

به نام خدا

ریاضیات گسسته ▶

موضوع: مربع لاتین ▶

تهیه و تنظیم: ▶

محمود کامکار ▶

KAMKAR

مربع لاتین

تعریف : یک مربع لاتین $n \times n$ عبارت است از مربعی که سطرها و ستون های آن با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n پر شده باشند و در هیچ سطر و در هیچ ستونی از آن عدد تکراری وجود نداشته باشد . مانند :

3	1	2
1	2	3
2	3	1

۱	۲	۴	۳
۳	۴	۲	۱
۴	۳	۱	۲
۲	۱	۳	۴

- ▶ **مثال:** در جدول زیر اعداد ۱ تا ۴ به صورتی نوشته شده اند که هیچ سطر و ستونی عدد تکراری ندارد. عددهای نوشته شده در ۴ خانه این جدول به صورت زیر هستند. عدد موجود در خانه ای که با علامت * مشخص شده را بیابید.

1	3	2	4
	2		3
	4	* 3	1
			2

▶ **مثال:** با اعداد ۱ و ۲ و ۳ چند مربع لاتین می توان نوشت که عدد ۳ در خانه وسط قرار گیرد؟

▶ **حل:**

	3	

2	1	3
1	3	2
3	2	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

3	2	1
1	3	2
2	1	3

1	2	3
2	3	1
3	1	2

KAMKAR

- ▶ **مثال:** به چند طریق می توان جدول نیمه پر، زیر را با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ پر کرد به طوری که یک مربع لاتین از مرتبه ۴ تولید شود؟

1	2		
	1	2	
		1	

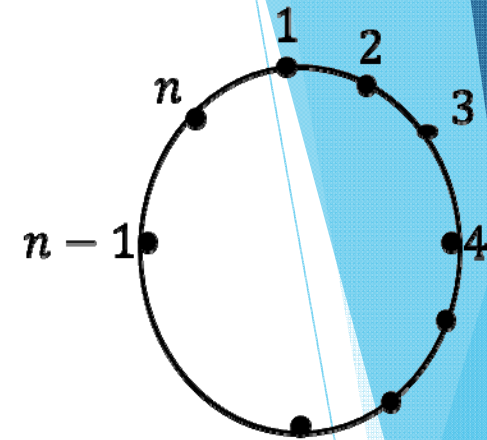
حل:

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

1	2	4	3
3	1	2	4
4	3	1	2
2	4	3	1

مربع لاتین چرخشی

۱	۲	۳	$n-1$	n
n	۱	۲	$n-2$	$n-1$
$n-1$	n	۱	$n-3$	$n-2$
$n-2$	$n-1$	n	$n-4$	$n-3$
.
.
.
۲	۳	۴	n	۱



۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

نکته: برای هر عدد طبیعی n ،

مربع لاتین وجود دارد .

مثال

قرار است ۶ مدرس T_1 و T_2 و T_3 و T_4 و T_5 و T_6 در ۶ جلسه متوالی در شش کلاس C_1 و C_2 و C_3 و C_4 و C_5 و C_6 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای ای منظور برنامه ریزی کنید

حل :

	1	2	3	4	5	6
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
C_2	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
C_3	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
C_4	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
C_5	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
C_6	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

مربع لاتین کاهش یافته (فرم استاندارد)

یک مربع لاتین از مرتبه n را کاهش یافته (فرم استاندارد) گوئیم هرگاه اعداد سطر اول و ستون اول به ترتیب از 0 تا $n - 1$ یا به ترتیب از 1 تا n باشند .

0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3

انواع عملیات روی مربع لاتین

- ▶ ۱- جایگشت ستون ها
- ▶ ۲- جایگشت سطرها
- ▶ ۳- جایگشت نمادها

جایگشت ستون ها

- ▶ با تعویض هر دو ستون مربع لاتین یک مربع جدید حاصل می شود.

