تابع نمایی: هر تابع با ضابطه ی $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>0$ و $a\neq 1$ باشد را تابع نمایی گوییم.
مثلاً توابع $y=(\frac{5}{2})^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ و $y=(\sqrt{2})^x$ و $y=3^x$ هر کدام یک تابع نمایی می باشند.

توانهای حقیقی: همه ی قوانینی که در سال گذشته در مورد اعداد توان دار (با توانهای گویا و پایه های حقیقی مثبت) بکار می بردیم برای توانهای حقیقی نیز برقرارند بنابراین اگر r و s دو عدد حقیقی و x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند آنگاه داریم:

1) $x^0=1$ 2) $1^r=1$ 3) $x^{-r}=(\frac{1}{x})^r=\frac{1}{x^r}$ 4) $x^r\times x^s=x^{r+s}$ 5) $x^r\times y^r=(xy)^r$

6) $(x^r)^s=x^{r\cdot s}=(x^s)^r$ 7) $x^r\div x^s=\frac{x^r}{x^s}=x^{r-s}$ 8) $x^r\div y^r=\frac{x^r}{y^r}=(\frac{x}{y})^r$

مثال: حاصل هر قسمت را بدست آورید:

1) $2^{\sqrt2}\times 2^{3\sqrt2}=2^{\sqrt2+3\sqrt2}=2^{4\sqrt2}$

2) $3^{1/5}\times\sqrt3=3^{\frac32}\times3^{\frac12}=3^{\frac32+\frac12}=3^{\frac42}=3^2=9$

3) $(2^{\sqrt2})^{3\sqrt2}=2^{\sqrt2\times3\sqrt2}=2^{3\times2}=2^6=64$

4) $3^{(2-\sqrt3)}\times2^{(2-\sqrt3)}=(3\times2)^{(2-\sqrt3)}=6^{(2-\sqrt3)}$

5) $(5^{(\sqrt3-1)})^{(\sqrt3+1)}=5^{(\sqrt3-1)(\sqrt3+1)}=5^{(3-1)}=5^2=25$

6) $((\sqrt5)^{\sqrt2})^{\sqrt{18}}=(\sqrt5)^{\sqrt{36}}=(\sqrt5)^6=5^3=125$

7) $((\frac12)^{\sqrt3})^{\sqrt{12}}=(\frac12)^{\sqrt{36}}=(\frac12)^6=\frac{1}{64}$

8) $[(\sqrt2-1)^{(5\sqrt2-2\sqrt5)}]^{(5\sqrt2+2\sqrt5)}=(\sqrt2-1)^{\overbrace{(5\sqrt2-2\sqrt5)(5\sqrt2+2\sqrt5)}^{\text{مزدوج}}}=(\sqrt2-1)^{(25\times2-4\times5)}$
$=(\sqrt2-1)^{30}$

9) $(\sqrt2-1)^{(5\sqrt2-2\sqrt5)}\times(\sqrt2+1)^{(5\sqrt2-2\sqrt5)}=[(\sqrt2-1)(\sqrt2+1)]^{(5\sqrt2-2\sqrt5)}=(2-1)^{(5\sqrt2-2\sqrt5)}$
$=1^{(5\sqrt2-2\sqrt5)}=1$

10) $[(\sqrt3+1)^{(3\sqrt2+2\sqrt3)}]^{(3\sqrt2-2\sqrt3)}\times[(\sqrt3-1)^{3\sqrt2}]^{\sqrt2}=(\sqrt3+1)^{(3\sqrt2+2\sqrt3)(3\sqrt2-2\sqrt3)}\times(\sqrt3-1)^{3\sqrt2\times\sqrt2}$
$=(\sqrt3+1)^{(9\times2-4\times3)}\times(\sqrt3-1)^{3\times2}=(\sqrt3+1)^6\times(\sqrt3-1)^6=[(\sqrt3+1)(\sqrt3-1)]^6=(3-1)^6=2^6=64$

11) $\frac{2^{\sqrt3}\times2^{\sqrt{27}}}{2^{\sqrt{12}}\times4^{\sqrt3}}=\frac{2^{\sqrt3}\times2^{3\sqrt3}}{2^{2\sqrt3}\times(2^2)^{\sqrt3}}=\frac{2^{\sqrt3+3\sqrt3}}{2^{2\sqrt3}\times2^{2\sqrt3}}=\frac{2^{4\sqrt3}}{2^{4\sqrt3}}=1$

۱۲) $[(\sqrt[6]{3^5})^{(3-\sqrt{3})}]^{(3+\sqrt{3})} \div (3^{\sqrt5}\times 2^{\sqrt5})^{-\sqrt5} = (\sqrt[6]{3^5})^{(3-\sqrt3)(3+\sqrt3)} \div (6^{\sqrt5})^{-\sqrt5} =$

$(\sqrt[6]{3^5})^{9-3} \div 6^{-5} = (\sqrt[6]{3^5})^6 \div \frac{1}{6^5} = 3^5 \times 6^5 = 18^5$

۱۳) $(2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} \div (2+\sqrt3)^{\frac{1}{\sqrt5+2}} = (2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} \div (2+\sqrt3)^{\frac{1}{\sqrt5+2}\times\frac{\sqrt5-2}{\sqrt5-2}}$

$= (2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} \div (2+\sqrt3)^{(\frac{\sqrt5-2}{5-4})} = (2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} \div (2+\sqrt3)^{(\sqrt5-2)}$

