4}, \sqrt{9/4}, -\sqrt{9/4}$  را قرار دهید.



۴- جاهای خالی را کامل کنید.

الف) ۷ و -۷ ریشه های  $\dots\dots\dots 49$  هستند. (ب) مجذور عدد صفر همان  $\dots\dots\dots$  است.

ج) اگر عددی صفر نباشد، توان دوم آن همیشه  $\dots\dots\dots$  است.

د) هر عدد مثبت دارای  $\dots\dots\dots$  ریشه دوم است که یکی از آنها  $\dots\dots\dots$  دیگری است.

۵- جذر تقریبی  $\sqrt{40}$  را به دست آورید.

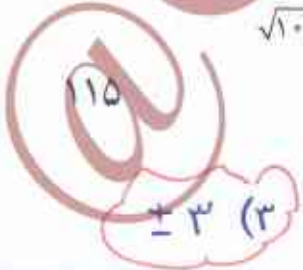
اصلاح شود

$$\sqrt{40} \approx \quad \sqrt{30} \approx \quad \sqrt{500} \approx \quad \sqrt{1000} \approx$$

جذر  $\sqrt{81}$  برابر است با

- ۹ (۱)
- ۳ (۲)
- ۳ (۳)

±۳ (۳)



در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید و برای هر کدام یک مثال بزنید.

توان • پایه • مجذور • مکعب • جذر • جذر تقریبی

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

- محاسبه عدد توان‌دار
- محاسبه یک عبارت توان‌دار با رعایت ترتیب
- محاسبه عبارت توان‌دار با پایه‌های منفی
- قانون ضرب با پایه‌های مساوی
- استفاده از قانون ضرب با پایه‌های مساوی در محاسبه
- قانون ضرب با توان‌های مساوی
- استفاده از قانون ضرب با پایه‌های مساوی در تجزیه عددها
- ساده کردن یک عبارت توان‌دار
- مفهوم جذر و ریشه
- پیدا کردن جذر یا ریشه عددهای مربع کامل و جذر تقریبی
- مفهوم مجذور و مکعب
- تأثیر پرانتز در محاسبه عبارت توان‌دار
- توان صفر

از این درس در ساده کردن عبارت‌های جبری و نوشتن رابطه‌های ریاضی در محاسبه سطح و حجم استفاده می‌کنیم.

در صورتی که تمرین‌های زیر را بتوانید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی فرا گرفته‌اید.

۱- عبارت توان‌دار زیر را محاسبه کنید.

$$(2^2 + 0^2) + 2^2 \times 3^2 - 1^2 = (4 + 0) + 4 \times 9 - 1 = 4 + 36 - 1 = 4^2$$

۲- عبارت توان‌دار را تا حد امکان ساده کنید. **اصلاحی**

$$(0.25)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{45} = 225 \quad 4^2 \times 8^2 \times 6^2 \times 3^3 = 24 \times 24 = 24$$

۳- جذر تقریبی عدد ۳۲ را بنویسید.  $\sqrt{32} \approx 5.6$

۴- ریشه‌های عدد ۱۲۱ را بنویسید و تساوی‌های زیر را کامل کنید.  $\sqrt{49} = 7$   $-\sqrt{25} = -5$

مقدور	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۳	۵/۴	۵/۵	۵/۶	۵/۷
مجذور	۲۵	۲۵/۱	۲۷/۴	۲۸/۹	۲۸/۹	۲۹/۱۶	۳۵/۲۵	۳۶/۳۶	۳۷/۴۹

$5 < \sqrt{32} < 6$

① کم می شود  $\frac{100}{100} a \times \frac{100}{100} a = \frac{96}{100} a^2 = 96\% S \Rightarrow 100\% - 96\% = 4\%$

$a = 30$   $\frac{20}{100} \times 30 = 6$   $S_1 = 900$   $S_2 = 24^2 = 576$   
 $900 - 576 = 324$

$x \mid 324$   
 $100 \mid 900$

$x = 34\%$

تمرین های دوره ای ۴

دوستی دوستانه: راهبرد مثال

$a = 10 \rightarrow \frac{10}{100} \times 10 = 1$   
 $S_1 = 100$   $S_2 = 94$   
 $100 - 94 = 6$

$(+49) \times (-65) = +$   
 $(+13) \times (-35) = +$   
 $(-4-3) \div (-7) =$

۱- حاصل عبارت ها را پیدا کنید.  
 $(-24) \times (-35) = +$   
 $(-21) \times (-20) = +$   
 $(7-18) \times (-2) =$

۲- مساحت مربعی به ضلع  $a$  برابر است با  $a^2$ . اگر از ضلع مربع  $20\%$  کم کنیم. مساحت مربع چند درصد کم می شود؟  
 ۳- الگوی زیر را توصیف کنید و چهار عدد بعدی آن را بنویسید.

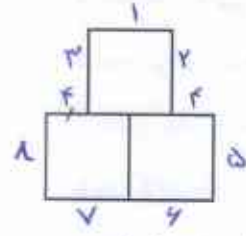
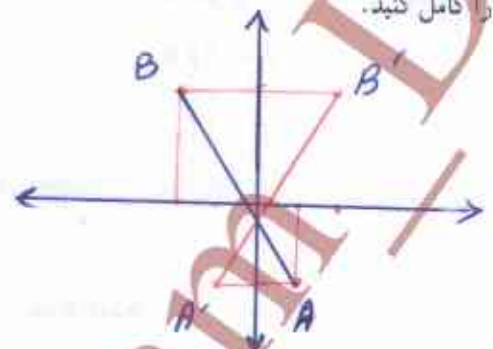
۵، ۲۵، ۱۲۵، ۶۲۵، ۳۱۲۵، ۱۵۶۲۵، ۷۸۱۲۵

$\times 5$   $\times 5$   $\times 5$

توان های عدد ۵

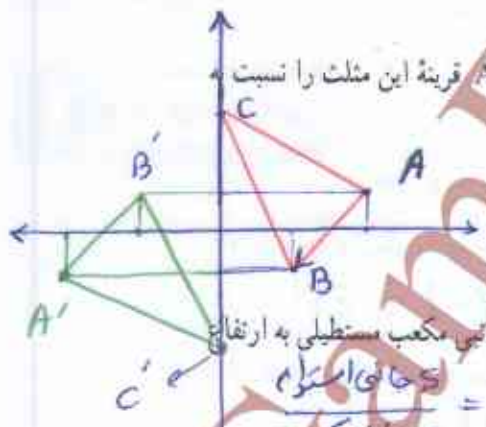
۴- نمودارهای زیر را کامل کنید.

۷	۱۲۴	۱۲۹	۵	۳
جنر	مجنور	جنر	مجنور	مکعب
$\sqrt{7}$	۲۶	۱۳	۲۵	۲۷



۵- مساحت شکل مقابل ۷۵ است. محیط شکل را پیدا کنید. (سه مربع مساوی هستند).  
 $75 \div 3 = 25$   $5 \times 3 = 12$   $12 \times 5 = 60$   
 $\sqrt{25} = 5$   $12 - 5 = 7$

۶- نقاط به مختصات  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  را پیدا کنید و باره خط  $AB$  را رسم کنید. قرینه این باره خط را نسبت به محور عرض ها پیدا کنید و مختصات رأس های  $A'$  و  $B'$  را بنویسید.



۷- مختصات سه رأس مثلث  $ABC$  عبارت اند از  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$  قرینه این مثلث را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید.

$AB = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$   
 $A + AC = C$   
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

مختصات بردار  $AB$  را بنویسید.  
 جمع منطوق با بردار  $AC$  را بنویسید.

۸- مساحت جانبی استوانه ای به ارتفاع  $10$  و شعاع قاعده  $3$  بیشتر است یا مساحت جانبی مکعب مستطیلی به ارتفاع  $10$  که قاعده اش مربعی به ضلع  $3$  است؟  
 $\frac{2 \times 3 \times 3 \times 10}{4 \times 3 \times 10} = \frac{314}{2} > 1$   
 چرا استوانه ایست؟  
 ۹- آیا اگر هر عدد را به توان  $2$  برسانیم، از خودش بزرگ تر می شود؟ چرا؟

۱۰- حاصل ضرب های زیر را بنویسید.

