

## فصل ۲- تابع

توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

درس ۱

توابع پلکانی و قدر مطلق

درس ۲

اعمال بر روی توابع

درس ۳

تپه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

اجرای طرح کانال اتصال زرنده رود به سیمینه رود / احیای دریاچه ارومیه

عکس: بیژن سیدزاده

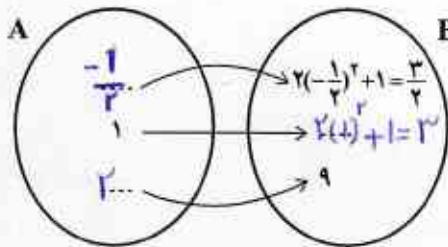
# درس ۱

## توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همبانی

در سال گذشته با مفاهیم تابع، دامنه و برد آشنا شدیم.

### فعالیت

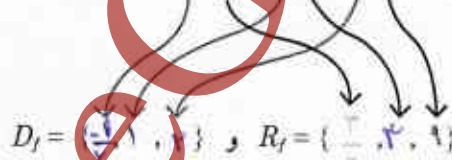
اگر  $f: A \rightarrow B$  باشد، با توجه به نمایش‌های خوانده شده در سال قبل برای بیان یک رابطه:



الف. در نمایش بیگانه با توجه به ضابطه  $f$  و مجموعه  $A$ ، داریم:

بنابراین برد  $f$  مجموعه  $\{ \frac{3}{4}, 3, 9 \}$  است. نمایش بیگانه رابطه فوق بیانگر یک تابع است؛ زیرا از هر عضو مجموعه  $A$ ، دقیقاً یک بیگانه خارج شده است.

ب. نمایش زوج مرتبی مثال بالا به صورت  $f = \{ (-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}), (1, 3), (2, 9) \}$  است که:



مجموعه‌های دامنه و برد تابع  $f$  را تشکیل می‌دهند.



ج. نمایش مختصاتی آن نیز چنین است: تصویر این نقاط بر روی محور  $x$ ‌ها؛ یعنی  $\{ -\frac{1}{3}, 1, 2 \}$  دامنه تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور  $y$ ‌ها  $\{ \frac{3}{4}, 3, 9 \}$  برد تابع نامیده می‌شود.

نویسنده:

گروه ریاضی دوره ن دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان



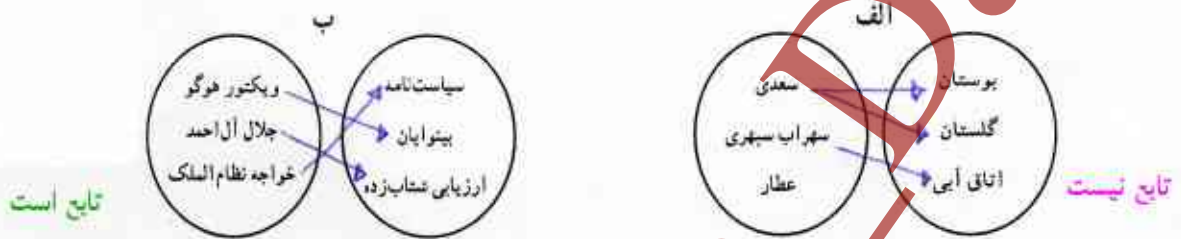
## کار در کلاس

ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطه‌ها خواسته شده را کامل کنید.

۱. رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.



۲. رابطه‌ای که به خلق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.



حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت ۱ و ۲ «تابع» هستند، کامل کنید.

نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	نمایش پیکانی	
	<p> <math>\{(یزد, بافق), (چهارمحال و بختیاری, رودسر), (گیلان, کوه‌رنگ)\}</math> </p>		۱
	<p> <math>\{(سیاست نامه, بینوایان), (بینوایان, جلال آل احمد), (ارزیابی شتاب زده, خواجه نظام الملک)\}</math> </p>		۲

با توجه به جدول بالا:

الف. نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که:  $\{(یزد, بافق), (چهارمحال و بختیاری, رودسر), (گیلان, کوه‌رنگ)\}$

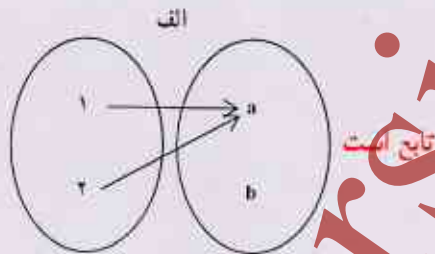
ب. نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که:  $\{(سیاست نامه, بینوایان), (بینوایان, جلال آل احمد), (ارزیابی شتاب زده, خواجه نظام الملک)\}$

ج. نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که:  $\{(یزد, بافق), (چهارمحال و بختیاری, رودسر), (گیلان, کوه‌رنگ)\}$

به عبارتی دیگر اگر مولفه‌ها اول و دوم مرتب آن بیان باشند، در این صورت  
مولفه‌ها دوم آنها نیز برابر باشند.

تمرین

۱. کدام یک از رابطه‌های زیر که با نمودار بیگانه نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟ **متناسب** چون از عنصر  $1$  به  $a$  و  $b$  می‌رود



۲. کامل کنید.

$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases} \quad D_f = A = \{-2, -1, 2\} \quad R_f = \{3, 0, 3\} = \{3, 0\}$$

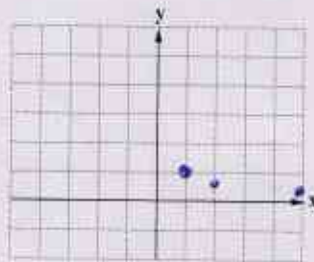


با توجه به ترتیب عضوها در دامنه و برد می‌توان این تابع را نوشت

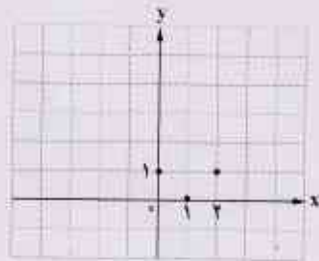
$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 3x \end{cases} \quad D_f = \{-\frac{1}{2}, 0, 2\} \quad R_f = \{-\frac{3}{2}, 0, 6\}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad D_f = \{1, 2\} \quad R_f = \{1, \frac{1}{2}\}$$



$$\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = (x-1)^2 \end{cases} \quad D_f = \{1, 0, 2\} \quad R_f = \{0, 1\}$$



نهی کننده!

## انواع توابع (ثابت، چندضابطه‌ای و همانی)

یکی از کاربردهای تابع، «مدل‌سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید:

مدیران یک فروشگاه به دلایلی\* تصمیم گرفته‌اند هزینه استفاده از توقفگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به صورت هوشمند تعیین کنند. پیش از این، هزینه استفاده از توقفگاه ثابت بوده است (مستقل از ساعت و روز هفته).

برای اجرای این تصمیم ابتدا به کمک دوربین‌های مدار بسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در سومین هفته هر فصل شمارش شده است. با توجه به نبود داده دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده شده است. این اطلاعات در جدول ۱ نمایش داده شده است:

جدول ۱. میانگین ورود خودرو به توقفگاه در هر ساعت کاری فروشگاه

روز هفته	نخستین ساعت	دومین ساعت	سومین ساعت	چهارمین ساعت	پنجمین ساعت	ششمین ساعت	هفتمین ساعت	هشتمین ساعت	نهمین ساعت	دهمین ساعت	یازدهمین ساعت	دوازدهمین ساعت
(۸-۹)	(۱۰-۱۱)	(۱۱-۱۲)	(۱۲-۱۳)	(۱۳-۱۴)	(۱۴-۱۵)	(۱۵-۱۶)	(۱۶-۱۷)	(۱۷-۱۸)	(۱۸-۱۹)	(۱۹-۲۰)		
شنبه	۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۲۰	۲۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰	
یکشنبه	۱۱۰	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰	
دوشنبه	۲۱۰	۲۳۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۲۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۳۰	۲۵۰	
سه‌شنبه	۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۳۲۰	۳۴۰	۳۶۰	
چهارشنبه	۳۰	۴۰	۶۰	۶۰	۶۰	۵۰	۲۷۰	۲۵۰	۲۹۰	۵۷۰	۶۸۰	
پنجشنبه	۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۳۲۰	۲۱۰	۵۱۰	۶۱۰	۷۲۰	۸۹۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰	
جمعه	۱۲۰	۲۱۰	۲۴۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۲۰	۲۱۰

با در نظر گرفتن جدول ۱، هزینه توقفگاه از روز شنبه تا چهارشنبه مطابق جدول ۲ تعیین شده است:

جدول ۲. هزینه توقفگاه با توجه به میانگین خودروهای ورودی

میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینه دریافتی از هر خودرو (تومان)
۱-۱۰۰	رایگان
۱۰۰-۲۰۰	۵۰۰ تومان
۲۰۰-۳۰۰	۱۰۰۰ تومان
۳۰۰-۴۰۰	۱۵۰۰ تومان
۴۰۰-۵۰۰	۲۰۰۰ تومان
۵۰۰-۶۰۰	۲۵۰۰ تومان
۶۰۰-۷۰۰	۳۰۰۰ تومان

\* ۱. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان نیست، هزینه اندک توقفگاه می‌تواند تسویفی برای خرید از فروشگاه نزد مشتریان باشد.

۲. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان است، هزینه بالاتر استفاده از توقفگاه درآمد بیشتری را برای فروشگاه فراهم می‌کند.

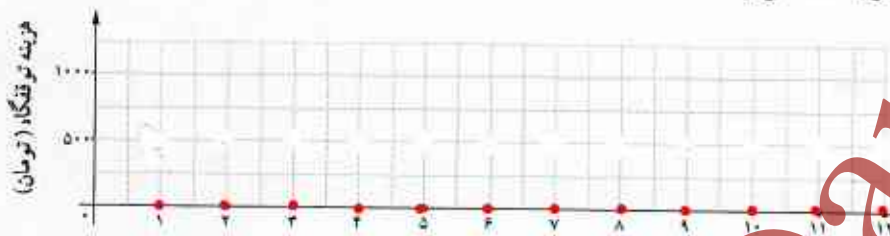
۳. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان از ظرفیت پذیرش فروشگاه بیشتر است و این مسئله باعث تعجیل مشتریان در خرید از فروشگاه می‌شود، سوق دادن بخشی از این مشتریان به ساعت‌های خلوت فروشگاه به دلیل هزینه رایگان یا اندک توقفگاه می‌تواند در افزایش درآمد فروشگاه بسیار تأثیرگذار باشد. به بیان دیگر، تعیین هزینه کمتر توقفگاه به تنهایی می‌تواند درآمد فروشگاه را ارتقا بخشد، بلکه این مسئله بر میزان خرید مشتریان از فروشگاه نیز تأثیرگذار است که نتیجه آن سود بیشتر فروشگاه خواهد بود.



### تابع ثابت (Constant Function)

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار «۱۱ ساعت کاری فروشگاه- هزینه دریافتی» را برای روزهای شنبه تا چهارشنبه در نخستین هفته هوشمندسازی رسم می‌کنیم.<sup>۱</sup>

شنبه: در نخستین روز هفته تعداد خودروهای ورودی به پارکینگ همواره در دسته «۱» قرار می‌گیرند. بنابراین مطابق جدول ۲، نمودار زیر به دست می‌آید:

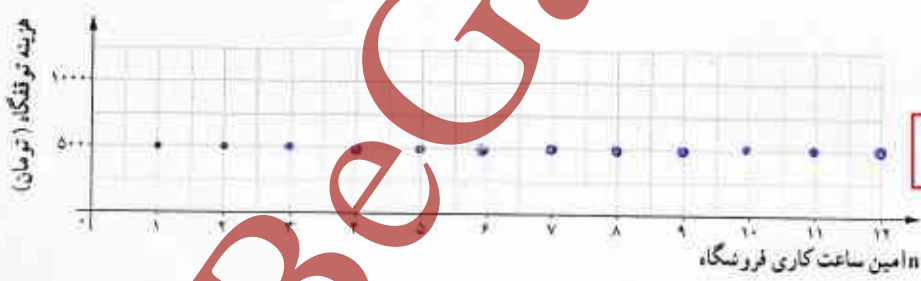


توجه: این منحنی «۱۱ ساعت کاری فروشگاه» گسسته است.

این نوع تابع که به ازای  $n=1$  تا  $n=12$ ؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است، تابع ثابت نامیده می‌شود. پس ضابطه تابع «هزینه توقفگاه» در این روز به صورت  $C(n)=0$  است که در آن  $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 12\}$  دامنه تابع و  $R = \{0\}$  برد تابع  $C$  را تشکیل می‌دهند.

### کار در کلاس

یک شنبه: با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینه دریافتی مطابق جدول ۲، نمودار زیر را کامل کنید.



$$f(x) = 500$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 12\}$$

$$R_f = \{500\}$$

تابع  $f: A \rightarrow B$  را که در آن مجموعه  $R = \{c\}$  برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است.

۱. با توجه به آنکه مدت زمانی طول می‌کشد تا مشتریان فروشگاه از نرخ جدید هزینه توقفگاه آگاهی یابند در نخستین هفته هوشمندسازی توقفگاه، میانگین ورودی خودرو تغییر محسوسی نکرده است و اطلاعات جدول ۱ در این هفته معتبر است.