$= \left(\frac{2-\sqrt3}{2+\sqrt3}\right)^{(\sqrt5-2)} = \left(\frac{2-\sqrt3}{2+\sqrt3}\times\frac{2-\sqrt3}{2-\sqrt3}\right)^{(\sqrt5-2)} = \left(\frac{(2-\sqrt3)^2}{\cancel{4-3}_{\,1}}\right)^{(\sqrt5-2)} = (4-4\sqrt3+3)^{(\sqrt5-2)}$

یا $= (2-\sqrt3)^{(2\sqrt5-4)}$

$= (7-4\sqrt3)^{(\sqrt5-2)}$

۱۴) $(3-\sqrt[3]{24})^{2/5}(9+3\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{24^2})^{2/5} = [(3-\sqrt[3]{24})(9+3\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{24^2})]^{2/5} = (3^3-\sqrt[3]{24}^3)^{2/5}$

$= (27-24)^{2/5} = 1^{2/5} = 1$

۱۵) $(2-\sqrt3)^{\frac{1}{\sqrt5-2}} \div (2-\sqrt3)^{\sqrt5-2} = (2-\sqrt3)^{\frac{1}{\sqrt5-2}\times\frac{\sqrt5+2}{\sqrt5+2}} \div (2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)}$

$= (2-\sqrt3)^{\frac{\sqrt5+2}{5-4}} \div (2-\sqrt3)^{(\sqrt5-2)} = (2-\sqrt3)^{(\sqrt5+2)} \div (2-\sqrt3)^{\sqrt5-2} = (2-\sqrt3)^{(\sqrt5+2)-(\sqrt5-2)}$

$= (2-\sqrt3)^{(\sqrt5+2-\sqrt5+2)} = (2-\sqrt3)^4$

مسئله: معادلات زیر را حل کنید:

۱) $x^{\sqrt3}-1=7 \xrightarrow{+1} x^{\sqrt3}=8 \Rightarrow (x^{\sqrt3})^{\sqrt3}=8^{\sqrt3} \to x^3=(2^3)^{\sqrt3} \Rightarrow x^3=(2^{\sqrt3})^3 \Rightarrow$

$x=2^{\sqrt3}$

۲) $x^{\sqrt2}-2=2 \xrightarrow{+2} x^{\sqrt2}=4 \Rightarrow (x^{\sqrt2})^{\sqrt2}=4^{\sqrt2} \Rightarrow x^2=(2^2)^{\sqrt2} \Rightarrow x^2=(2^{\sqrt2})^2 \Rightarrow$

$x=\pm 2^{\sqrt2} \Rightarrow x=2^{\sqrt2}$

غ ق ق

۳) $x^{2\sqrt2}+1=626 \xrightarrow{-1} x^{2\sqrt2}=625 \to (x^{2\sqrt2})^{\sqrt2}=(625)^{\sqrt2} \Rightarrow x^4=(5^4)^{\sqrt2} \Rightarrow x^4=(5^{\sqrt2})^4 \to$

$x=\pm 5^{\sqrt2} \to x=5^{\sqrt2}$

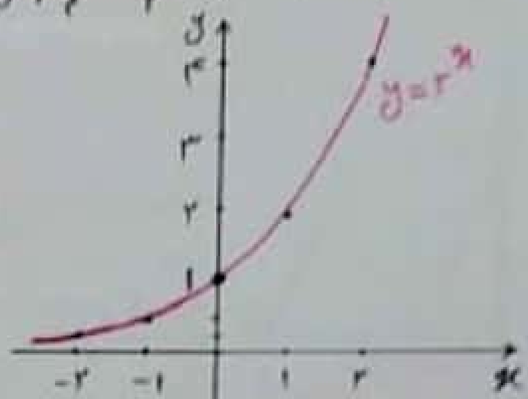
غ ق ق

رسم نمودار تابع نمایی: برای رسم نمودار تابع نمایی ابتدا دو مثال زیر که از روش نقطه‌یابی استفاده کرده‌ایم توجه کنید:

مثال ۱: نمودار تابع $y=2^x$ را رسم کنید.

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

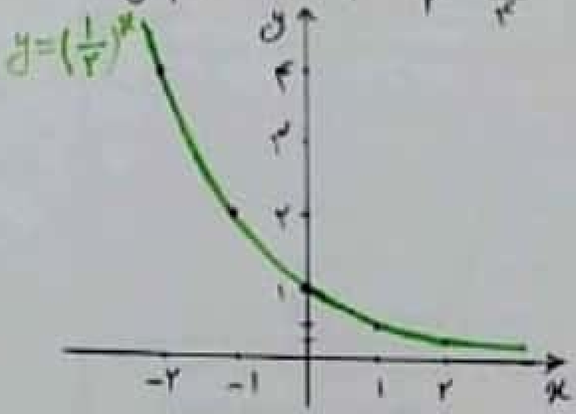


در این مثال همانطور که دیده می‌شود نمودار محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند یعنی از نقطه‌ی $(0,1)$ می‌گذرد. همچنین این تابع همواره بالای محور xهاست و محور xها را قطع نمی‌کند ولی خیلی به آن نزدیک می‌شود اصطلاحاً می‌گوئیم محور xها مجانب افقی نمودار می‌باشد. همچنین با افزایش مقادیر x مقادیر y نیز افزایش می‌یابند اصطلاحاً می‌گوئیم تابع «اکیداً صعودی» است و بنابراین «یک‌به‌یک» می‌باشد. دامنه‌ی این تابع تمام اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن تمام اعداد حقیقی مثبت یعنی $(0,+\infty)$ می‌باشد.

