فصل سوّم

درس اوّل : چندضلعی ها و ویژگی های آنها

در این درس، مفهوم چند ضلعی را معرفی و سپس چهارضلعی های مهم و ویژگی های آنها را بیان می کنیم.

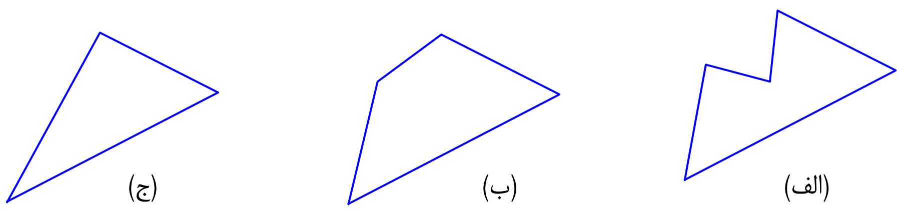
مفهوم چند ضلعی

هر شکل که از اجتماع حداقل سه پاره خط با ویژگی های زیر باشد، را چند ضلعی می نامند.

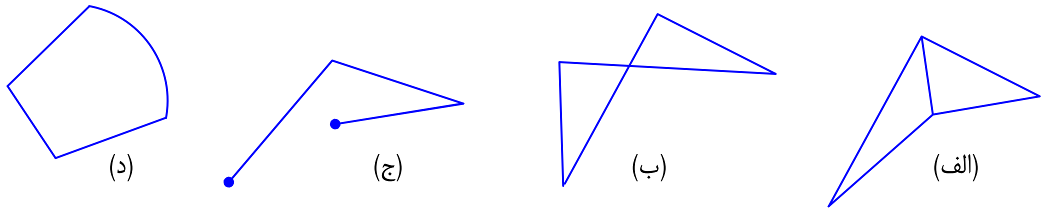
الف : هر پاره خط دقیقاً با دو پاره خط دیگر و فقط در نقاط ابتدا و انتها مشترک باشد.

ب : هر دو پاره خط که در یک انتها مشترک باشند روی یک خط نباشند.

مانند: شکل های زیر :



توجه : طبق تعریف هر یک از شکل های زیر چند ضلعی نمی باشند؟چرا؟



***

چند اصطلاح در مورد چند ضلعی ها

الف : هر یک از پاره خط های تشکیل دهنده‌ی یک چند ضلعی را ضلع می نامند.

ب : هر یک از نقاط ابتدا و انتهای هر ضلع در چند ضلعی را رأس می نامند.

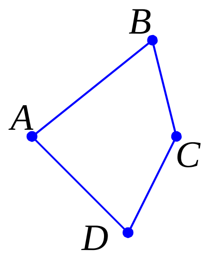
ج : دو ضلع که در یک رأس مشترک باشند را دو ضلع مجاور می نامند.

د : هر دو رأس که توسط یک ضلع به هم متصل شده باشند را رأس های مجاور می نامند و در غیر این صورت آنها را غیر مجاور می گویند.

هـ : دو زاویه از یک چند ضلعی که در یک ضلع مشترک باشند را دو زاویه‌ی مجاور می نامند و در غیر این صورت آنها را غیر مجاور می گویند.

و : هر پاره خط که دو رأس غیر مجاور از یک چند ضلعی را به هم متصل می کند را قطر می گویند.

تمرین ۱ : با توجه به چهار ضلعی زیر به سئوال های داده شده پاسخ دهید.



الف : نام یک ضلع را بنویسید.

ب : دو ضلع مجاور و دو ضلع غیر مجاور بنویسید.

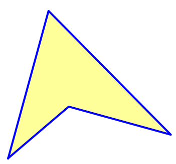
ج : دو رأس مجاور و دو رأس غیر مجاور را نام ببرید.

د : دو زاویه‌ی مجاور و دو زاویه‌ی غیر مجاور بنویسید.

هـ : تمام قطرهای این چهار ضلعی را رسم کنید.

توجه : در نامگذاری چندضلعی ها باید رؤس را هم جهت یا در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت نام برد و غیر آن نادرست است. برای مثال بگوییم چهارضلعی $ABCD$ و نگوییم چهارضلعی $ACBD$

تمرین۲ : قطرهای چهارضلعی مقابل را رسم کنید.

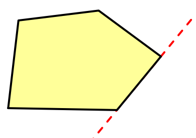


***

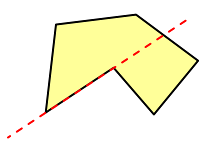
چند ضلعی های محدب و مقعر

یک چند ضلعی را محدب گوییم، هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن(امتداد ضلع) ، بقیه‌ی نقاط چند ضلعی در یک طرف آن خط واقع می شوند.

هر چند ضلعی که محدب نباشد را مقعر می نامند.



چند ضلعی محدب



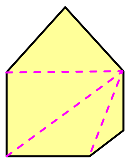
چند ضلعی مقعر

نتیجه : در چند ضلعی محدب ، زاویه‌ی داخلی بیشتر از ۱۸۰ درجه وجود ندارد.

تمرین۳ : دو شش ضلعی رسم کنید که یکی محدب باشد و دیگری محدب نباشد.

تمرین۴ : یک چهارضلعی مقعر رسم کنید.

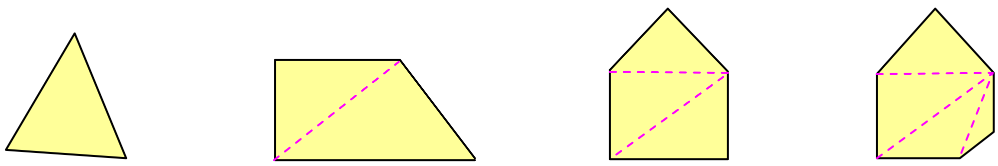
قضیه : تعداد قطر های هر n ضلعی محدب برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ است.



اثبات : واضح است که از هر رأس یک n ضلعی محدب به تعداد $n-۳$ قطر می توان رسم کرد. پس تعداد کل قطرهای رسم شده، برابر $n(n-۳)$ است. امّا مشخص اسـت کـه ، در این محاسبه هر قطر دو بار شمرده می شود. بنابراین تعداد واقعی قطرها برابـر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ می باشد.

قضیه : مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر $۱۸۰\times(n-۲)$ درجه است.

اثبات : واضح است که در هر n ضلعی محدب می‌توان $n-۲$ مثلث به دست آورد (چرا؟). از طرفی مجموع زاویه‌های n ضلعی برابر مجموع زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها است. امّا می‌دانیم که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه می باشد. پس مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی برابر $۱۸۰\times(n-۲)$ است.



تمرین۵ : مجموع زاویه های داخلی چهارضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین۶ : مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی یک دوازده ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین۷ : تعداد قطرهای یک ۱۵ ضلعی محدب را تعیین کنید.

تمرین۸ : تعداد قطرهای یک چندضلعی محدب دو برابر تعداد اضلاع آن است

الف) تعداد اضلاع را بیابید. ب) مجموع زاویه‌های داخلی آن را پیدا کنید.

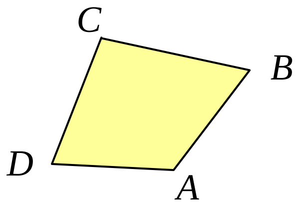
تمرین۹ : مجموع زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی محدب ۵۴۰ درجه است :

الف) تعداد اضلاع آن را بیابید. ب) تعداد قطرهای آن را محاسبه کنید.

تمرین۱۰ : ثابت کنید که مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی محدب ۳۶۰ درجه است.

چهارضلعی های مهم و ویژگی های آنها

در هر چهارضلعی، دو ضلع که در یک رأس مشترک باشند را مجاور و در غیر این صورت آنها را مقابـل مـی نامند.

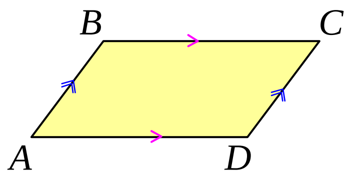


برای مثال در چهارضلعی $ABCD$ شکل مقابل ضلع AB و BC مجاور و دوضلع AB و CD مقابل می باشند.

در ادامه به معرفی چهار ضلعی های خاص می پردازیم و خواص آنها را بررسی می کنیم.

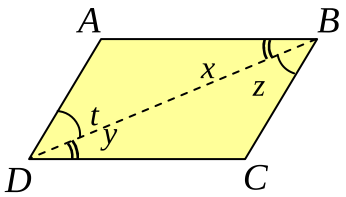
الف : متوازی الاضلاع

متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی یکدیگر باشند.



$$AB \parallel CD$$
$$BC \parallel AD$$

قضیه) در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل مساوی یکدیگرند.



فرض : $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

حکم : $AB = DC$ و $AD = BC$

اثبات : یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع (مثلاً BD) را رسم می‌کنیم. آنگاه داریم :

$$\left.\begin{array}{ll} & \angle x = \angle y \\ \text{مشترک} & BD = BD \\ & \angle z = \angle t \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta(ABD) \cong \Delta(BCD) \rightarrow AB = DC\,, AD = BC$$

قضیه) اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فرض : $AB \overset{\parallel}{=} DC$ حکم : $AD \parallel BC$

اثبات : یکی از قطرهای چهارضلعی (مثلاً BD) را رسم می‌کنیم. آنگاه داریم :

$$\left.\begin{array}{r} AB=DC \\ \text{مورب } BD \text{ و } AB \parallel AC \to \angle x=\angle y \\ DB=BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ABD)\cong\Delta(BCD)$$

$$\to \angle z=\angle t \to AD \parallel BC$$

قضیه) اگر در یک چهارضلعی، اضلاع مقابل دو به دو مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فرض : $AB=DC$ و $AD=BC$ حکم : $AB \parallel DC$ و $AD \parallel BC$

اثبات : یکی از قطرهای چهارضلعی (مثلاً BD) را رسم می‌کنیم. آنگاه داریم :

$$\left.\begin{array}{rr} \text{طبق فرض} & AB=DC \\ \text{مشترک} & BD=BD \\ \text{طبق فرض} & AD=BC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABD)\cong\Delta(BDC) \to \left\{\begin{array}{l} \hat{x}=\hat{y} \to AB \parallel DC \\ \hat{z}=\hat{t} \to AD \parallel BC \end{array}\right.$$

قضیه) در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبرو مساویند.

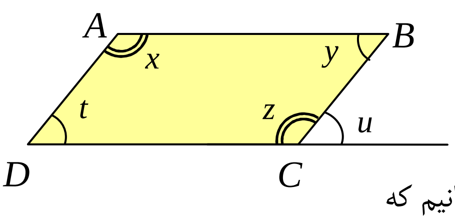
اثبات : یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع (مثلاً BD) را رسم می‌کنیم. آنگاه داریم.

$$\left.\begin{array}{r} AB=DC \\ AD=BC \\ DB=BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABD)\cong\Delta(BCD) \to \angle A=\angle C$$

و به همین ترتیب و با رسم قطر AC ثابت می‌شود که $\angle B=\angle D$

قضیه) اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های مقابل مساوی باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

اثبات :



فرض : $\angle x=\angle z$ و $\angle y=\angle t$

اثبات : می‌دانیم که

$$\angle x+\angle y+\angle z+\angle t=۲\times۱۸۰=۳۶۰$$

همچنین طبق فرض داشتیم که $\angle y=\angle t$ و $\angle x=\angle z$ لذا

$$۲\angle x+۲\angle y=۳۶۰ \xrightarrow{\div ۲} \angle x+\angle y=۱۸۰ \quad (۱)$$

حال ضلع BC را از طرف رأس C امتداد می‌دهیم. آنگاه داریم:

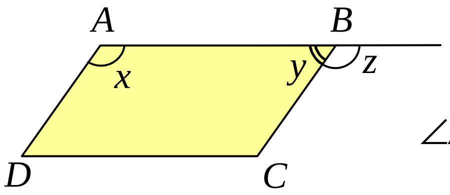
$$\left.\begin{array}{l}\angle x=\angle z\\ \angle z+\angle u=۱۸۰\end{array}\right\}\rightarrow \angle x+\angle u=۱۸۰ \quad (۲)$$

اکنون از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم.

$$\rightarrow \angle y=\angle u\rightarrow AB \,||\, DC$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $AD \,||\, BC$

قضیه) در هر متوازی‌الاضلاع، دو زاویه‌ی مجاور به هر ضلع مکمل یکدیگرند.



اثبات : ضلع AB را از طرف نقطه‌ی B امتداد می‌دهیم آنگاه

$$\angle z+\angle y=۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

همچنین چون $AD \,||\, BC$ و AB مورب می‌باشد پس

$$\angle x=\angle z \qquad (۲)$$

و با توجه به نتایج (۱) و (۲) می توان نوشت :

$$\angle x+\angle y=۱۸۰^\circ$$

قضیه) اگر در یک چهارضلعی زاویه های مجاور به یک ضلع مکمل یکدیگر باشند،آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فرض : $\angle x+\angle y=۱۸۰^\circ$

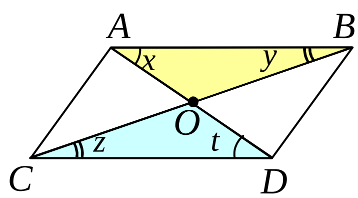
اثبات : ضلع AB را از طرف رأس B امتداد می‌دهیم، آنگاه داریم.

$$\left.\begin{array}{l}\angle x+\angle y=۱۸۰\\ \angle y+\angle z=۱۸۰\end{array}\right\}\rightarrow \angle x=\angle z\rightarrow AD \,||\, BC$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $AB \,||\, DC$

قضیه) در هر متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

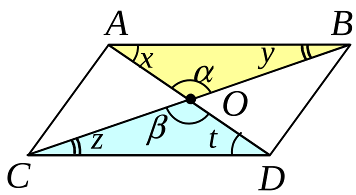
اثبات : قطرهای متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم آنگاه داریم.