# نکته: (۱۸ ساعت متغیر گسسته است)

\*\*\* لازم به ذکر است دانش آموزان در سال گذشته نسنه بندی منحصر کمی بجای گسسته و پیوسته را نخوانده اند

## فعالیت

دوشنبه: با استفاده از جدول ۱ و ۲ همانند روزهای شنبه و یکشنبه، نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید و دامنه و برد و ضابطه تابع را مشخص کنید.

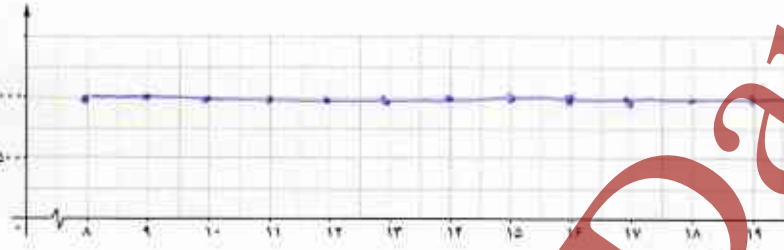
توجه داشته باشید که در این نمودار محور x برخلاف روزهای شنبه و یکشنبه بیانگر زمان ورود خودرو به توقفگاه است.

$$\begin{cases} C: A \rightarrow B \\ C(x) = 1000 \end{cases}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 \leq x \leq 12\}$$

$$R = \{1000\}$$

هزینه توقفگاه (تومان)



نکته: نمودار ورود خودرو به توقفگاه  
خطی رسم شود (روزه)  
تفسیر پیوسته است.  
به دامنه نمودار در روز  
دوشنبه متعلق به قطعه ای است  
مجموعه اعداد حقیقی است

دامنه نمودار در روز دوشنبه چه تفاوتی با دامنه نمودار در روزهای شنبه و یکشنبه دارد؟  
تفاوت این دامنه ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

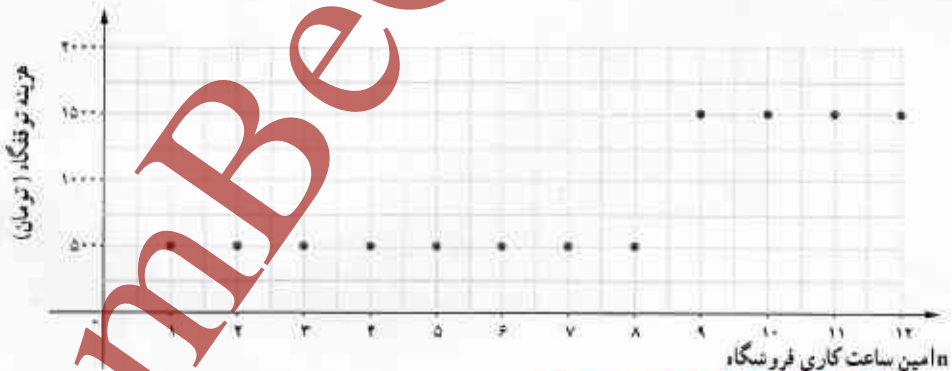
مجموعه اعداد حقیقی است  
رسم نمودار (زمان متغیر پیوسته است)

### تابع

سه شنبه: با بررسی جدول ۱ تعداد خودروهای ورودی از ۰ تا ۲۰۰ و در چهار ساعت پایانی ساعت کاری فروشگاه در دسته ۰-۴۰۰-۳۰۰ قرار می گیرد. با در نظر گرفتن جدول ۲، هزینه استفاده از توقفگاه برای خودروها در این روز از این تابع پیروی می کند:

$$C(n) = \begin{cases} 500 & 1 \leq n \leq 8 & (1) \\ 1500 & 9 \leq n \leq 12 & (2) \end{cases}$$

که ضابطه ۱ مربوط به ساعت ورودی اول تا هشتم و ضابطه ۲ مربوط به ساعت ورودی نهم تا دوازدهم است و نمودار آن:



### (که اشتراک آنها تهی است)

توابعی که در بخش های مختلف دامنه، ضابطه های مختلف دارند، توابع چند ضابطه ای نامیده می شوند؛ مثلاً اگر یک تابع از دو ضابطه پیروی کند، یک تابع ~~ب~~ ضابطه ای نامیده می شود.

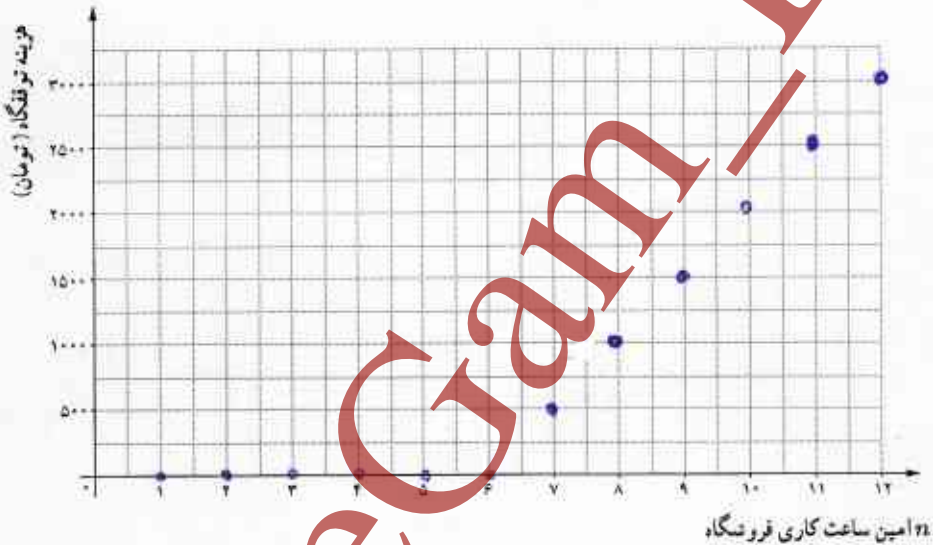
دامنه نمودار روز دوشنبه متعلق به قطعه ای از مجموعه اعداد حقیقی است در صورتی که دامنه نمودار های روز شنبه و یکشنبه متعلق به قطعه ای از مجموعه ی اعداد طبیعی است.  
نمودار روز دوشنبه نقاط روی یک خط است که به هم وصل می شوند، اما نمودار های روز شنبه و یکشنبه نقاطی هستند که روی یک خط هستند و به هم وصل نمی شوند.

## کار در کلاس

چهارشنبه: در این روز با توجه به جدول ۱ و ۲ ضابطه تابع به صورت زیر مشخص می شود:

$$C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ 500 & n = 7 \\ 1000 & n = 8 \\ 1500 & n = 9 \\ 2000 & n = 10 \\ 2500 & n = 11 \\ 3000 & n = 12 \end{cases} \Leftrightarrow C(n) = \begin{cases} 0 & 1 \leq n \leq 6 \\ (n-6) \times 500 & 7 \leq n \leq 12 \end{cases}$$

۱. نمودار این تابع را رسم کنید:



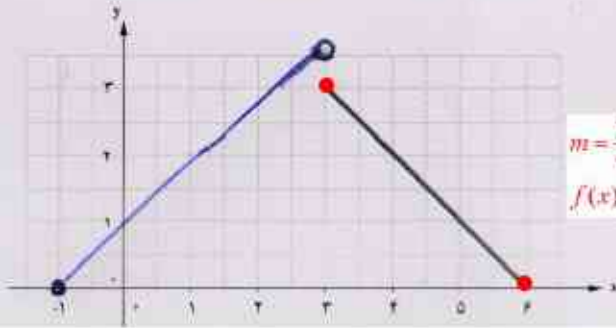
۲. درآمد فروشگاه در این روز چقدر است؟

$$\text{درآمد فروشگاه} = 500 \times 10 + 1000 \times 20 + 1500 \times 30 + 2000 \times 40 + 2500 \times 50 + 3000 \times 60 = 533000$$

تذکره مهم: طبق ضابطه  $C(n)$  در کار در کلاس هزینه پارکینگ در اولین ساعت تا ششمین ساعت صفر است و در هفتمین ساعت، میانه بین ورود خودرو در روز ۲۸ به شنبه طبق جدول ۱، برابر ۱۸ صفت می باشد. به همین دلیل  $C(n)$  کار در کلاس، ۵۰۰ را در ۱۸ ضرب کنیم و برای ساعت هفتمین خودرو (میانه ورود) ورودی را در هزینه پارکینگ با توجه به  $C(n)$  کار در کلاس نوشته می کنیم و بعد هم با هم جمع می کنیم.



## کار در کلاس



$$m = \frac{3-0}{3-(-1)} = \frac{3}{4} = -1$$

$$f(x) = mx + h \Rightarrow f(3) = -1(3) + h = 3 \Rightarrow h = 3 + 3 \Rightarrow h = 6 \Rightarrow f(x) = -x + 6$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 3 \\ -x+6 & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

ضابطه تابع و نمودار آن را کامل کنید.  
در سال گذشته دانش آموزان به این روش حل می کردند

## فعالیت

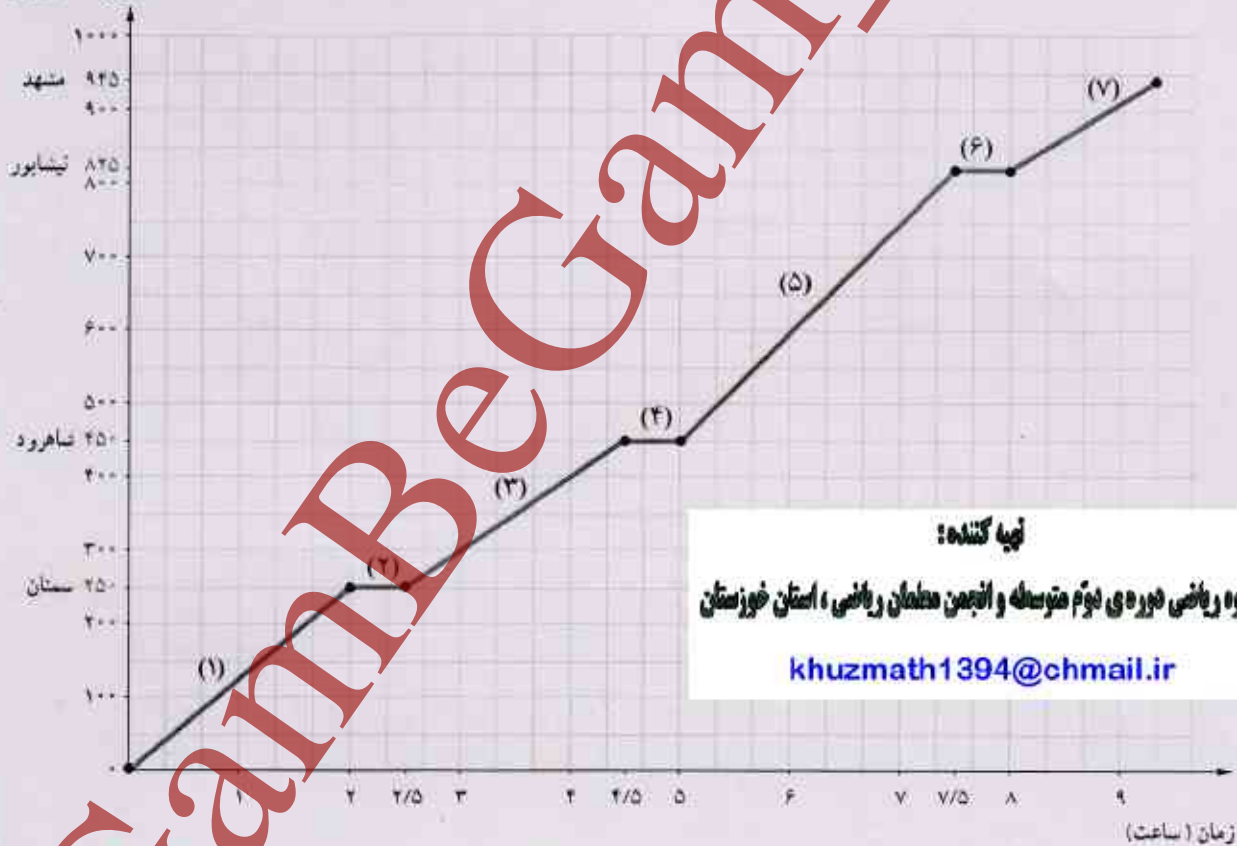
نمودار زیر قطاری را نشان می دهد که از تهران به مشهد رفته است.

۱. مفهوم قسمت هایی که نمودار تابع ثابت است چیست؟ **توقف در ایستگاه**

۲. ضابطه تابع «مکان-زمان» قطار از لحظه رسیدن به شاهرود تا لحظه ترک نیشابور را به دست آورید.