2	3	4	1
3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2

2	3	1	4
3	2	4	1
4	1	3	2
1	4	2	3

جایگشت سطر ها

- ▶ با تعویض هر دو سطر مربع لاتین یک مربع جدید حاصل می شود .

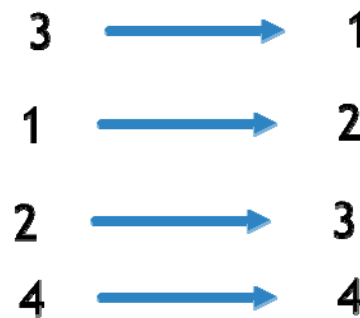
2	3	4	1
3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2

3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3
1	4	3	2

جایگشت نمادها

- ▶ با جای کردن نمادها با یک الگوی خاص مربع لاتین به یک مربع لاتین جدید تبدیل می شود.

2	3	4	1
3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2



3	1	4	2
1	3	2	4
4	2	3	1
2	4	1	3

۱	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

تمرین ۱: مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید. با جایگزینی اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ به جای اعداد به ترتیب ۳ و ۲ و ۴ و ۱، یک مربع جدید بسازید. آیا این مربع هم یک مربع لاتین است؟ چرا؟

**تمرین ۲ : کدام مربع لاتین با اعمال یک جایگشت
بر روی اعضای مربع لاتین بدست می آید؟**

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

(4)

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

(3)

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

(2)

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۳	۱	۲

(1)

دو مربع لاتین متعامد

اگر A و B دو مربع لاتین باشند و از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر هم از این دو مربع ، مربع جدیدی حاصل شود که هر خانه حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم های سمت چپ مربوط به A و تمام رقم های سمت راست مربوط به B (یا برعکس) باشد. در این صورت گوییم دو مربع فوق متعامدند هرگاه هر یک از اعداد ۲ رقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشند. مثلا دو مربع زیر متعامدند.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳۲ & ۱۳ & ۲۱ \\ \hline ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ \\ \hline ۲۳ & ۳۱ & ۱۲ \\ \hline \end{array}$$

2	3	4	1
3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2

2	3	4	1
4	1	2	3
1	4	3	2
3	2	1	4



22	33	44	11
34	21	12	43
41	14	23	32
13	42	31	24

تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین

دو مربع A و B متعامدند هرگاه هر دو درایه از A که باهم برابر باشند، درایه های نظیر آنها در B برابر نباشند و بالعکس.

■		
		■

■		
		■

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

مثال ۱: آیا دو مربع لاتین زیر متعامدند؟ چرا؟

حل: خیر

KAMKAR

سوال: اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند. آیا مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها بدست می آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است؟

حل: بلی

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$$

\Rightarrow

$$AB = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳۲ & ۱۳ & ۲۱ \\ \hline ۱۱ & ۲۲ & ۳۳ \\ \hline ۲۳ & ۳۱ & ۱۲ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

1 \longrightarrow 2
2 \longrightarrow 3
3 \longrightarrow 1

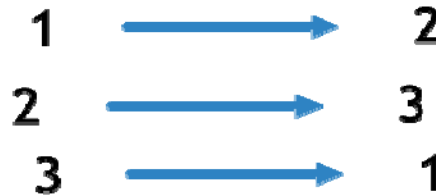
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$$

سوال

- ▶ آیا مربع لاتین حاصل از اعمال جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می تواند با مربع لاتین اولیه متعامد باشد؟ چرا؟

▶ **حل:** خیر

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱



۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

سوال

الف: آیا می توان گفت با تعویض سطرهای یک مربع لاتین همواره مربع لاتین متعامد با مربع اول بدست می آید؟
ب: غیر متعامد چطور؟

1	2
2	1

2	1
1	2

▶ **حل الف: خیر**

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

▶ **حل ب: خیر**

مثال: قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مساله برنامه ریزی کنید.

