

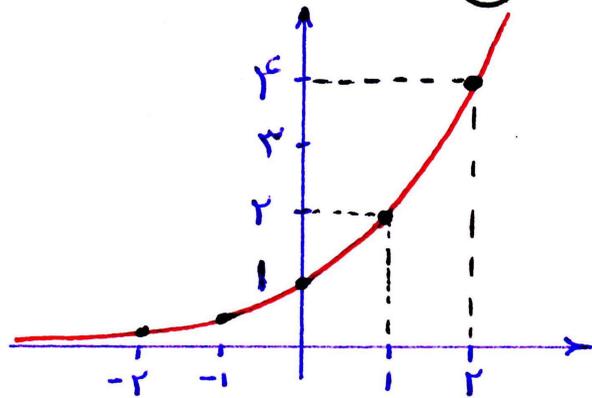
تابع نمایی: اگر a عدد ثابت، مثبت و مخالف یک باشد، تابع $f(x) = a^x$ را تابع نمایی

گوئیم که دامنه آن \mathbb{R} و برد آن $(0, +\infty)$ است.

برای رسم نمودار این تابع، به x مقادیر دلخواه داده (به خصوص صفر و اعداد اطراف آن) و به کمک نقطه یابی نمودار را رسم می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $f(x) = 2^x$ را رسم کنید.

| | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |



توجه: منحنی نمایش به محور x ها نزدیک شده ولی برخورد نمی‌کند.

مثال: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{8} (\sqrt{2})^{4-2x}$ را رسم کنید.

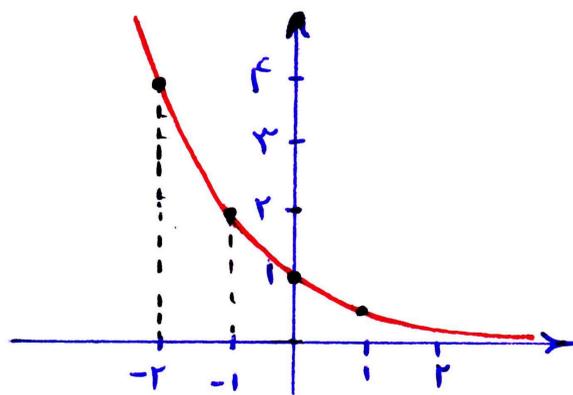
ابتدا تا حد امکان تابع را ساده می‌کنیم:

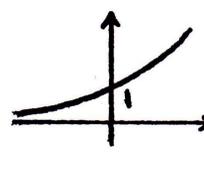
$$f(x) = \frac{1}{8} \times \sqrt{2}^4 \times \sqrt{2}^{-2x}$$

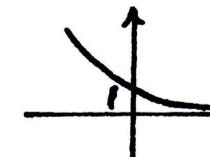
$$= \frac{1}{8} \times 8 \times 2^{-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

| | | | | | |
|-----|----|----|---|---------------|---------------|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |



نکته ۱: اگر $a > 1$ ، نمودار تابع نمایی $f(x) = a^x$ به صورت  به صورت

و در صورتی که $0 < a < 1$ نمودار به شکل  خواهد بود.