۳. اگر قطار مطابق ضابطه بخش ۵ و بدون توقف در نیشابور به مسیر خود ادامه دهد، در چه زمانی به مشهد می رسد؟

مسافت طی شده (کیلومتر)



نویسه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

پایه ۲: صحنه اول خط (۱)

$$150 = 200 - 150 \rightarrow \text{رسید مشهد}$$

$$150 = 200 - 150 \rightarrow 200 = \frac{150 \times 200}{150} = 200$$

$$200 = 150 + 200 \times 2 \Rightarrow 1: 18$$

پایه ۲: خط (۱):  $200 < x < 450$

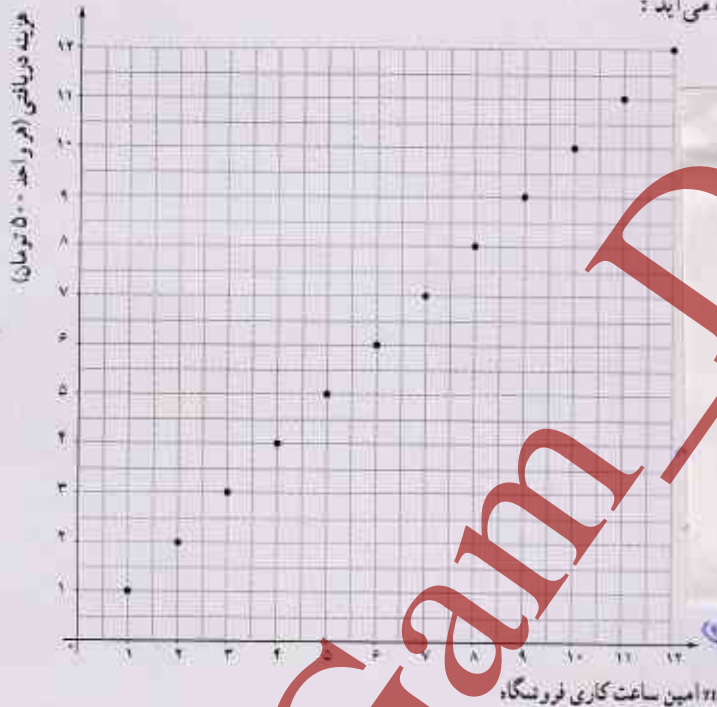
$$f(x) = \begin{cases} 450 & 200 < x < 450 \\ 150x - 200 & 450 < x < 750 \\ 825 & 750 < x < 8 \end{cases}$$

در دقیقه ۱۸ مسافت

فعالیت

پنجشنبه: به دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در ۱۱مین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینه دریافتی ۱۱ واحد (هر واحد ۵۰۰ تومان) باشد.

بنابراین نمودار زیر به دست می‌آید:



$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10), (11,11), (12,12)\}$$

دامنه  
 $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$

بردار  
 $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$

کدام اتم هر واحد داده است برای همین دامنه دمو با هم برابرند

مجموعه نقاط نمودار را به صورت زوج مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان دامنه و برد این تابع به چشم می‌آید؟  
 برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطه این تابع را حدس بزنید؟  
 اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آن چه تغییری می‌کند؟

این تابع هر عدد حقیقی را به همان عدد حقیقی نظیر می‌کند. - دامنه و برد آن نقطه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی می‌شود

تابع با ضابطه  $f(x) = x$  را تابع همانی می‌نامند. با توجه به ضابطه تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند. از لحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیه اول و سوم است.

$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$



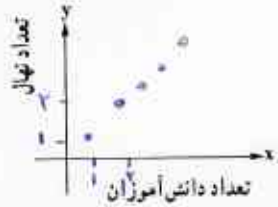


## تمرین

۱. با توجه به معرفی محور  $x$  و  $y$  در هر دستگاه مختصات، با هر کدام از توضیحات زیر کدام یک از نواح ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

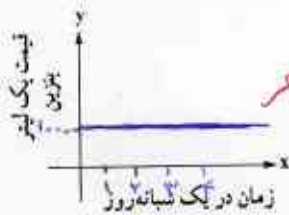
الف. به مناسبت روز درخت‌کاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد. *بچه‌های*

$$f(n) = n$$



ب. هزینه یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است. *۲۰۰۰ است چون قیمت هر لیتر ۱۰۰۰ است*

$$f(x) = 1000$$



ج. برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان یک قوطی رنگ کوچک استفاده می‌شود. *بچه‌های*

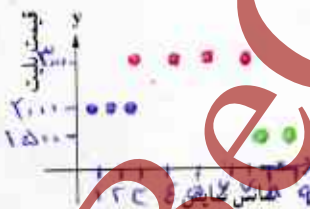
$$f(x) = x$$

*(برون سطح زنگ شده مساوی بویوتج است این نمودار همساز ربع اول دوم به دست نمود)*



د. بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است. *بچه چند ضابطه‌ای*

$$f(x) = \begin{cases} 2000 & x=1, 2, 3 \\ 3000 & x=4, 5, 6, 7 \\ 1500 & x=8, 9 \end{cases}$$

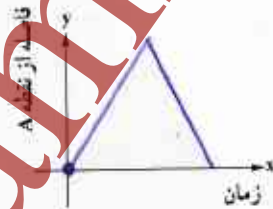


*(چون سانس به سانس تغییر می‌کند از رسم هر نمودار)*

هـ. دو تنه‌ای، کنار یک زمین فوتبال، با سرعت ثابت از نقطه  $A$  تا نقطه  $B$  شروع به دویدن می‌کند و دوباره به نقطه  $A$  برمی‌گردد.



*بچه چند ضابطه‌ای*



*(از نقطه A با سرعت ثابت در یک زمان مشخص به B می‌رسد و دوباره از B با همان سرعت ثابت در یک زمان مشخص دیگر به همان نقطه A برمی‌گردد)*

*(در یک زمان مشخص دیگر به همان نقطه A برمی‌گردد)*

$D = \{1, 3\}$   
 $f = \{(1, 3), (3, 1)\}$  در  $R = \{1, 3\}$

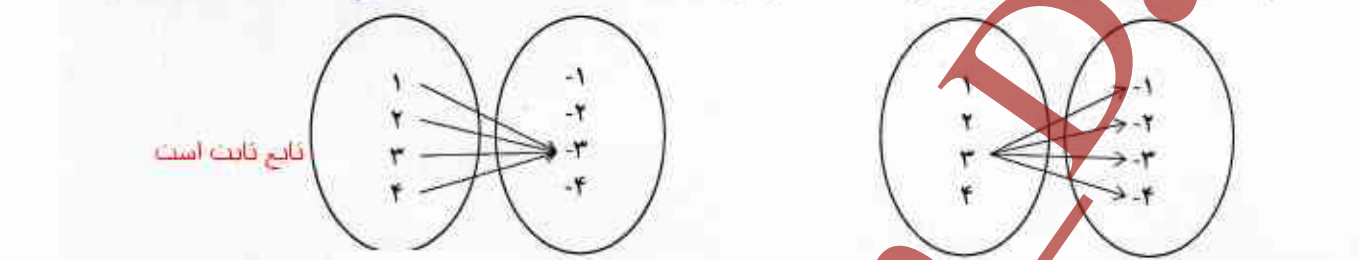
تایید

۲. کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟

- الف. اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.  
 ب. اگر دامنه یک تابع همانی مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن گاه حاصل  $f(x) + f(-x)$  همواره برابر صفر است.  
 ج. اگر  $f$  یک تابع ثابت باشد، آن گاه  $f(kx) = kf(x)$  برقرار است.

الف:  $f(x) = x$  در  $D = \{1, 3\}$  و  $R = \{1, 3\}$  پس  $f(1) = 1$  و  $f(3) = 3$  پس دامنه و برد برابر است. **درست است**  
 ب:  $f(x) = x$  در  $D = R = \mathbb{R}$  و  $R = \mathbb{R}$  پس  $f(x) + f(-x) = x + (-x) = 0$  **درست است**  
 ج:  $f(x) = c$  در  $D = R = \mathbb{R}$  و  $R = \mathbb{R}$  پس  $f(kx) = c$  و  $kf(x) = kc$  پس  $c = kc$  که برای  $c \neq 0$  نادرست است. **نادرست**

۳. اگر  $f$  یک تابع ثابت باشد، مقدار  $a$  کدام است؟  
 $A = \{(2, b), (a, 4), (7, a+b)\}$   
 ۴. اگر  $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$  یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر  $y_1, y_2, y_3$  را به دست آورید.  
 ۵. کدام یک از نمایش‌های بیکنی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟



۶. در تابع ثابت  $f(x) = c$  الف. مقادیر  $f(a)$ ،  $f(b)$  و  $f(a+b)$  را مشخص کنید.  
 ب. اگر در این تابع  $f(a+b) = f(a) \times f(b)$  باشد، چه مقادیری را اختیار می‌کنند؟

الف:  $f(a) = c, f(b) = c, f(a+b) = c$   
 ب:  $f(a+b) = c = f(a) \times f(b) = c \times c \Rightarrow c = c^2 \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0 \Rightarrow c = 0$  یا  $c = 1$

۷. اگر  $A = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$  یک تابع همانی باشد، میانگین  $a$  و  $b$  و  $c$  را به دست آورید.  
 ۸. در هر یک از زوج مرتب‌های زیر  $n \in \mathbb{N}$  را به گونه‌ای تعیین کنید که زوج مرتب داده شده روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد.

الف:  $(2, n^2 - 2n + 4)$   $n^2 - 2n + 4 = 2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(n-1) = 0 \Rightarrow n = 2$  یا  $n = 1$   
 ب:  $(-1, n^2 - 4n + 2)$   $n^2 - 4n + 2 = -1 \Rightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \Rightarrow (n-3)(n-1) = 0 \Rightarrow n = 3$  یا  $n = 1$

۹. اگر  $f$  یک تابع ثابت با دامنه دو عضوی و  $n \in \mathbb{N}$  و  $m$  باشد، مقدار  $m+t$  را به دست آورید.  
 $f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-4, 3), (m+n, t)\}$

$n^2 - 2n = 3 \Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow (n-3)(n+1) = 0 \Rightarrow n = 3$  یا  $n = -1$   
 $m-4 = -1 \Rightarrow m = 3$   
 $m+t = 3+3 = 6$



$f(x) = \begin{cases} -9x & x < 0 \\ 9x & 0 \leq x \leq 3 \\ 3 & x > 3 \end{cases}$

توجه: در سوال ۹

بدست آوردن مقدار  $m+t$  ضرورت نداشت

بهتر بود سوال چنان طراحی می شد که مقدار پارامترها برابر نباشد

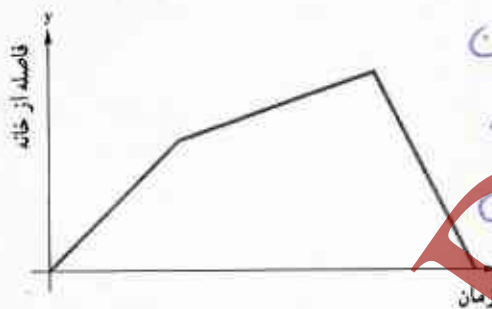


ادامه یا هیچ سوال  $(30 + 40 + 9 \times 2 + 70 + 50) \times 50 + 110 \times 80 + 270 \times 100 + 350 \times 150 + 490 \times 200 + 570 \times 250 + 610 \times 300 = 533000$  **کل درآمد برابر با ۱۱۵۲۵۰۰ است**

۱۱. در تابع  $f(x) = \begin{cases} x & x < -1 \\ x^2 & -1 \leq x \leq 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$  حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$f(2) = 2^2 = 4$      $f(3) + f(-1) = 5 + (-1)^2 = 4$      $f(-\sqrt{2}) + f(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = -\sqrt{2} + 2$      $f(\sqrt{2}) + f(5) = \sqrt{2}^2 + 5 = 2 + 5 = 7$

۱۲. نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟

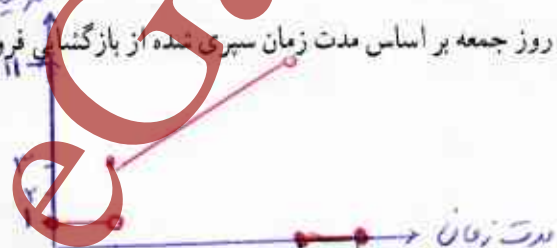


به سمت چپ مربوط می شود چون سرعت زیاد تر از قبل بوده این همان جا به رفتن به سمت راست در حین دویدن بر خوردن است

الف. آوا و مادر بزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.  
 ب. علی با دوچرخه اش از خانه به سمت بالای تپه روی خانه شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرانجام رسید.  
 ج. محمدرضا برای دویدن روزانه اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

۱۳. اگر هزینه توقفگاه در روز جمعه بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشتی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع

$$C(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ x+1 & 2 \leq x < 10 \\ 0 & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$



بیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینه توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور یها معادل ۵۰۰ تومان است).  $2+1=3$   $10-8=2 \Rightarrow$  **هزینه ۱۰۰۰ تومان**

۱۴. \* درآمد فروشگاه از توقفگاه را از روز شنبه تا چهارشنبه در دو حالت زیر مقایسه کنید.  $500 = (k+1) \Rightarrow k = 8$  **زمان ورود خودرو**

الف. قبل از هوشمندسازی و بر اساس هزینه ثابت ۷۰۰ تومان برای هر خودرو که مستقل از روز و ساعت ورود به توقفگاه است.  
 ب. بر اساس هوشمندسازی

در هر دو حالت از اطلاعات جدول ۱ استفاده کنید.  $(30 \times 4 + 40 \times 3 + 50 \times 2 + 70) \times 700 = 344000$