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
شنبه	1	4	2	5	3
شنبه ۱	4	2	5	3	1
شنبه ۲	2	5	3	1	4
شنبه ۳	5	3	1	4	2
شنبه ۴	3	1	4	2	5

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
شنبه	3	1	4	2	5
شنبه ۱	5	3	1	4	2
شنبه ۲	2	5	3	1	4
شنبه ۳	4	2	5	3	1
شنبه ۴	1	4	2	5	3

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
شنبه	13	41	24	52	35
شنبه ۱	45	23	51	34	12
شنبه ۲	22	55	33	11	44
شنبه ۳	54	32	15	43	21
شنبه ۴	31	14	42	25	53

مثال

۱۶ افسر از ۴ لشکر و در هر لشکر ۴ افسر با ۴ درجه متفاوت در یک صف ایستاده اند. آنها را در یک آرایش 4×4 طوری قرار دهید که در هر سطر و هر ستون از هر لشکر دقیقاً یک افسر قرار گیرد و هیچ دو افسر با درجه یکسان در یک صف نباشند.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

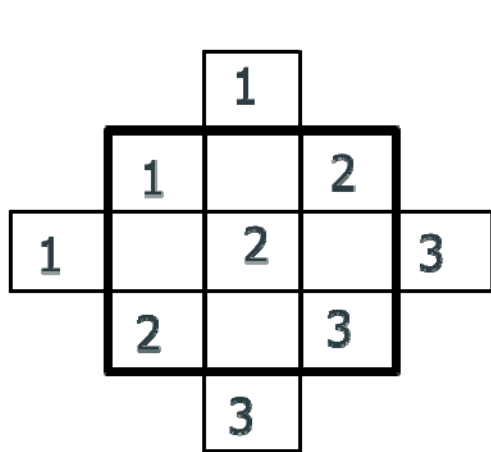
ترکیب شماره لشکر
افسرها

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

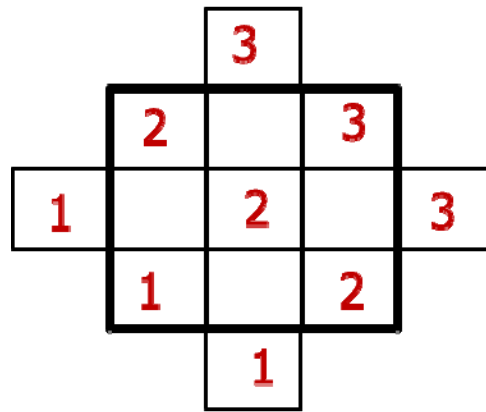
ترکیب شماره درجه
افسرها

11	22	33	44
32	41	14	23
43	34	21	12
24	13	42	31

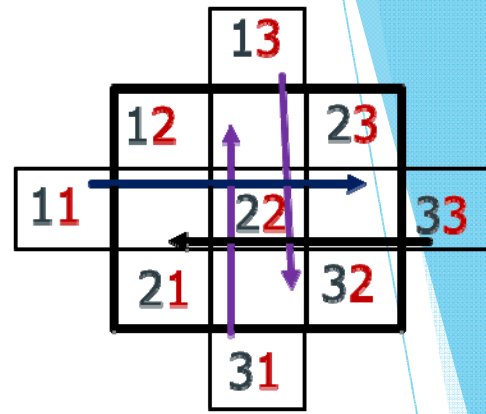
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد



(1)



(2)



(3)

12	31	23
33	22	11
21	13	32

(4)