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \to \angle x = \angle t \quad \text{و } AD \text{ مورب} \\ AB = DC \\ AB \parallel DC \to \angle y = \angle z \quad \text{و } BC \text{ مورب} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta(AOB) \cong \Delta(COD)$$

$$\to OA = OD , OB = OC$$

قضیه) هر چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند، متوازی‌الاضلاع است.



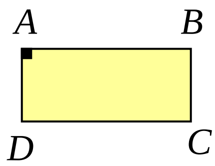
اثبات : قطرهای چهارضلعی را رسم می‌کنیم، آنگاه داریم :

$$\left.\begin{array}{l} OA = OD \\ \angle\alpha = \angle\beta \quad \text{متقابل به رأس} \\ OB = OC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(AOB) \cong \Delta(COD) \to \left\{\begin{array}{l} \angle x = \angle t \to AB \parallel DC \\ AB = DC \end{array}\right.$$

و لذا چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

***

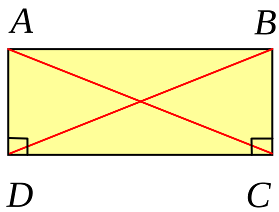
ب : مستطیل



مستطیل چهارضلعی است که همه‌ی زاویه های آن قائمه هستند. به عبارتی دیگر، مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه قائمه داشته باشد.

نتیجه: بنابر اینکه در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مجاور به هر ضلع مکمل یکدیگر بوده و زاویه‌های مقابل مساوی همدیگر می‌باشند. پس هر مستطیل چهار زاویه قائمه دارد.

قضیه) در هر مستطیل قطرها مساوی یکدیگرند.

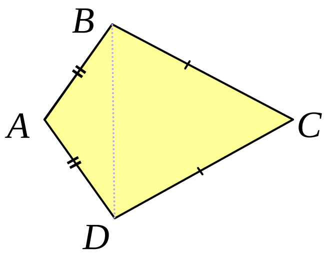


اثبات: قطرهای مستطیل را رسم می‌کنیم آنگاه داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \angle D = \angle C = ۹۰^\circ \\ DC = DC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ADC) \cong \Delta(BDC) \to AC = BD$$

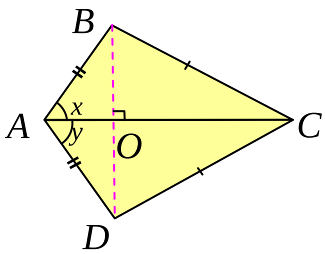
پ : کایت

هر چهارضلعی که از دو مثلث متساوی‌الساقین هم قاعده تشکیل شده باشد را کایت می‌نامند.



$AB = AD$ و $BC = DC$

قضیه) در هر کایت قطر بزرگ عمودمنصف قطر کوچک است.

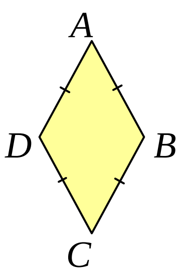


اثبات : قطرهای کایت را رسم می‌کنیم. آنگاه داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ AC = AC \\ BC = DC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(ADC) \to \angle x = \angle y$$

یعنی AC نیمساز زاویه‌ی A است از طرفی می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه‌ی رأس بر میانه و ارتفاع وارد بر ضلع مقابل آن منطبق است و لذا AC عمود منصف BD است.

ت : لوزی

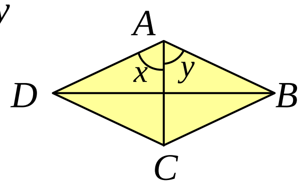


لوزی چهارضلعی است که هر چهارضلع آن هم اندازه باشند. به عبارتی دیگر لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع آن مساویند.

قضیه) در هر لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند.

اثبات : قطرهای لوزی را رسم می‌کنیم آنگاه داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ AC = AC \\ BC = DC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(ADC) \to \angle x = \angle y$$

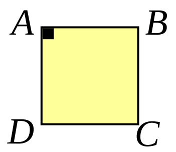


یعنی AC نیمساز زاویه‌ی A است. از طرفی می‌دانیم که در هر مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویه‌ی رأس بر میانه و ارتفاع وارد بر ضلع مقابل آن منطبق می باشد. لذا AC عمود منصف BD است. به همین ترتیب می توان ثابت کرد که BD عمود منصف AC است.

***

ث : مربع

چهارضلعی است که هر چهارضلع آن هم اندازه و حداقل یک زاویه‌ی آن قائمه باشد. به عبارتی دیگر هر چهار ضلعی که یکی از شرایط زیر را داشته باشد را مربع می نامند.



الف: لوزی که یک زاویه قائمه داشته باشد.

ب: مستطیلی که تمام اضلاع آن مساویند.

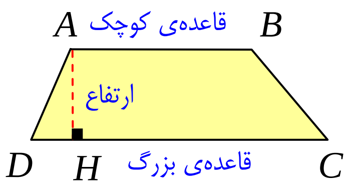
نتیجه‌ی ۱ : مربع نوعی مستطیل است و لذا قطرهای آن با هم مساویند.

نتیجه‌ی ۲ : مربع نوعی لوزی است و لذا قطرهای آن عمودمنصف یکدیگر بوده و نیمساز زاویه‌های نظیر نیز می‌باشند.

***

ج : ذوزنقه

ذوزنقه چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن موازی یکدیگرند.



$AB \parallel DC$

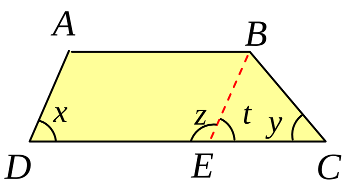
در هر ذوزنقه دو ضلع موازی را قاعده و هر یک از دو ضلع غیر موازی را ساق می نامند. پاره‌خطی که بر هر دو قاعده ی ذوزنقه عمود است را ارتفاع می گویند.

دو نوع مهم از انواع ذوزنقه ، ذوزنقه‌ی متساوی الساقین و ذوزنقه‌ی قائم الزاویه می باشند.

۱ : ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین : ذوزنقه‌ای است که دو ضلع ناموازی آن مساویند.

۲ : ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه : ذوزنقه‌ای است که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

قضیه) در ذوزنقه‌ی متساوی الساقین، دو زاویه‌ی مجاور به هر قاعده مساویند.



اثبات : از رأس B خط BE را موازی AD رسم می‌کنیم تا قاعده‌ی DC را در نقطه‌ی E قطع کند، در این صورت چهارضلعی $ABED$ متوازی الاضلاع است، لذا $AD = BE$. از طرفی $AD = BC$ پس $BE = BC$ و در نتیجه $\angle t = \angle y$

همچنین چون $AD \parallel BE$ و DC مورب می‌باشد، پس $\angle x = \angle t$ و در نتیجه $\angle x = \angle y$

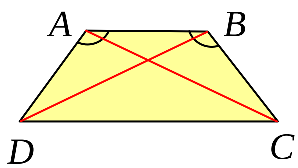
حال چون $\angle A + \angle D = ۱۸۰$ و $\angle B + \angle C = ۱۸۰$. پس $\angle A = \angle B$

قضیه) در هر ذوزنقه که دو زاویه‌ی مجاور به قاعده مساوی باشند، آن ذوزنقه متساوی الساقین است.

اثبات : فرض کنیم که دو زاویه‌ی C و D مساویند. از رأس B خط BE را موازی AD رسم می‌کنیم تا قاعده‌ی DC را در نقطه‌ی E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $ABED$ متوازی الاضلاع است و لذا $AD = BE$. همچنین $\angle t = \angle x$ ، و چون $\angle x = \angle y$ لذا $\angle t = \angle y$ پس $BE = BC$. در نتیجه $AD = BC$

قضیه) در ذوزنقه‌ی متساوی الساقین دو قطر مساویند.

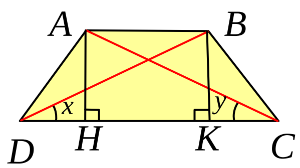
اثبات : با توجه به شکل مقابل داریم :



$$\left.\begin{array}{l} AB = AB \\ \angle A = \angle B \\ AD = BC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ABD) \cong \Delta(ABC) \rightarrow AC = BD$$

قضیه) در هر ذوزنقه که دو قطر مساوی باشند، آن ذوزنقه متساوی الساقین است.

اثبات : ابتدا دو ارتفاع AH و BK را رسم می کنیم. چون دو قاعده‌ی AB و DC موازیند، پس $AH = BK$



اکنون ثابت می کنیم که دو مثلث ACH و BKD همنهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{r} AC = BD \\ AH = BK \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta(ACH) \cong \Delta(BKD) \rightarrow \angle x = \angle y$$

و در نهایت ثابت می کنیم که دو مثلث ADC و BCD همنهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{r} AC = BD \\ \angle y = \angle x \\ DC = DC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ACD) \cong \Delta(BCD) \rightarrow AD = BC$$

***

حل چند تمرین :

۱ : در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع ها برابر است.

حل : طبق مسئله می توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲}n(n-۳) = n$$

و چون تعداد اضلاع عددی صحیح و بزرگتر یا مساوی۳ می باشد. پس دو طرف این تساوی را بـر n تقسیم می کنیم.

$$\frac{۱}{۲}(n-۳) = ۱ \xrightarrow{\times ۲} n-۳ = ۲ \rightarrow n = ۵$$

۲ : در کدام چند ضلعی تعداد قطرها سه برابر تعداد اضلاع است.

حل : طبق مسئله می توان نوشت:

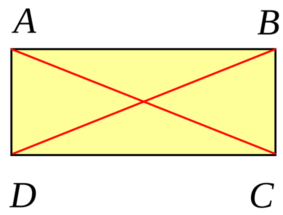
$$\frac{۱}{۲}n(n-۳) = ۳n$$

و چون تعداد اضلاع عددی صحیح و بزرگتر یا مساوی۳ می باشد. پس دو طرف این تساوی را بـر n تقسیم می کنیم.

$$\frac{۱}{۲}(n-۳) = ۳ \xrightarrow{\times ۲} n-۳ = ۶ \rightarrow n = ۹$$

۳ : ثابت کنید که اگر در متوازی الاضلاعی قطرها مساوی باشند، آن متوازی الاضلاع، مستطیل است.

اثبات : قطرهای متوازی الاضلاعی را رسم می‌کنیم آنگاه داریم :



$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ DC = DC \\ AC = BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ADC) \cong \Delta(BDC) \to \angle D = \angle C$$

و چون در هر متوازی الاضلاع دو زاویه ی مجاور ، مکمل همدیگر می باشند، پس :

$$\angle D + \angle C = ۱۸۰ \xrightarrow{\angle D = \angle C} \angle D = \angle C = ۹۰$$

لذا این متوازی الاضلاع زاویه‌ی قائمه دارد، پس مستطیل می باشد.

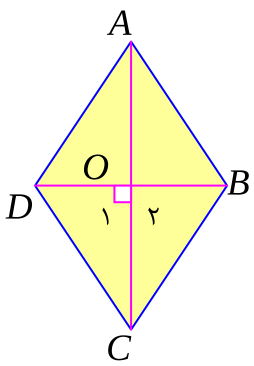
۴ : نشان دهید متوازی الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

اثبات : کافی است که نشان دهیم ، دو ضلع مجاور این متوازی الاضلاع ، مساویند.

چون در هر متوازی الاضلاع دو قطر منصف یکدیگر می باشند، پس :

$$DO = BO$$

لذا می توان نوشت:

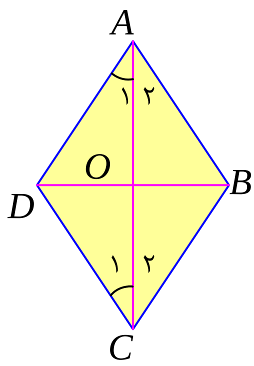


$$\left.\begin{array}{l} DO = BO \\ \angle O_۱ = \angle O_۲ \\ OC = OC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(DOC) \cong \Delta(BOC) \to DC = BC$$

۵ : نشان دهید متوازی الاضلاعی که در آن حداقل یک قطر نیمساز یک زاویه‌ی آن باشد، لوزی است.

اثبات : کافی است که نشان دهیم ، دو ضلع مجاور این متوازی الاضلاع ، مساویند.

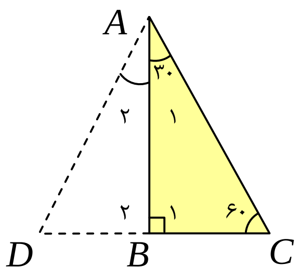
از طرفی چون در هر متوازی الاضلاع دو زاویه‌ی مقابل مساوی یکدیگر می باشند، پس نیمساز هر زاویه ، نیمساز زاویه‌ی مقابل آن نیز می باشد.



لذا می توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix}\angle A_۱ = \angle A_۲ \\ AO = CO \\ \angle C_۱ = \angle C_۲\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز ض}} \Delta(ADC) \cong \Delta(ABC) \to AD = AB$$

۶ : ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.