حل تمرین ۱۰ دار اجباری نیست.  $(110 + 130 \times 2 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 160 \times 3 + 170 \times 2) \times 700 = 21239000$

$(120 + 110 + 180 \times 2 + 140 + 150 + 140 + 320 + 340 \times 2 + 360) \times 700 = 18720000$

$(120 + 110 + 180 \times 2 + 140 + 150 + 140 + 320 + 340 \times 2 + 360) \times 700 = 18720000$

$(30 + 40 + 9 \times 2 + 70 + 50 + 110 + 270 + 350 + 490 + 570 + 610) \times 700 = 2030000$

$(30 \times 4 + 40 \times 3 + 50 \times 2 + 70) \times 700 = 344000$

**کل درآمد برابر با ۱۱۵۲۵۰۰ است**

$(110 + 130 \times 2 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 160 \times 3 + 170 \times 2) \times 700 = 21239000$

$(110 \times 4 + 130 \times 3 + 140 \times 2 + 150 \times 2 + 160 \times 3 + 170 \times 2) \times 700 = 21239000$

## درس ۲

### توابع بلکائی و قدر مطلق

#### تابع بلکائی (Step Function)

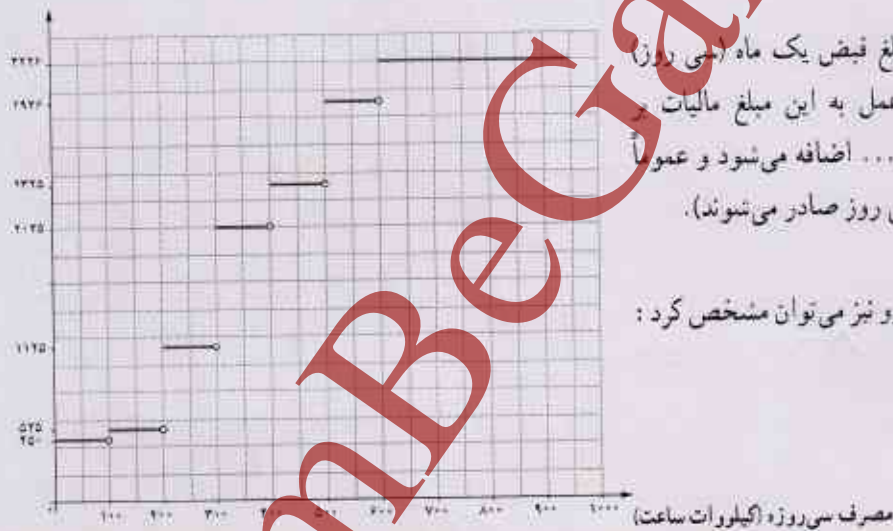
روش محاسبه قبض برق

محاسبه هزینه برق مصرفی در هر خانه بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک خانه مصرف می‌شود. یک کیلووات ساعت (kwh) در واقع مصرف یک وسیله هزار وات در مدت زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد وات را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت برق مصرف کرده‌ایم.

مبلغ ۲۰ روزه	مصرف ۲۰ روزه	مبلغ ۲۰ روزه	مصرف ۲۰ روزه
۲۵۰۰۰	۱۰۰	۲۵۰	۱۰۰ تا ۲۰۰
۳۴۵۰۰	۱۰۰	۵۲۵	۲۰۰ تا ۳۰۰
۵۲۰۰۴	۱۰۰	۱۱۴۵	۳۰۰ تا ۴۰۰
۰	۰	۱۶۲۵	۴۰۰ تا ۵۰۰
۰	۰	۲۲۴۵	۵۰۰ تا ۶۰۰
۰	۰	۲۹۴۵	۶۰۰ تا ۷۰۰
۰	۰	۳۲۴۵	۷۰۰ تا ۸۰۰

اگر فرض کنیم مصرف برق یک خانه در سی روز  $246/23$  kwh بوده است، برای محاسبه هزینه مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به صورت بلکائی تقسیم می‌شود.

هزینه بلکائی برق (ریال)



مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می‌کند البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش افزوده و عوارض برق و... اضافه می‌شود و عموماً قبض های برق برای بیشتر از سی روز صادر می‌شوند.

جدول بالا را با نمودار روبه‌رو نیز می‌توان مشخص کرد:

نمودار بالا نمودار یک تابع چندضابطه‌ای است که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است. این نوع توابع را توابع بلکائی می‌نامند.



## فعالیت

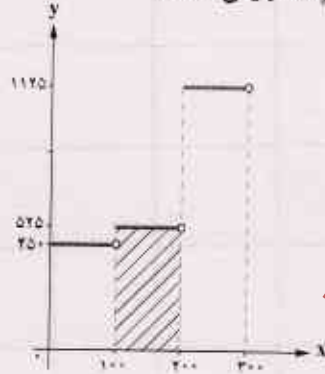
به کمک نمودار پلکانی رسم شده برای محاسبه هزینه برق مصرفی یک خانه:

۱. هزینه  $100 \text{ kWh}$  اول چگونه محاسبه می شود؟ آیا می توانیم مساحتی را در نمودار داده شده، مشخص کنیم که این هزینه را

$$100 \times 450 = 45000$$

تعیین کند؟

۲. مساحت قسمت هاشور خورده زیر بیانگر چه مفهومی است؟



هزینه بازار مصرف

$$(100 - 0 = \text{kWh})$$

۳. هزینه کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید.

با رسم جدول مصرف برق خانه



$$100 + 100 + 49,23 = 249,23$$

$$100 \times 450 + 100 \times 525 + 49,23 \times 1125$$

$$= 45000 + 52500 + 52000,75$$

$$= 149500,75$$

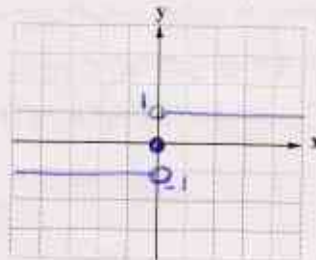
ساخت جدول مصرف

تابع علامت (Sign Function)

## کار در کلاس

بر اساس ضابطه تابع پلکانی  $y = f(x)$ ، نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



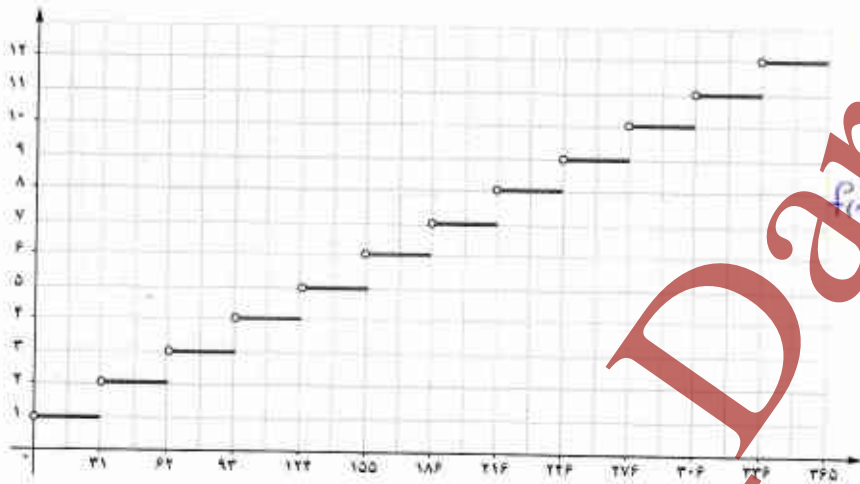
$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \{1, 0, -1\}$$

تابع بالا را تابع علامت یا تابع  $y = \text{sign}(x)$  می نامند.

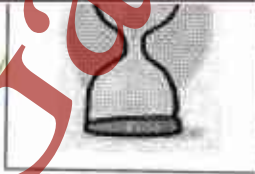
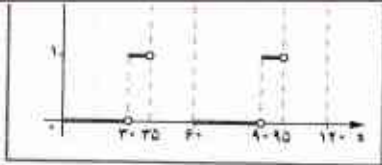
## کار در کلاس

۱. نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می‌کند؟ محورهای  $x$  و  $y$  بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. *علاقه‌تایع را بنویسید؟ نکات روزها در ماه‌های مختلف سال - بیانگر روزها و بیانگر*

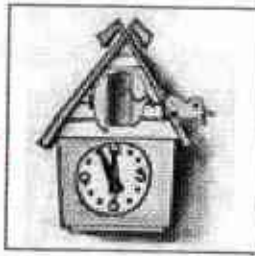
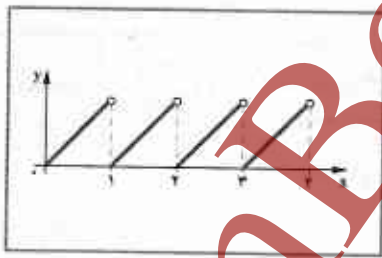


۲. هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.

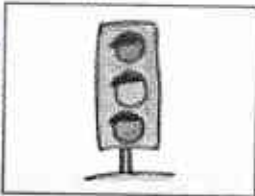
*معمولاً در هر ساعت در هر ساعت از هر ساعت بیرون می‌آید و در هر ساعت در هر ساعت*



ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.



برنده‌ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



چراغ راهنمای و راهنمایی سه حالت.

**نمودار سوم:** مربوط به ساعت دیواری است چون مکان پرتده ثابت است فقط رأس هر ساعت بیرون می‌آید یعنی مکان آن تغییر می‌کند

*نمودار اول: مربوط به چراغ راهنمای و راهنمایی: در هر اول محور بیانگر زمان و محور y بیانگر حالت چراغ است (چراغ راهنمای و راهنمایی سه حالت دارد)*

*نمودار دوم: مربوط به ساعت شمس و وقت شمس با سرعت ثابت در درون مخروط مخروطی در هر ساعت بیرون می‌آید و در هر ساعت بیرون می‌آید و در هر ساعت بیرون می‌آید*



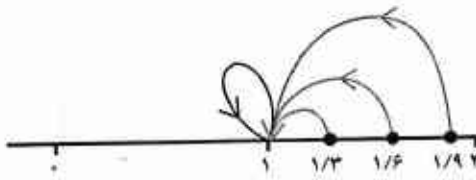
تابع جزء صحیح (Greatest Integer Function)

فعالیت

فرض کنید  $g$  تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح کوچک‌تر را نسبت می‌دهد.

برای مثال، در این تابع اگر  $x$  عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱ و ۲ باشد، تابع  $g$ ، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می‌دهد.

به بیانی دیگر:



(شکل ۱)

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow g(x) = 1$$

مطابق تعریف تابع  $g$ ، اگر  $x$  عددی بین دو عدد صحیح متوالی  $-2$  و  $-3$  باشد، این تابع مقادیر  $x$  را به عدد  $-3$  نسبت می‌دهد (شکل ۲).

و اگر  $x$  عددی بین اعداد  $2$  و  $3$  باشد، این تابع مقادیر  $x$  را به عدد  $2$  نسبت می‌دهد (شکل ۳).



$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow g(x) = -3$$

(شکل ۲)



$$2 \leq x < 3 \Rightarrow g(x) = 2$$


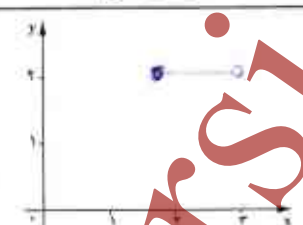

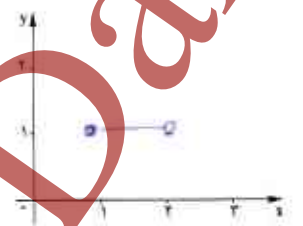

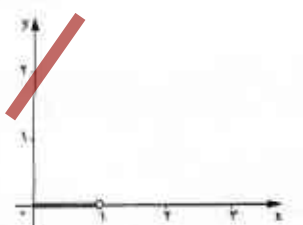

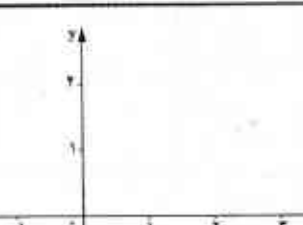

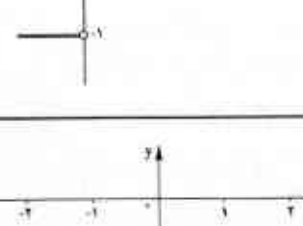
(شکل ۳)

نویسه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

به کمک تابع  $g$  که در فعالیت صفحه قبل تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید.