$2x \times 3x = 6x^2$   $-9n^2 \times 7n = -63n^3$   $-5n \times n^2 \times 8n^3 = -40n^6$

۱۱۷  
 $15 \rightarrow 15^2 = 225$   
 $15 > 225$

④ خیر

$x$	$x^2 - 3x$	تستی	$x$	$x^2 - 3x$	تستی
0	0	کم است	4	16 - 12 = 4	✓
1	1 - 3 = -2	"	-1	1 + 3 = 4	کم است
2	4 - 6 = -2	"	-2	4 + 6 = 10	"
3	9 - 9 = 0	"	-3	9 + 9 = 18	✓
4	16 - 12 = 4	"			
5	25 - 15 = 10	"			

$$2x \times 3x = 6x^2$$

$$-6x^2 \times 7x = -42x^3 \quad -4x \times x^2 \times 8x^2 = -32x^4$$

۱۱- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$2(x+1) - 2(1-x) = 4x$$

$$2(x-1) + 3x - 1 - x = 4x - 3$$

$$2(x^2y - xy^2) - 2(y^2x - yx^2) = 2x^2y - 2xy^2 - 2y^2x + 2yx^2 = 2x^2y - 2xy^2 - 2x^2y + 2xy^2 = 0$$

۱۲- با زاویه ۶۰ درجه و آزمایش با معادله  $x^2 - 3x = 18$  را به دست آورید.

۱۳- قاعده یک منشور به صورت زیر است. اگر ارتفاع این منشور ۱۰ سانتی متر باشد، حجم و مساحت جانبی و

مساحت کل آن را پیدا کنید.



پس حجم را هم می توانیم محاسبه کنیم

۱۴- عبارت توان دار زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{6}{5}\right)^3 \times \left(1\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{6}{5}\right)^9$$

$$144 = 2 \times 3^2$$

۱۵- عدد ۱۴۴ را تجزیه کنید و به صورت توان دار بنویسید.

$$[24, 24] = 72$$

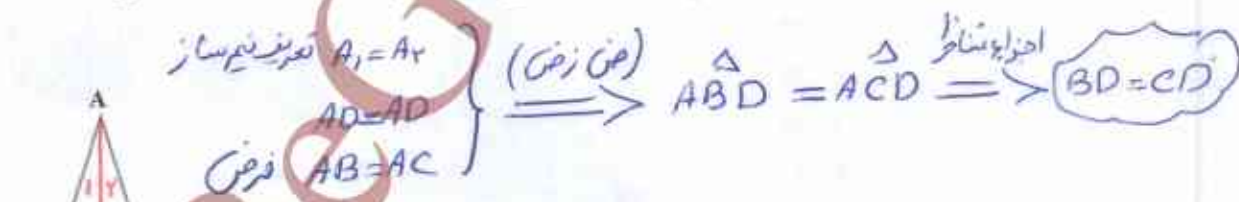
$$[12, 48] = 48$$

$$(24, 24) = 24$$

$$(12, 48) = 12$$

$$(50, 35) = 5 \quad [50, 35] = 350$$

۱۷- مثلث ABC متساوی الساقین است. نیمساز زاویه A را رسم می کنیم. چرا این نیمساز ضلع BC را نصف می کند؟



$$A_1 = A_2 \text{ (فرض)} \\ AD = AD \\ AB = AC \text{ (فرض)}$$

$$\Delta ABD = \Delta ACD \Rightarrow BD = CD$$

۱۸- ب.م.م.و ک.م.م. دو عدد A و B را به دست آورید.

$$B = 2^2 \times 3^5 \times 7$$

$$(A, B) = 2^2 \times 3^2$$

$$[A, B] = 2^5 \times 3^5 \times 7$$



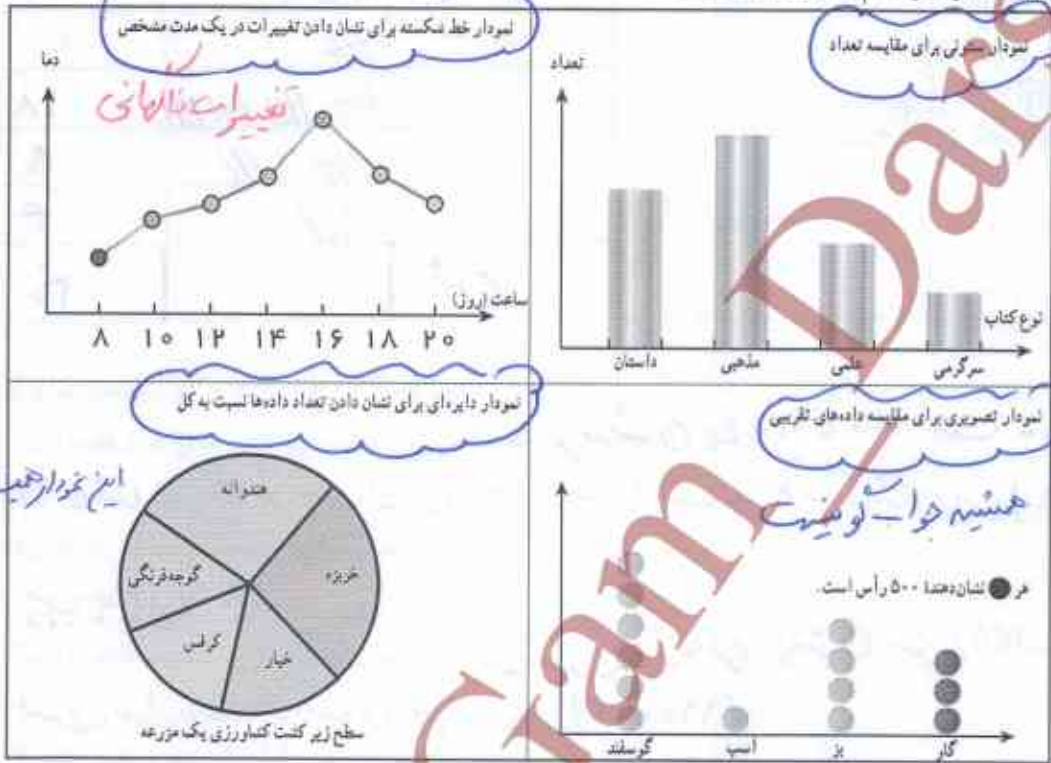
- کلاس ششم
- تعریف علم آمار
  - جدول داده‌ها
  - نمودار
  - انواع نمودارها



بررسی

علم آمار

در دوره دبستان با علم آمار که علم جمع‌آوری، سازمان‌دهی، تحلیل و تفسیر اطلاعات (داده‌ها) است، آشنا شدید. داده‌ها را با چوب‌خط سرشماری و در جدول سازماندهی کردید. سپس با توجه به موضوع و هدف آمارگیری نمودار آن اطلاعات را رسم کردید. در زیر ۲ نوع نمودار و کاربرد هر کدام یادآوری شده است:



نمودار میله‌ای

این نمودار همیشه جوابگویی باشد

همیشه جوابگویی نیست

اگر تعداد داده‌های جمع‌آوری شده زیاد باشند، بررسی آنها طولانی و غیرمفید می‌شود. به همین دلیل داده‌ها را دسته‌بندی می‌کنند و سازمان‌دهی جدیدی متناسب با آن موضوع آماری و برای کسب نتایج بهتر ارائه می‌کنند.

در زیر داده‌های جمع‌آوری شده در مورد اندازه قد ۴۰ نفر از مردان ساکن یک روستا بر حسب سانتی‌متر مشخص شده است. (۴۰ = n)

۱۶۴	۱۶۸	۱۷۳	۱۸۵	۱۵۲	۱۷۴	۱۷۸	۱۹۲	۱۵۰	۱۷۵	۱۶۷	۱۸۲	۱۴۷	۱۸۱
۱۵۱	۱۶۲	۱۶۷	۱۷۳	۱۴۲	۱۶۳	۱۳۸	۱۶۵	۱۳۷	۱۷۱	۱۹۳	۱۶۸	۱۷۰	۱۳۰
۱۶۵	۱۸۳	۱۵۲	۱۶۹	۱۷۶	۱۶۹	۱۷۰	۲۰۵	۱۶۸	۱۷۳	۱۹۰	۱۴۳	۱۳۰	Min

دامنه تغییرات =  $Max - Min$

به فاصله بین این دو عدد دامنه تغییرات می‌گویند.

برای دسته‌بندی داده‌ها با فاصله مساوی، دامنه تغییرات را بر تعداد دسته‌ها تقسیم می‌کنیم تا طول دسته‌ها بدست آید.

دامنه تغییرات =  $\frac{طول هر دسته}{تعداد دسته‌ها}$

$\frac{۷۵}{۵} = ۱۵$

در این فعالیت، چون می‌خواهیم ۵ دسته داشته باشیم، دامنه تغییرات را بر ۵ تقسیم می‌کنیم.

معنای  $۱۳۰ \leq x < ۱۴۵$  را توضیح دهید. چه تفاوتی بین  $<$  و  $\leq$  وجود دارد؟

۱۲۰ داده‌هایی که بزرگ‌تر یا مساوی عدد ۱۳۰ است و کوچک‌تر از ۱۴۵ است

فراوانی

با توجه به حدود دسته‌ها، با استفاده از چوب خط تعداد داده‌های هر دسته را که به آن فراوانی می‌گویند، تعیین کنید.