1	3	2
3	2	1
2	1	3

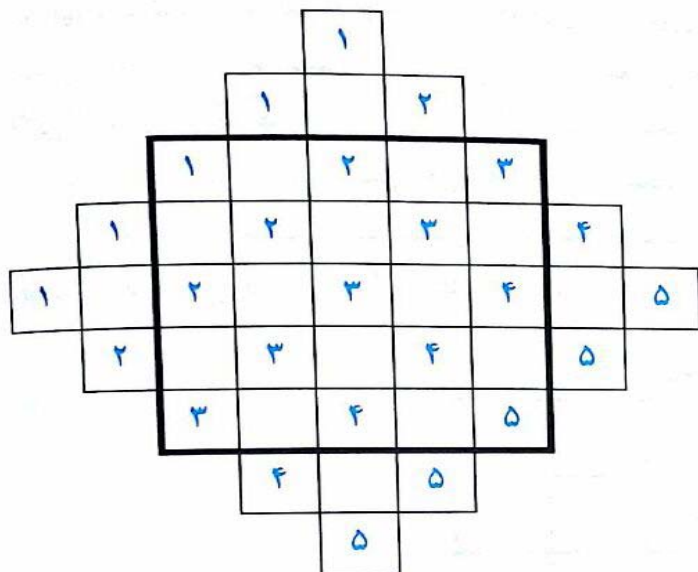
(5)

2	1	3
3	2	1
1	3	2

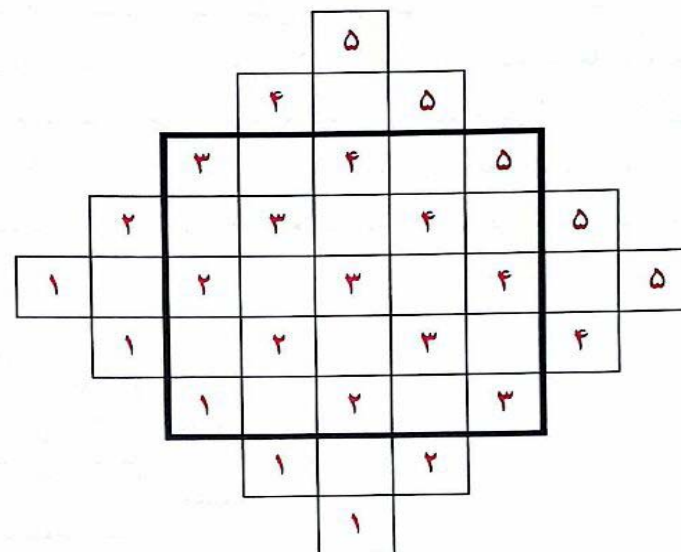
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین 5×5 متعامد به دست آورید.

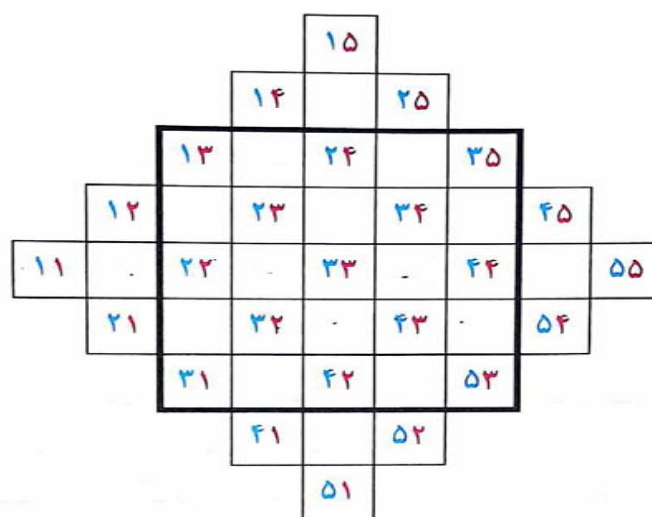
۱ اعداد ۱، ۲، ...، ۵ با نظمی خاص (به نحوه چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.