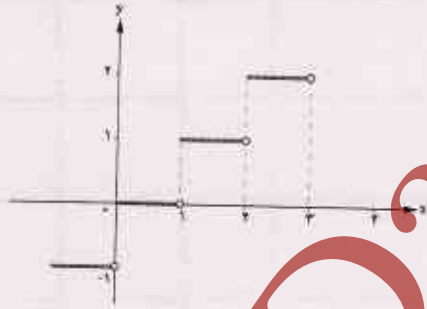
حدود $a$	جواب تابع $g$	نمودار تابع
 $2 \leq x < 3$	$g(x) = 2$	
 $1 \leq x < 2$	$g(x) = 1$	
 $0 \leq x < 1$	$g(x) = 0$	
 $-1 \leq x < 0$	$g(x) = -1$	
 $-2 \leq x < -1$	$g(x) = -2$	

توجه کننده:



این حالت‌ها را می‌توانیم با یک تابع چندضابطه‌ای و نمودار متناظرش به صورت زیر بیان کنیم:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

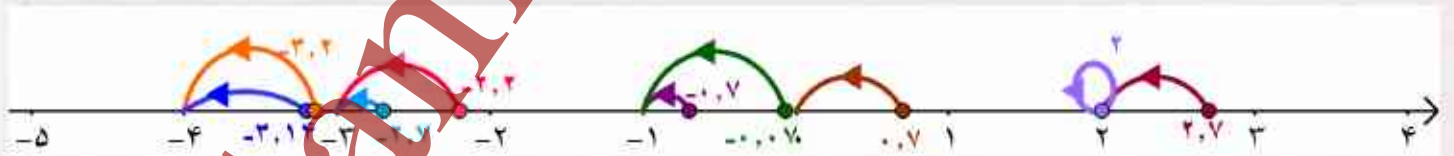


تابعی را که به هر عدد صحیح  $k$  خود همان عدد  $k$  و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی  $k$  و  $k+1$ ، عدد صحیح  $k$  را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند. ضابطه این تابع را با  $[x] = \{x\}$  (بخوانید جزء صحیح  $x$ ) معرفی می‌کنند.

### کار در کلاس

به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته شده را بدست آورید.

$$\begin{array}{lll} [2] = 2 & [2/7] = 0 & [-2/7] = -1 \\ [0/7] = 0 & [-0/7] = 0 & [-0/0.7] = 0 \\ [-3/2] = -2 & [-\pi] = -3 & [-2/2] = -1 \end{array}$$



نوبه آینده!

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

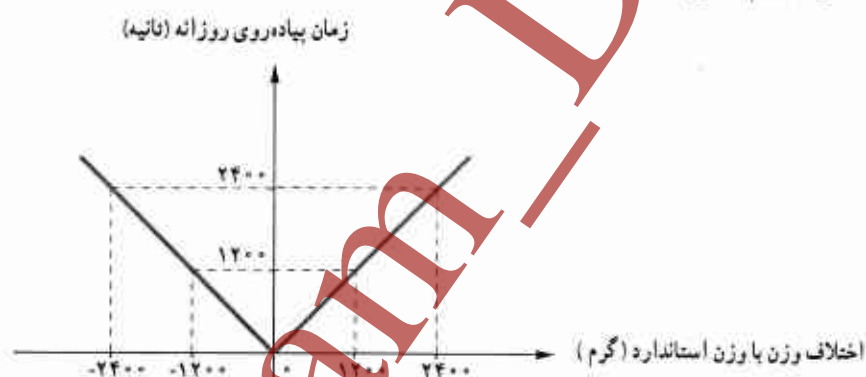
[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

## تابع قدر مطلق (Absolute Value Function)

### فعالیت

فعالیت ۱: هر چند امروزه بخش عمده‌ای از افراد از اضافه وزن رنج می‌برند، بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند. هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، پیاده‌روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش یا کاهش وزن باید یک ثانیه پیاده‌روی کند. بر این اساس فردی با  $1200$  گرم اضافه وزن یا  $1200$  گرم کمبود وزن باید  $1200$  ثانیه، یعنی  $20$  دقیقه روزانه به صورت منظم پیاده‌روی کند و فردی با  $2400$  گرم اضافه وزن یا  $2400$  گرم کمبود وزن باید روزانه  $2400$  ثانیه یعنی  $40$  دقیقه به صورت منظم پیاده‌روی کند.

این مفهوم را می‌توان به کمک نمودار زیر نشان داد:



اگر مقدار اضافه وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با علامت منفی نشان دهیم و  $f$  بیانگر تابعی باشد که میزان پیاده‌روی بر حسب ثانیه را نشان می‌دهد، اطلاعات پیش گفته را به صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم:

$$f(1200) = 1200 \quad f(-1200) = 1200 \quad f(2400) = 2400 \quad f(-2400) = 2400$$

که این مفهوم را در یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

این تابع را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر مقدار در دامنه را، به قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می‌کند.

تابع با ضابطه  $f(x) = |x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود و مطابق تعریف:

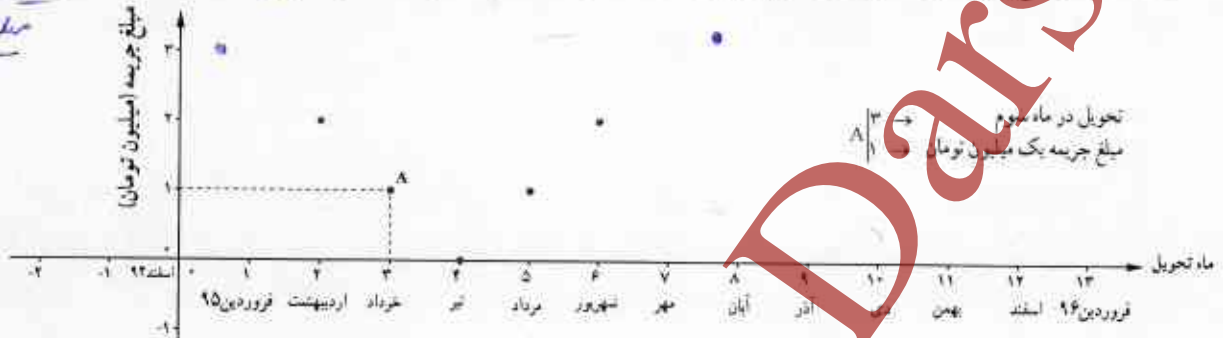
$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

نهیة کنه:



فعالیت ۲. پلی که روی رودخانه سیمینه رود در استان آذربایجان غربی ساخته شده، طبق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه باید در تیر ۱۳۹۵ افتتاح شود. اگر احداث این پلی زودتر از موعد مقرر انجام شود، به دلیل هزینه نگهداری پلی و عدم استفاده از آن (به خاطر پایان نیافتن بقیه جاده مواصلاتی به پلی) به ضرر است. همچنین تأخیر در زمان افتتاح پلی نیز موجب خسارت به صاحب کار (وزارت راه) است. بر این اساس مطابق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل، پیمانکار متعهد است یک میلیون تومان جریمه پرداخت کند. تحویل پروژه به روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحویل بستگی دارد. الف. نمودار تابع جریمه بر حسب زمان تحویل پروژه در ماه‌های مختلف را کامل کنید.

میلیون تومان جریمه



$$f(x) = \begin{cases} x-4 & x \geq 4, x \in \mathbb{N} \\ -(x-4) & x < 4, x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow f(x) = |x-4|$$

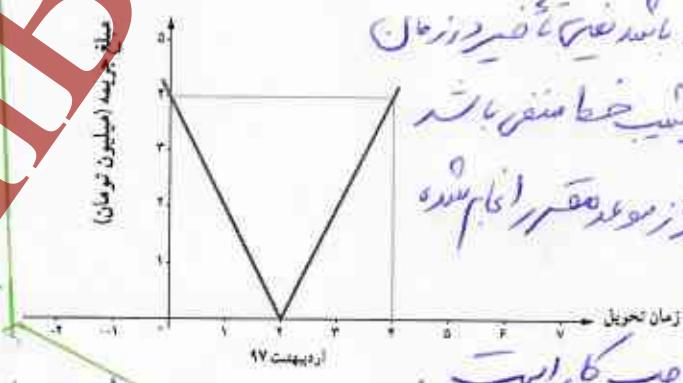
ب. آیا می‌توانید این نمودار را به زمان یک قدر مطلق بیان کنید؟  
 ج. اگر پیمانکار چهار میلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه در چه ماه یا ماه‌هایی می‌تواند انجام شده باشد؟  
 چرا؟ پاسخ این پرسش را به کمک نمودار بالا و ضابطه تابع قدر مطلق به دست آمده توضیح دهید.

پس از ۴ ماه با زمان تحویل پروژه اختلاف پیدا کرد  
 پس از ۴ ماه با زمان تحویل پروژه اختلاف پیدا کرد  
 ۹۵ آبان و آذر ۹۴  
 ۹۵ آبان ۹۴  
 ۹۴ آبان ۹۴

### کار در کلاس

با توجه به نمودار  
 الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.  
 ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.  
 ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.  
 د. شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟

$$m = \frac{4-0}{4-2} = 2 \text{ و } m = \frac{0-4}{2-4} = 2 \Rightarrow y = 2x - 4$$



شیب خط مثبت باشد یعنی تأخیر در زمان  
 تحویل پروژه ولی اگر شیب خط منفی باشد  
 یعنی تحویل پروژه زودتر از موعد مقرر انجام شده  
 است که هر دو حالت  
 موجب خسارت به صاحب کار است.

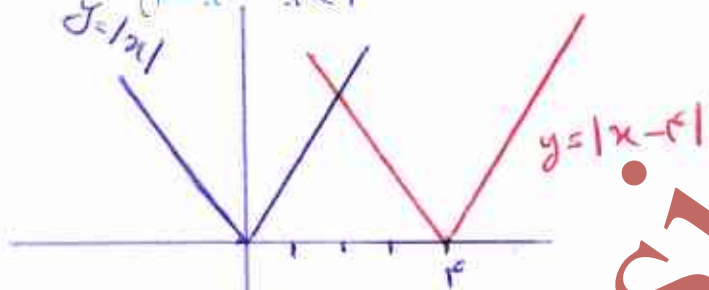
$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & x \geq 2 \\ -2x+4 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = |2x-4|$$

حل کاد پلاس ۴۲

$$y = |x - 4| = \begin{cases} x - 4 & x - 4 \geq 0 \\ -(x - 4) & -(x - 4) < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x - 4 & x - 4 \geq 0 \\ 4 - x & x < 4 \end{cases}$$

$$y = |x - 4|$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$



(الف)

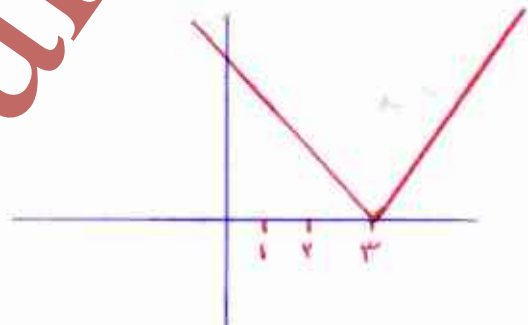
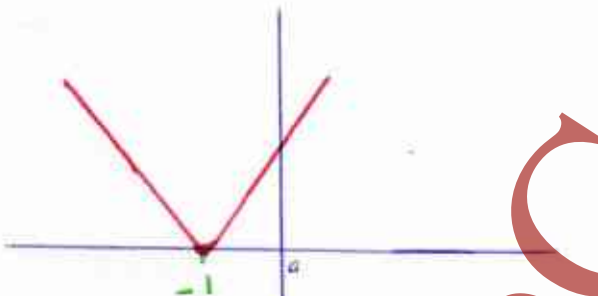
(ب)

ج) طبق نمودار رسم شده که از روش انتقال می توان برای رسم تابع  $y = |x - 4|$  کافی است

ابتدا نمودار تابع  $y = |x|$  را رسم کرد پس به اندازه ۴ واحد به سمت راست انتقال داد.

$$y = |x + 1| \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$y = |x - 3| \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



نمودار تابع  $y = |x + 1|$  را به اندازه ۱ واحد به سمت راست انتقال دادیم.

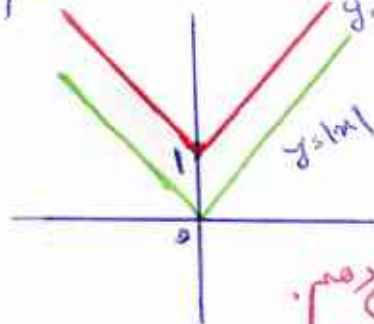
نمودار تابع  $y = |x - 3|$  را به اندازه ۳ واحد به سمت راست انتقال دادیم.

$$y = |x| + 1$$

میدانیم که در نقطه  $(0, 1)$  از  $y = |x|$  به  $y = |x| + 1$  تغییر می دهد.



در نمودار تابع  $y = |x| + 1$  را در همین دستگاه مختصات رسم کردیم.



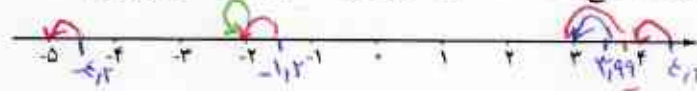
تغییر می شود که برای رسم تابع  $y = |x| + 1$  کافی است نمودار تابع  $y = |x|$  را به اندازه ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

@GambBeGam



## تمرین

۱. به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور زیر حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.



$$\lfloor 4/2 \rfloor = 2$$

$$\lfloor -4/2 \rfloor = -2$$

$$\lfloor 3/99 \rfloor = 0$$

$$\lfloor -1/2 \rfloor = -1$$

$$\lfloor -2 \rfloor = -2$$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

۲. با توجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	مقدار $x$	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -2/3$	$f(x) = -1$
	$x = 5$	$f(x) = 5$
$f(x) = [-x]$	$x = 1/2$	$f(x) = -1$
	$x = 2/3$	$f(x) = -1$
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = 1$	$f(x) = 0$
	$x = 1/3$	$f(x) = -1$
	$x = 1/2$	$f(x) = -1$
	$x = 2$	$f(x) = 0$
$f(x) = [3x]$	$x = 1$	$f(x) = 3$
	$x = 1/2$	$f(x) = 0$
	$x = 1/3$	$f(x) = 1$

$$f(1) = [1] + [-1] = 1 + (-1) = 0$$

$$f(1/3) = [1/3] + [-1/3] = 0 + (-1) = -1$$

$$f(1/2) = [1/2] + [-1/2] = 0 + (-1) = -1$$

$$f(2) = [2] + [-2] = 2 + (-2) = 0$$

$$f(1) = [3(1)] = [3] = 3$$

$$f(1/2) = [3(1/2)] = [1.5] = 1$$

$$f(1/3) = [3(1/3)] = [1] = 1$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳. جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

نرخ مالیات (درصد)	حقوق ماهیانه (تومان)
۰	حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰
۱۵	مازاد بر ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰
۲۵	مازاد بر ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰
۳۵	مازاد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰

الف. نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب. به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را

محاسبه کنید.

• کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان

• کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان

• کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان

مالیات

$$\left( 240000 \times \frac{10}{100} \right) = 240000 - 240000 = 216000$$

$$\left( 600000 \times \frac{25}{100} \right) = 600000 - 150000 = 450000$$

$$f(120000) = 120000 - 120000 = 0$$

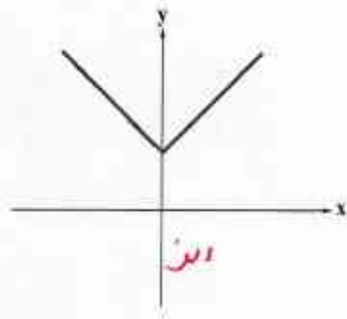
$$f(240000) = 240000 - \left( 240000 \times \frac{10}{100} \right) = 240000 - 240000 = 216000$$

$$f(600000) = 600000 - \left( 600000 \times \frac{25}{100} \right) = 600000 - 150000 = 450000$$

دریافتی

۴. با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می کند؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

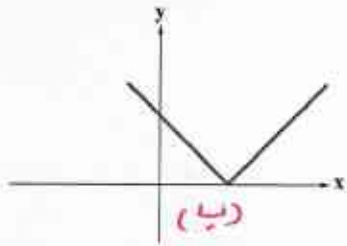
الف)  $y = |x| + 2$   
ب)  $y = |x| - 3$



ب) الف

تعبیر کنیم برای رسم  $y = |x| + k$   
کافی است نمودار  $y = |x|$  را  
به اندازه  $k$  واحد در جهت  
بالا یا پایین جابجایی کنیم.  
شیب  $k$  دارد  
( $k > 0$ ) انتقال به سمت بالا  
( $k < 0$ ) انتقال به سمت پایین

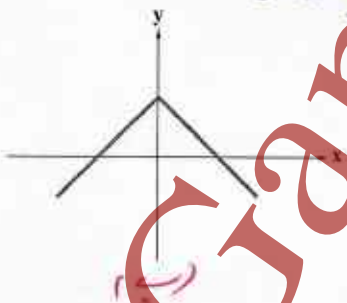
الف)  $y = |x + 1|$   
ب)  $y = |x - 4|$



ب) الف

تعبیر کنیم برای رسم  $y = |x + k|$   
کافی است نمودار  $y = |x|$  را  
به اندازه  $k$  واحد در جهت  
چپ یا راست جابجایی کنیم

الف)  $y = -|x|$   
ب)  $y = -|x| + 1$



ب) الف

تعبیر کنیم برای نمودار  $y = -|x| + k$   
کافی است نمودار  $y = |x|$  را  
به اندازه  $k$  واحد در جهت  
بالا یا پایین جابجایی کنیم  
و سپس آنرا در جهت  
چپ یا راست جابجایی کنیم

الف)  $y = |2x - 3|$

ب)  $y = |3x + 1|$

۵. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

نمودار  $y = |x|$  ترسیم کنید

سپس به اندازه  $k$  واحد در جهت  
بالا یا پایین جابجایی کنید

۶. با توجه به نمودار

الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید. اگر شیوه را در دسترس ۹۵٪ تحویل (عدد جرمی) نمی شود به ازای هر درصد تا ۱۰٪

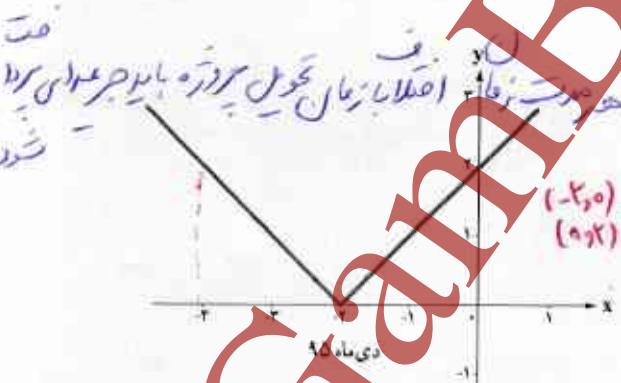
ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطه هر یک از نیم خطها با شیب مثبت و منفی را به دست آورید.

ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

د. شیب خط در تابع به دست آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت

راه چه معنایی دارد؟ افزایش یا کاهش شیب خط به چه معناست؟

۷. شیب خط مثبت باشد یعنی تاخیر در زمان تحویل پروژه و شیب خط منفی باشد یعنی تحویل زودتر از موعد مقرر انجام شده است که هر دو حالت موجب خسارت به صاحب کار است.  
\* افزایش مقدار شیب خط نشان دهنده افزایش مبلغ جریمه است و کاهش مقدار شیب خط نشان دهنده کاهش مبلغ جریمه است.



شیب  $m = 1$   $x > -2$   
شیب  $m = -1$   $x < 2$   
شیب  $m = 0$   $-2 < x < 2$

@CamBeDarsi



بدرین ۴۴ کتاب آمار ریاضی انسان سوال ۱۵

پاسخ تدریس ۱۵ :

الف)  $y = |2x - 3|$

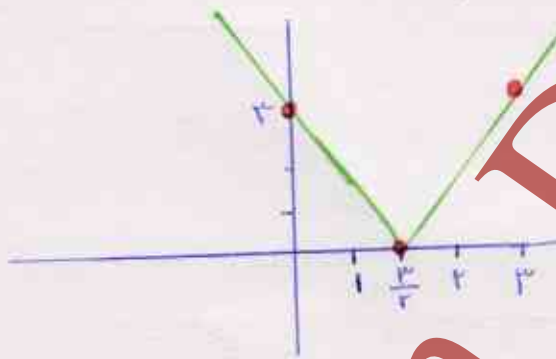
$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x - 3) & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$x$	$\frac{3}{2}$	$3$
$y$	$0$	$3$

$x$	$\frac{3}{2}$	$1$
$y$	$0$	$3$



ب)  $y = |2x + 1|$

$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

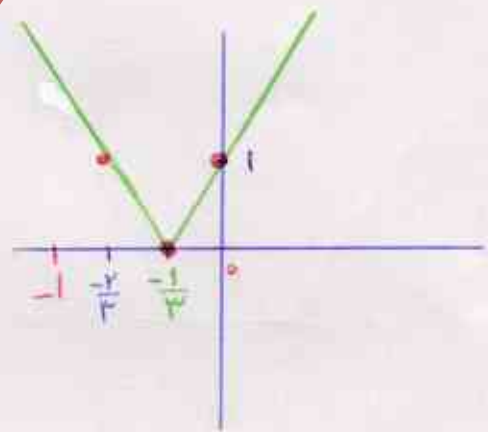
$$y = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x + 1) & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

$x$	$-\frac{1}{2}$	$1$
$y$	$0$	$3$

$x$	$-\frac{1}{2}$	$-1$
$y$	$0$	$3$



توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

@GamBeGam\_Darsi

## درس ۳

### عمل بر روی توابع

#### فعالیت

علیرضا، دانشجوی رشته اقتصاد است و با پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده ساله) زندگی می کند. وی می خواهد در جشنواره فیلم و تئاتر دهه فجر امسال اعضای خانواده اش را به تماشای یک فیلم یا تئاتر دعوت کند. با توجه به تفاوت علاقه مندی اعضای خانواده به سبک های مختلف فیلم و تئاتر و تنوع موارد نمایش داده شده در سینما و تئاتر، برخلاف تصور اولیه اش، نتوانست به سادگی تصمیم بگیرد که چه فیلمی را می تواند با اعضای خانواده اش ببیند. بنابراین:

۱. ابتدا با یک پرسش نامه سبک دلخواه هر یک از اعضای خانواده را مشخص کرد؛ زیرا بدیهی است که او تمایل دارد با هر کدام از اعضای خانواده اش به دیدن فیلم یا تئاتری برود که سلیقه سینمایی آنها و خودش را تأمین کند.
۲. با توجه به بودجه محدودی که برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بدانند هزینه صرف شده در این هفته چقدر خواهد بود. جدول زیر هزینه بلیت سینما و تئاتر را برای گروه های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشنواره در بخش هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف هایی قائل شده اند. لطفاً جدول را کامل کنید.

جدول ۱. هزینه بلیت با توجه به گروه های مختلف

گروه سنی	مکان نمایش	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
فرد عادی		۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰
دانشجو		۸۰۰۰ = ۲۰٪ تخفیف	۲۴۰۰۰ = ۲۰٪ تخفیف	۴۰۰۰
کودک و نوجوان		۱۰۰۰۰	۱۵۰۰۰ = ۵۰٪ تخفیف	۱۰۰۰ = ۵۰٪ تخفیف





علیرضا نتایج پرسش نامه داده شده به اعضای خانواده را در جدول های زیر مشخص نمود :

جدول ۲. علاقه مندی به سینمای کودک و نوجوان

اعضای خانواده	سبک فیلم	کمدی	تاریخی	انیمیشن	علمی - تخیلی
مریم		✓		✓	✓
علیرضا			✓	✓	✓

جدول ۳. علاقه مندی به سینما

اعضای خانواده	سبک فیلم	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی	حادثه ای	علمی - تخیلی
مادر		✓			✓		✓
پدر			✓	✓	✓		
مریم							
علیرضا			✓		✓		✓

جدول ۴. علاقه مندی به تئاتر

اعضای خانواده	سبک تئاتر	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی
مادر		✓	✓	✓	
پدر			✓	✓	✓
مریم		✓		✓	
علیرضا				✓	

در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کودک و نوجوان ببرد.

او باید دو نکته را مشخص کند :

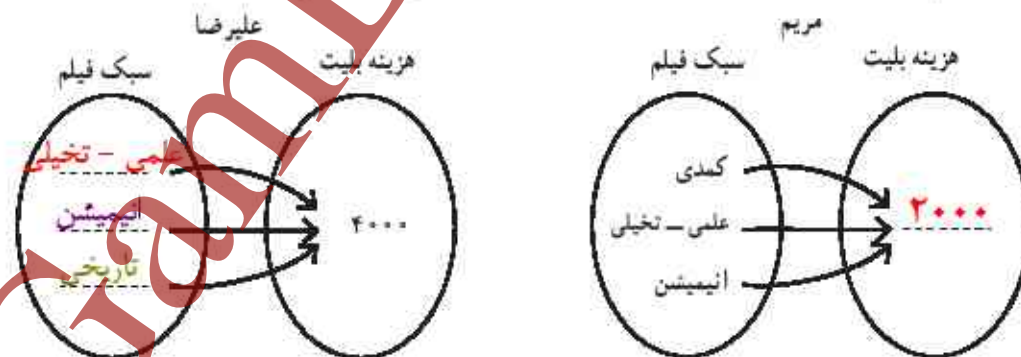
۱. به دیدن چه سبک فیلمی می روند؟

۲. هزینه بلیت آنها چقدر است؟

طبیعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه مند باشند؛ به بیان دیگر این سبک

فیلم در اشتراک علاقه، دو نفرشان باشد. با توجه به جدول های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظر بگیریم که «دامنه» آن سبک

فیلم مورد علاقه هر کدام باشد و «برد» آن هزینه خرید بلیت، نمایش های بیکانی این دو تابع به صورت زیر است :



پس اشتراک فیلم مورد علاقه شان دو سبک فیلم **انیمیشن و علمی-تخیلی** است و برای تماشای یکی از این دو سبک یا هر دو نوع آنها می توانند به سینما بروند. این مطلب را می توانیم چنین نشان دهیم:

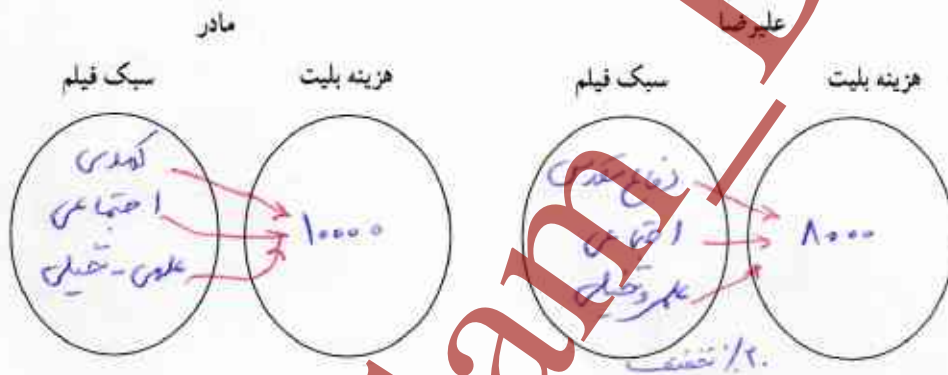
$$\text{علیرضا} = \{(4000, \text{علمی-تخیلی}), (4000, \text{انیمیشن}), (4000, \text{تاریخی})\}$$

$$\text{مریم} = \{(2000, \text{علمی-تخیلی}), (2000, \text{انیمیشن}), (2000, \text{کمدی})\}$$

$$\text{علیرضا + مریم} = \{(4000 + 2000, \text{علمی-تخیلی}), (4000 + 2000, \text{انیمیشن})\}$$

## کار در کلاس

۱. اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواند مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱ و جدول ۲:  
الف. نمایش های پیکانی مشابه فعالیت صفحه قبل را برای هر کدام رسم کنید.