مثال ۲: نمودار $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



در این مثال همانطور که دیده می‌شود نمودار، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند یعنی از نقطه‌ی $(0,1)$ می‌گذرد. همچنین این تابع همواره بالای محور xهاست و محور xها را قطع نمی‌کند ولی خیلی به آن نزدیک می‌شود اصطلاحاً می‌گوئیم محور xها «مجانب افقی» نمودار می‌باشد. همچنین با افزایش مقادیر x مقادیر y مرتباً کاهش می‌یابند اصطلاحاً می‌گوئیم تابع «اکیداً نزولی» است و بنابراین «یک‌به‌یک» می‌باشد. دامنه‌ی این تابع تمام اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ و برد آن تمام اعداد حقیقی مثبت یعنی $(0,+\infty)$ می‌باشد.

در حالت کلی در تابع نمایی $y=a^x$ چنانچه $a>1$ آنگاه نمودار تابع نمایی مشابه شکل مثال ۱ می‌باشد و اگر $0<a<1$ آنگاه نمودار تابع نمایی مشابه شکل مثال ۲ است.
در حالتی که $a>1$ آنگاه هرچه a بزرگتر باشد سرعت رشد نمودار بیشتر خواهد بود و در حالتی که $0<a<1$، هرچه a کوچکتر باشد سرعت کاهش (نزول) نمودار بیشتر می‌باشد.

تذکر: همه‌ی قوانینی که برای انتقال نمودار توابع قبلاً گفته شد را برای تابع نمایی نیز می‌توانیم به کار ببریم.

مثال: نمودار هر یک از توابع داده شده را به روش انتقال رسم کنید:

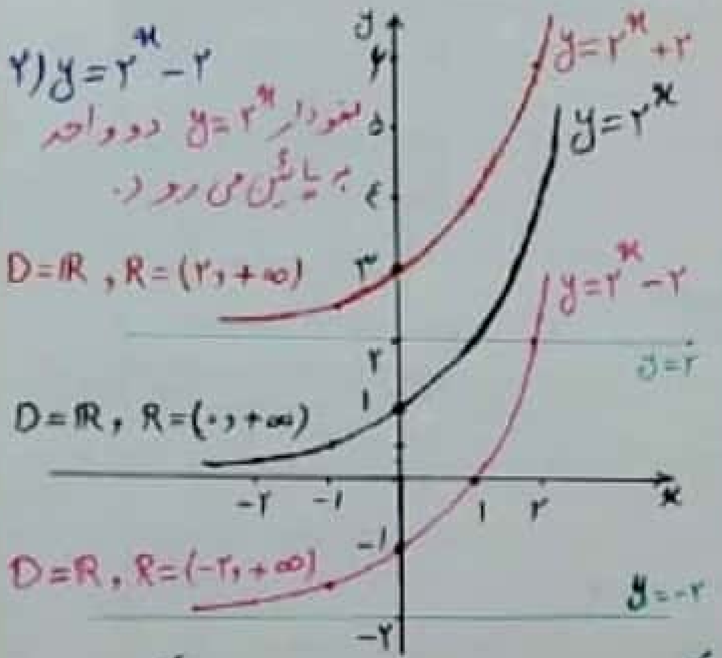
۱) $y = 2^x + 2$ نمودار $y = 2^x$ دو واحد به بالا می‌رود

۲) $y = 2^x - 2$ نمودار $y = 2^x$ دو واحد به پایین می‌رود.

$D = \mathbb{R}$, $R = (2, +\infty)$

$D = \mathbb{R}$, $R = (0, +\infty)$

$D = \mathbb{R}$, $R = (-2, +\infty)$



تذکر: وقتی نمودار $y = 2^x$ را منتقل می‌کنیم باید مجانب افقی آن را نیز به همان اندازه منتقل کنیم تا نمودار از آن پایین‌تر نیاید.

۳) $y = 2^{x-2}$ نمودار $y = 2^x$ دو واحد به راست می‌رود

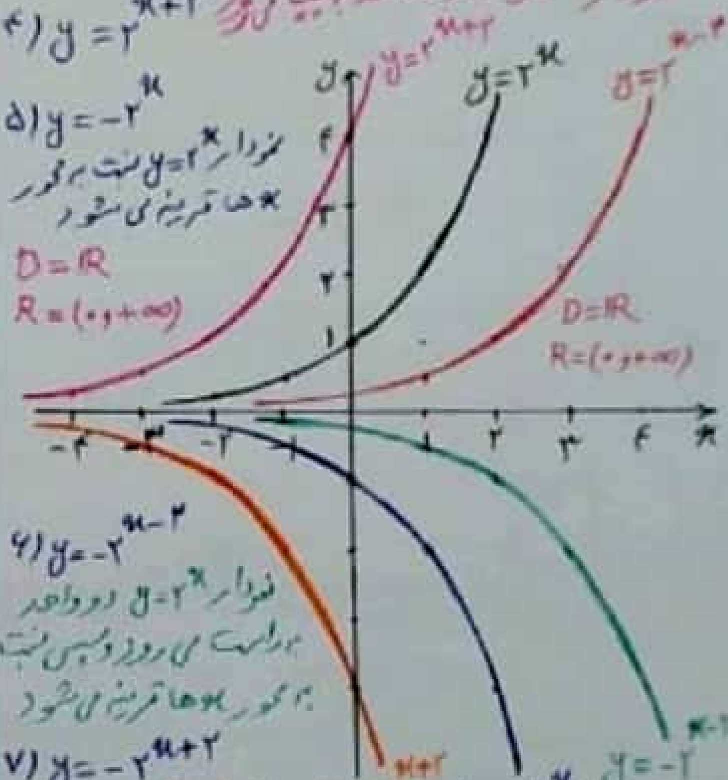
۴) $y = 2^{x+2}$ نمودار $y = 2^x$ دو واحد به چپ می‌رود

۵) $y = -2^x$ نمودار $y = 2^x$ نسبت به محور xها قرینه می‌شود

$D = \mathbb{R}$
$R = (0, +\infty)$

۶) $y = -2^{x-2}$ نمودار $y = 2^x$ دو واحد به راست می‌رود و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌شود

۷) $y = -2^{x+2}$ نمودار $y = 2^x$ دو واحد به چپ می‌رود و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌شود.

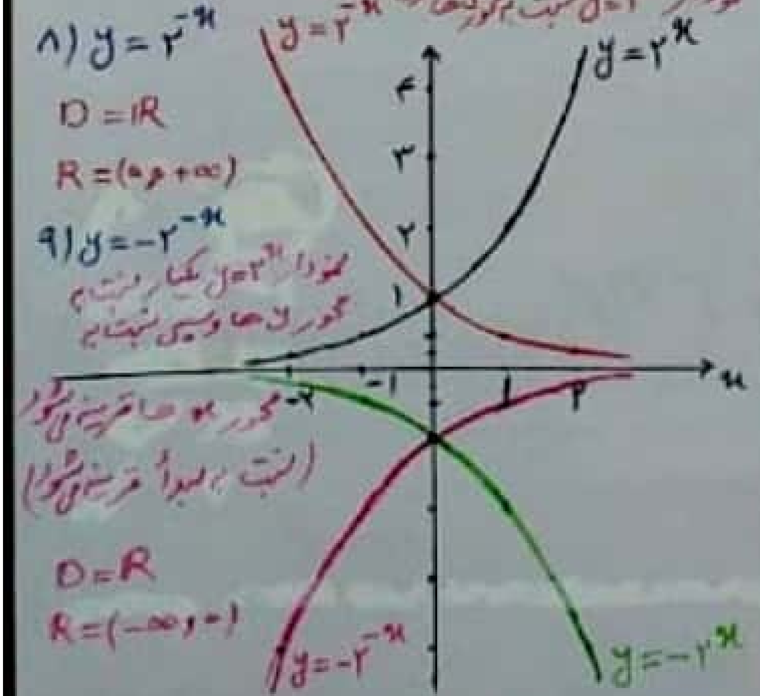


۸) $y = 2^{-x}$ نمودار $y = 2^x$ نسبت به محور yها قرینه می‌شود.

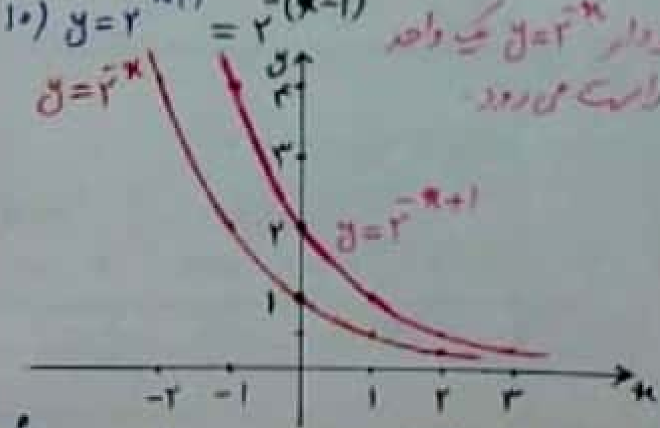
$D = \mathbb{R}$
$R = (0, +\infty)$

۹) $y = -2^{-x}$ نمودار $y = 2^x$ یکبار نسبت به محور yها و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌شود (نسبت به مبدأ قرینه می‌شود)

$D = \mathbb{R}$
$R = (-\infty, 0)$



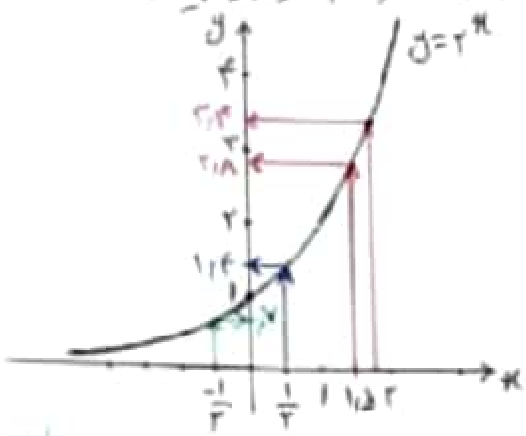
۱۰) $y = 2^{-x+1} = 2^{-(x-1)}$ نمودار $y = 2^{-x}$ یک واحد به راست می‌رود



تذکر: نمودار $y = 2^{-x}$ همان نمودار $y = (\frac{1}{2})^x$ می‌باشد

زیرا: $a^{-n} = (\frac{1}{a})^n = \frac{1}{a^n}$ ، $a \neq 0$

مثال: با استفاده از نمودار $y=2^x$ مقدار تقریبی $2^{\frac{1}{2}}$ و $2^{1.5}$ و $2^{\sqrt{3}}$ و $2^{-\frac{1}{2}}$ را بیابید.



حل: نمودار $y=2^x$ را رسم می‌کنیم سپس نقاطی به طول‌های $\frac{1}{2}$ و 1.5 و $\sqrt{3}$ و $-\frac{1}{2}$ را روی محور xها مشخص می‌کنیم و در این نقاط عمودهایی بر محور xها رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا نمودار را قطع کند از محل‌های تقاطع، بر محور yها عمود می‌کنیم تا عرض این نقاط مشخص شود.

با انجام این کار مطابق شکل داریم: $2^{\sqrt{3}} \simeq 3.4$ و $2^{1.5} \simeq 2.8$ و $2^{\frac{1}{2}} \simeq 1.4$ و $2^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.7$

معادلات نمایی: معادلاتی هستند که مجهول آن‌ها، در توان قرار داشته باشد. برای حل این گونه معادلات از این خاصیت استفاده می‌کنیم که: اگر a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد و $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$ و برعکس. این خاصیت در واقع همان خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی می‌باشد.