حدود دسته‌ها	چوب خط	فراوانی
$130 \leq x < 140$	###	۵
$140 \leq x < 150$	###	۵
$150 \leq x < 160$	###-###-###-###	۱۸
$160 \leq x < 170$	###-###	۸
$170 \leq x < 180$	###	۴
مجموع		۳۰

اصطلاح

زمانی که داده‌ها بی‌نظم باشند در نمودار ستونی ها را به هم چسبیم و نام نمودار، نمودار مستطیلی (هیستوگرام) است

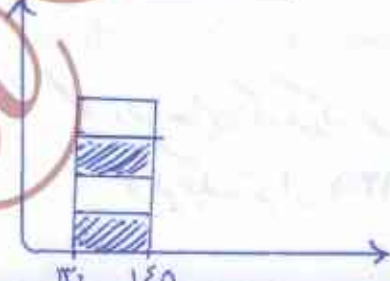
با توجه به فعالیت بالا به سوال‌های زیر پاسخ دهید.  
 ۱- با توجه به اندازه‌ها معنای هر دسته را بنویسید.  
 ۲- قد اکثر افراد در چه محدوده‌ای است؟

۳- با توجه به نمودار متوجه چه چیزی می‌شوید؟  
 ۴- فکر می‌کنید متوسط میانگین قد مردان این روستا در چه دسته‌ای قرار می‌گیرد؟

۵- دانستن این آمار، اطلاعات و نمودار چه کاربردی دارد؟  
 تیم بسکتبال - برای دانشمندی که می‌خواهد برای ورزش همراهی در این روستا برود

اگر فراوانی داده‌ها به صورتی باشد که نمودار (بلوکی) متقارن شود، میانگین داده‌ها در دسته وسط قرار می‌گیرد. یکی از ویژگی‌های خلقت و آفرینش این است که اگر پدیده‌های طبیعی مثل قد انسان‌ها، وزن آنها، هوش و استعداد، شدت بزرگی زلزله، طوفان و ... اندازه‌گیری کنند، پس از دسته‌بندی و پیدا کردن فراوانی دسته‌ها نمودار آن را رسم کنند مانند شکل متقارن زیر خواهد شد.

در اصطلاح می‌گویند داده‌ها به صورت طبیعی توزیع شده‌اند. برای مثال در مسئله بالا به همان تعداد مردان قد کوتاه، مردان قد بلند وجود دارد. به طور تقریبی به همان تعداد افرادی که قدشان کمتر از میانگین است افرادی وجود دارند که قد آنها بیشتر از میانگین است.



نمودار نمودار: هر یک از نشان دهنده‌ی داده‌ها است

۱۲۱

۱- میانگین دمای هوا در روزهای مختلف یک منطقه به صورت زیر گزارش شده است:

+۲	+۲	+۴	+۵	+۶	۰	-۱	-۲	۰	-۲	-۷	-۲	-۱	۰
-۱	-۳	-۶	-۷	<span style="color: red;">-۸</span>	<span style="color: red;">+۸</span>	+۷	+۸	+۷	+۶	+۳	+۱	+۲	+۴
+۲	+۲	-۴	-۲	<span style="color: red;">-۱</span>	<span style="color: red;">۰</span>	-۵	-۳	۰	۰	+۱	+۱	+۲	+۷

جدول فراوانی داده‌ها را بر اساس سؤالات زیر مشخص و نمودار ستونی را رسم کنید.

دامنه تغییرات چقدر است؟  $۸ - (-۸) = ۱۶$  دامنه تغییرات

داده‌ها را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم، طول هر دسته چقدر است؟  $۱۶ \div ۴ = ۴$  طول هر دسته

۲- نمرات درس ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس به صورت زیر است. با توجه به دامنه تغییرات آنها را به ۵ دسته مساوی

دسته‌بندی کنید و پس از رسم جدول نمودار ستونی فراوانی هر دسته را رسم کنید. با توجه به نمودار وضعیت این کلاس را توصیف کنید.

۱۶	۱۸	۱۵	۹/۵	۱۲/۵	۱۳	۱۲	۱۳/۵	۱۴	۱۱	۱۳	۹	۸
۱۵	۱۴	۱۹	۱۸/۵	۱۷	۱۵/۵	۱۶/۵	۱۱	۸/۵	۷	<span style="color: red;">۵</span>	۱۳	۱۵
۱۴	۱۰/۵	۱۱/۵	۱۵	۱۸	۱۷	۱۲	۶	۱۲/۵	<span style="color: red;">۲۰</span>	<span style="color: red;">Min</span>		

۳- در یک کارگاه تولید لامپ، ۳۰ لامپ به صورت تصادفی انتخاب و طول عمر آنها بر حسب ساعت اندازه‌گیری شده

است. داده‌ها را به ۵ دسته با فاصله ۵ ساعت تقسیم کنید و جدول فراوانی و نمودار ستونی آن را رسم کنید.

۱۵۶	۱۵۹	۱۶۵	۱۶۳	۱۶۱	۱۵۷	۱۵۲	۱۵۷	۱۶۸	<span style="color: red;">۱۷۲</span>	۱۶۳	۱۵۸	۱۵۷	۱۶۱	۱۷۱
۱۶۳	۱۶۸	۱۶۷	۱۵۹	<span style="color: red;">۱۵۷</span>	۱۵۳	۱۵۸	۱۵۷	۱۶۹	۱۷۰	۱۵۳	۱۶۹	۱۵۸	۱۶۵	۱۵۶

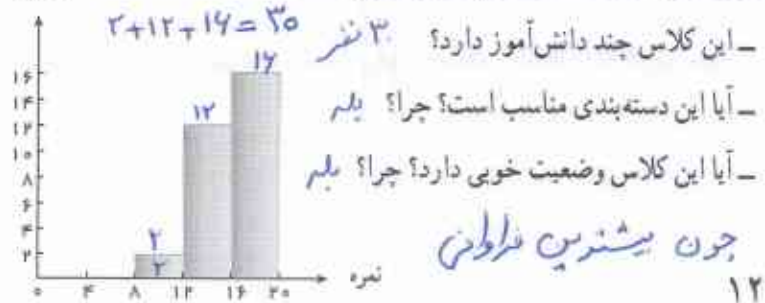
۴- از دانش‌آموزان یک کلاس مدت زمانی که طول می‌کشد تا از خانه به مدرسه بروند، سؤال شده و پس از دسته‌بندی تعداد دانش‌آموز

داده‌ها نمودار ستونی مقابل رسم شده است. چند دانش‌آموز بیشتر از ۱۰ دقیقه طول می‌کشد تا از خانه به مدرسه بروند؟ این



کلاس چند دانش‌آموز دارد؟ ۴ نفر

۵- نمودار نمرات یک کلاس به صورت زیر است.



این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟ ۳۰ نفر  $۲+۱۲+۱۶=۳۰$

آیا این دسته‌بندی مناسب است؟ چرا؟ بله

آیا این کلاس وضعیت خوبی دارد؟ چرا؟ بله

چون بیشترین فراوانی ۱۲۲

در دسته ۱۶-۲۰ قرار دارد

طول هر دسته  $\frac{۲۰-۰}{۵} = ۴$



## میانگین داده‌ها

پس از اینکه داده‌های آماری در جدول سازماندهی شد و نمودارهای مختلف به درک بهتر آن اطلاعات کمک کردند، می‌توان از رابطه‌های مختلف مثل محاسبه میانگین داده‌ها نیز برای کامل‌تر شدن نتایج حاصل از داده‌ها برای تحلیل و تفسیر بهتر آنها استفاده کرد. در دوره ابتدایی با میانگین گرفتن آشنا شدید. میانگین تعدادی داده عددی از مجموع آنها تقسیم بر تعداد به دست می‌آید.