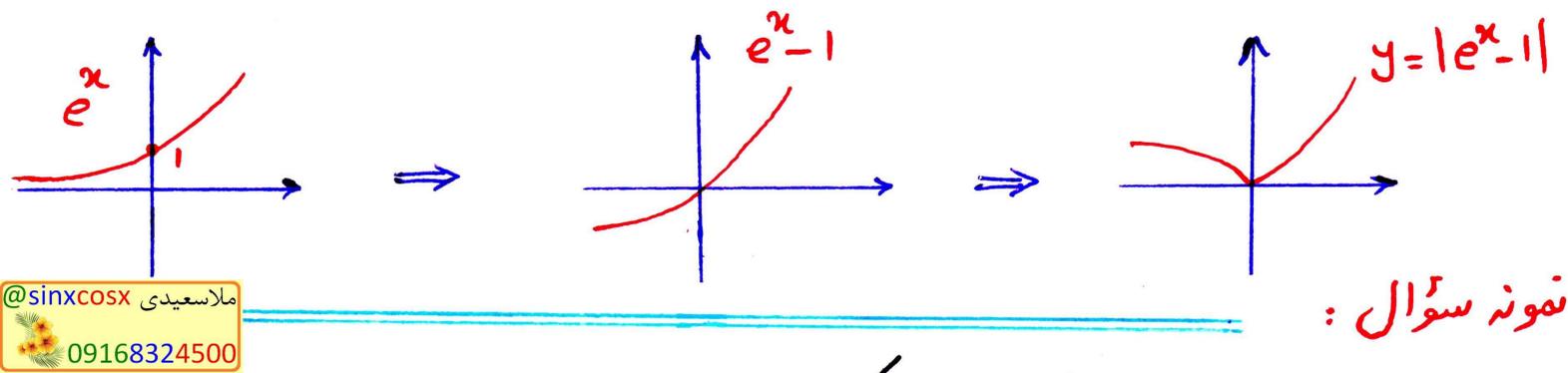
نکته ۲: در حالت $a > 1$ ، تابع $f(x) = a^x$ تابعی صعودی است یعنی با زیاد شدن x ، مقدار $f(x)$

افزایش می‌یابد ولی در حالت $0 < a < 1$ ، با زیاد شدن x ، مقدار $f(x)$ کاهش می‌یابد در اصطلاح

تابع نزولی است. (این امر به راحتی روی نمودار تابع مشهود است.)

نکته ۲: تابع $f(x) = e^x$ معروف به تابع نمایی طبیعی است که در آن e به $2,7$ می باشد.

مثال: نمودار تابع $y = |e^x - 1|$ را رسم کنید.



نمونه سوال:

۱- معادله $3e^{2x} - e^x - 2 = 0$ را حل کنید.

غیرممکن $t = \frac{2}{3} \Rightarrow e^x = \frac{2}{3}$
 جواب $t = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

۲- کارایی کارگری بعد از t ماه با تابع $f(t) = 100 - 6e^{-0.12t}$ محاسبه می شود. بعد از چند ماه تجربه کاری کارایی این کارگر به 70 می رسد؟ ($e^{-0.7} \approx \frac{1}{4}$)

$$70 = 100 - 6e^{-0.12t} \Rightarrow 6e^{-0.12t} = 30 \Rightarrow e^{-0.12t} = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{غرض}} e^{-0.12t} = e^{-0.7}$$

بعد از ۳ ماه و نیم، تجربه کاری آن به 70 خواهد رسید $\Rightarrow t = 2,5$

۳- اگر تعداد باتری ها در یک کشت نمونه ای از باتری ها بعد از t ثانیه از دستور $V(t) = Ae^{0.3t}$ بدست آید و در شروع آزمایش تعداد باتری ها 1000 باشد، پس از گذشت 4 ثانیه چند باتری داریم؟ ($e^{1,2} \approx 2,7$)

$$V(0) = 1000 \Rightarrow A \times 1 = 1000 \Rightarrow A = 1000 \Rightarrow V(t) = 1000 e^{0.3t}$$

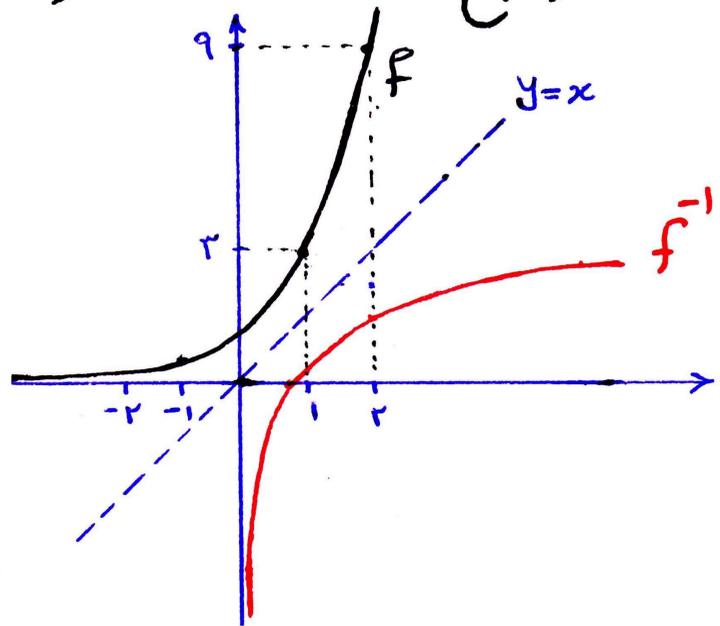
$$\Rightarrow V(4) = 1000 e^{1,2} \approx 1000 \times 2,7 = 2700$$