مثال: معادلات نمایی زیر را حل کنید:

۱) $2^{x-3}=16 \Rightarrow 2^{x-3}=2^4 \Rightarrow x-3=4 \xrightarrow{+3} \boxed{x=7}$

۲) $3^{x+1}=243 \Rightarrow 3^{x+1}=3^5 \Rightarrow x+1=5 \xrightarrow{-1} \boxed{x=4}$

۳) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1}=8 \Rightarrow (2^{-1})^{3x-1}=2^3 \Rightarrow 2^{-3x+1}=2^3 \Rightarrow -3x+1=3 \xrightarrow{-1} -3x=2 \xrightarrow{\div(-3)} \boxed{x=-\frac{2}{3}}$

۴) $(\sqrt{3})^{2x+5}=9^{-x+2} \Rightarrow (3^{\frac{1}{2}})^{2x+5}=(3^2)^{-x+2} \Rightarrow 3^{x+\frac{5}{2}}=3^{-2x+4} \Rightarrow x+\frac{5}{2}=-2x+4$

$\Rightarrow x+2x=\frac{4}{1}-\frac{5}{2} \Rightarrow 3x=\frac{3}{2} \xrightarrow{\div 3} \boxed{x=\frac{1}{2}}$

۵) $25^{2x-3}=125^{x+1} \Rightarrow (5^2)^{2x-3}=(5^3)^{x+1} \Rightarrow 5^{4x-6}=5^{3x+3} \Rightarrow 4x-6=3x+3$

$\Rightarrow 4x-3x=3+6 \Rightarrow \boxed{x=9}$

۶) $(\sqrt[3]{2})^x=\frac{1}{4} \Rightarrow (2^{\frac{1}{3}})^x=\frac{1}{2^2} \Rightarrow 2^{\frac{x}{3}}=2^{-2} \Rightarrow \frac{x}{3}=-2 \Rightarrow \boxed{x=-6}$

یادآوری: $a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$ ، $(a>0)$ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

۷) $(\sqrt{3})^{x+2} = \frac{1}{27} \rightarrow (3^{\frac{1}{2}})^{x+2} = (\frac{1}{3})^{3} \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}x+1} = 3^{-3} \Rightarrow \frac{1}{2}x+1 = -3 \xrightarrow{-1} \frac{1}{2}x = -4$

$\Rightarrow \boxed{x=-8}$

۸) $(\sqrt[3]{9})^{x} = 27^{x^2} \Rightarrow (9^{\frac{1}{3}})^{x} = (3^{3})^{x^2} \Rightarrow (3^{2})^{\frac{1}{3}x} = 3^{3x^2} \Rightarrow 3^{\frac{2}{3}x} = 3^{3x^2} \Rightarrow 3x^2 = \frac{2}{3}x$

$\Rightarrow 3x^2 - \frac{2}{3}x = 0 \xrightarrow{c=0} \begin{cases} x=0 \\ x = \frac{-b}{a} = \frac{\frac{2}{3}}{3} \quad \frac{2}{9} \end{cases}$

۹) $49^{x^2} = 7^{3x-1} \Rightarrow (7^2)^{x^2} = 7^{3x-1} \Rightarrow 7^{2x^2} = 7^{3x-1} \Rightarrow 2x^2 = 3x-1 \Rightarrow 2x^2-3x+1=0$

$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$

۱۰) $25^{x} = (\frac{1}{5})^{-x^2+3} \rightarrow (5^2)^{x} = (5^{-1})^{-x^2+3} \Rightarrow 5^{2x} = 5^{x^2-3} \Rightarrow 2x = x^2-3 \Rightarrow$

$-x^2+2x+3=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x=-1 \\ x = \frac{-c}{a} = \frac{-3}{-1} = 3 \end{cases}$

مثال: کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع $y=(\frac{1}{3})^{x}$ قرار دارند؟

الف) $A(0,1)$ $\quad x=0 \xrightarrow{\text{در تابع}} y=(\frac{1}{3})^{0} = 1 \Rightarrow$ $A(0,1)$ روی نمودار تابع هست.

ب) $B(1,0)$ $\quad x=1 \xrightarrow{\text{در تابع}} y=(\frac{1}{3})^{1} = \frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow$ $B(1,0)$ روی نمودار تابع نیست

پ) $C(-1,3)$ $\quad x=-1 \xrightarrow{\text{در تابع}} y=(\frac{1}{3})^{-1} = 3 \rightarrow$ $C(-1,3)$ روی نمودار تابع هست

ت) $D(-\frac{1}{2},\sqrt{3})$ $\quad x=\frac{-1}{2} \xrightarrow{\text{در تابع}} y=(\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow$ $D(-\frac{1}{2},\sqrt{3})$ روی نمودار تابع هست

ث) $E(-2,4)$ $\quad x=-2 \xrightarrow{\text{در تابع}} y=(\frac{1}{3})^{-2} = 3^{2} = 9 \neq 4 \rightarrow$ $E(-2,4)$ روی نمودار تابع نیست

ج) $F(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3})$ $\quad x=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در تابع}} y=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow$ $F(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3})$ روی نمودار تابع است

چ) $G(2,\frac{1}{9})$ $\quad x=2 \xrightarrow{\text{در تابع}} y=(\frac{1}{3})^{2} = \frac{1}{9} \Rightarrow$ $G(2,\frac{1}{9})$ روی نمودار تابع است