اثبات : ضلع BC روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه به انـدازه‌ی خـودش از طرف نقطه‌ی B امتداد می دهیم تا نقطه‌ی D بدسـت آیـد. سـپس نقطه‌ی D را به A وصل می کنیم. در این صورت دو مثلث ABC و ABD به دست می آید.

$$\left.\begin{matrix}AB = AB \\ \angle B_۱ = \angle B_۲ = ۹۰^\circ \\ BC = BD\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(ABD) \to \begin{cases}\angle A_۱ = \angle A_۲ = ۳۰^\circ \\ \angle D = \angle C = ۶۰\end{cases}$$

و لذا در مثلث ACD زاویه‌ی DAC برابر ۶۰ درجه است، و چون دو زاویه‌ی دیگر این مثلث برابر ۶۰ درجه هستند، لذا این مثلث متساوی الاضلاع می باشند. در نتیجه :

$$DC = AC$$

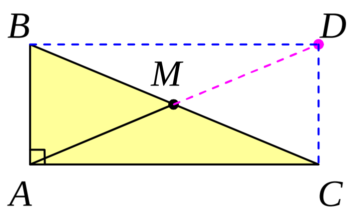
لذا خواهیم داشت:

$$۲BC = AC$$

یعنی :

$$BC = \frac{AC}{۲}$$

۷ : ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.



اثبات : میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش از طرف نقطه‌ی M امتداد می دهیم. تا نقطه‌ی D به دست آید. نقطه‌ی D را به نقاط B و C وصل می کنیم. چون دو قطر چهارضلعی $ABDC$

مساویند، پس این چهارضلعی متوازی الاضلاع می باشد و چون دارای زاویه‌ی قائمه است، پس مستطیل است. در مستطیل قطرها مساویند. لذا خواهیم داشت:

$$AD = BC$$

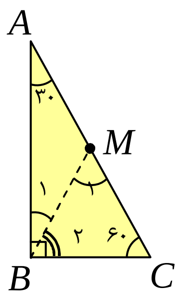
لذا خواهیم داشت:

$$۲AM = BC$$

یعنی :

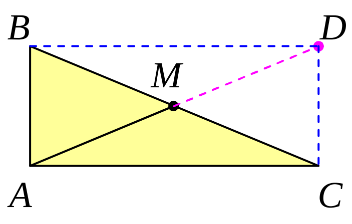
$$AM = \frac{BC}{۲}$$

۸ : به کمک تمرین قبل ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه ضلع روبرو به زاویه‌ی۳۰ درجه نصف وتر است.



حل : چون در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC زاویه‌ی A برابر۳۰ درجه است، لذا باید زاویه‌ی B برابر۶۰ درجه باشد. حال اگر میانه‌ی وارد بر وتر یعنی BM را رسم کنیم. طبق تمرین قبل $BM = AM = MC$ است. پس مثلث AMB متساوی الساقین بوده و $\angle B_۱ = ۳۰$. از اینجا نیز معلوم می شود $\angle B_۲ = ۶۰$ لذا در مثلث BMC خواهیم داشت $\angle M_۱ = ۶۰$. در نتیجه مثلث BMC متساوی الاضلاع است و $BC = BM$. و در نهایت خواهیم داشت $BC = \frac{AC}{۲}$

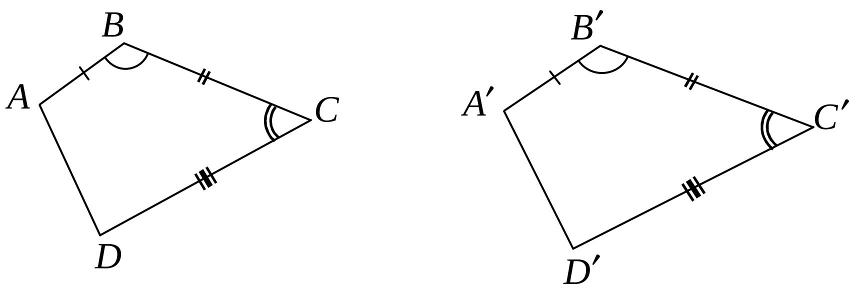
۹ : ثابت کنید که اگر در مثلثی ، اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر یک ضلع، نصف اندازه‌ی آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.



اثبات : میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش از طرف نقطه‌ی M امتداد می دهیم. تا نقطه‌ی D به دست آید. نقطه‌ی D را به نقاط B و C وصل می کنیم. چون $AM = \frac{BC}{۲}$ و $AM = MD$ پس $AM = \frac{AD}{۲}$. لذا $AD = BC$، یعنی دو قطر چهارضلعی $ABDC$ مساویند، پس این چهارضلعی مستطیل است. در نتیجه مثلث ABC قائم الزاویه و زاویه‌ی BAC قائمه است.

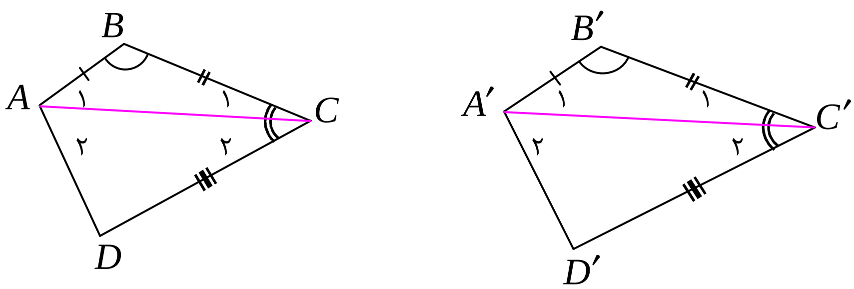
۱۰ : در دو چهارضلعی مقابل داریم:

$$AB=A'B' \text{ و } \angle B=\angle B' \text{ و } BC=B'C' \text{ و } \angle C=\angle C' \text{ و } CD=C'D'$$



چگونه مساوی بودن اندازه های سایر ضلع ها و زاویه ها را نتیجه می گیرید؟

حل : ابتدا قطرهای AC و $A'C'$ را رسم می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:



$$\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \\ \angle B=\angle B' \\ BC=B'C' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ABC)\cong\Delta(A'B'C') \rightarrow \left\{\begin{array}{l} AC=A'C' \\ \angle A_1=\angle A'_1 \\ \angle C_1=\angle C'_1 \end{array}\right.$$

و چون $\angle C=\angle C'$ لذا نتیجه می شود. $\angle C_2=\angle C'_2$

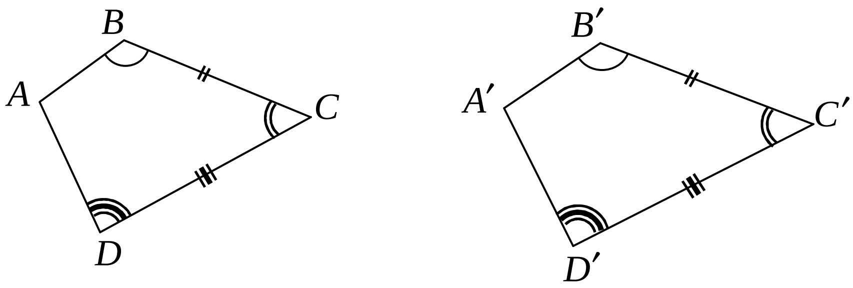
$$\left.\begin{array}{l} AC=A'C' \\ \angle C_2=\angle C'_2 \\ DC=D'C' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ADC)\cong\Delta(A'D'C') \rightarrow \left\{\begin{array}{l} AD=A'D' \\ \angle A_2=\angle A'_2 \\ \angle D=\angle D' \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_1=\angle A'_1 \\ \angle A_2=\angle A'_2 \end{array}\right\} \rightarrow \angle A_1+\angle A_2=\angle A'_1+\angle A'_2 \rightarrow \angle A=\angle A'$$

در نتیجه اندازه های سایر ضلع ها و زاویه های متناظر مساوی است.

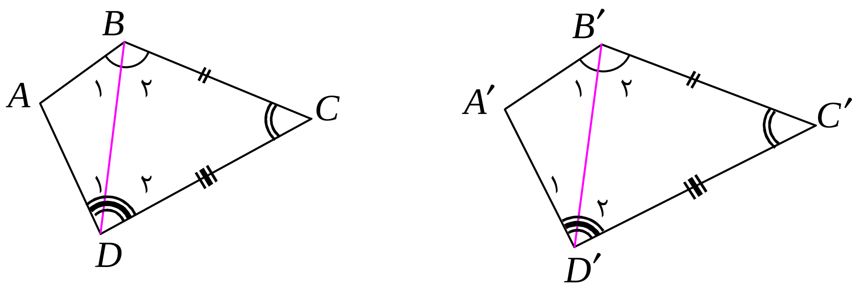
۱۱ : در دو چهارضلعی مقابل داریم:

$$\angle B = \angle B' \text{ و } BC = B'C' \text{ و } \angle C = \angle C' \text{ و } CD = C'D' \text{ و } \angle D = \angle D'$$



چگونه مساوی بودن اندازه های سایر ضلع ها و زاویه ها را نتیجه می گیرید؟

حل : ابتدا قطرهای BD و $B'D'$ را رسم می کنیم. در این صورت خواهیم داشت:



$$\left.\begin{array}{r} BC = B'C' \\ DC = D'C' \\ \angle C = \angle C' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(BDC) \cong \Delta(B'D'C') \rightarrow \left\{\begin{array}{l} BD = B'D' \\ \angle B_{۲} = \angle B'_{۲} \\ \angle D_{۲} = \angle D'_{۲} \end{array}\right.$$

و چون $\angle B = \angle B'$ لذا نتیجه می شود. $\angle B_{۱} = \angle B'_{۱}$

همچنین چون $\angle D = \angle D'$ باز نتیجه می شود. $\angle D_{۱} = \angle D'_{۱}$

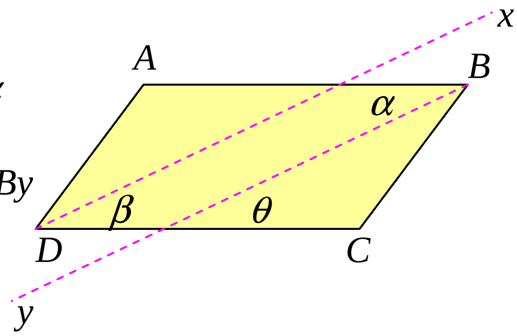
$$\left.\begin{array}{r} \angle B_{۲} = \angle B'_{۲} \\ BD = B'D' \\ \angle D_{۱} = \angle D'_{۱} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta(ABD) \cong \Delta(A'B'D') \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ AB = A'B' \\ AD = A'D' \end{array}\right.$$

در نتیجه اندازه های سایر ضلع ها و زاویه های متناظر مساوی است.

۱۲ : ثابت کنید که در هر متوازی الاضلاع نیمساز های دو زاویه‌ی مقابل موازی یکدیگرند.

حکم : $By \parallel Dx$

اثبات : می دانیم که در هر متوازی الاضلاع دو زاویه‌ی مقابل مساوی یکدیگرند. پس :



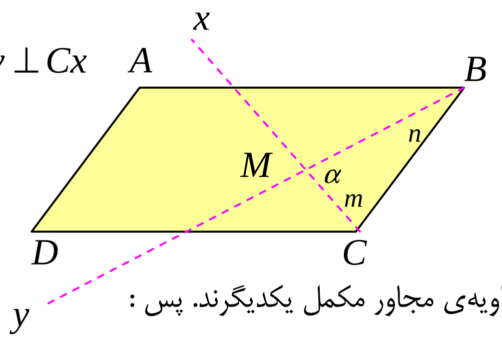
$$\angle D = \angle B \xrightarrow{\div ۲} \frac{\angle D}{۲} = \frac{\angle B}{۲} \rightarrow \angle \beta = \angle \alpha$$

$$\xrightarrow{AB \parallel DC \rightarrow \angle \alpha = \angle \theta} \angle \beta = \angle \theta \rightarrow Dx \parallel By$$

***

۱۳ : ثابت کنید که در هر متوازی الاضلاع نیمساز های دو زاویه‌ی مجاور، بر یکدیگر عمودند.

حکم : $By \perp Cx$



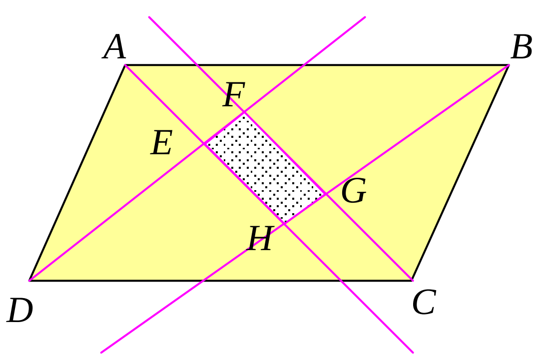
اثبات : می دانیم که در هر متوازی الاضلاع دو زاویه‌ی مجاور مکمل یکدیگرند. پس :

$$\angle B + \angle C = ۱۸۰ \xrightarrow{\div ۲} \frac{\angle B}{۲} + \frac{\angle C}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲} \rightarrow \angle n + \angle m = ۹۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\angle \alpha + \angle n + \angle m = ۱۸۰^\circ} \angle \alpha = ۹۰^\circ \rightarrow By \perp Cx$$

***

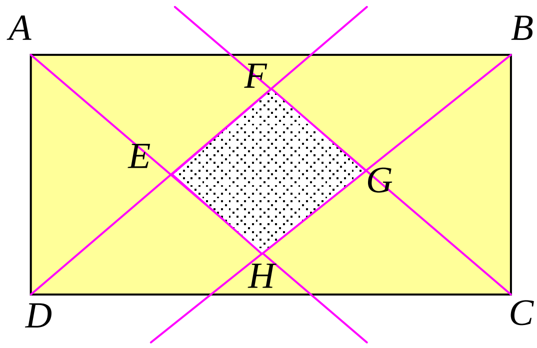
۱۴ : ثابت کنید که شکل حاصل از برخورد نیمساز های زاویه هـای داخلـی یـک متـوازی الاضـلاع ، یـک مستطیل است.