۱- نمرات ریاضی یک دانش آموز ۱۷، ۱۸، ۱۵، ۱۷، ۱۹ است. میانگین نمرات او را حساب کنید.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \bar{X} = \frac{S}{n}$$

۲- میانگین نمرات ۷ درس یک دانش آموز ۱۶/۵ است. اگر نمرات دو درس دیگر او که ۱۷ و ۱۵ شده است، به آنها اضافه شود، میانگین جدید را پیدا کنید.

$$115,5 + 15 + 17 = 147,5 \quad \text{مجموع نمرات ۷ درس} \quad 7 \times 17,5 = 122,5$$

$$147,5 \div 9 = 16,38$$

آیا می‌توان میانگین دو نمره ۱۵ و ۱۷ را پیدا کرده (۱۶ می‌شود) و سپس میانگین ۱۶ و ۱۶/۵ را حساب کرد؟ چرا؟

$$\frac{15+17}{2} = 16$$

$$\frac{16+16,5}{2} = 16,25$$

$$16,25 \neq 16,38$$

۳- نمرات یک دانش آموز به صورت زیر است:

۱۷/۵    ۱۶/۵    ۱۴    ۱۹    ۱۸/۵    ۱۷    ۱۵    ۱۶    ۱۵/۵

میانگین نمرات او را پیدا کنید. چند نمره بالاتر از میانگین و چند نمره پایین‌تر از میانگین قرار می‌گیرند؟ آیا این دو تعداد ۴ نمره بالاتر

مساوی است؟ بله  $\frac{149}{9} \approx 16,5$  میانگین =  $\frac{15,5 + 12 + 15 + \dots + 17,5}{9}$  و ۴ نمره پایین‌تر

اختلاف نمرات بالای میانگین را با آن حساب کنید. حاصل جمع آنها را پیدا کنید. به همین ترتیب مجموع اختلاف نمرات

۱۴، ۱۵، ۱۵/۵، ۱۶، ۱۶/۵، ۱۷، ۱۷/۵، ۱۸/۵، ۱۹

پایین‌تر از میانگین را هم پیدا کنید. نتایج بالا را با هم مقایسه کنید.

$$15 + 1 + 2 + 2,5 = 7$$

$$15 + 1 + 1,5 + 2,5 = 5,5$$

اگر مقدار داده‌ها زیاد باشند و داده‌ها دسته‌بندی شده باشند، می‌توان میانگین داده‌ها را با تقریب بسیار

خوب به دست آورد.

$$\frac{4499}{40} = 112,475 \text{ میانگین}$$

۱- با کمک ماشین حساب میانگین قد ۴ نفر را که در درس قبل مطرح شده بود، پیدا کنید.  
 ۲- برای به دست آوردن میانگین هر دسته، مانند دسته  $130 \leq x < 145$ ، ابتدا مجموع عددهای ۱۳۰ و ۱۴۵ را به دست آورده، سپس حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{130 + 145}{2} = 137,5$$

۳- اکنون تمام داده‌ها را در این قسمت بنویسید. هر داده را با میانگین دسته‌ای که داده در آن قرار دارد، جایگزین کنید.  
 برای مثال چون عدد ۱۹۲ در دسته ۲۰۵-۱۹۰ قرار دارد به جای آن عدد  $197,5$  را که میانگین این دسته است، قرار دهید.

- ۱۴۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۸۲,۵, ۱۵۲,۵, ۱۴۷,۵, ۱۸۲,۵, ۱۹۷,۵, ۱۵۲,۵, ۱۸۲,۵, ۱۴۷,۵, ۱۴۷,۵,  
 ۱۸۲,۵, ۱۵۲,۵, ۱۸۲,۵, ۱۵۲,۵, ۱۴۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۳۷,۵, ۱۴۷,۵,  
 ۱۳۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۳۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۹۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۳۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۸۲,۵, ۱۵۲,۵,  
 ۱۸۲,۵, ۱۸۲,۵, ۱۴۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۹۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۴۷,۵, ۱۹۷,۵, ۱۳۷,۵

۴- چرا در عددهای بالا ۲ تا  $197,5$  وجود دارد؟ چون تعداد داده‌های این دسته ۴ تا بود

$$\frac{4710}{40} \approx 117,75$$

۵- با توجه به عددهای بالا میانگین ۴ عدد جدید را پیدا کنید.

چگونه برای این کار از ضرب استفاده می‌کنید و این ضرب‌ها چه رابطه‌ای با فراوانی جدول دارد؟

۶- میانگین به دست آمده را با میانگین واقعی که با ماشین حساب پیدا کردید، مقایسه کنید. مقدار خطای این روش

$$117,75 - 112,475 = 5,275$$

چقدر است؟

با توجه به فعالیت بالا با کامل کردن جدول زیر میانگین داده‌ها را دوباره محاسبه کنید.

حوزه دسته‌ها	فراوانی	میانگین دسته	میانگین دسته × فراوانی
$130 \leq x < 145$	۴	۱۳۷,۵	۵۵۱,۰
$145 \leq x < 160$	۵	۱۵۲,۵	۷۶۲,۵
$160 \leq x < 175$	۱۸	۱۴۷,۵	۲۶۵۵,۰
$175 \leq x < 190$	۸	۱۸۲,۵	۱۴۶۰,۰
$190 \leq x \leq 205$	۴	۱۹۷,۵	۷۹۰,۰
مجموع			۴۷۱۰

$$\text{میانگین} = \frac{4710}{40} = 117,75$$

- ۱- میانگین دمای هوا، میانگین نمرات ریاضی کلاس، میانگین ساعات عمر لامپ مربوط به تمرین های قبل را پیدا کنید. از جدول فراوانی استفاده کنید.
- ۲- جدول زیر را کامل و میانگین را حساب کنید.

دسته ها	خط نشان	فراوانی	متوسط دسته	متوسط × فراوانی
$0 \leq x < 4$		۶	۲	۱۲
$4 \leq x < 8$		۴	۶	۲۴
$8 \leq x < 12$	###	۸	۱۰	۸۰
$12 \leq x < 16$	###	۱۷	۱۴	۲۳۸
$16 \leq x \leq 20$	###	۹	۱۸	۱۶۲
جمع		۴۴		۵۱۶

۳- میانگین نمرات زیر را به دست آورید. چه رابطه ای بین این عددها وجود دارد؟ فاصله هر عدد تا میانگین چقدر است؟

۱۱ ۱۲ ۱۲ ۱۳ ۱۳ ۱۳ ۱۴ ۱۴ ۱۵

$$\bar{x} = \frac{117}{9} = 13$$

$$\frac{11+15}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

با توجه به رابطه ای که پیدا کرده اید، میانگین عددهای زیر را به دست آورید.

۱۷ ۱۴ ۱۱ ۱۵ ۱۳ ۱۸ ۱۷ ۱۳ ۱۶

$$\bar{x} = \frac{130}{9} = 15$$

$$\frac{12+18}{2} = 15$$

۴- میانگین نمرات ریاضی دانش آموزان یک کلاس که ۳۰ دانش آموز دارد،  $17/25$  شده است. یکی از دانش آموزان نمره اش



خیلی کم است و در این امتحان نمره  $3/5$  گرفته است؛ در حالی که بقیه دانش آموزان نمره بالای

۱۵ گرفته اند. اگر این دانش آموز را از کلاس کنار بگذاریم، معدل کلاس چند می شود؟ از این

$$\frac{17/25 \times 30 - 3/5}{29} = \frac{517/5 - 3/5}{29} = \frac{514}{29} = 177/29$$

سؤال چه نتیجه ای می گیرید؟

حالا فرض کنید همه دانش آموزان کلاس نمره کمتر از ۱۴ گرفته اند و معدل کلاس ۳۰

نفره  $1/25$  شده است. به جز یک دانش آموز که نمره ۲۰ گرفته است. اگر این دانش آموز را

$$\frac{30 \times 10/25 - 20}{29} = \frac{307/5 - 20}{29} = \frac{287/5}{29} \approx 9/9$$

کنار بگذاریم معدل کلاس چند می شود؟

نتیجه می گیریم نمرات بالا و پایین تاثیر زیادی روی میانگین دارند



۱- در یک کیسه ۵ مهره قرمز، ۳ مهره سفید و ۸ مهره آبی وجود دارد. اگر بدون نگاه کردن به داخل کیسه یک مهره را در بیاریم، چه رنگی خواهد داشت؟ چرا؟  
 یلی از سه رنگ قرمز، سفید یا آبی  
 زیرا از هر سه رنگ در کیسه داریم و ما نگاه نمی‌کنیم

اولین مهره‌ای که از کیسه در آوردیم، به رنگ آبی بود. آن را داخل کیسه می‌گذاریم و دوباره یک مهره را بیرون می‌آوریم. این بار احتمال اینکه دوباره آبی بیاید بیشتر است یا اینکه قرمز بیاید؟ چرا؟ آبی، چون تعداد مهره‌های آبی بیشتر است

۲- یک سکه را یک بار می‌اندازیم، چند حالت ممکن است اتفاق بیفتد؟ دو حالت، پشت یا رو  
 «اگر بار اول سکه رو آمد، بار دوم حتماً پشت می‌آید.» آیا این جمله درست است؟ چرا؟ خیر  
 زیرا در بار دوم هم شانس رو یا پشت آمدن یلی است

«امروز هوا ابری است، احتمال دارد باران بیاید.» شانس آوردم همه سؤال‌های امتحان را قبل از آزمون خوانده بودم.»  
 از این جملات روزانه زیاد استفاده می‌کنیم. کلماتی مثل احتمال، شانس، بخت و اقبال به صورت‌های مختلف در زندگی روزمره ما به کار می‌روند. شما هم چند مثال بیاورید. بیرون آوردن مهره از داخل کیسه، رو یا پشت آمدن سکه یک پیشامد تصادفی یا اتفاقی است چون ما در نتیجه آنها نقشی نداریم. وقتی یک سکه را می‌اندازید، تعداد پیشامدهای ممکن ۲ است و بالاخره یکی از آن دو اتفاق می‌افتد. شانس را بر تاپ می‌کنیم، احتمال اینکه شانس بیاریم.