ح) $H(-\frac{3}{2},27)$ $\quad x=\frac{-3}{2} \xrightarrow{\text{در تابع}} (\frac{1}{3})^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27} \neq 27 \rightarrow$ $H(-\frac{3}{2},27)$ روی نمودار تابع نیست

مثال: مقدار k را طوری بیابید که تابع $y=(k-3)^x$ صعودی باشد. $(x>0)$

حل: برای اینکه تابع نمایی $y=a^x$ صعودی باشد باید $a>1$ پس داریم:

$$k-3>1 \Rightarrow k>3+1 \Rightarrow k>4$$

مثال: حدود k را طوری تعیین کنید که تابع $y=(2k-7)^x$ نزولی باشد. $(x>0)$

حل: برای اینکه تابع نمایی $y=a^x$ نزولی باشد باید $0<a<1$ پس داریم:

$$0<2k-7<1 \xrightarrow{+7} 7<2k<8 \xrightarrow{\div 2} 3.5<k<4$$

نامعادله‌ی نمایی: نامعادله‌ای است که مجهول آن در توان قرار گیرد. برای حل نامعادله‌ی $a^{P(x)} \leq a^{Q(x)}$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$1)\ a>1 \Rightarrow P(x) \leq Q(x)$

$2)\ 0<a<1 \Rightarrow P(x) \geq Q(x)$

مثال: نامعادله‌ی $3^{5x-1} \leq 3^{x+3}$ را حل کنید.

حل: چون $a>1$ پس داریم:

$$5x-1 \leq x+3 \Rightarrow 5x-x \leq 3+1 \Rightarrow 4x \leq 4 \Rightarrow x \leq 1$$

مثال: نامعادله‌ی $5^{x+2} < 5^{2x-6}$ را حل کنید.

حل: چون $a>1$ پس داریم:

$$x+2<2x-6 \Rightarrow x-2x<-6-2 \Rightarrow -x<-8 \Rightarrow x>8$$

مثال: نامعادله‌ی $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x+7}$ را حل کنید.

حل: چون $0<a<1$ پس داریم:

$$3x-1 \geq x+7 \Rightarrow 3x-x \geq 7+1 \Rightarrow 2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4$$

مثال: نامعادله‌ی $(0.1)^{4x+3} < (0.1)^{-x+2}$ را حل کنید.

حل: چون $0<a<1$ پس داریم:

$$4x+3>-x+2 \Rightarrow 4x+x>2-3 \Rightarrow 5x>-1 \Rightarrow x>-\frac{1}{5}$$

مثال: نامعادله‌ی $2^{x+2} \leq 2^{-x^2+4}$ را حل کنید.

حل: چون $a>1$ پس داریم:

$$x+2 \leq -x^2+4 \Rightarrow x^2+x-2 \leq 0 \longrightarrow -2 \leq x \leq 1$$

$$x^2+x-2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=-2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

مثال: با توجه به تعریف تابع نمایی و نمودار آن در مربع علامت $<$ یا $>$ یا $=$ قرار دهید:

الف) $2^3 \boxed{>} 2^{\sqrt{3}}$ ب) $3^{\sqrt{2}} \boxed{<} 3^{1.5}$ پ) $(\frac{1}{5})^{\sqrt{5}} \boxed{>} (\frac{1}{5})^{2.5}$

ت) $2^4 \boxed{=} (\frac{1}{4})^{-2}$ ث) $(\frac{1}{2})^{2.1} \boxed{<} (\frac{1}{2})^{-2.7}$ ج) $\sqrt{2}^5 \boxed{=} (32)^{\frac{1}{2}}$

تذکر: در تابع نمایی اگر $x<y$ و $a>1$ آنگاه $a^x<a^y$ (چون تابع صعودی می‌باشد)
و اگر $x<y$ و $0<a<1$ آنگاه $a^x>a^y$ (چون تابع نزولی می‌باشد).

ت) $(\frac{1}{4})^{-2}=4^2=(2^2)^2=2^4$ ج) $(\sqrt{2})^5=(2^{\frac{1}{2}})^5=2^{\frac{5}{2}}=(2^5)^{\frac{1}{2}}=(32)^{\frac{1}{2}}$

مسئله: اگر $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ و $g(x)=3^x$ در این صورت موارد خواسته شده را بیابید:

الف) $f(0)+g(1)=(\frac{1}{2})^0+3^1=1+3=4$

ب) $f(-1)+g(0)=(\frac{1}{2})^{-1}+3^0=2+1=3$

پ) $3f(-2)-g(2)=3(\frac{1}{2})^{-2}-3^2=3\times 2^2-9=12-9=3$

ت) $(f\times g)(0)=f(0)\times g(0)=(\frac{1}{2})^0\times 3^0=1\times 1=1$

ث) $(\frac{f}{g})(-1)=\frac{f(-1)}{g(-1)}=\frac{(\frac{1}{2})^{-1}}{3^{-1}}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$

ج) $f(g(0))=f(3^0)=f(1)=(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{2}$

چ) $g(f(0))=g((\frac{1}{2})^0)=g(1)=3^1=3$

ح) $(\frac{f}{g})(1)+g(f(-2))=\frac{f(1)}{g(1)}+g((\frac{1}{2})^{-2})=\frac{(\frac{1}{2})^1}{3^1}+g(2^2)=\frac{\frac{1}{2}}{3}+g(4)=\frac{1}{6}+3^4=\frac{1}{6}+\frac{81}{1}$
$=\frac{1+486}{6}=\frac{487}{6}$

خ) $\frac{(\frac{g}{f})(1)-2f(-3)}{6g(-1)}=\frac{\frac{g(1)}{f(1)}-2(\frac{1}{2})^{-3}}{6\times 3^{-1}}=\frac{\frac{3^1}{(\frac{1}{2})^1}-2\times 2^3}{6\times\frac{1}{3}}=\frac{6-2\times 8}{2}=\frac{6-16}{2}=\frac{-10}{2}=-5$