۴- آیا تابع $f(x) = 2^{3x}$ وارون پذیر است؟ چرا؟

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 2^{3a} = 2^{3b} \Rightarrow 3a = 3b \Rightarrow a = b \Rightarrow f \text{ یک به یک و وارون پذیر است}$$

د- نمودار تابع $f(x) = 3^x$ را به همراه نمودار تابع وارون آن در یک دستگاه مختصا رسم کنید.

| | | | | | |
|-----|---------------|---------------|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 9 |



ملاسعدی @sinxcosx
09168324500

نکته ۴: همانطور که قبلا اشاره شد، تابع $f(x) = a^x$ در حالت $a > 1$ ، یک تابع صعودی است لذا اعداد 2^3 و 2^4 و 2^5 و 2^6 و 2^7 را می توان به صورت $2^3 < 2^4 < 2^5 < 2^6 < 2^7$ منظم کرد. همچنین در حالت $0 < a < 1$ تابع $f(x) = a^x$ نزول است، لذا نامساوی های زیر صحیح می باشند:

$$(a^7) > (a^6) > (a^5) > (a^4) > (a^3)$$

سؤال: اعداد $(\frac{1}{3})^3$ و $(\frac{1}{3})^4$ و 2^2 و 2^3 و $(\frac{1}{3})^2$ و 2^4 را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$(\frac{1}{3})^4 < (\frac{1}{3})^3 < (\frac{1}{3})^2 < 2^2 < 2^3 < 2^4$$

سؤال: سه عدد بین اعداد $3^{\sqrt{10}}$ و $3^{\sqrt{11}}$ بنویسید.

می دانیم اعداد 2^7 و 2^9 و 3 بین دو عدد $3^{\sqrt{10}}$ و $3^{\sqrt{11}}$ هستند، لذا با توجه به نکته ی فوق جواب این

سؤال می تواند اعداد $3^{\sqrt{10}}$ و $3^{\sqrt{11}}$ و 3^3 باشد.

سؤال: اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند بطوری که $a^x > a^y > a^z$ ، در هر یک از حالات

زیر تعیین کنید چه رابطه ای بین x و y و z برقرار است؟

الف) $a > 1$ ← طبق نکته ی ۴ داریم: $x > y > z$

ب) $0 < a < 1$ ← طبق نکته ی ۴ داریم: $x < y < z$

مثال: نمودار توابع $y=2^x$ و $y=\sqrt{x}$ را رسم کرده ایم. طول نقطه برخورد این دو نمودار، بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

می دانیم $2^2 < \sqrt{2} < 2^1$ می باشد. لذا طول نقطه برخورد این دو نمودار بین دو عدد صحیح است.

نکته ۱: نامعادلات نمایی:

الف) اگر $a > 1$ باشد، آنگاه از نامعادله $a^x > a^y$ نتیجه می شود $x > y$.

ب) اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه از نامعادله $a^x > a^y$ نتیجه می شود $x < y$. (جهت نامساوی عوض شد)

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$

$$\Rightarrow (2^2)^{2x-1} > \frac{1}{2^{10}} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-10} \Rightarrow 4x-2 > -10 \Rightarrow 4x > -8$$

$$\Rightarrow x > -2 \rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-2, +\infty)$$

ب) $(\sqrt{2}-1)^{x^2+x} \geq (\sqrt{2}-1)^{3-x}$ توجه داریم که $0 < \sqrt{2}-1 < 1$

$$\Rightarrow x^2+x \leq 3-x \Rightarrow x^2+2x-3 \leq 0$$

| | | | |
|-----------|------|-----|-----------|
| $-\infty$ | -2 | 1 | $+\infty$ |
| $+$ | $-$ | $+$ | $+$ |