آوردن قرعه‌کشی برنده شوم، ما شانس می‌خورم

۱- در هر یک از موارد زیر یک پیشامد توصیف شده است. مشخص کنید چه امکانی برای وقوع (اتفاق افتادن) دارد.

احتمال دارد	قطعاً اتفاق می‌افتد	امکان ندارد
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- یک انسان بدون داشتن قلب و مغز زندگی نمی‌کند. قطعاً است
- هوا سرد است و از ایرهای خاکستری یکدست پوشیده شده است؛ پس برف می‌آید. احتمال دارد
- یک سکه را انداختیم، رو می‌آید. احتمال دارد
- ظرفیت یک ماشین سواری ۵ نفر است. قطعاً است (نفر طراح نشاء)
- من درس‌هایم را خوانده‌ام و برای امتحان کاملاً آماده‌ام؛ پس امتحان ریاضی را ۲۰ می‌شوم.
- فصل بهار است، هوا کمی ابری است ولی احتمال دارد باران بیاید.
- در یک کیسه ۴ مهره آبی و سفید است. احتمال اینکه یک مهره به رنگ قرمز دربیاید.

امکان ندارد



# MATH-HOME.IR



۱- در هر یک از مثال های زیر تمام حالت های ممکن را بنویسید.

• انداختن یک سکه : رو - پشت

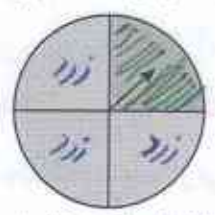
• انداختن یک تاس : ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

• حالت هایی که برای روشنایی یک لامپ برق اتفاق می افتد : روشن - خاموش

• در داخل یک کیسه مهره های سبز، زرد و آبی به تعداد مساوی وجود دارد. حالت های ممکن برای یک مهره که از

کیسه بیرون می آید : سه حالت (سبز، زرد، آبی)

• رنگی که عقربه پس از جرخیدن و ایستادن روی آن می ایستد. سبز - زرد



۲- وقتی دو تاس را بیندازیم، برای مثال ممکن است ۳ و ۵ بیاید. این حالت را به صورت (۳،۵) و اگر ۵ و ۳ بیاید را با

(۵،۳) نشان می دهیم. تمام پیشامدهای ممکن پس از انداختن دو تاس را بنویسید.

از چه راهبردی برای حل این مسئله استفاده می کنید؟ آفوسازی (۱،۱)، (۱،۲)، (۱،۳)، (۱،۴)، (۱،۵)، (۱،۶)، (۲،۱)، (۲،۲)، (۲،۳)، (۲،۴)، (۲،۵)، (۲،۶)

چرا از این راهبرد استفاده کردید؟ تکراری ننویسیم و جانبداریم

حالت  $4 \times 4 = 16$

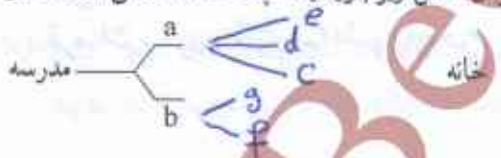
۳- وقتی حمید می خواهد از مدرسه به خانه برگردد، چندین راه مختلف برای او وجود دارد. برای سادگی کار نام

کوچه ها و خیابان ها را با حروف بیان می کنیم. حمید از مدرسه که خارج شود، می تواند از خیابان a یا b حرکت کند. اگر از

خیابان a برود، از ۳ کوچه c و d و e می تواند به خانه برسد. و اگر از راه b برود، باید از یکی از کوچه های f و g برود تا به خانه

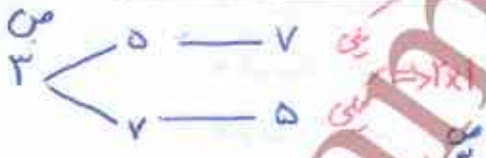
برسد. تمام حالت های ممکن برای رفتن از مدرسه به خانه را با کامل کردن شکل زیر بنویسید. چند حالت ممکن است اتفاق

بیفتد؟ ۵ حالت



تمام حالات ممکن را برای هر یک از موارد زیر پیدا کنید.

• اعداد سه رقمی که در آنها رقم های ۷ و ۵ و ۳ به کار رفته است (بدون رقم تکراری).



$3 \times 2 \times 1 = 6$

• حالت های مختلف برای اینکه از داخل کیسه ای که حاوی ۳ مهره به رنگ های آبی و قرمز و سبز، مهره ای خارج کنیم.

(یک یا دو یا سه مهره می توانیم خارج کنیم.)

حالت ۱ مهره  $\rightarrow$  ۳ حالت (آبی، قرمز یا سبز)

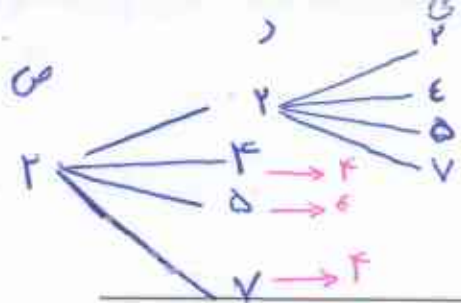
حالت ۲ مهره  $\rightarrow$  ۳ حالت (سبز و قرمز)، (سبز و آبی)، (قرمز و آبی)

حالت ۳ مهره  $\rightarrow$  ۱ حالت



تاس	سکه	تاس	سکه
۱	س	۱	س
۱	س	۱	ع
۱	ع	۲	س
۱	ع	۲	ع
۱	ع	۳	س
۱	ع	۳	ع
۱	ع	۴	س
۱	ع	۴	ع
۱	ع	۵	س
۱	ع	۵	ع
۲	س	۱	س
۲	س	۱	ع
۲	س	۲	س
۲	س	۲	ع
۲	س	۳	س
۲	س	۳	ع
۲	س	۴	س
۲	س	۴	ع
۲	س	۵	س
۲	س	۵	ع
۲	ع	۱	س
۲	ع	۱	ع
۲	ع	۲	س
۲	ع	۲	ع
۲	ع	۳	س
۲	ع	۳	ع
۲	ع	۴	س
۲	ع	۴	ع
۲	ع	۵	س
۲	ع	۵	ع
۳	س	۱	س
۳	س	۱	ع
۳	س	۲	س
۳	س	۲	ع
۳	س	۳	س
۳	س	۳	ع
۳	س	۴	س
۳	س	۴	ع
۳	س	۵	س
۳	س	۵	ع
۳	ع	۱	س
۳	ع	۱	ع
۳	ع	۲	س
۳	ع	۲	ع
۳	ع	۳	س
۳	ع	۳	ع
۳	ع	۴	س
۳	ع	۴	ع
۳	ع	۵	س
۳	ع	۵	ع





۵۴

$$\Rightarrow \frac{4 \times 4 = 16}{\text{کل}}$$

$$\begin{aligned} 2 &\rightarrow 4 \times 4 = 16 \\ 4 &\rightarrow 4 \times 4 = 16 \\ 5 &\rightarrow 4 \times 4 = 16 \\ 7 &\rightarrow 4 \times 4 = 16 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4 \times 4 \times 4 = 64$$

۱- تعداد عددهای ۳ رقمی را که با رقم‌های ۲، ۴، ۵، ۷ می‌توان ساخت، پیدا کنید. اگر هر عدد رقم تکراری نداشته باشد، چه کسری از این عددها زوج هستند؟

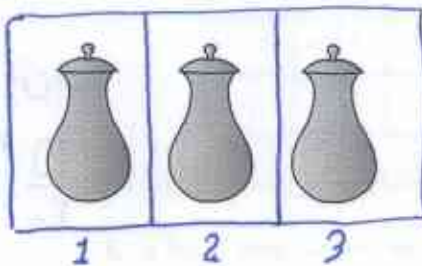
۲- تعداد کلمات دو حرفی را که با سه حرف a، b، c می‌توان ساخت، پیدا کنید. *یکلی از*

۵ حالت

۳- یک ماشین ۴ چرخ و یک چرخ اضافه (زایاس) دارد. به چند حالت ممکن است که این چرخ‌ها پنجر باشند؟

۴- در سه ظرف زیر شکر، نمک و جای قرار دارد. به چه حالت می‌توان این سه ظرف را در این سه مکان قرار داد؟