اثبات : طبق تمرین های قبل ، هر دو ضلع مقابل چهار ضلعی $EFGH$ موازی یکدیگر بوده و هر دو ضلع مجاور بر هم عمودند. لذا چهار ضلعی حاصل مستطیل است.

***

۱۵ : ثابت کنید که شکل حاصل از برخورد نیمساز های زاویه های داخلی یک مستطیل ، یک مربع است.



اثبات : بنابر تمرین قبل چهارضلعی $EFGH$ مستطیل است. حال کافی است ثابت کنیم که در این مستطیل دو ضلع مجاور مساویند.

چون دو مثلث ADE و BCG به حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین همنهشت هستند، پس: $DE = CG$. از طرفی مثلث DCF به علت تساوی دو زاویه‌ی مجاور به قاعده ، متساوی الساقین است، پس: $DF = CF$

اکنون اگر تساوی های فوق را از هم کم کنیم، خواهیم داشت :

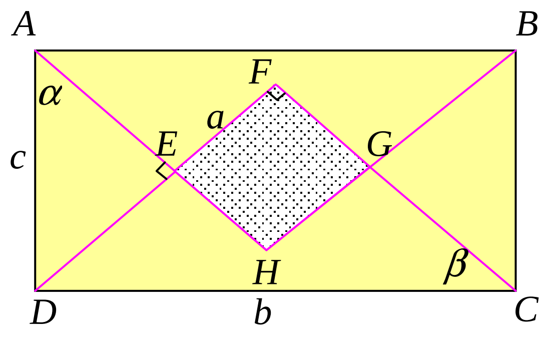
$$DF - DE = CF - CG \to EF = GF$$

یعنی در مستطیل $EFGH$ دو ضلع مجاور مساویند، لذا این چهار ضلعی مربع است.

***

۱۶ : با توجه به تمرین قبل رابطه‌ی بین طول و عرض مستطیل و اندازه‌ی ضلع مربع را بیابید.

حل : گیریم که اندازه‌ی ضلع مربع a و اندازه‌ی طول و عرض مستطیل به ترتیب b و c باشند. در این صورت چون زاویه های β و α برابر ۴۵ درجه هستند، پس می توان نوشت:



$$\overset{\Delta}{ADE} : \sin\alpha = \frac{DE}{AD} \xrightarrow{\angle\alpha = ۴۵^\circ} \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{DE}{c} \to DE = \frac{\sqrt{۲}}{۲}c$$

$$\overset{\Delta}{CDF} : \sin\beta = \frac{DF}{DC} \xrightarrow{\angle\beta = ۴۵^\circ} \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{DF}{b} \to DF = \frac{\sqrt{۲}}{۲}b$$

$$EF = DF - DE \to a = \frac{\sqrt{۲}}{۲}b - \frac{\sqrt{۲}}{۲}c = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(b - c)$$

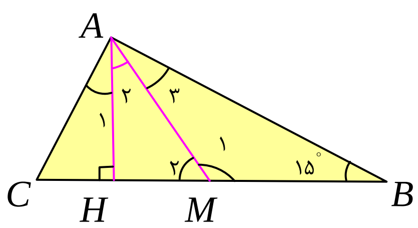
۱۷ : طول یک مستطیل ۵ و عرض آن ۳ می باشد، طول ضلع مربع حاصل از برخورد نیمساز های زاویه های داخلی آن را بیابید.

حل :

$$a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(b-c)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۵-۳)=\sqrt{۲}$$

***

۱۸ : در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC ، اندازه‌ی زاویه‌ی B برابر ۱۵ درجه است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازه‌ی وتر است.



حل : در مثلث ABC ، چون زاویه‌ی C برابر ۷۵ درجه می باشد. پس در مثلث ACH ، اندازه‌ی زاویه‌ی $A_۱$ برابر ۱۵ درجه می باشد.

$$\angle A_۱=۱۵^\circ$$

در مثلث AMB ، چون $AM=MB$ می توان نتیجه گرفت:

$$\angle A_۳=\angle B=۱۵^\circ$$

و چون زاویه‌ی BAC قائمه است. پس :

$$\angle A_۲=۹۰-(\angle A_۱+\angle A_۳)=۹۰-(۱۵+۱۵)=۶۰^\circ$$

لذا در مثلث AMH اندازه‌ی زاویه‌ی $M_۲$ برابر ۳۰ درجه می باشد. پس :

$$AH=\frac{۱}{۲}AM$$

در مثلث ABC پاره خط AM میانه‌ی وارد بر وتر است . لذا

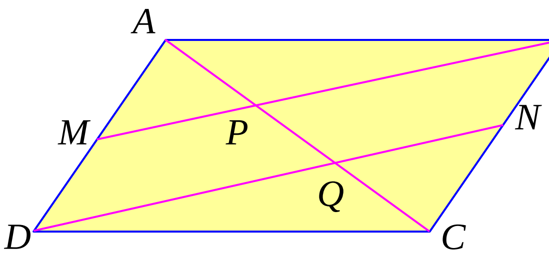
$$AM=\frac{۱}{۲}BC$$

در نهایت خواهیم داشت:

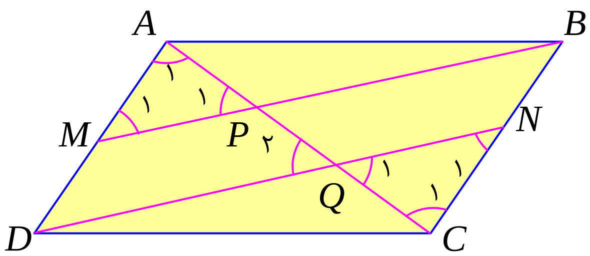
$$AH=\frac{۱}{۲}AM=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}BC)=\frac{۱}{۴}BC$$

برای مطالعه

۱۹ : در متوازی الاضلاع $ABCD$، نقاط M و N به ترتیب وسط های ضلع های AD و BC می باشند. چرا خط های MB و DN موازیند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$



حل : چون $AD \parallel BC$ و قطر AC مورب است. لذا : $\angle A_۱ = \angle C_۱$



$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ \angle A = \angle C \\ AM = CN \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(AMB) \cong \Delta(DCN) \to \angle N_۱ = \angle M_۱$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_۱ = \angle C_۱ \\ AM = CN \\ \angle M_۱ = \angle N_۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta(PAM) \cong \Delta(QCN) \to \begin{cases} AP = QC & (۱) \\ \angle P_۱ = \angle Q_۱ \end{cases}$$

و چون $\angle Q_۱$ و $\angle Q_۲$ متقابل به رأس هستند. پس $\angle Q_۱ = \angle Q_۲$ و لذا $\angle P_۱ = \angle Q_۲$

پس نتیجه گرفته می شود که $MB \parallel DN$

اکنون قضیه‌ی تالس را در مثلث ADQ می نویسیم.

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PQ} \xrightarrow{AM = MD} \frac{AP}{PQ} = ۱ \to AP = PQ \qquad (۲)$$

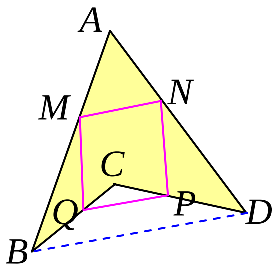
و در نهایت به نتایج (۱) و(۲) خواهیم داشت.

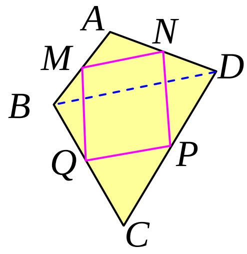
$$AP = PQ = QC$$

برای مطالعه

۲۰ : ثابت کنید،اگر وسط های ضلع های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم. یک متوازی الاضلاع پدید می آید.

حل :





در مثلث ABD نقاط M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و AD می باشند. لذا :

$$MN \parallel BD \quad \text{و} \quad MN = \frac{۱}{۲} BD$$

در مثلث BCD نقاط Q و P به ترتیب وسط اضلاع BC و CD می باشند. لذا :

$$PQ \parallel BD \quad \text{و} \quad PQ = \frac{۱}{۲} BD$$

در نتیجه دو ضلع مقابل چهارضلعی $MNPQ$ موازی و مساویند.پس متوازی الاضلاع است.

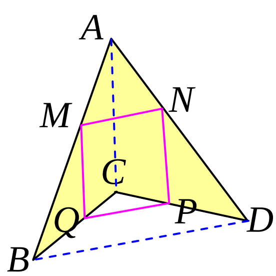
برای مطالعه

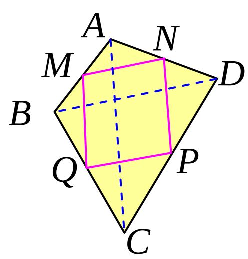
۲۱ : با توجه به تمرین ۲۰ ، این چهارضلعی باید چه ویژگی ای داشته باشد تا این متوازی الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

حل : اگر قطرها بر هم عمود باشند، متوازی الاضلاع به دست آمده لوزی است و اگر قطرها با هم برابر باشند. متوازی الاضلاع مستطیل است.

۲۲ : با توجه به تمرین ۲۰ ، چه رابطه ای بین محیط متوازی الاضلاع پدید آمده با اندازه های قطرهای چهارضلعی اوّلیه وجود دارد؟

حل : با توجه به قضیه‌ی تالس ، تناسب های زیر را می نویسیم.





در مثلث ABD داریم:

$$MN = \frac{۱}{۲} BD$$

و چون چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است. لذا $PQ = \frac{۱}{۲} BD$

در مثلث ABC داریم: لذا :

$$MQ = \frac{۱}{۲} AC$$

و چون چهارضلعی $MNPQ$ متوازی الاضلاع است. لذا $NP = \frac{۱}{۲} AC$

اکنون محیط چهارضلعی $MNPQ$ را می توان به صورت زیر به دست آورد.

$$P_{MNPQ} = MN + NP + PQ + MQ$$

$$= \frac{۱}{۲} BD + \frac{۱}{۲} AC + \frac{۱}{۲} BD + \frac{۱}{۲} AC = \frac{۱}{۲}(BD + AC + BD + AC)$$

$$= BC + AD$$

یعنی محیط متوازی الاضلاع بدست آمده نصف حاصل جمع اندازه های قطرهای چهارضلعی اوّلیه است.

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

فصل سوّم

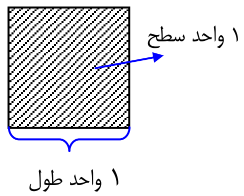
درس دوّم : مساحت و کاربردهای آن

مفهوم مساحت یک چندضلعی یکی از مفاهیم اساسی و مهم در هندسه محسوب می شود. در این درس مفهوم مساحت را به همراه کاربرد هایی از آن را بیان می کنیم.

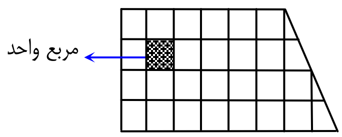
***

☑ سطح و واحد آن

تعریف : هر مربع که اندازه‌ی طول ضلع آن یک واحد طول باشد را مربع واحد (واحد سطح) می‌نامند.



معمولاً مساحت هر شکل با تقسیم آن به تعدادی مربع واحد اندازه‌گیری می‌شود. به عبارت دیگر مساحت یک ناحیه، مقدار فضایی از صفحه است که آن ناحیه اشغال می‌کند.

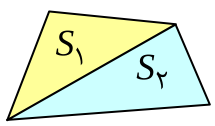


***

☑ اصول مساحت

۱ : مساحت هر شکل در صفحه، یک عدد حقیقی مثبت است.

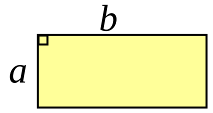
۲ : اگر یک شکل از بخش‌های مجزایی تشکیل شده باشد، مساحت آن برابر مجموع مساحت‌های آن بخش‌ها است.(اصل مجموع مساحت‌ها)



$$S_t = S_1 + S_2$$

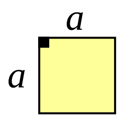
۳ : شکل‌های همنهشت مساحت‌های مساوی دارند.

۴ : مساحت مستطیل برابر حاصل ضرب طول در عرض آن است.



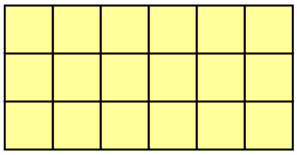
$$S = a.b$$

نتیجه : مساحت هر مربع برابر مجذور اندازه یک ضلع آن است.

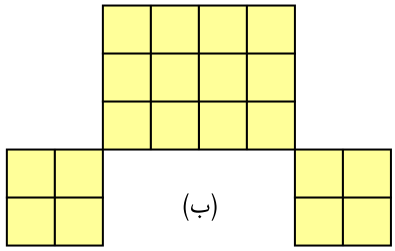


$$S = a^{۲}$$

تمرین ۱ : در هر مورد مساحت قسمت رنگی را حساب کنید.(هر مربع یک مربع واحد است.)



(الف)



(ب)

تمرین ۲ : مساحت مستطیلی به عرض۹ برابر مساحت مربعی به ضلع ۱۲ است. طول مستطیل را بیابید.

حل : اگر طول مستطیل x باشد. در این صورت داریم.