د) $\frac{g(2)\times f(-1)}{g(1)-f(-2)}=\frac{3^2\times(\frac{1}{2})^{-1}}{3^1-(\frac{1}{2})^{-2}}=\frac{9\times 2}{3-2^2}=\frac{18}{3-4}=\frac{18}{-1}=-18$

ریاضی ۲ یازدهم تجربی «توابع نمایی و لگاریتم»

مثال: اگر $y=\sqrt{3}^{\,x}$ و نقاط زیر روی نمودار تابع باشند مختصات نقاط داده شده را کامل کنید:

الف) $A(\ ,1)$ ب) $B(1,\ )$ پ) $C(-1,\ )$ ت) $D(\ ,3)$

ث) $E(-2,\ )$ ج) $F(4,\ )$ ج) $G(\ ,3^{\sqrt{3}})$ ح) $H(\ ,\frac{1}{9})$

حل: می‌دانیم که $a^0=1$ پس $x=0$ یا

الف) $1=(\sqrt{3})^x \Rightarrow \sqrt{3}^0=(\sqrt{3})^x \Rightarrow x=0 \Rightarrow A(0,1)$

می‌دانیم که $a^1=a$ پس $y=\sqrt{3}$ یا

ب) $y=(\sqrt{3})^1 \Rightarrow y=\sqrt{3} \Rightarrow B(1,\sqrt{3})$

می‌دانیم که $a^{-n}=(\frac{1}{a})^n$ پس $y=\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا

پ) $y=(\sqrt{3})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow C(-1,\frac{\sqrt{3}}{3})$

ت) $3=(\sqrt{3})^x \Rightarrow 3=(3^{\frac{1}{2}})^x \Rightarrow 3^1=3^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \frac{1}{2}x=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D(2,3)$

ث) $y=(\sqrt{3})^{-2} \Rightarrow y=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2=\frac{1}{3} \Rightarrow E(-2,\frac{1}{3})$

ج) $y=(\sqrt{3})^4 \rightarrow y=(3^{\frac{1}{2}})^4 \Rightarrow y=3^{\frac{4}{2}} \Rightarrow y=3^2 \Rightarrow y=9 \Rightarrow F(4,9)$

ج) $3^{\sqrt{3}}=(\sqrt{3})^x \Rightarrow 3^{\sqrt{3}}=(3^{\frac{1}{2}})^x \Rightarrow 3^{\sqrt{3}}=3^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \frac{1}{2}x=\sqrt{3} \xrightarrow{\times 2} x=2\sqrt{3} \Rightarrow G(2\sqrt{3},3^{\sqrt{3}})$

ح) $\frac{1}{9}=(\sqrt{3})^x \Rightarrow \frac{1}{3^2}=(3^{\frac{1}{2}})^x \rightarrow 3^{-2}=3^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \frac{1}{2}x=-2 \xrightarrow{\times 2} x=-4 \Rightarrow H(-4,\frac{1}{9})$

مثال: اگر نقطه‌ی $A(-2,\frac{9}{4})$ روی تابع $f(x)=a^x$ باشد آنگاه مقادیر $f(2)$ ، $f(-1)$ ، $f(3)$ را بیابید.

حل: مختصات نقطه‌ی A را در تابع قرار دهیم بنابراین داریم:

$\frac{9}{4}=a^{-2} \Rightarrow \frac{9}{4}=(\frac{1}{a})^2$

$\Rightarrow \frac{9}{4}=\frac{1}{a^2} \rightarrow a^2=\frac{4}{9} \Rightarrow a=\pm\frac{2}{3} \Rightarrow f(x)=(\frac{2}{3})^x$

$f(2)=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$ ، $f(-1)=(\frac{2}{3})^{-1}=\frac{3}{2}$ و $f(3)=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

مثال: اگر $y=(2m-3)^x$ یک تابع نمایی باشد حدود m را طوری بیابید که:

الف - این تابع صعودی باشد ب - این تابع نزولی باشد.

حل: با توجه به تعریف تابع نمایی باید داشته باشیم:

الف) $a>1 \Rightarrow 2m-3>1 \xrightarrow{+3} 2m>4 \xrightarrow{\div 2} m>2$

ب) $0<a<1 \Rightarrow 0<2m-3<1 \xrightarrow{+3} 3<2m<4 \xrightarrow{\div 2} \frac{3}{2}<m<2$

تمرین ۱: حاصل هر عبارت را بدست آورید:

الف) $\left[(\sqrt{3})^{(\sqrt{5}+2)}\right]^{(\sqrt{5}-2)}$ ب) $\left[(\sqrt{5})^{(\sqrt{7}-\sqrt{3})}\right]^{(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$ پ) $\left[(5-\sqrt{2})^{(\sqrt{2}-1)}\right]^{(\sqrt{2}+1)}$

ت) $(2-\sqrt[3]{7})^{\pi}\times(4+2\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49})^{\pi}$ ث) $(\sqrt{2}-1)^{3\sqrt{2}}\div\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}}$ ج) $\left[(\sqrt[3]{4})^{(\sqrt{3}-3)}\right]^{(\sqrt{3}+3)}$

تمرین ۲: معادلات زیر را حل کنید:

الف) $4^{2x-1}=8^{x+3}$ ب) $3^{2x+1}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}$ پ) $8^{2x-1}=2^{x^2+2}$

ت) $7^{x+2}-49^{x+5}=0$ ث) $25^{x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3}$ ج) $4^{x}+2^{x+1}=8$

تمرین ۳: نامعادلات زیر را حل کنید:

الف) $2^{3x+2}\leq 8$ ب) $27^{2x-1}>9^{x+2}$ پ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}\leq\left(\frac{1}{25}\right)^{1-x}$

ت) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}>\left(\frac{1}{8}\right)^{x+5}$ ث) $8^{\frac{2x}{3}+1}>(\sqrt[3]{2})^{5x}$ ج) $36^{x+2}<(\sqrt{6})^{2x^2+2}$

چ) $2^{3x+1}<2^{x^2-1}$ ح) $9^{3-x^2}\geq\frac{1}{3}$

تمرین ۴: فرض کنید تابع $y=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ محورهای xها و yها را به ترتیب در نقاطی به طول k و عرض m قطع کند در این صورت حاصل $(m+k)^{90}$ را بیابید.