اصلاح شود



۱	۲	۳
ش	ن	ج
ش	ج	ن
ن	ش	ج
ن	ج	ش

۱	۲	۳
ش	ش	ش
ج	ن	ش

۶ حالت می‌توان جای دار

۵- به چند حالت می‌توان کره، مریا، پنیر و گردو را در ۴ قسمت ظرف مقابل قرار داد؟



$$(4-1)! = 3! = 6$$

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4} = 6$$

۶ حالت ۴ بار تکرار می‌شود



۶- اگر یک سکه را بیندازیم، یا پشت بارو می‌آید. در چهار پرتاب متوالی یک سکه، هر ۴ بار رو آمده است. فکر

می‌کنید اگر بار پنجم سکه را بیندازیم چه می‌آید؟ چرا؟ *بار رو یا پشت*

الف) این بار حتما پشت می‌آید. *نادرست* ب) این بار هم رو می‌آید. *نامرغ* ج) احتمال رو یا پشت آمدن مساوی

است. *درست* زیرا برای بار پنجم نیز برای هر دو حالت شانس مساوی داریم

۷- لوله‌های انشعاب آب به هر قسمت که برسند، دو شاخه می‌شوند پس از طی کردن ۵ قسمت چند خروجی خواهیم

داشت؟ با عدد توان‌دار نشان دهید.



$$2^5 = 32 \text{ خروجی}$$

$$\begin{aligned} 1 \times 2 &= 2 & 4 \times 3 &= 12 \\ 2 \times 2 &= 4 & 6 \times 2 &= 12 \\ 3 \times 4 &= 12 & 12 \times 1 &= 12 \end{aligned}$$

۸- ۱۲ مهره داریم. به چند صورت می‌توان این ۱۲ مهره را به دسته‌های مساوی تقسیم کرد؟ *حالت*

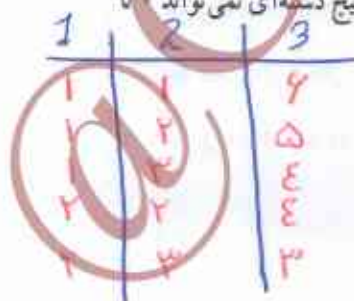
به چند حالت می‌توان به دو دسته تقسیم کرد؟ *حالت* (۱،۱۱)، (۲،۱۰)، (۳،۹)، (۴،۸)، (۵،۷)، (۶،۶)

۸ مهره را به چند صورت می‌توان به سه دسته تقسیم کرد؟

(همراه با نظم و ترتیب فکر کنید و با راهبرد الگوسازی تمام حالت‌های ممکن را به دست آورید. هیچ دسته‌ای نمی‌تواند

مهره داشته باشد.)

۱۲۸



$\Rightarrow$  حالت ۵



۱- در داخل یک کیسه ۲ مهره آبی و ۲ مهره قرمز قرار دهید (می توانید از نخود و لوبیا استفاده کنید). بدون نگاه کردن به داخل کیسه یک مهره خارج و رنگ آن را در جدول زیر یادداشت کنید. مهره را سر جایش بگذارید و این آزمایش را ۲۰ بار تکرار کنید.

آزمایش	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	
رنگ																					

آزمایش شود  
 $\frac{3}{5}$

قرمز  
 $\frac{3}{5}$   
 آبی

چه کسری از آزمایش‌ها به رنگ آبی درآمد؟ چه کسری از مهره‌ها به رنگ آبی است؟ هر دو کسر را به صورت عدد اعشاری بنویسید و با هم مقایسه کنید.

هر ۵ دانش آموز نتایج آزمایش‌های خود را با هم جمع کنند. از مجموع ۱۰۰ بار چند بار آبی و چند بار قرمز است؟

اکنون بنویسید چه کسری از آزمایش‌ها به رنگ آبی درآمد است؟ چه کسری از مهره‌ها به رنگ آبی است؟

آبی  
 $\frac{3}{5}$   
 کل

$\frac{3}{5}$

حالا دو کسر را مقایسه کنید. آیا به هم نزدیک شده‌اند؟ بله

اگر آزمایش ۱۰۰ دانش آموز (یعنی ۲۰۰ بار) را بنویسید، آیا این کسرها به هم نزدیک‌تر می‌شوند؟ بله

وقتی بخواهیم از داخل کیسه بالا یک مهره خارج کنیم، از چند مهره می‌توانیم یکی را انتخاب کنیم؟ ۵ مهره

چند تا از آن مهره‌ها آبی است؟ ۳ چه کسری از مهره‌ها آبی است؟  $\frac{3}{5}$

هر چه قدر تعداد آزمایش‌ها بیشتر شود، جواب به  $\frac{3}{5}$  نزدیک‌تر می‌شود



۲- یک صفحه چرخنده به شکل مقابل است. هر بار صفحه یا عقربه را می‌چرخانیم و پس

از ایستادن عقربه روی یکی از رنگ‌ها قرار می‌گیرد. این آزمایش را ۲۰ بار انجام دهید و نتیجه را یادداشت کنید.

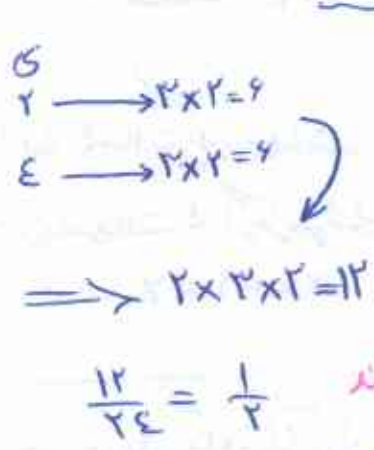
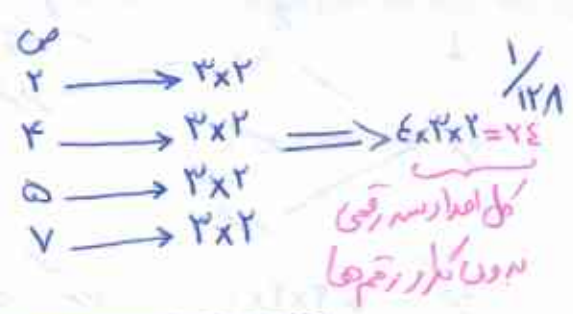
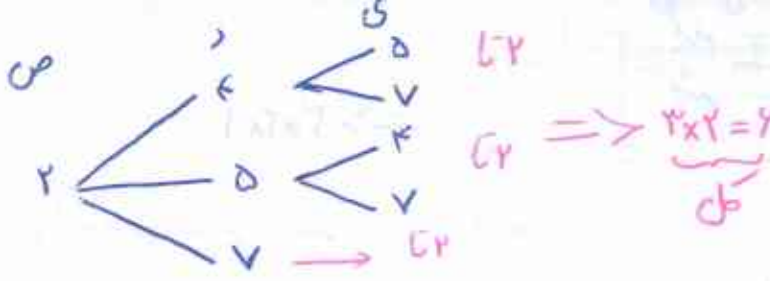
آزمایش	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	
رنگ																					

۵ نفر نتایج خود را با هم جمع کنند. تعداد نتیجه آزمایش به رنگ سبز: — قرمز: — آبی: —

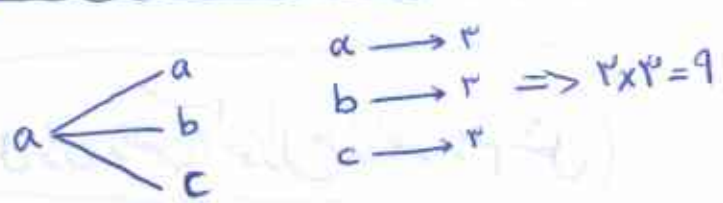
چه کسری از شکل به رنگ سبز است؟  $\frac{1}{6}$  چه کسری از آزمایش‌ها به رنگ سبز درآمد؟

آیا این دو کسر به هم نزدیک شده‌اند؟ بله

تعداد سبز  
 $\frac{1}{6}$   
 ۱۲۹ ۱۵۵

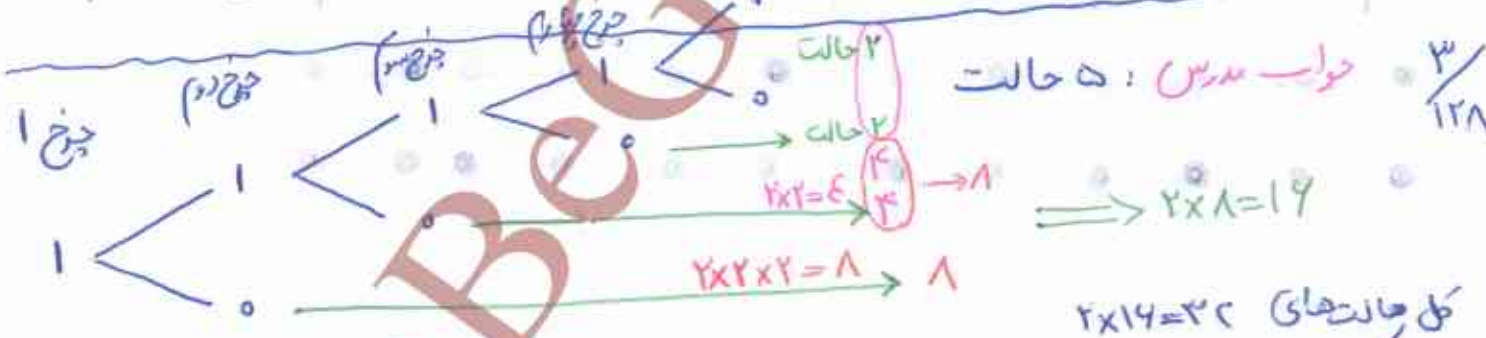
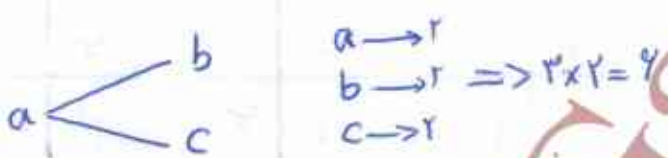