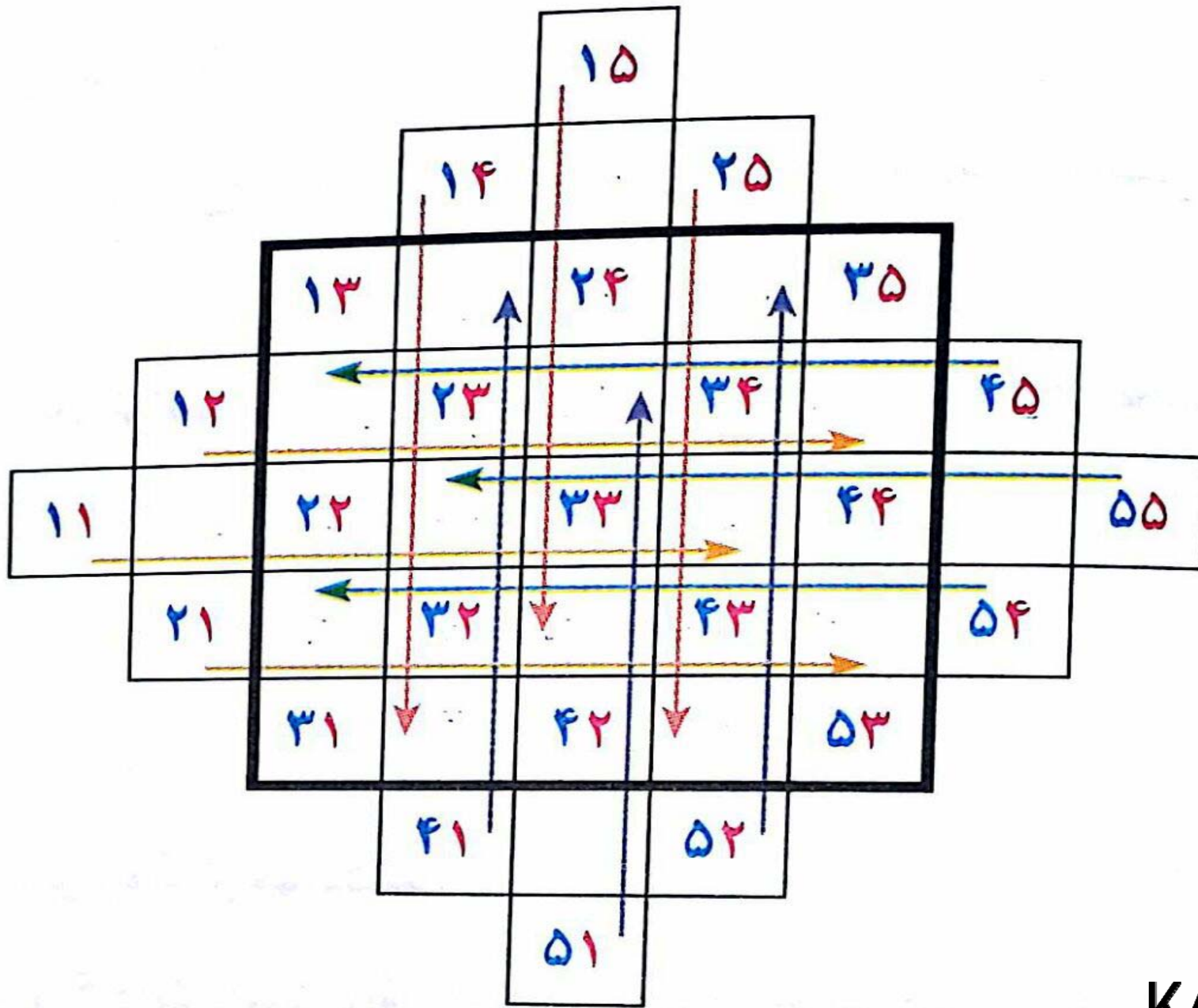


(ب)



(الف)