مساحت مربع = مساحت مستطیل

$$۹x = (۱۲)^{۲}$$

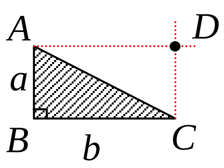
$$\rightarrow ۹x = ۱۴۴ \rightarrow x = ۱۶$$

***

☑ مساحت اشکال هندسی مهم

در ادامه قضایای مربوط به مساحت شکل های مهم هندسی را مطرح می کنیم.

قضیه) مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه آن است.

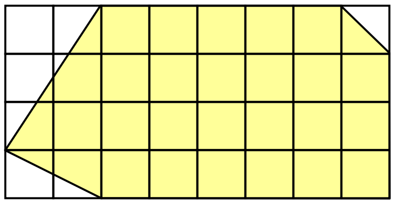


اثبات : ابتدا از رأس A خطی موازی ضلع BC و از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم واضح است که چهارضلعی حاصل مستطیل است و از دو مثلث همنهشت و مجزای ABC و ADC تشکیل شده است لذا:

$$\left.\begin{aligned} AB &= DC \\ AC &= AC \\ BC &= AD \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(BDC) \rightarrow S(ABC) = S(ADC)$$

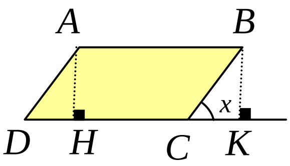
$$S(ABC) = \frac{۱}{۲} \times \text{مساحت مستطیل} = \frac{۱}{۲} a.b$$

تمرین۳ : مساحت قسمت رنگی را حساب کنید.(هر مربع یک مربع واحد است.)



قضیه) مساحت هر متوازی‌الاضلاع ، با حاصل ضرب اندازه‌ی قاعده در ارتفاع نظیر آن برابر است.

اثبات : از رأس B خطی بر امتداد ضلع DC عمود می‌کنیم آنگاه داریم:



$$\left.\begin{array}{r} AD \parallel BC \text{ و مورب } DC \rightarrow \angle D = \angle x \\ AD = BC \end{array}\right\} \rightarrow \underset{\text{(وتر و یک زاویه‌ی حاده)}}{\Delta(ADH) \cong \Delta(BCK)}$$

$$\rightarrow S(\overset{\Delta}{ADH}) = S(\overset{\Delta}{BCK})$$

از طرفی

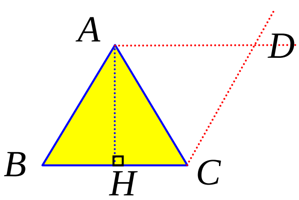
مساحت چهارضلعی $ABCH$ + مساحت مثلث ADH = مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$

= مساحت چهارضلعی $ABCH$ + مساحت مثلث BCK

= مساحت مستطیل $ABKH$ = $AB.AH$ = $AH.DC$

قضیه) مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب ارتفاع در قاعده‌ی نظیر آن است.

اثبات : از رأس A خطی موازی ضلع BC و از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم. پس چهارضلعی حاصل متوازی‌الاضلاع است و از دو مثلث همنهشت و مجزا تشکیل شده است.



$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ AC = AC \\ BC = AD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta(ABC) \cong \Delta(BDC) \rightarrow S(ABC) = S(ADC)$$

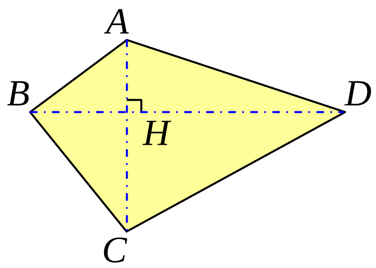
لذا :

نصف مساحت متوازی‌الاضلاع = مساحت مثلث ABC

$$\rightarrow S(ABC) = \frac{۱}{۲} AH \times BC$$

قضیه) اگر در یک چهارضلعی دو قطر بر هم عمود باشند، مساحت آن چهارضلعی برابر نصف حاصل ضرب قطرهای آن است.

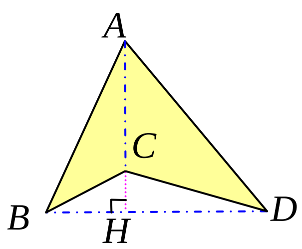
اثبات : با توجه به شکل های مقابل می‌توان نوشت:



$$S(ABCD)=S(ABD)+S(CBD)$$

$$=\frac{۱}{۲}AH.BD+\frac{۱}{۲}HC.BD$$

$$=\frac{۱}{۲}BD.(\underbrace{AH+HC}_{AC})=\frac{۱}{۲}BD\times AC$$



$$S(ABCD)=S(ABD)-S(CBD)$$

$$=\frac{۱}{۲}AH.BD-\frac{۱}{۲}HC.BD$$

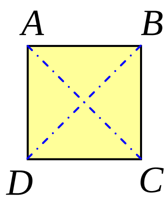
$$=\frac{۱}{۲}BD.(\underbrace{AH-HC}_{AC})=\frac{۱}{۲}BD\times AC$$

نتیجه :

۱) چون قطرهای لوزی بر هم عمودند، لذا مساحت آن با نصف حاصل ضرب قطرهای آن برابر است.

۲) چون قطرهای کایت بر هم عمودند، لذا مساحت آن با نصف حاصل ضرب قطرهای آن برابر است

۳) مساحت هر مربع با نصف مجذور اندازه‌ی قطر آن برابر است.



$$AC=BD=r$$

$$AC\perp BD\rightarrow S=\frac{۱}{۲}AC.BD\rightarrow S=\frac{۱}{۲}r.r=\frac{۱}{۲}r^{۲}$$

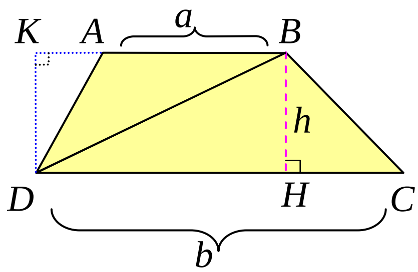
***

قضیه) مساحت ذوزنقه برابر نصف حاصل ضرب مجموع دو قاعده در ارتفاع آن برابر است.

اثبات : چون $AB \parallel DC$ پس بدیهی است که $DK = BH = h$

همچنین :

$$S(ABCD) = S(ABD) + S(BDC)$$

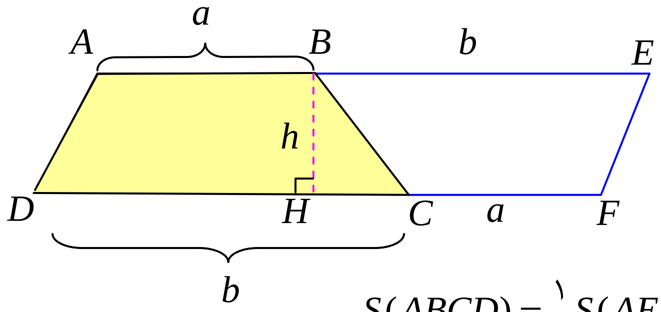


$$= \frac{۱}{۲} DK.AB + \frac{۱}{۲} BH.DC$$

$$= \frac{۱}{۲} h.a + \frac{۱}{۲} h.b$$

$$= \frac{۱}{۲}(a+b)h$$

روش دوّم : قاعده‌ی AB را از طرف نقطه‌ی B به اندازه‌ی DC و قاعده‌ی DC را از طرف نقطه‌ی C به اندازه‌ی AB امتداد می دهیم. بدیهی است که در چهار ضلعی بدست آمده دو ضلع مقابل موازی و مساویند. پس این چهار ضلعی متوازی الاضلاع می باشد و مساحت ذوزنقه نصف مساحت آن است. لذا :



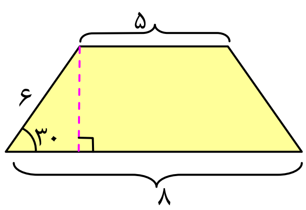
$$S(ABCD) = \frac{۱}{۲} S(AEFD)$$

$$S = \frac{۱}{۲}(a+b)h$$

❋❋❋

تمرین برای حل :

۴ : مساحت ذوزنقه‌ی شکل مقابل را حساب کنید.

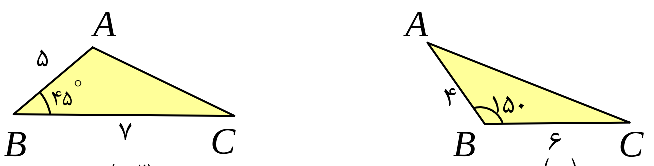


۵ : ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصل ضرب دو ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر برابر است.

۶ : ثابت کنید که مساحت هر متوازی الاضلاع با حاصل ضرب هر دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع برابر است.

۷ : ثابت کنید که مساحت هر مثلث با نصف حاصل ضرب هر دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع برابر است.

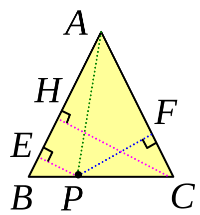
۸ : مساحت مثلث‌های زیر را حساب کنید. (سینوس زاویه ها را در صورت لزوم به کمک ماشین حساب به دست آورید.)



(الف) (ب)

۹ : مساحت مربعی را حساب کنید که طول قطر آن $۲\sqrt{۷}$ باشد.

۱۰ : ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعده‌ی یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن با ارتفاع وارد بر یک ساق آن برابر است.[1]



$$PE + PF = CH$$

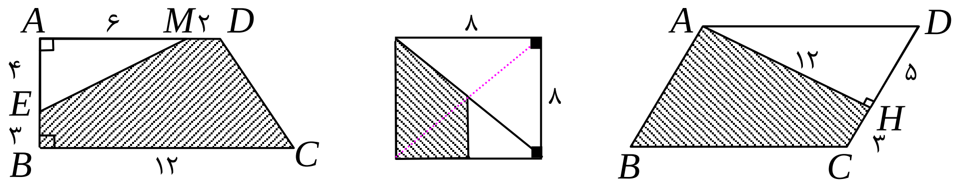
۱۱ : ثابت کنید که (قدر مطلق) تفاضل فواصل هر نقطه واقع بر امتداد قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن مثلث مقداری ثابت بوده و برابر ارتفاع وارد بر ساق ها است.

۱۲ : مساحت مثلث قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین ۴۰ است، اندازه‌ی هر کدام از اضلاع مثلث را پیدا کنید.

۱۳ : مساحت مربعی به قطر $۶\sqrt{۲}$ با مساحت مستطیلی به طول ۹ برابر است. اندازه‌ی عرض مستطیل را بدست آورید.

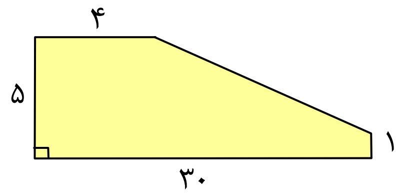
[1] . در هر مثلث متساوی الساقین، دو ارتفاع وارد بر ساق ها ، مساویند.

۱۴ : در هر مورد مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.(چهارضلعی های اصلی به ترتیب ذوزنقه ، مربع و متوازی الاضلاع هستند.)

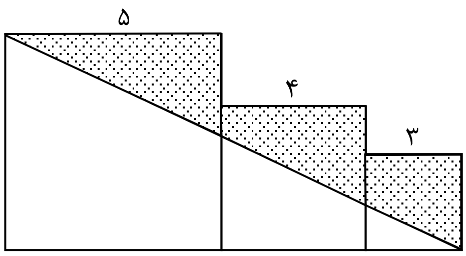


(الف) (ب) (ج)

۱۵ : مساحت شکل مقابل را حساب کنید.

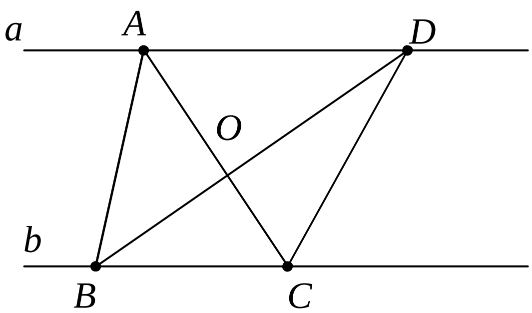


۱۶: با توجه به شکل مقابل مساحت قسمت رنگی را به دست آورید. (هر سه چهارضلعی مربع هستند.)



۱۷ : در یک لوزی اندازه‌ی هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

۱۸ : در شکل مقابل $a \| b$، نشان دهید که دو مثلث COD و AOB مساحت مساوی دارند. (مسئله‌ی پروانه)



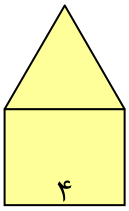
***

☑ مفهوم محیط

اندازه‌ی طولی مرز یا کناره‌ی یک شکل ساده‌ی بسته را محیط آن شکل می نامند.

نتیجه : محیط یک چند ضلعی محدب برابر مجموع اندازه های اضلاع آن است.

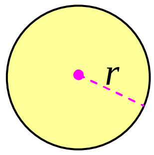
مثال: شکل مقابل از یک مربع و یک مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است. محیط آن را محاسبه کنید.



***

☑ مساحت و محیط دایره

مساحت و محیط هر دایره به شعاع r را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود.



مساحت $S=\pi r^{2}$

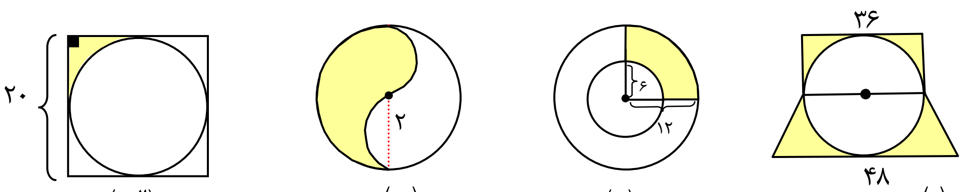
محیط $P=2\pi r$

این دو رابطه را اینجا بدون اثبات می‌پذیریم.