$\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$  اعداد زوج در باشند



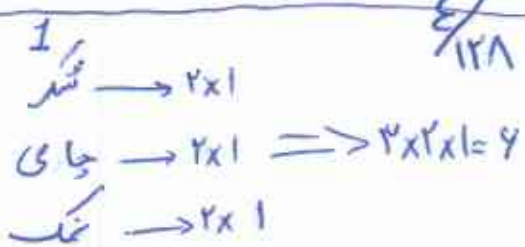
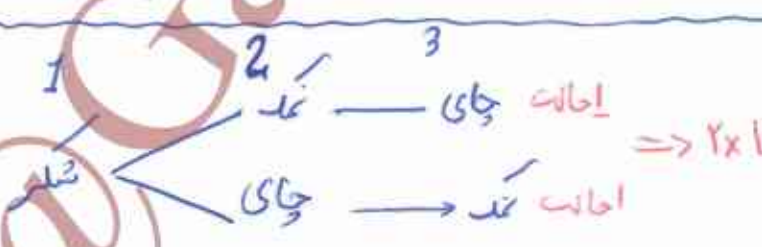
$\frac{2}{128}$

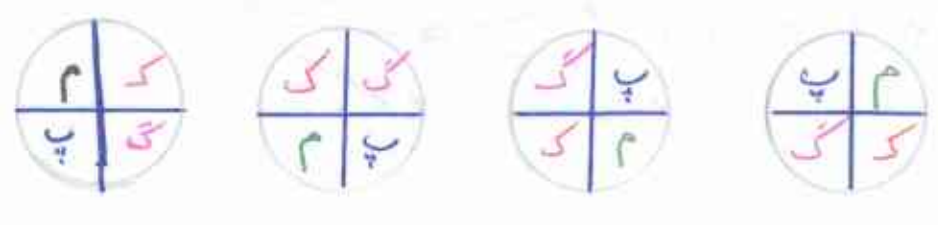
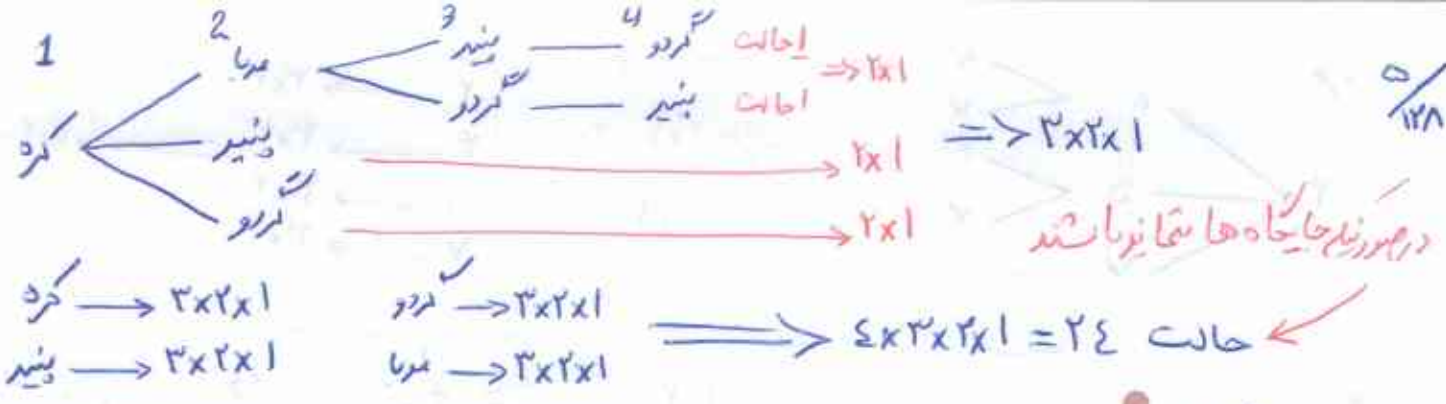
در صورتی که این حروف روی کارت باشند تکرار نداریم



تمام حالت های ممکن  $2 \times 14 = 28$

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$   
 چرخ اول    چرخ دوم    چرخ سوم    چرخ چهارم    چرخ پنجم

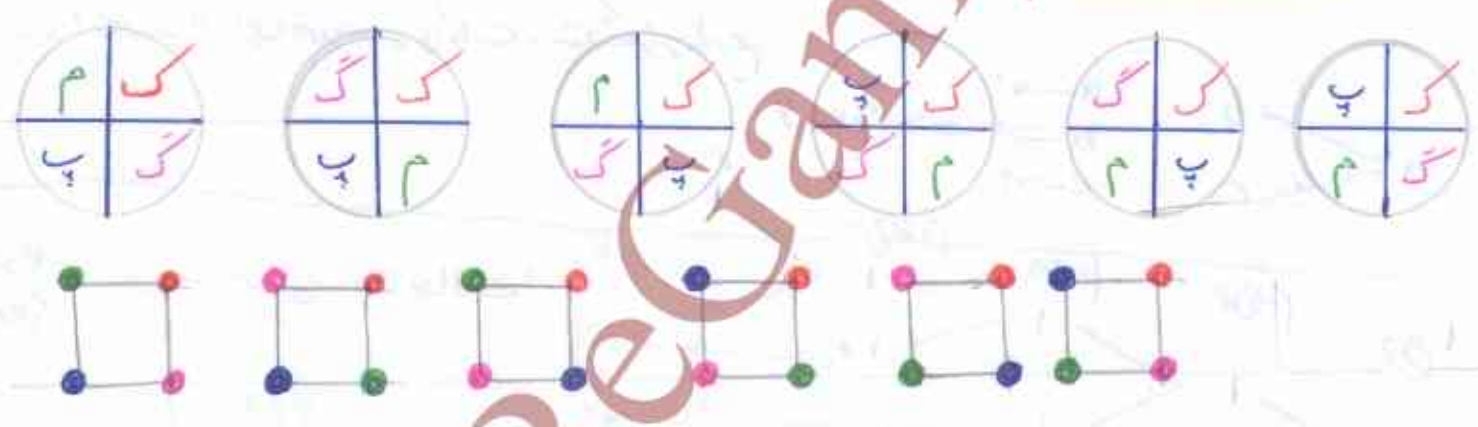




این 4 حالت هیچ بی مانند  
سین هر حالت 4 بار تکرار می شود  
 $24 \div 4 = 6$

حالت  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$  در هر زیند ما در جایگذاری آزاد داریم و توانیم تکراری نیز استفاده کنیم

راه حل برای دانش آموزان (راهنما در رسم شکل)



@GambetGam

در ریاضی احتمال اتفاق افتادن یک پیشامد برابر است با نسبت تعداد اتفاق افتادن آن پیشامد به تمام حالت های ممکن برای اتفاق افتادن آن پیشامد. احتمال اتفاق افتادن پیشامد  $a$  را با  $P_a$ ، تعداد حالت های ممکن بر اتفاق افتادن پیشامد  $a$  را با  $n(a)$ ، تعداد پیشامدهای ممکن را با  $n(s)$  نمایش می دهیم. پس:

$$P_a = \frac{n(a)}{n(s)}$$

۱- وقتی یک سکه را می اندازیم، احتمال رو آمدن آن  $\frac{1}{2}$  و احتمال پشت آمدن آن  $\frac{1}{2}$  است.  
 وقتی یک تاس را می اندازیم احتمال این که عدد ۱ بیاید  $\frac{1}{6}$ ، عدد ۲ بیاید  $\frac{1}{6}$  و عدد ۶ بیاید  $\frac{1}{6}$  است.  
 ۲- وقتی یک تاس را می اندازیم احتمال این که عدد زوج بیاید، چند است؟  
 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$   
 $n(\text{زوج آمدن}) = 3$   
 $n(\text{تمام حالت ها}) = 6$   
 چون ۲، ۴ یا ۶ اعداد زوج هستند.  
 چون تاس می تواند ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ بیاید.  
 پس:

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۳- چرا احتمال وقوع یک پیشامد عددی بین ۰ و ۱ است؟  
 زیرا اگر اتفاق نیفتد برابر صفر است  
 و اگر صد درصد اتفاق بیفتد احتمال آن برابر ۱ است  
 پس احتمال وقوع یک پیشامد عدلی بین صفر و یک است

در هر یک از موارد زیر احتمال وقوع هر پیشامد را بنویسید و احتمال ها را با هم جمع کنید.