KAMKAR

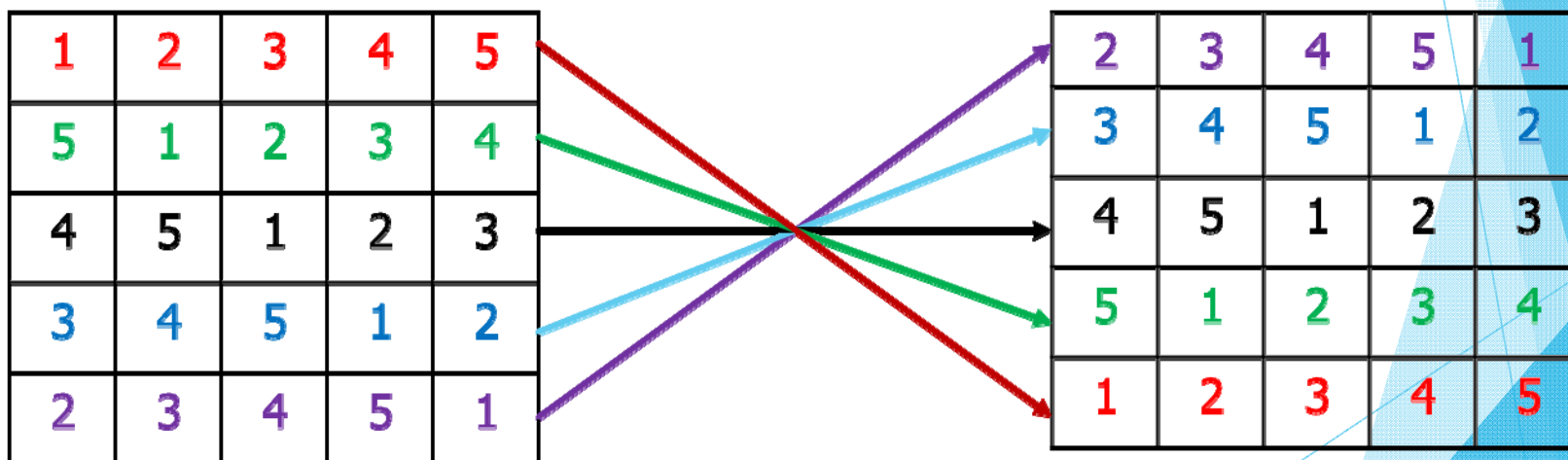
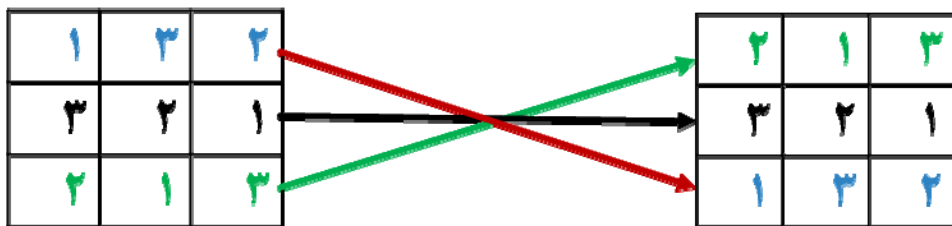
13	41	24	52	35
45	23	51	34	12
22	55	33	11	44
54	32	15	43	21
31	14	42	25	53

1	4	2	5	3
4	2	5	3	1
2	5	3	1	4
5	3	1	4	2
3	1	4	2	5

3	1	4	2	5
5	3	1	4	2
2	5	3	1	4
4	2	5	3	1
1	4	2	5	3

KAMKAR

روش دیگر ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه فرد



اگر سه دوست هم سائز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت ها و هر یک از پیراهن ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می توانند این کار را انجام دهند؟

تست ۱۱- در یک روز هفته برای ۳ مدرس در ۳ کلاس متمایز در ۳ جلسه متوالی به چند طریق می توان برنامه تدریس تعیین کرد ؟

۶ (۱) ۹ (۲) ۱۲ (۳) ۱۸ (۴) (خارج از کشور ۹۸)

کدام است؟ (کنکور ۹۸)

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

تست ۱۲- تعداد مربع های لاتین متعامد با مربع

۲(۱) ۳(۲) ۴(۳) ۶(۴)

پایان

KAMKAR