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = [-3, 1]$$

پ) $e^{-3x+12} \leq 1$ توجه داریم که $e > 1$ و $e^0 = 1$ است

$$\Rightarrow e^{-3x+12} \leq e^0 \Rightarrow -3x+12 \leq 0 \Rightarrow -3x \leq -12 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow \text{مجموعه} = [4, +\infty)$$

ت) $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{x}} < (\frac{1}{4})^x$ توجه داریم که $0 < \frac{1}{4} < 1$ و $\frac{1}{4} = \frac{1}{4^1}$ است

$$\Rightarrow (\frac{1}{4})^{\frac{1}{x}} < (\frac{1}{4})^x \Rightarrow \frac{1}{x} > x \Rightarrow \frac{1-x^2}{x} > 0$$

| | | | | |
|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

توجه

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

تقریب:

۱- در هر یک از قسمت‌های زیر، جاهای خالی را با یکی از نمادهای نامساوی $<$ یا $>$ پر کنید.

(الف) $\sqrt{3} - \sqrt{2} < \sqrt{3} + \sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{2} - \sqrt{3} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$

(پ) $(\sqrt{2}-1)^{e-1} < (\sqrt{2}-1)^{e-2}$ (ت) $\sqrt{2}-1 < \sqrt[3]{2}$

(ث) $2^3 > 2^{\sqrt{3}}$ (ج) $2^2 < 2^{\sqrt{2}}$

۲- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(الف) مقدار تابع $y = (\sqrt{2})^{-x}$ با افزایش مقدار x ، می‌یابد.

با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد. $\rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

(ب) نمودار تابع $y = (\sqrt{3}-1)^x - 2$ محور x ها را در نقطه‌ای به عرض قطع می‌کند.

جواب: $-1 \Rightarrow y = (\sqrt{3}-1)^0 - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow x=0$

(پ) نمودار تابع $y = e^{2x-1} - 1$ محور y ها را در نقطه‌ای به طول قطع می‌کند.

جواب: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{2x-1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2x-1} = 1 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

(ت) اگر x ها نقاط تابع نمایی $y = a^x$ تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت d بدهند، عرض‌ها

تابع، تشکیل دنباله‌ی با قدر نسبت خواهند داد.

| | | | | | |
|-----|--------------|-------------------|--------------------|------------|-----|
| x | x | $x+d$ | $x+2d$ | $x+3d$ | ... |
| y | a^x | a^{x+d} | a^{x+2d} | a^{x+3d} | ... |
| | \downarrow | \downarrow | \downarrow | | |
| | $a \cdot a$ | $a^{x+d} \cdot a$ | $a^{x+2d} \cdot a$ | | |

عرض‌ها تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت $r = a^d$ می‌دهند.



۳- اگر تابع $f(x) = \left(\frac{b-1}{3}\right)^x$ با دامنه \mathbb{R} ، نزولی باشد، حدود b را بیابید.

$0 < \frac{b-1}{3} < 1 \xrightarrow{x^3} 0 < b-1 < 3 \xrightarrow{+1} 1 < b < 4$

۴- تابع $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید اگر $a+b=1$ آنگاه $f(a)+f(b)=1$ است.

$$f(a)+f(b) = \frac{4^a}{4^a+2} + \frac{4^b}{4^b+2} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{4^{a+b} + 2 \times 4^a + 4^{a+b} + 2 \times 4^b}{4^{a+b} + 2 \times 4^a + 2 \times 4^b + 4} \xrightarrow{a+b=1} \frac{4 + 2 \times 4^a + 2 \times 4^b + 4}{4 + 2 \times 4^a + 2 \times 4^b + 4} = 1$$

ب) حاصل $f(\frac{1}{5})+f(\frac{2}{5})+f(\frac{3}{5})+f(\frac{4}{5})$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1 &\xrightarrow{\text{طبق الف}} f(\frac{1}{5}) + f(\frac{4}{5}) = 1 \\ \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 &\xrightarrow{\text{طبق الف}} f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) = 1 \end{aligned} \quad \Bigg) \rightarrow f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5}) = 2$$

۵- در تابع باضابطه $f(x) = a \cdot b^x$ ؛ $b > 0$ داریم، $f(0) = \frac{3}{2}$ ، $f^{-1}(\frac{3}{32}) = -2$ مقدار $f(\frac{3}{4})$ را مناسب بنویسید.