ب. با توجه به اشتراک سبک فیلم مورد علاقه هر کدام، نمایش زوج مرتبی نامی را بنویسید که علیرضا و مادرش می توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

ج. هزینه ای که در این روز علیرضا صرف می کند، چقدر است؟ **۱۸۰۰۰ تومان**

۲. پنجشنبه علیرضا می خواهد همه اعضای خانواده اش را به تماشای یک تئاتر ببرد. با استفاده از جدول ۱ و جدول ۴:  
الف. نمایش زوج مرتبی هر کدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج مرتبی سرطبی را که همه آنها به تماشای یک تئاتر می روند، مشخص کنید.

ب. علیرضا در این روز چه میزان هزینه می کند؟

$$\text{علیرضا + مادر + مریم + پدر} = \{(24000, \text{تاریخی}), (30000, \text{تاریخی}), (30000, \text{تاریخی}), (30000, \text{تاریخی})\}$$

**۱۰۰۰۰ ریال**

$$30000 + 30000 + 15000 + 24000 = 99000$$

**۱۰۰۰۰ ریال**

$$\text{علیرضا} = \{(24000, \text{تاریخی}), (30000, \text{تاریخی}), (30000, \text{تاریخی}), (30000, \text{تاریخی})\}$$

**۱۰۰۰۰ ریال**

$$\text{پدر} = \{(30000, \text{تاریخی}), (30000, \text{تاریخی}), (30000, \text{تاریخی}), (30000, \text{تاریخی})\}$$

$$30000 - 4000 = 24000 \quad 24000 \times \frac{20}{100} = 4800$$

$$\text{مریم} = \{(15000, \text{تاریخی}), (15000, \text{تاریخی}), (15000, \text{تاریخی}), (15000, \text{تاریخی})\}$$



با توجه به فعالیت مطرح شده پرسش مهم زیر را پاسخ می‌دهیم:

با چه شرایطی می‌توان دو تابع  $f$  و  $g$  را با یکدیگر جمع کرد؟

برای دو تابع  $f$  و  $g$  که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند،  $f+g$  تابعی است که روی  $D_f \cap D_g$  تعریف شده است و برای

هر مقدار  $x$  در این اشتراک داریم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$f = \{(1, 2) \text{ و } (-3, 4) \text{ و } (3, 5) \text{ و } (7, -1)\}$$

$$g = \{(2, 1) \text{ و } (3, -1) \text{ و } (7, 2)\}$$

فرض شود با توجه به دامنه‌های دو تابع  $f$  و  $g$ :

$$D_f = \{1, -3, 3, 7\}$$

$$D_g = \{2, 3, 7\}$$

اشتراک دو دامنه برابر است با:

$$D_f \cap D_g = \{3, 7\}$$

پس تابع  $f+g$  این گونه مشخص می‌شود:

$$f+g = \{(3, -1+5) \text{ و } (7, 2+(-1))\} = \{(3, 4) \text{ و } (7, 1)\}$$

نوبه‌کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطالبان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

## فعالیت

باتوجه به ضابطه‌های  $f_1(x) = x+1$  و  $f_2(x) = x^2-1$ ، ضابطه‌ی توابع زیر را به دست آورید:

$$\begin{aligned}
 f_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) = (x+1) + (x^2-1) = x^2 + x & f_3(x) &= x^2 + x \\
 f_4(x) &= f_1(x) - f_2(x) = (x+1) - (x^2-1) = -x^2 + x + 2 & f_4(x) &= -x^2 + x + 2 \\
 f_5(x) &= f_2(x) - f_1(x) = (x^2-1) - (x+1) = x^2 - x - 2 & f_5(x) &= x^2 - x - 2 \\
 f_6(x) &= f_2(x) \times f_1(x) = (x^2-1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1 & f_6(x) &= x^3 + x^2 - x - 1 \\
 f_7(x) &= \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = x-1 & f_7(x) &= x-1 \\
 f_8(x) &= \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1 & f_8(x) &= x-1
 \end{aligned}$$

اگر مقادیر تابع‌های  $f_1$  تا  $f_8$  را به ازای  $x=2$  نمادهای وزنه‌های کفه‌های ترازو بمانند، چرا دو کفه ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ

چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟ نتیجه:  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$  هم از این دسته‌اند. در ترازو چه می‌گذرد؟

$$f_9(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = 9$$

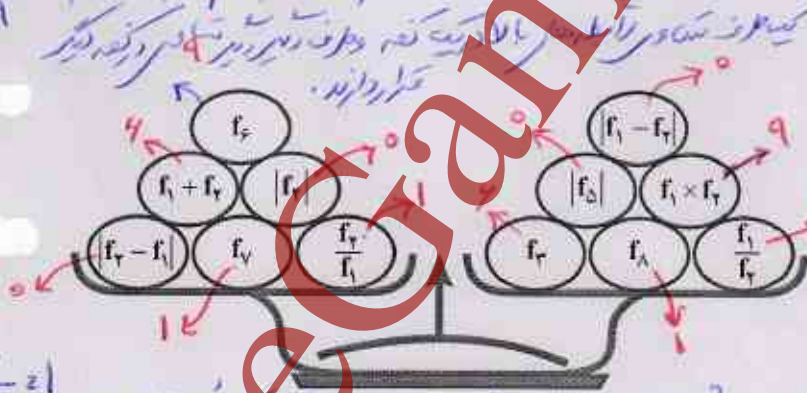
$$f_1(x) + f_2(x) = 4$$

$$|f_3(x)| = 0$$

$$|f_4(x) - f_5(x)| = 0$$

$$f_6(x) = 2 - 1 = 1$$

$$\frac{f_7(x)}{f_8(x)} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$



$$|f_1 - f_2| = |2^2 - 2 - 2| = 0$$

$$|f_3| = |2^2 + 2 - 2 - 1| = 0$$

$$f_1(x) \times f_2(x) = 2^2 + 2 - 2 - 1 = 1$$

$$f_4(x) = 2^2 + 2 = 4$$

$$f_8(x) = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

دو کفه با هم برابرند  $\Rightarrow$   $9 + 4 + 0 + 1 + 0 + 1 = 17$   $\Rightarrow$   $0 + 9 + 1 + 1 + 0 + 4 = 17$

عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 (f-g)(x) &= f(x) - g(x) & D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\
 (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) & D_{f \times g} &= D_f \cap D_g \\
 \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} & D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}
 \end{aligned}$$



$f_1(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$f_7(2) = (2) + 1 = 3$
$f_7(2) = (2)^2 + (2) = 4 + 2 = 6$	$f_4(2) = (2)^2 - (2) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$
$f_8(2) = -(2)^2 + (2) + 2 = -4 + 2 + 2 = 0$	$f_6(2) = (2)^2 + (2)^2 - (2) - 1 = 8 + 4 - 2 - 1 = 9$
$f_5(2) = (2) - 1 = 1$	$f_8(2) = \frac{1}{(2) - 1} = \frac{1}{1} = 1$

سمت چپ ترازو	سمت راست ترازو
$f_6(2) = 9$	$ f_1(2) - f_7(2)  =  3 - 3  =  0  = 0$
$f_1(2) + f_7(2) = 3 + 3 = 6$	$ f_8(2)  =  1  = 1$
$ f_4(2)  =  0  = 0$	$f_1(2) \times f_7(2) = 3 \times 3 = 9$
$ f_7(2) - f_1(2)  =  3 - 3  =  0  = 0$	$f_7(2) = (2)^2 + (2) = 4 + 2 = 6$
$f_5(2) = (2) - 1 = 1$	$f_8(2) = \frac{1}{(2) - 1} = \frac{1}{1} = 1$
$\frac{f_7(2)}{f_1(2)} = \frac{3}{3} = 1$	$\frac{f_1(2)}{f_7(2)} = \frac{3}{3} = 1$
$9 + 6 + 0 + 0 + 1 + 1 = 17$	$0 + 0 + 9 + 6 + 1 + 1 = 17$

نتیجه می گیریم:
$f_6(2) = f_1(2) \times f_7(2)$
$f_1(2) + f_7(2) = f_7(2)$
$ f_4(2)  =  f_8(2) $
$ f_7(2) - f_1(2)  =  f_1(2) - f_7(2) $
$f_5(2) = \frac{f_1(2)}{f_7(2)}$
$\frac{f_7(2)}{f_1(2)} = f_8(2)$

توجه کننده:  
گروه ریاضی دوره دوم متوسطه و انجمن سلطان ریاضی، استان خوزستان

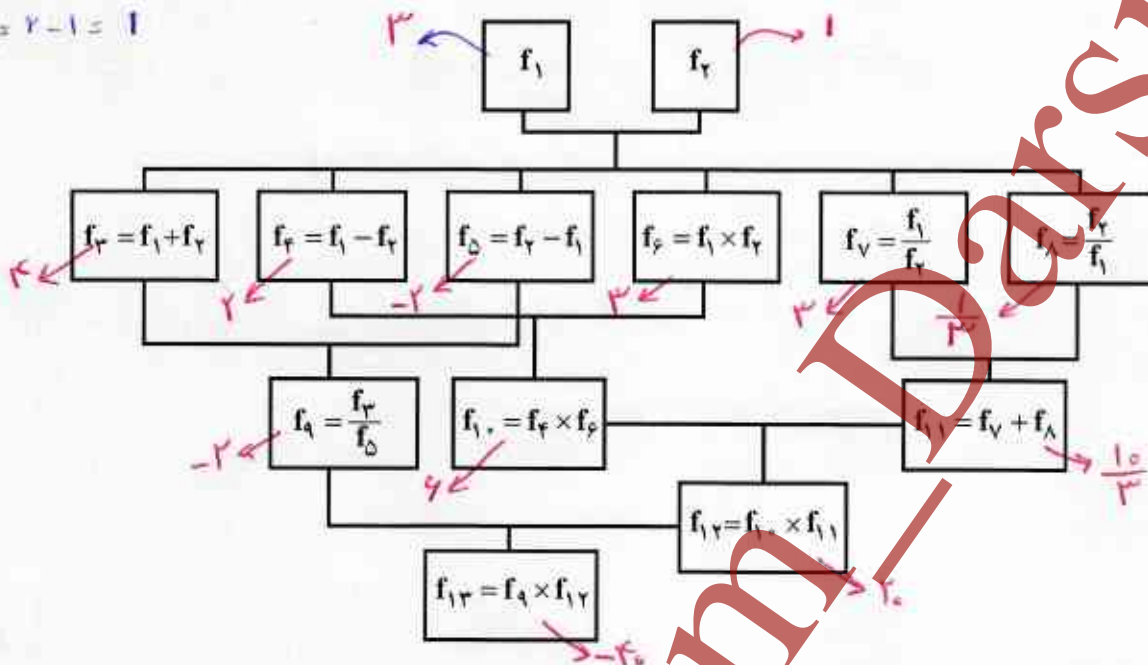
khuzmath1394@chmail.ir

@

۱. با توجه به ضابطه  $f_1(x) = x+1$  و  $f_2(x) = x-1$  درخت زیر را به ازای  $x=2$  کامل کنید.

$$f_1(2) = 2+1 = 3$$

$$f_2(2) = 2-1 = 1$$



۲. اگر  $f = \{(2,0), (-1,-1), (-1,3)\}$  و  $g = \{(2,5), (3,-1), (-1,2)\}$  باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

$$f+g = \{(2, 5), (-1, 2)\}$$

$$D_{f+g} = \{2, -1\}$$

$$f \times g = \{(2, 0), (-1, 7)\}$$

$$D_{f \times g} = \{2, -1\}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{(-1, \frac{2}{-1})\right\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \{-1\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(2, 0), (-1, \frac{2}{-1})\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{2, -1\}$$

$$f-g = \{(2, -5), (-1, 1)\}$$

$$D_{f-g} = \{2, -1\}$$

$$g-f = \{(2, 5), (-1, -1)\}$$

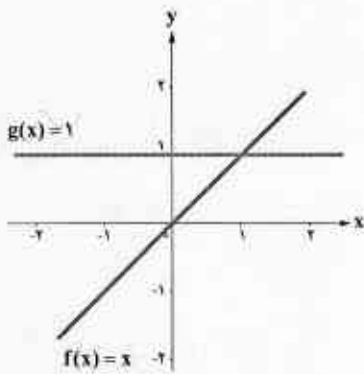
$$D_{g-f} = \{2, -1\}$$

توجه کننده:



## فعالیت

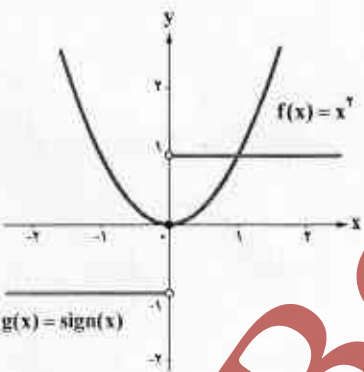
به کمک نمودارهای رسم شده توابع  $f$  و  $g$ ، نمودار تابع  $f+g$  را ابتدا فقط در نقاط داده شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع  $f+g$  را به کمک صابغه تابع آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.