تمرین برای حل :

۱۹: مساحت و محیط دایره‌ای را حساب کنید که اندازه‌ی قطر آن ۱۰ سانتی‌متر باشد.

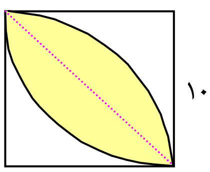
۲۰: با توجه به شکل‌های زیر در هر مورد مساحت قسمت رنگی را به دست آورید.(در مورد«الف» چهارضلعی مربع و در مورد « د» چهارضلعی ها مستطیل و ذوزنقه می باشند.)



۲۱ : مربع شکل مقابل را در نظر بگیرید.

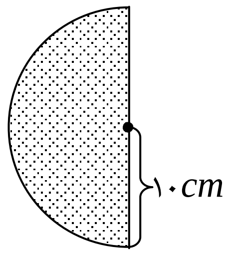
الف : مساحت گلبرگ را حساب کنید.

ب : ثابت کنید که مساحت گلبرگ ۵۷ درصد مساحت مربع است.



۲۲ : ضلع مربعی ۲۰ سانتی متر است. مساحت گلبرگ را بدست آورید.

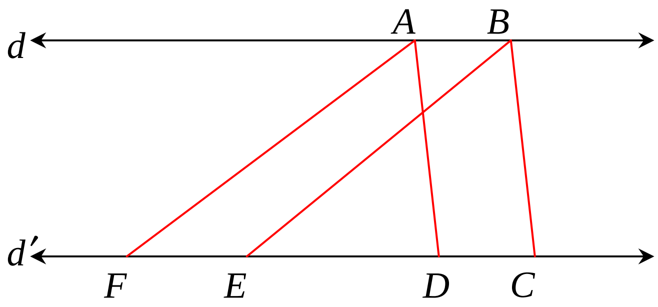
۲۳ : مساحت و محیط نیم دایره‌ی مقابل را حساب کنید.



***

حل چند تمرین :

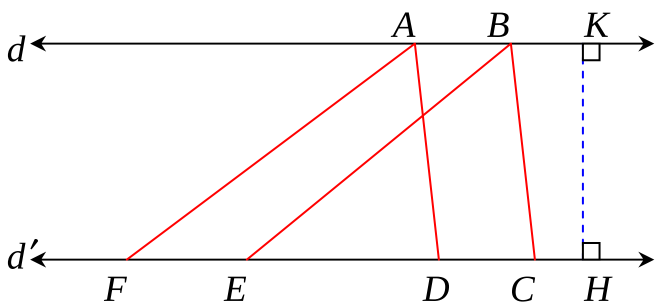
۲۴ : در شکل مقابل دو خط d و d' موازی اند و $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی الاضلاع اند. ثابت کنید که این دو چهارضلعی مساحت های برابر دارند.



حل : چون دو چهارضلعی $ABCD$ و $ABEF$ هر دو متوازی الاضلاع اند، پس می توان نوشت :

$$AB = DC \quad \text{و} \quad AB = EF$$

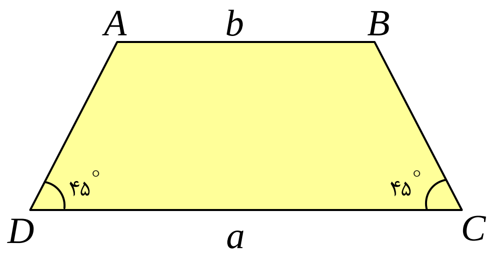
لذا $DC = EF$ ، یعنی قاعده های این دو متوازی الاضلاع هم اندازه اند.



از طرفی چون دو خط d و d' موازی اند، لذا این دو متوازی الاضلاع ارتفاع مشترک دارند. پس :

$$S(ABEF) = EF \times KH = AB \times KH = S(ABCD)$$

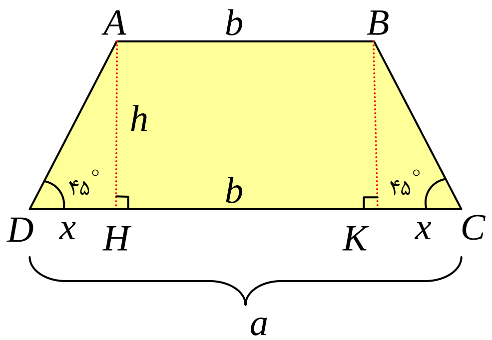
۲۵ : مساحت ذوزنقه‌ی شکل مقابل را حساب کنید.



حل : ارتفاع های AH و BK را رسم می کنیم.

دو مثلث قائم الزاویه‌ی ADH و BCK به حالت تساوی وتر و یک ضلع همنهشت هستند. لذا:

$$DH = CK = x$$



چهارضلعی $ABKH$ مستطیل است. لذا :

$$KH = b$$

پس می توان نوشت:

$$DC = DH + KH + KC \rightarrow a = x + b + x \rightarrow a = b + ۲x$$

$$\rightarrow x = \frac{۱}{۲}(a - b)$$

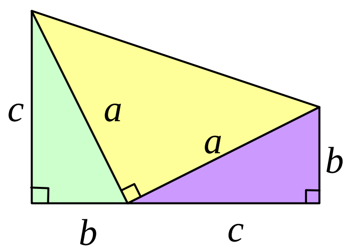
از طرفی در مثلث ADH داریم :

$$\tan(۴۵) = \frac{h}{x} \rightarrow ۱ = \frac{h}{x} \rightarrow h = x$$

در نهایت مساحت ذوزنقه را به شکل زیر به دست می آوریم:

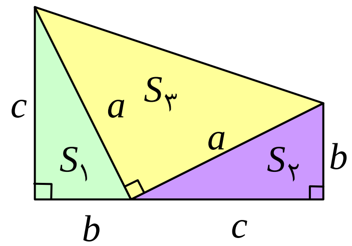
$$S = \frac{۱}{۲}(a + b)h \rightarrow \frac{۱}{۲}(a + b) \times \frac{۱}{۲}(a - b) = \frac{۱}{۴}(a^۲ - b^۲)$$

۲۶ : به کمک مساحت ذوزنقه‌ی شکل مقابل ، قضیه‌ی فیثاغورس را ثابت کنید.



حل : بدیهی است که مساحت ذوزنقه با مجموع مساحت های مثلث های تشکیل دهنده‌ی آن برابر است.

پس:



$$S=S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}a.a=bc+\frac{1}{2}a^2$$

همچنین واضح است که قاعده های ذوزنقه b و c و ارتفاع آن $b+c$ است. پس :

$$S=\frac{1}{2}(b+c)(b+c)$$

این دو نتیجه باید مساوی باشند. لذا :

$$\frac{1}{2}(b+c)(b+c)=bc+\frac{1}{2}a^2$$

$$\to\frac{1}{2}(b^2+2bc+c^2)=bc+\frac{1}{2}a^2$$

$$\to\frac{1}{2}b^2+bc+\frac{1}{2}c^2=bc+\frac{1}{2}a^2$$

$$\to\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}a^2\xrightarrow{\times 2}b^2+c^2=a^2$$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس سوّم : کاربردهای مساحت آن

در ادامه کاربردهایی از مفهوم مساحت را بیان می کنیم.

☑ مساحت مثلث متساوی الاضلاع

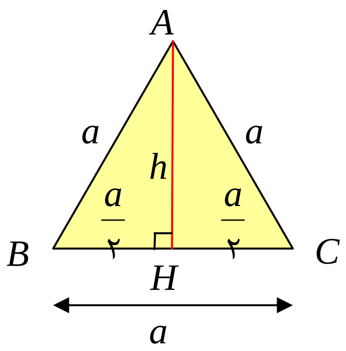
یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a ، را در نظر بگیرید. در این صورت

الف : ثابت کنید مساحت این مثلث برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است.

ب : ثابت کنید که اندازه‌ی ارتفاع مثلث برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

حل :

روش هندسی : می دانیم که در هر مثلث متساوی الاضلاع ، میانه و ارتفاع بر هم منطبقند، پس :



$$\Delta(ABH): h^{۲}+(\frac{a}{۲})^{۲}=a^{۲} \to h^{۲}=a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}$$

$$\to h^{۲}=\frac{۳a^{۲}}{۴} \to h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

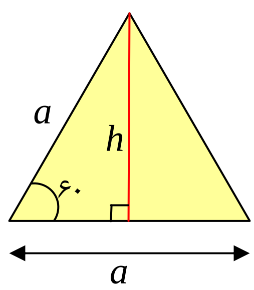
$$S(ABC)=\frac{۱}{۲}a.h=\frac{۱}{۲}a\times(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

روش مثلثاتی :

الف :

$$S=\frac{۱}{۲}(a)(a)\sin(۶۰)=\frac{۱}{۲}a^{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

ب :



$$S=\frac{۱}{۲}ah \to \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=\frac{۱}{۲}ah \to h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

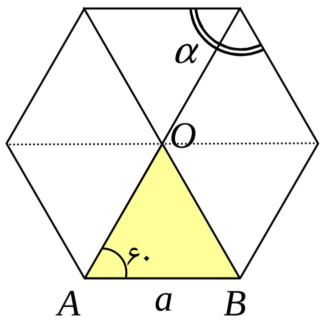
☑ مساحت شش ضلعی منتظم

مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a را می توان به شکل زیر محاسبه کرد.

ابتدا اندازه‌ی هر زاویه‌ی شش ضلعی منتظم را تعیین می کنیم.

$$\alpha=\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}=\frac{(۶-۲)\times ۱۸۰}{۶}=۱۲۰^\circ$$

از طرفی واضح است که بزرگترین قطر هر شش ضلعی منتظم محور تقارن است. لذا بزرگترین قطر، نیمساز زاویه های نظیر آن است. پس با توجه به شکل زیر مثلث OAB دو زاویه‌ی۶۰ درجه دارد، پس زاویه‌ی سوّم آن نیز۶۰ درجه می باشد. چون مثلث OAB سه زاویه‌ی مساوی دارد، در نتیجه متساوی الاضلاع است.

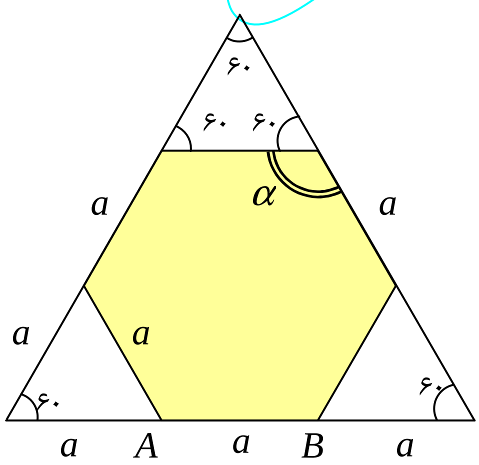


از این موضوع نتیجه می شود که هر شش ضلعی منتظم توسط قطرهای بزرگ آن به شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a تبدیل می شود. بنابراین مساحت آن شش برابر مساحت یک مثلث می باشد.

$$S=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

روش دوّم : ابتدا اندازه‌ی هر زاویه‌ی شش ضلعی منتظم را تعیین می کنیم.

$$\alpha=\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}=\frac{(۶-۲)\times ۱۸۰}{۶}=۱۲۰^\circ$$



حال اگر اضلاع شش ضلعی منتظم را مطابق شکل مقابل امتداد دهیم. بنابراینکه اندازه‌ی زاویه های هر مثلث کوچک و همچنین مثلث بزرگ تشکیل شده برابر۶۰ درجه می باشند. لذا هر یک از این مثلث ها متساوی الاضلاع می باشند. پس برای تعیین مساحت شش ضلعی منتظم، مجموع مساحت های سه مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را از مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $۳a$ کم می کنیم. بنابراین:

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2-3(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)=\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{6\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

***

تمرین برای حل :

۱ : طول ارتفاع و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را حساب کنید که اندازه‌ی ضلع آن ۱۰ سانتی متر باشد.

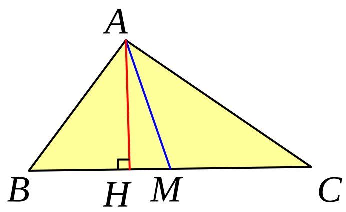
۲ : مساحت یک شش ضلعی منتظم را حساب کنید که طول ضلع آن ۱۰ سانتی متر باشد.

***

☑ ویژگی میانه و مساحت

میانه‌ی وارد بر هر ضلع مثلث ، ویژگی جالبی دارد. به ادامه‌ی مطلب توجه نمایید.

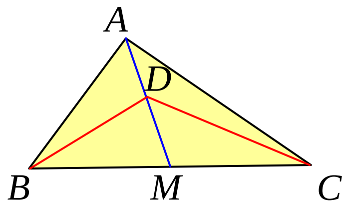
قضیه) میانه‌ی هر ضلع مثلث ، آن را به دو مثلث با مساحت های برابر تقسیم می کند.



اثبات : اگر AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC فرض شود. در این صورت داریم:

$$BM=CM\xrightarrow{\times\frac{1}{2}AH}\frac{1}{2}AH\times BM=\frac{1}{2}AH\times CM\to S(ABM)=S(AMC)$$

تمرین۳ : ثابت کنید که هر نقطه دلخواه روی میانه (به جز دو سر میانه) ، دو مثلث با مساحت برابر ایجاد می کند.