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow a \cdot b^0 = \frac{3}{2} \xrightarrow{b^0=1} a = \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(\frac{3}{32}) = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{3}{32} \Rightarrow a \cdot b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot b^{-2} = \frac{3}{32} \Rightarrow b^{-2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{16} \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \times 4^x \rightarrow f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{2} \times 4^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \times \sqrt[4]{4^3} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$$

۶- فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = 2^x$ و $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ ، از نقطه

$A(0, 4)$ را بدست آورید.

$$2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \Rightarrow (\sqrt{2}^x)^2 = \sqrt{2}^x \times \sqrt{2} + 4 \xrightarrow{\sqrt{2}^x = t} t^2 = \sqrt{2}t + 4$$

$$t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=18} t = \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}^x = -\sqrt{2} \quad \text{غیر ممکن}$$

$$t = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}^x = 3\sqrt{2} \xrightarrow{\text{تقارن}} 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

$$y = 2^x \rightarrow y = 8 \Rightarrow \text{نقطه تلاقی دو منحنی} = B(3, 8) \Rightarrow AB = \sqrt{9+16} = 5$$

۷- معادله $(\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x = 2$ را حل کنید.

$$\cdot \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \quad \text{پس } (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1 \quad \text{می دانیم}$$

بنابر این معادله را به صورت $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x} + (\sqrt{2}+1)^x = 2$ می نویسیم و با فرض $(\sqrt{2}+1)^x = t$ آن را حل می کنیم:

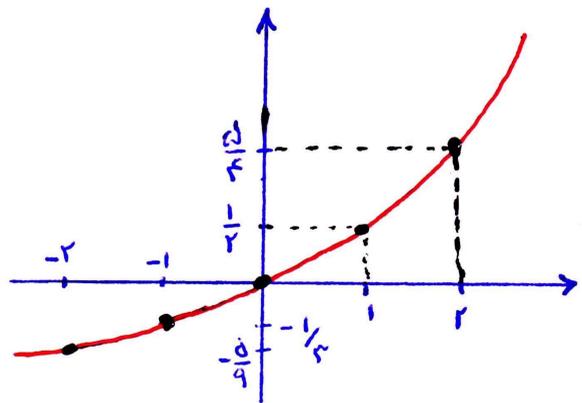
$$\frac{1}{t} + t = 2 \xrightarrow{\times t} 1 + t^2 = 2t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} t=1 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^x = 1 \Rightarrow x=0$$

۸- نمودار تابع $f(x) = \frac{3^x + 9^x}{2^x + 6^x} - 1$ را رسم کنید.

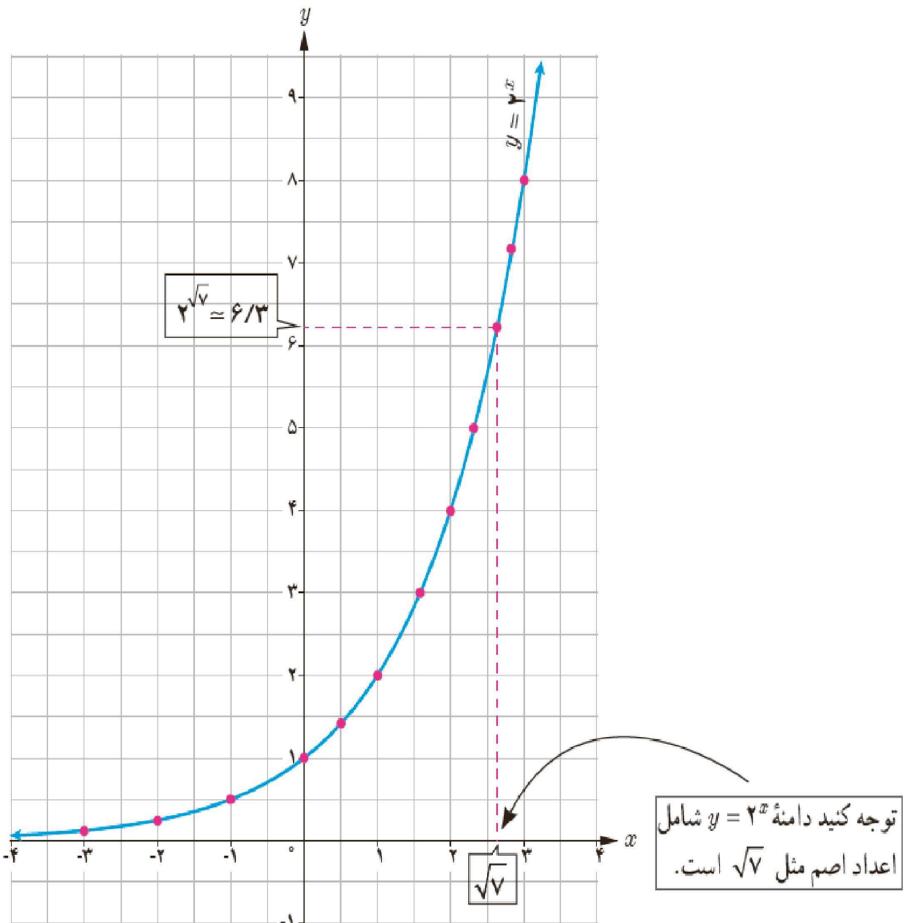
با توجه به این که دامنه ی تابع \mathbb{R} می باشد، ابتدا تابع را تا حد امکان ساده می کنیم:

$$f(x) = \frac{3^x(1+3^x)}{2^x(1+3^x)} - 1 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1$$

| | | | | | |
|---|----------------|----------------|---|---------------|---------------|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | $-\frac{5}{9}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{4}$ |



۹- نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم نموده، سپس به کمک آن مقدار تقریبی $2^{\sqrt{7}}$ را تعیین کنید.



ابتدا مطابق شکل با استفاده از نقطه یابی نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم می کنیم.

سپس مکان تقریبی $\sqrt{7}$ را روی محور x هایافته

و برای $x = \sqrt{7}$ به کمک نمودار، عرض آن را روی

محور y ها مشخص می کنیم. که به طور تقریب

عدد ۶٫۳ خواهد بود پس: $2^{\sqrt{7}} \approx 6.3$

۱۰- نامعادله ی $4^x + 2 < 3 \times 2^x$ را حل کنید.

$$\text{بسیار} \quad 2^x = t \Rightarrow t^2 + 2 < 3t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 < 0 \quad \frac{-\infty}{+} \frac{1}{-} \frac{2}{+} \frac{+\infty}{+} \Rightarrow 1 < t < 2$$

$$\Rightarrow 1 < 2^x < 2 \Rightarrow 2^0 < 2^x < 2^1 \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (0, 1)$$

۱۱- معادله‌ها نهایی زیر را حل کنید.

الف) $3^{2x-3} = 81 \Rightarrow 3^{2x-3} = 3^4 \Rightarrow 2x-3 = 4 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

ب) $d^{3h-1} = 12d^{2h+1} \Rightarrow d^{3h-1} = d^{4h+2} \Rightarrow 3h-1 = 4h+2 \Rightarrow h = -\frac{3}{2}$

پ) $4^{3x+2} = \frac{1}{64^3} \Rightarrow 4^{3x+2} = (4^4)^{-3} = (4^3)^{-2} = 4^{-6} \Rightarrow 3x+2 = -6 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$

ت) $9^x = 3^{x^2-4x} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{x^2-4x} \Rightarrow 2x = x^2-4x \Rightarrow x^2-6x = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ یا $x = 6$

۱۲- تابع $f(x) = a \left(\frac{1}{3}\right)^{bx}$ را در نظر بگیرید. با فرض این که منحنی نمایی این تابع محور y را در $\frac{2}{3}$ قطع کند و $27f(2) = 1$ باشد مقدار $f(-1)$ را محاسبه نمایید.

$f(0) = \frac{2}{3} \Rightarrow a \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

$27f(2) = 1 \Rightarrow 27 \times \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2b} = 1 \xrightarrow{a=\frac{2}{3}} 3^4 \times \frac{1}{3^{2b}} = 1 \Rightarrow 3^{4-2b} = 3^0 \Rightarrow b = 2$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

$\Rightarrow f(-1) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{2}{3} \times 9 = 12$