$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow (f+g)(-1) = 0 \Rightarrow (-1, 0) \\ x = 0 &\Rightarrow (f+g)(0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1) \\ x = 1 &\Rightarrow (f+g)(1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2) \end{aligned}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1$$

$$\begin{array}{r|l} x & 0 & 1 & -1 \\ \hline y & 1 & 2 & 0 \end{array}$$



$$\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow f+g(-1) = 0 \Rightarrow (-1, 0) \\ x = 0 &\Rightarrow f+g(0) = 0 \Rightarrow (0, 0) \\ x = 1 &\Rightarrow f+g(1) = 2 \Rightarrow (1, 2) \end{aligned}$$

$$f+g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ x^2 & x = 0 \\ x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 0 & 2 \end{array}$$

نویسه کننده:

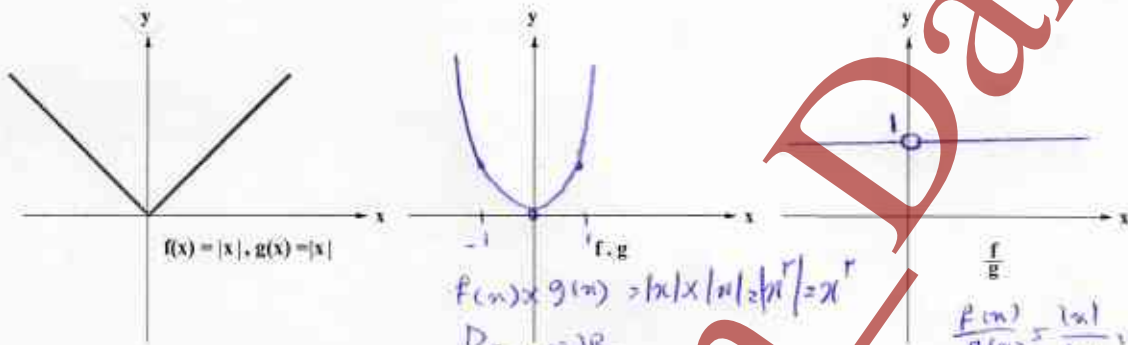
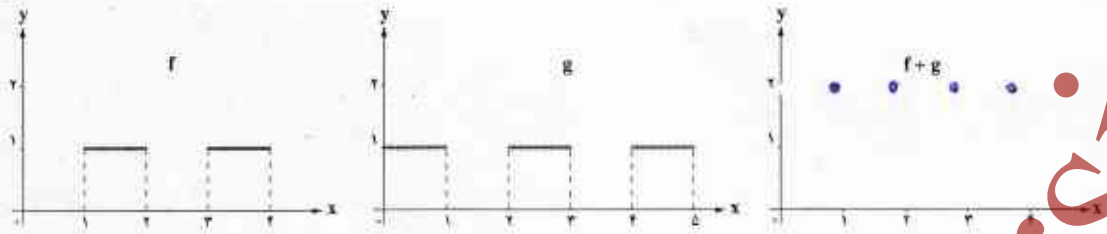
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

[khuzmath1394@chmail.ir](mailto:khuzmath1394@chmail.ir)

تمرین

۱. در هر حالت با توجه به نمودار توابع  $f$  و  $g$ ، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.  
(الف)

$D_{f+g} = \{1, 2, 3, 4\}$



$D_{f/g} = \mathbb{R} - \{0\}$

۲. یک شرکت هولدینگ دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید  $x$  تن کاشی در کارخانه A به ترتیب  $2x^2 + 16x - 2$  و  $x^2 + 6x + 8$  و در کارخانه B به ترتیب  $x^2 + 11x - 1$  و  $2x + 9$  واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):  
الف. تابع سود شرکت هولدینگ را به دست آورید.

پایه سوال ۲ در پایین

ب. این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیم خود می‌رسد؟  
۳. اگر  $f(x) = [x]$  با دامنه  $0 \leq x \leq 1$  و  $g(x) = |x|$  با دامنه  $1 \leq x \leq 2$  و  $h(x) = x^2 - 4$  با دامنه  $-1 \leq x \leq 1$  در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	نمودار
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s(x) = [x] +  x  \quad (1, 2)$ $D_s = D_f \cap D_g = \{1\}$ $x=1 \Rightarrow s(1) = [1] +  1  = 2$	
$q(x) = \frac{h(x)}{f(x)}$	$q(x) = \frac{x^2 - 4}{[x]} \quad (1, -3)$ $D_q = D_h \cap D_f = \{1\}$ $x=1 \Rightarrow q(1) = \frac{1-4}{1} = -3$	
$p(x) = h(x) \times g(x)$	$p(x) = (x^2 - 4) \times  x  \quad (1, -3)$ $D_p = D_h \cap D_g = \{1\}$ $x=1 \Rightarrow p(1) = (1-4) \times  1  = -3$	

۱. هولدینگ از واژه لاتین Hold به معنای نگه داشتن می‌آید. شرکت هولدینگ یا مادر، شرکتهای سهامی است که دارای شرکت‌های زیرمجموعه است. کنترل شرکت‌های زیرمجموعه مستقیماً زیر نظر مدیران و هیئت مدیره شرکت اصلی است.

پایه سوال ۲

الف

$P(n) = R_p(n) - C_p(n), (n) = -2n^2 + 11n - (8n + 4) = -2n^2 + 3n - 4$

$P_2(n) = R_p(n) - C_p(n) = -n^2 + 11n - (2n + 9) = -n^2 + 9n - 9$

$P(n) = A + B \Rightarrow P(n) = -2n^2 + 3n - 4 + (-n^2 + 9n - 9) = -3n^2 + 12n - 13$

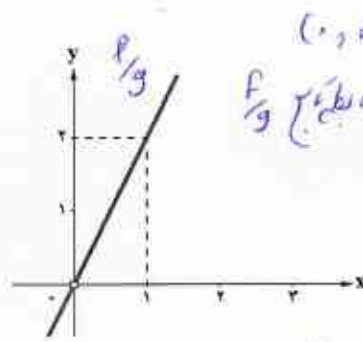
پایه سوال ۲

۳ تن کاشی

$n = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-3)} = \frac{-12}{-6} = 2$



۴. اگر  $f(x) = x^r$  و تابع  $(\frac{f}{g})(x)$  به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع  $g(x)$  را بدست آورید؟



$(0,0)$   $(1,2) \Rightarrow m = \frac{2-0}{1-0} = 2$   
 $\frac{f}{g}$  ضابطه  $\frac{f}{g}(x) = 2x$   $x \neq 0$   $D = \mathbb{R} - \{0\}$

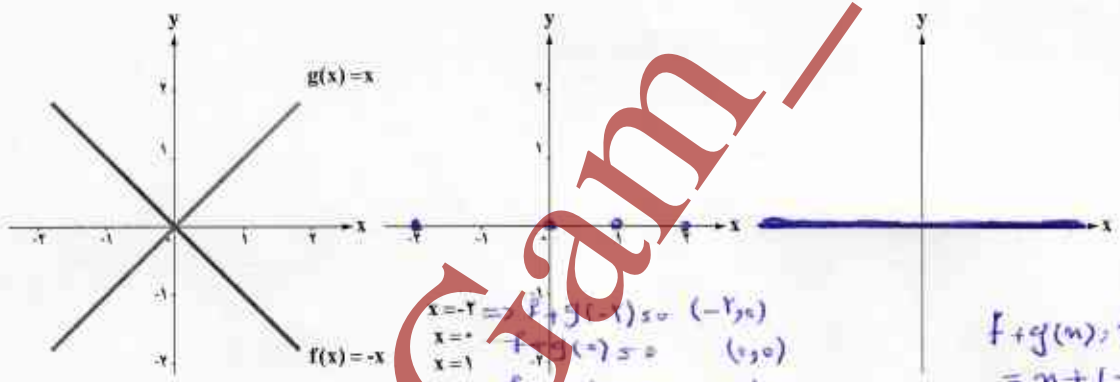
$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow 2x = \frac{x^r}{g(x)}$

$\Rightarrow g(x) = \frac{x^r}{2x} = \frac{x^{r-1}}{2}$  ضابطه  $g$

$g(x) = \frac{x}{2}$

۵. به کمک نمودارهای رسم شده توابع  $f$  و  $g$ ، نمودار تابع  $f+g$  را ابتدا فقط در نقاط داده شده، مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع  $(f+g)$  را به کمک ضابطه آن و نیز نقاط مشخص شده از تابع، رسم کنید.

$D_f = \mathbb{R}$   
 $D_g = \mathbb{R}$



$f+g(x) = f(x) + g(x) = -x + x = 0$   
 $x = -2 \Rightarrow f+g(-2) = 0 \quad (-2, 0)$   
 $x = 0 \Rightarrow f+g(0) = 0 \quad (0, 0)$   
 $x = 1 \Rightarrow f+g(1) = 0 \quad (1, 0)$   
 $x = 2 \Rightarrow f+g(2) = 0 \quad (2, 0)$

$f+g(x) = f(x) + g(x)$   
 $= -x + x = 0$   
 $\Rightarrow f+g(x) = 0$   
 $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$   
 خواندنی!

چرا در عبارات جبری به جای متغیر از حرف x استفاده می کنیم؟  
 در آثار ریاضی اسلامی برخی از اصطلاحات مانند نماد استفاده می شدند. یکی از این اصطلاحات کلمه «شی» است که آن را به جای مجهول به کار می بردند. اولین ترجمه کتاب های ریاضی دوره اسلامی به زبان اسپانیایی انجام گرفت. مشکل علمای قرون وسطایی اسپانیا که وظیفه شان ترجمه چنین متونی بود، در این زمینه این بود که حرف «ش» و کلمه «شی» قابل تبدیل به زبان اسپانیایی نبود. به دلیل آنکه در اسپانیا صدای «ش» یا «sh» وجود ندارد. صدای «sh» یا «ک» را از یونانی قدیم به شکل x یا «کای» جایگزین صدای «ش» یا «sh» کردند و بعدها که این متون به زبان های رایج اروپایی ترجمه شدند، حرف یونانی «کای» x، با حرف لاتین x جایگزین شد.





## خواندنی ۲

صنعت کشاورزی که حتی در نگاه نخستین برسانده به نظر نمی‌رسد، امروزه برای پاسخ‌گویی به تقاضای روزافزون صنایع غذایی نیازمند تجزیه و تحلیل دقیق‌تر و فناوری پیشرفته‌تر است. به همین دلیل در سال ۲۰۱۶ و در یک پروژه دانشگاهی، در طرحی جالب، کاری گروهی میان کشاورزان، ریاضی‌دانان و متخصصان مهندسی آب با هدف کاهش مصرف آب و البته تمرکز بر کم‌شدن میزان محصول شکل گرفت؛ چنان‌که در زمین بازار و سود کشاورزان خللی به وجود نیاید. برای این هدف یک مدل ریاضی آبیاری طراحی شد که موارد زیر در آن به دقت در نظر گرفته شده بود:

- رابطه میان رشد گیاه و مصرف آب در هر مرحله از رشد

- بهترین زمان کاشت

- مناسب‌ترین مکان کاشت (اینکه در چه زمین‌هایی کاشت انجام شود و در چه زمین‌هایی بستر کاشت مهیا نیست) نقطه عطف این طرح این بود که کشاورزان هرگز تصور نمی‌کردند که اطلاعات مهم و تعیین‌کننده‌ای در اختیار دارند که با این اطلاعات می‌توان به یک مدل ریاضی برای کاشت محصول دست یافت.

امروزه کمک گرفتن از مدل‌های ریاضی در کشاورزی که بر اساس اطلاعات دقیق کشاورزان طراحی می‌شوند، در صنعت کشاورزی نوین به شکل‌گیری شاخه‌ای به نام «کشاورزی دقیق» (Precision farming) انجامیده است. در این شاخه به جمع‌آوری و بررسی داده‌ها بسیار اهمیت داده می‌شود.

منالی دیگر در این زمینه طراحی مدلی برای استفاده از کودهای شیمیایی است. در حال حاضر به کمک مانسین‌آلات مجهز به GPS برای نمونه برداری از خاک زمین‌های کشاورزی و اطلاعات تجربی کشاورزان می‌توان فهمید که چه بخشی از زمین به کود شیمیایی بیشتر و چه بخشی به کود کمتر نیاز دارد. برآیند این اطلاعات سبب می‌شود که تا میزان قابل توجهی از استفاده بی‌رویه کود شیمیایی جلوگیری شود که نتیجه مستقیم و مفید آن کمتر شدن چشمگیر نترات در منابع آبی! به‌ویژه آب‌های کشاورزی است.