حل : می توان فرض کرد که DM میانه‌ی وارد بر ضلع BC از مثلث BDC است. پس با توجه به قضیه‌ی فوق می توان نوشت:

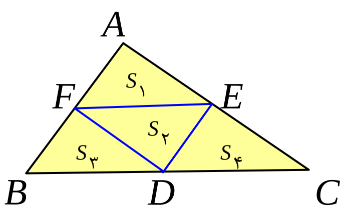
$$S(DBM)=S(DMC)$$

همچنین چون $S(ABM)=S(ACM)$ پس می توان نوشت :

$$S(ABM)-S(DBM)=S(ACM)-S(DMC)$$

$$\to S(ABD)=S(ACD)$$

تمرین۴ : اگر وسط های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم. چهار مثلث هـم نهـشت و در نتیجـه بـا مساحت های برابر پدید می آورد.



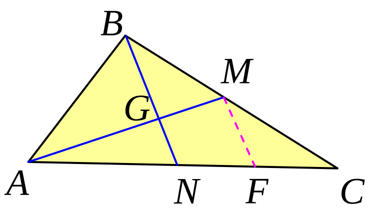
حل : به کمک عکس قضیه‌ی تالس ، می دانیم که اگر وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم. پاره خطی بوجود می آید که موازی و مساوی نصف ضلع سوّم مثلث است.

لذا تمام چهارضلعی های شکل مقابل متوازی الاضلاع بوده و هر یک توسط قطرش به دو مثلث هم نهشت تبدیل می شود. لذا :

$$S_1 = S_2 \, , \; S_2 = S_3 \; \; , \; S_2 = S_4 \rightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$

قضیه) سه میانه‌ی هر مثلث در نقطه ای درون آن مثلث همرس اند، به طوری که فاصلـه‌ی ایـن نقطـه تـا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه ی میانه‌ی نظیر این ضلع است و فاصله اش تا هـر رأس $\frac{2}{3}$ میانـه‌ی نظیـر آن رأس است.

اثبات : دو میانه‌ی AM و BN از مثلث ABC را رسم می کنیم. این دو میانه همدیگر را در نقطه ای مانند G درون مثلث قطع می کنند. از M وسط ضلع BC خطی موازی میانه‌ی BN رسم می کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. در مثلث BNC بنابر قضیه‌ی تالس ، چون M وسط BC است، پس F نیز وسط ضلع NC و چون N وسط AC می باشد. پس: $AF = 3NF$



همچنین در مثلث AMF و بنابر قضیه‌ی تالس نتیجه گرفته می شود: $AM = 3GM$

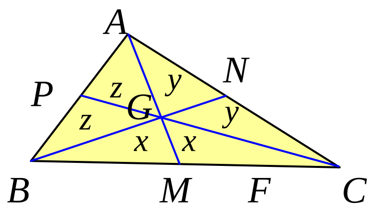
بنابراین $GM = \frac{1}{3}AM$ و $AG = \frac{2}{3}AM$ و G بین A و M است. در نتیجه تنها نقطه ای روی نیم خط AM است که $AG = \frac{2}{3}AM$.

مشابه آن ثابت می شود $BN\frac{۲}{۳}=BG$ ، پس برای هر دو میانه‌ی دلخواه نقطه‌ی G با این ویژگی به دست می آید. در نتیجه سه میانه همرس اند.

حال اگر از M به N وصل کنید و از قضیه‌ی تالس استفاده کنید، چون $AB=۲MN$ پس $AG=۲GM$ و $BG=۲GN$. نتایج مشابه آنچه که در بالا داشتیم ، حاصل می شود.

تمرین۵ : ثابت کنید، میانه های هر مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می کنند.

حل : میانه ها همرس اند، لذا شش مثلث از تقاطع آنها تشکیل می شود. با توجه به اینکه هر نقطه دلخواه روی میانه ، دو مثلث با مساحت برابر ایجاد می کند. لذا:



$$\Delta(BGC):S(BGM)=S(MGC)$$

$$\Delta(AGB):S(AGP)=S(BGP)$$

$$\Delta(AGC):S(AGN)=S(CGN)$$

اکنون مساحت های این مثلث ها را برابر x و y و z قرار می دهیم و برای هر میانه نتیجه می گیریم که :

برای میانه‌ی AM داریم :

$$S(ABM)=S(ACM)\rightarrow ۲z+x=۲y+x\rightarrow z=y$$

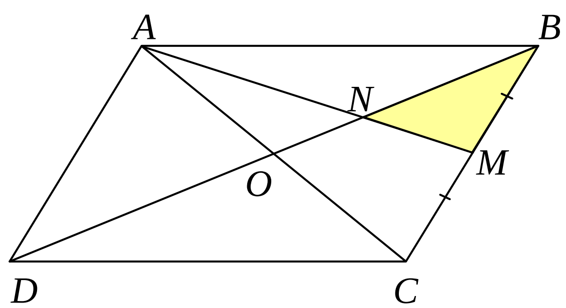
برای میانه‌ی BN داریم :

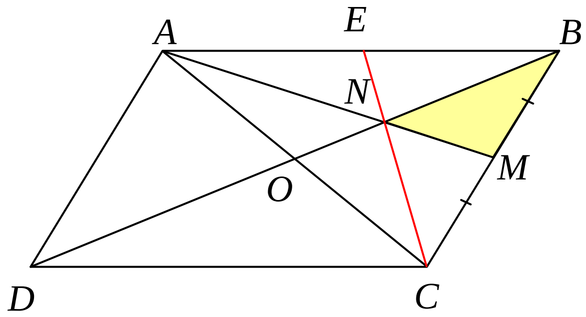
$$S(ABN)=S(BCN)\rightarrow ۲z+y=۲x+y\rightarrow z=x$$

پس $x=y=z$. یعنی مساحت هر شش مثلث یکسان است.

تمرین۶ : در متوازی الاضلاع $ABCD$ ، نقطه‌ی M وسط ضلع BC است و پاره خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید.

$$S(BMN)=\frac{۱}{۱۲}S(ABCD)$$





حل : چون M وسط BC و O(محل برخورد قطرها) وسط AC می باشد، پس BO و AM میانه می باشند و N محل برخورد آنها است. از طرفی چون میانه های هر مثلث همرسند، پس اگر CN را رسم کنیم و امتداد دهیم، میانه‌ی سوّم مثلث یعنی CE به دست می آید. میانه های هر مثلث، آن را به شش مثلث هم مساحت تبدیل می کند. پس :

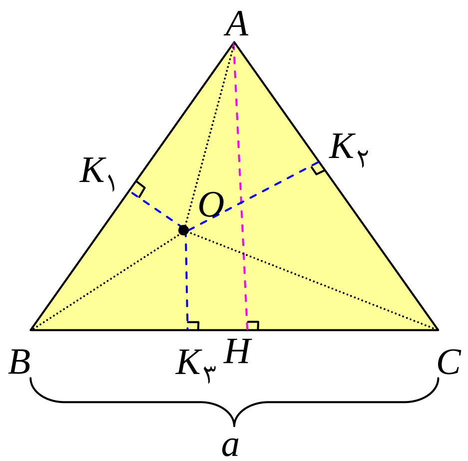
$$S(BMN)=\frac{۱}{۶}(ABC)$$

$$\xrightarrow{S(ABC)=\frac{۱}{۲}S(ABCD)} S(BMN)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}S(ABCD)=\frac{۱}{۱۲}S(ABCD)$$

***

☑ قضیه‌ی ویویانی

مجموع فاصله های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است و برابر ارتفاع مثلث است. (قضیه‌ی ویویانی)



اثبات : نقطه‌ی دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع ABC را به سه رأس مثلث وصل می کنیم. با توجه به شکل واضح است که :

$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}=\frac{۱}{۲}AB.OK_۱+\frac{۱}{۲}AC.OK_۲+\frac{۱}{۲}BC.OK_۳$$

$$\xrightarrow{AB=AC=BC=a} S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a.OK_۱+\frac{۱}{۲}a.OK_۲+\frac{۱}{۲}a.OK_۳$$

$$\rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}a(OK_۱+OK_۲+OK_۳)\ \ (۱)$$

از طرفی واضح است که :

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC.AH=\frac{۱}{۲}a.AH\ \ (۲)$$

و با مقایسه‌ی روابط ۱ و ۲ داریم :

$$\frac{۱}{۲}a(OK_۱+OK_۲+OK_۳)=\frac{۱}{۲}a.AH \rightarrow OK_۱+OK_۲+OK_۳=AH$$

$$\rightarrow OK_۱+OK_۲+OK_۳=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

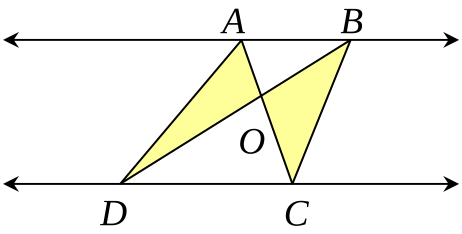
توجه : مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ و طول ارتفاع آن برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ می باشد.

تمرین۷ : اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع، فاصله های نقطه‌ی M درون مثلث از سه ضلع ، برابر ۲ و ۴ و ۶ باشند، اندازه‌ی ضلع و ارتفاع مثلث و مساحت مثلث را محاسبه کنید.

***

☑ خطوط موازی و مساحت

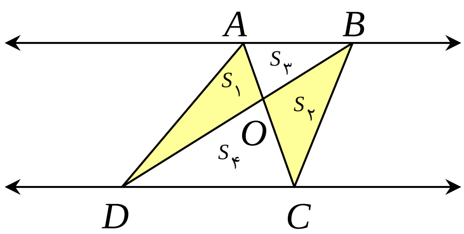
قضیه) فرض کنید که AB و CD موازی باشند. به طوری که دو خط AC و BD در نقطه ای مانند O متقاطع باشند، ثابت کنید: $S(OAD)=S(OBC)$



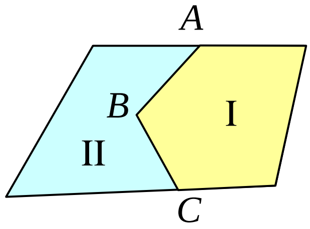
حل : می دانیم که اگر قاعده های دو مثلث منطبق بوده و ارتفاع های آنها یکسان باشند، آن دو مثلث مساحت برابر دارند. لذا :

$$S(ADC)=S(BDC)\rightarrow S_۱+S_۴=S_۲+S_۴$$

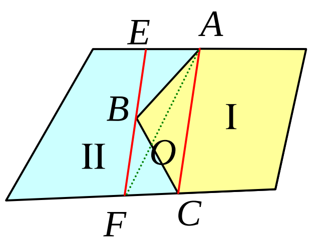
$$\rightarrow S_۱=S_۲$$



این ویژگی که در هر ذوزنقه نیز بر قرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.



تمرین۸ : در شکل زیر دو مزرعه‌ی I و II متعلق به دو کشاورز می باشند. برای سهولت استفاده از ماشین های کشاورزی این دو کشاورز می خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت های زمین های آنها تغییر نکند. چگونه شما می توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟



حل : از A به C متصل و سپس از نقطه‌ی B خطی رسم کنید که موازی AC بوده و دو مرز دیگر را در نقاط E و F قطع کند. حال اگر A به F متصل کنیم. طبق مسئله‌ی قبل واضح است که

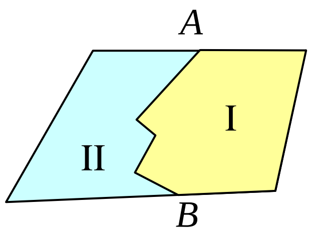
$$S(AOB) = S(FOC)$$

پس خط AF می تواند مرز جدید بوده و جواب مسئله است.

توجه : به همین دلیل خط EC نیز می تواند جواب مسئله باشد.

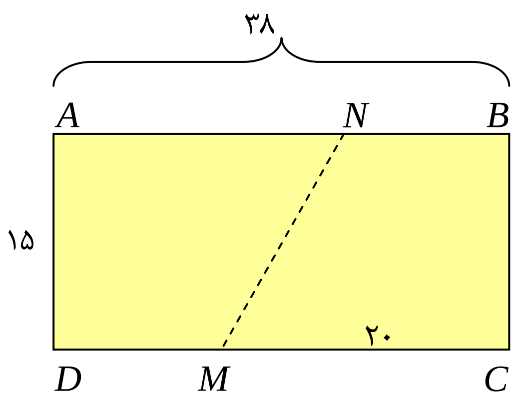
***

برای مطالعه :



بحث کلاسی : روش حل تمرین های مطرح شده را می توان برای شکل مقابل نیز تعمیم داد. در مورد حل مسئله‌ی زیر بحث کنید.