تمرین ۵: ابتدا نمودار $y=3^{x}$ را رسم کنید سپس نمودار هر یک از توابع زیر را رسم نمائید:

الف) $y=-3^{x}$ ب) $y=3^{-x}$ پ) $y=-3^{-x}$ ت) $y=3^{x}+1$ ث) $y=3^{x}-1$

ج) $y=3^{x-1}$ چ) $y=3^{x+1}$ ح) $y=\frac{1}{2}\times 3^{x}$ خ) $y=2\times 3^{x}$ د) $y=-2\times 3^{x}$

ذ) $y=-\frac{1}{2}\times 3^{x}$ ر) $y=3^{x-1}+2$ ز) $y=3^{x+1}-2$ ژ) $y=\frac{1}{2}\times 3^{x}-2$ س) $y=-2\times 3^{x}+2$

تمرین ۶: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

الف) $f(x)=\dfrac{1}{2^{x}-2^{2x+4}}$ ب) $f(x)=\sqrt{3^{2x+1}-3^{x}}$ پ) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2^{-x+1}}}$

«پیروز و سربلند باشید» خالقی

ریاضی ۲ یازدهم تجربی «توابع نمایی و لگاریتم»

تابع نمایی: هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>0$ و $a\neq 1$ باشد را تابع نمایی گوییم.

مثلاً توابع $y=3^x$ و $y=(\sqrt{2})^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ و $y=(\frac{5}{2})^x$ هر کدام یک تابع نمایی می باشند.

توان‌های حقیقی: همه‌ی قوانینی که در سال گذشته در مورد اعداد توان‌دار با توان‌های گویا و پایه‌های حقیقی مثبت را به کار می بردیم برای توان‌های حقیقی نیز برقرارند بنابراین اگر r و s دو عدد حقیقی و x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند آنگاه داریم:

1) $x^0=1$ 2) $1^r=1$ 3) $x^{-r}=(\frac{1}{x})^r=\frac{1}{x^r}$ 4) $x^r\times x^s=x^{r+s}$ 5) $x^r\times y^r=(xy)^r$

6) $(x^r)^s=x^{r\cdot s}=(x^s)^r$ 7) $x^r\div x^s=\frac{x^r}{x^s}=x^{r-s}$ 8) $x^r\div y^r=\frac{x^r}{y^r}=(\frac{x}{y})^r$

مثال: حاصل هر قسمت را به دست آورید:

1) $2^{\sqrt{2}}\times 2^{3\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}=2^{4\sqrt{2}}$

2) $3^{1.5}\times\sqrt{3}=3^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=3^{\frac{4}{2}}=3^2=9$

3) $(2^{\sqrt{2}})^{3\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}=2^{3\times 2}=2^6=64$

4) $3^{(2-\sqrt{3})}\times 2^{(2-\sqrt{3})}=(3\times 2)^{(2-\sqrt{3})}=6^{(2-\sqrt{3})}$

5) $(5^{(\sqrt{3}-1)})^{(\sqrt{3}+1)}=5^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=5^{(3-1)}=5^2=25$

6) $((\sqrt{5})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{18}}=(\sqrt{5})^{\sqrt{36}}=(\sqrt{5})^6=5^3=125$

7) $((\frac{1}{2})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}}=(\frac{1}{2})^{\sqrt{36}}=(\frac{1}{2})^6=\frac{1}{64}$

8) $[(\sqrt{2}-1)^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}]^{(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})}=(\sqrt{2}-1)^{\overbrace{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})}^{\text{مزدوج}}}=(\sqrt{2}-1)^{(25\times 2-4\times 5)}$

$=(\sqrt{2}-1)^{30}$

9) $(\sqrt{2}-1)^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}\times(\sqrt{2}+1)^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}=[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)]^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}=(2-1)^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}$

$=1^{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})}=1$

10) $[(\sqrt{3}+1)^{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}]^{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}\times[(\sqrt{3}-1)^{3\sqrt{2}}]^{\sqrt{2}}=(\sqrt{3}+1)^{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}\times(\sqrt{3}-1)^{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

$=(\sqrt{3}+1)^{(9\times 2-4\times 3)}\times(\sqrt{3}-1)^{3\times 2}=(\sqrt{3}+1)^6\times(\sqrt{3}-1)^6=[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)]^6=(3-1)^6=2^6=64$

11) $\frac{2^{\sqrt{3}}\times 2^{\sqrt{27}}}{2^{\sqrt{12}}\times 4^{\sqrt{3}}}=\frac{2^{\sqrt{3}}\times 2^{3\sqrt{3}}}{2^{2\sqrt{3}}\times(2^2)^{\sqrt{3}}}=\frac{2^{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}}{2^{2\sqrt{3}}\times 2^{2\sqrt{3}}}=\frac{2^{4\sqrt{3}}}{2^{4\sqrt{3}}}=1$