انداختن سکه: احتمال رو آمدن =  $\frac{1}{2}$  →  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$   
 احتمال پشت آمدن =  $\frac{1}{2}$

انداختن تاس:  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

استادن عقربه روی یک رنگ

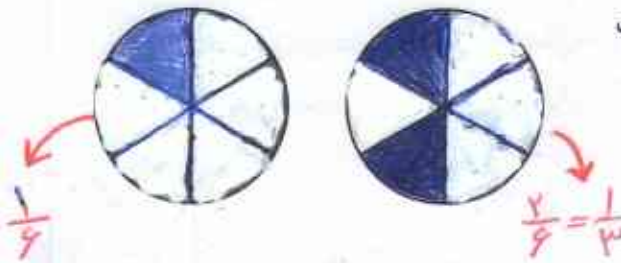


احتمال رنگ سبز =  $\frac{1}{4}$   
 احتمال رنگ قرمز =  $\frac{1}{4}$   
 احتمال رنگ آبی =  $\frac{2}{4}$   
 →  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 1$

چه نتیجه ای از این فعالیت می گیرید؟

مجموع احتمال های وقوع تمام پیشامدها برابر ۱ می شود

۱- دو هدف تیراندازی به شکل مقابل است. احتمال اینکه تیر در قسمت



آبی بخورد، در کدام هدف بیشتر است؟ چرا؟  
 در هدف سمت راست احتمال تیر در قسمت آبی بخورد بیشتر است زیرا  $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$

۲- در هر کدام از کیسه‌های مقابل فقط یک مهره سیاه هست و بقیه سفیدند. اگر یک مهره از هر کیسه برداشته شود، احتمال اینکه سیاه باشد در



$$\frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1000}$$

کدام یک بیشتر است؟ چرا؟ در کیسه‌ی اول که ۱۰ مهره دارد احتمال

$$\frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1000}$$



۳- یک صفحه جرخنده به صورت مقابل است. اگر آن را ۱۰۰۰ بار بچرخانیم، به احتمال زیاد چند بار روی رنگ سبز قرار می‌گیرد؟ چرا؟  
 سبز رنگ است برای یک دور  $\frac{1}{4}$  بار زیرا  $\frac{1}{4}$  شکل

اصلاح شود

۴- نه مهره را که روی آنها عددهای ۱ تا ۹ نوشته شده است، در کیسه ریخته‌ایم. مریم یک مهره را از کیسه بیرون

۲, ۴, ۶, ۸

می‌آورد. احتمال این که مهره خارج شده زوج باشد چقدر است؟

۳, ۶, ۹

احتمال این که مهره خارج شده مضرب ۳ باشد، چقدر است؟  $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

۵- در یک کیسه تعدادی مهره است.  $\frac{1}{6}$  آنها سبز،  $\frac{1}{12}$  آنها زرد،  $\frac{1}{4}$  آنها سفید و  $\frac{1}{3}$  آنها آبی هستند. اگر فردی بدون

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6} > \frac{1}{12}$$

نگاه کردن به داخل کیسه مهره‌ای را بیرون بیاورد، احتمال بیرون آمدن کدام رنگ بیشتر است؟ چرا؟ سفید

۶- دانشگاهی ۱۲۰۰ دانشجو دارد (دختر و پسر). یک نمونه ۱۰۰ نفری از دانشجویان این دانشگاه به طور تصادفی

انتخاب می‌شوند. در این نمونه ۴۵ دانشجوی پسر وجود دارد. به احتمال زیاد تعداد دانشجویان پسر این دانشگاه چند نفر

$$\frac{45}{100} = \frac{x}{1200} \Rightarrow x = 540$$

است؟

۷- از یک بسته که ۳۰۰ لامپ در آن است، ۱۰۰ لامپ به طور تصادفی برای آزمایش خارج می‌کنیم. اگر ۵ لامپ از

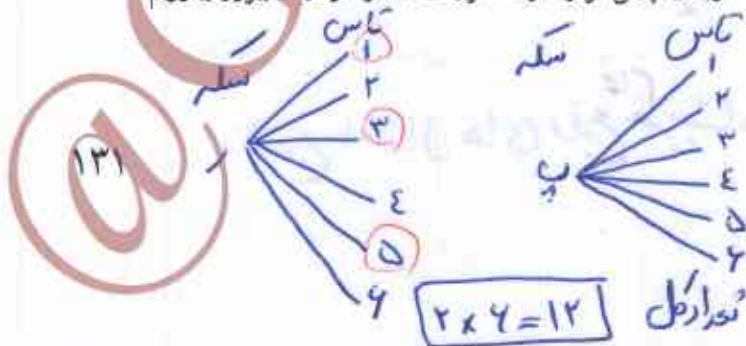
$$\frac{100}{300} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 15$$

این تعداد سوخته باشد، احتمالاً چند لامپ سوخته در کل بسته وجود دارد؟

۸- یک سکه و یک تاس را با هم انداخته‌ایم. احتمال اینکه سکه رو و تاس عدد فرد را نشان دهد، چقدر است؟

۹- در یک کیسه ۱۰ لوبیای قرمز، ۵ لوبیای سفید و ۵ لوبیای چیتی قرار دارد. اگر یک دانه را از کیسه بیرون بیاوریم،

احتمال این که لوبیا چیتی باشد، چقدر است؟



$$\frac{5}{12} = \frac{1}{4}$$

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید و برای هر کدام یک

مثال بزنید:

• آمار • داده • دامنه تغییرات • حدود دسته • متوسط دسته • فراوانی

در این فصل روش اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

• دانستن کاربرد هر یک از نمودارها • پیدا کردن فراوانی تعدادی داده‌ها پس از دسته‌بندی کردن آنها

• رسم نمودار بلوکی • درک مفهوم توزیع نرمال یا طبیعی داده‌ها در یک پدیده طبیعی

• پیدا کردن میانگین چند عدد • پیدا کردن میانگین داده‌ها پس از دسته‌بندی آنها

• درک مفهوم پیشامد • نوشتن تمام پیشامدهای ممکن

• درک مفهوم احتمال اتفاق افتادن یک پیشامد • پیدا کردن تمام حالت‌های ممکن برای وقوع یک پیشامد

• احتمال ریاضی یک پیشامد • پیدا کردن احتمال یک پیشامد با نوشتن رابطه آن

• احتمال یک پیشامد عددی بین ۰ و ۱ است. • مجموع احتمال‌ها برابر ۱ می‌شود.

کاربرد

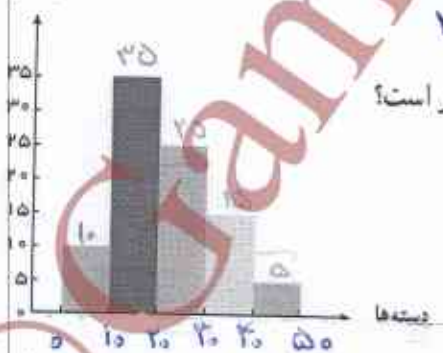
درس آمار و احتمال در زندگی روزمره کاربرد وسیعی دارد. به کمک کارهای آماری و با درک مفهوم احتمال می‌توانیم وقوع

$$\text{پیشامدها را پیش‌بینی کنیم} = \frac{10 \times 5 + 25 \times 15 + 25 \times 20 + 15 \times 30 + 5 \times 40}{90} = \frac{1950}{90} \approx 21\frac{1}{2}$$

میانگین

تمرین‌های ترکیبی

فراوانی



در صورتی که بتوانید تمرین‌های زیر را انجام دهید، مطمئن شوید که این فصل را به خوبی فرا گرفته‌اید.

۲۱/۲

۱- با توجه به نمودار <sup>سئو</sup> مقابل میانگین داده‌ها را به دست آورید.

۲- دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال این که یکی فرد و یکی زوج بیاید، چقدر است؟

$$4 \times 4 = 16 \quad \text{کل حالت‌ها}$$

$$\begin{matrix} \text{زوج} \\ 3 \times 3 = 9 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 9 + 9 = 18 \Rightarrow \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

چون دو حالت هست یک بار اولی فرد  $3 \times 3 = 9$

۱۳۲

و دومی زوج باشد و حالت بعدی اولی زوج و دومی فرد باشد

اصلاحیه