تمرین۹ : زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه‌ی M که $MC = ۲۰$ است، به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه‌ی با مساحت های مساوی بین آن دو تقسیم شود؟



کل مساحت زمین برابر $۳۸ \times ۱۵ = ۵۷۰$ متر مربع است. لذا برای هر شخص باید نصف آن یعنی ۲۸۵ متـر مربع برسد. پس مساحت چهارضلعی $NBCM$ برابر ۲۸۵ شود. این چهارضلعی ذوزنقه است. پس داریم:

$$\frac{۱}{۲}(NB+MC)\times BC=۲۸۵$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}(NB+۲۰)\times ۱۵=۲۸۵ \rightarrow NB+۲۰=۳۸ \rightarrow NB=۱۸$$

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

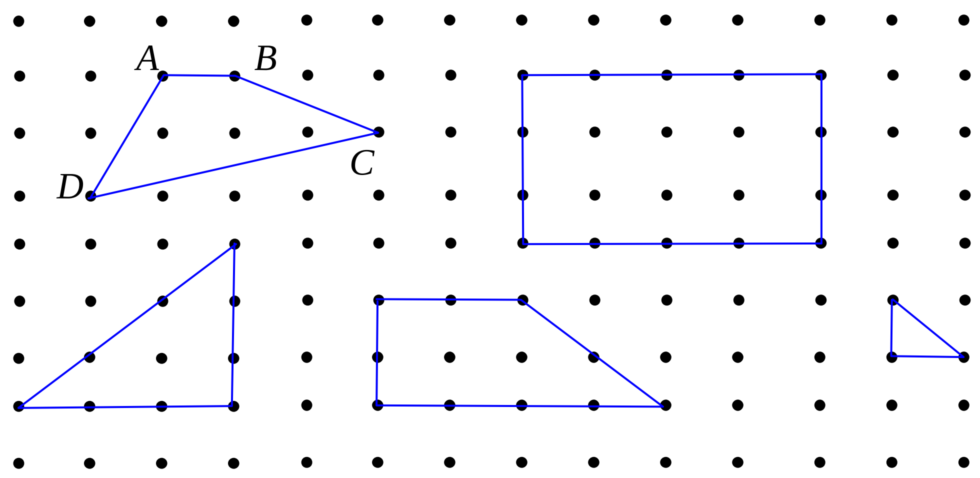
استان خوزستان

درس چهارم : مساحت چندضلعی شبکه ای

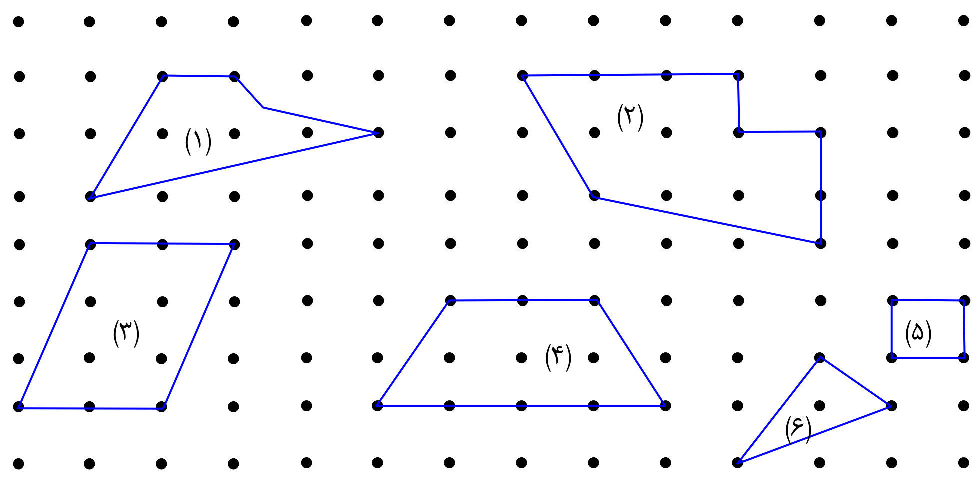
در آخر این فصل یک روش جالب برای محاسبه‌ی سطح یک شکل یا منحنی بسته معرفی می کنیم.

☑ نقاط شبکه ای و مساحت

مطابق شکل های زیر ، نقطه ها روی خط های افقی و عمودی واقع اند. به طوری که فاصله ی هر دو نقطه ی متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد باشد[1]. چنین نقاطی را نقاط شبکه ای و چندضلعی هایی مانند $ABCD$ را که تمام رأس های آنها روی نقاط شبکه ای واقع اند، چندضلعی های شبکه ای می نامند.



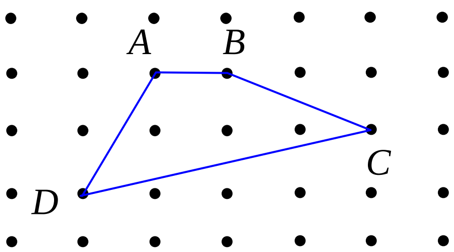
تمرین ۱ : با توجه به شکل زیر تعیین کنید، کدام چندضلعی شبکه ای است؟



[1] . به عبارتی دیگر مختصات تمام نقاط عدد صحیح باشند.

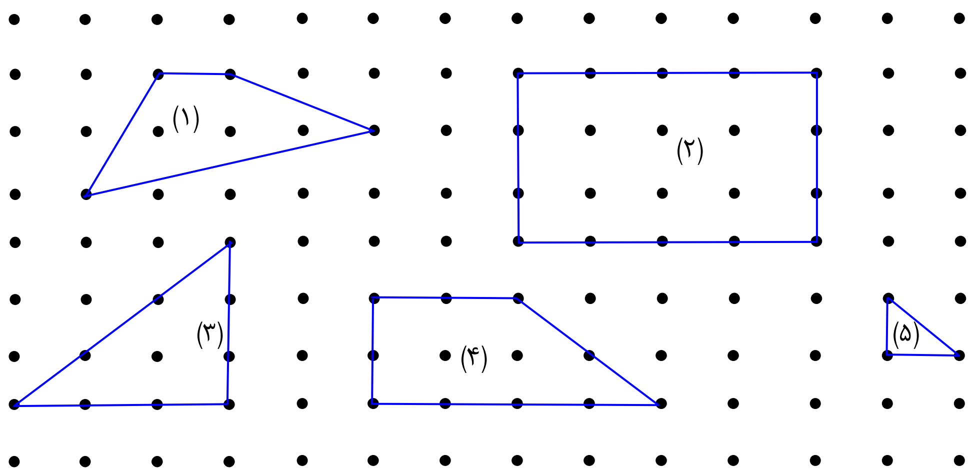
حل : مطابق تعریف تمام چندضلعی ها به جز شکل (۱) شبکه ای هستند. زیرا یک رأس شکل (۱) روی نقطه‌ی شبکه ای نیست.

نقاط شبکه ای روی رأس ها و ضلع های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه ای درون چندضلعی را نقاط درونی شبکه ای برای چند ضلعی شبکه ای می نامند. به طور مثال در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک چهارضلعی شبکه ای است و دارای ۴ نقطه‌ی مرزی و ۳ نقطه‌ی درونی شبکه ای است.



در چند ضلعی های شبکه ای ، تعداد نقاط مرزی شبکه ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه ای را با i نشان می دهند.

تمرین۲ : در هر مورد تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را تعیین کنید.



تمرین۳ : یک چندضلعی شبکه‌ای، حداقل چند نقطه‌ی مرزی و حداقل چند نقطه‌ی درونی می تواند داشته باشد؟

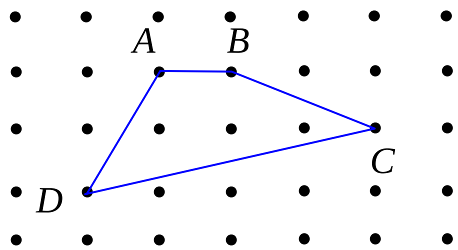
نتیجه : در هر چندضلعی شبکه ای تعداد نقاط مرزی عدد طبیعی و تعداد نقاط درونی یک عدد حسابی است.

یعنی:

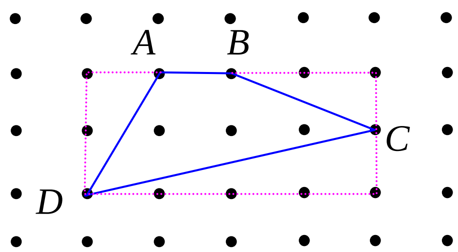
$$b\in N \quad \text{و} \quad i\in W$$

مساحت چندضلعی شبکه ای

با توجه به شکل زیر ، واضح است که با بکار بردن مساحت مثلث های قائم الزاویه و مستطیل می توان مساحت چهارضلعی شبکه ای را محاسبه کرد.



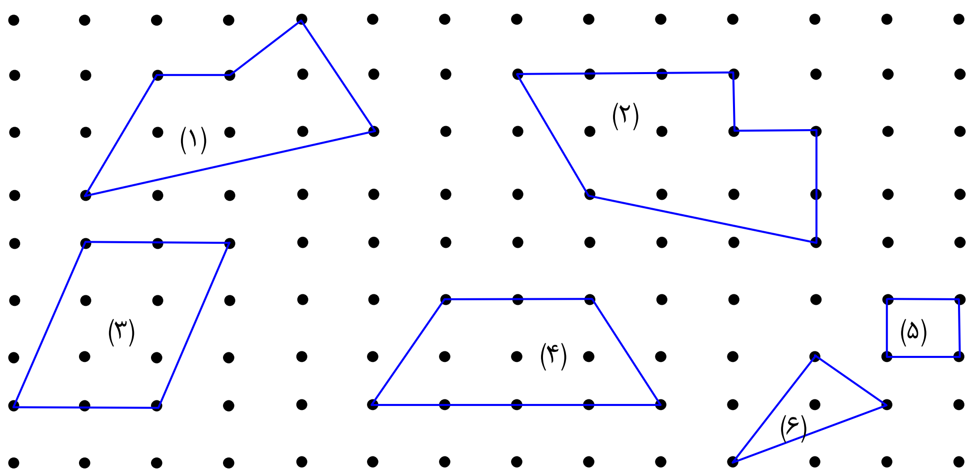
این روش محاسبه با امتداد اضلاع و تشکیل مثلث های قائم الزاویه انجام است.



اگر از مساحت مستطیل بدست آمده، مساحت سه مثلث قائم الزاویه‌ی کناری را کم کنیم، مساحت چهارضلعی $ABCD$ به دست می آید.

$$S=(۲\times۴)-(\frac{۱}{۲}\times۱\times۲)-(\frac{۱}{۲}\times۱\times۲)-(\frac{۱}{۲}\times۱\times۴)=۸-۱-۱-۲=۴$$

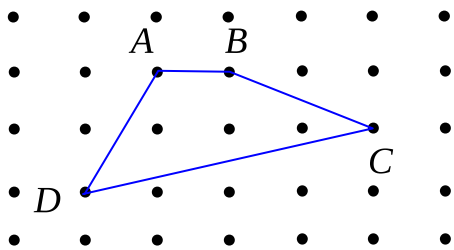
تمرین۴ : به این روش ، مساحت ، چندضلعی های شبکه ای زیر را محاسبه کنید.



جرج الکساندر پیک (۱۹۴۳ – ۱۸۵۹) فرمولی برای محاسبه‌ی مساحت چندضلعی های شبکه ای کشف کرد. طبق این فرمول کافی است تعداد نقاط درونی شبکه ای و تعداد نقاط مرزی شبکه ای را داشته باشیم، تا مساحت چندضلعی به دست آید.

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱$$

برای مثال مساحت چندضلعی شبکه ای زیر طبق این فرمول به صورت زیر است.

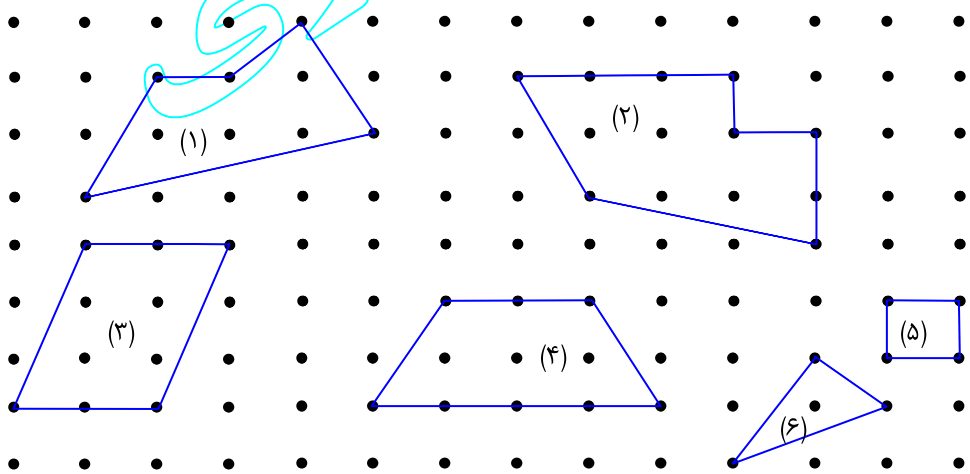


$b=۴$ و $i=۳$

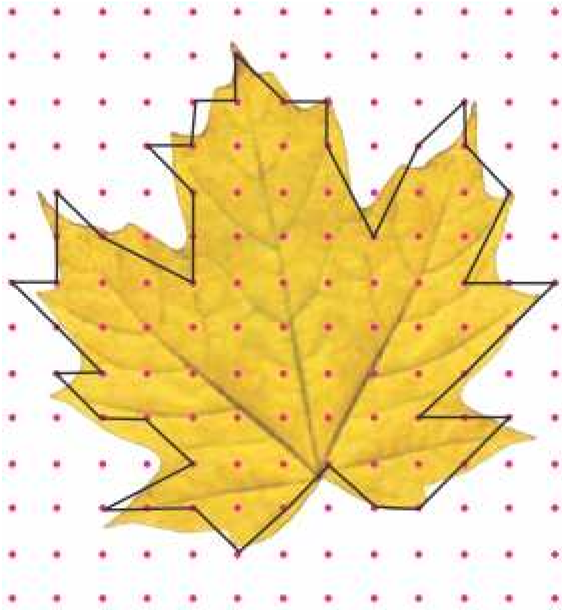
$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۴}{۲}+۳-۱=۴$$

این نتیجه را در تمرین های قبل نیز به کمک مثلث های قائم الزاویه و مستطیل به دست آوردیم.

تمرین۵ : به کمک فرمول پیک، مساحت چندضلعی های شبکه ای زیر را محاسبه کنید.



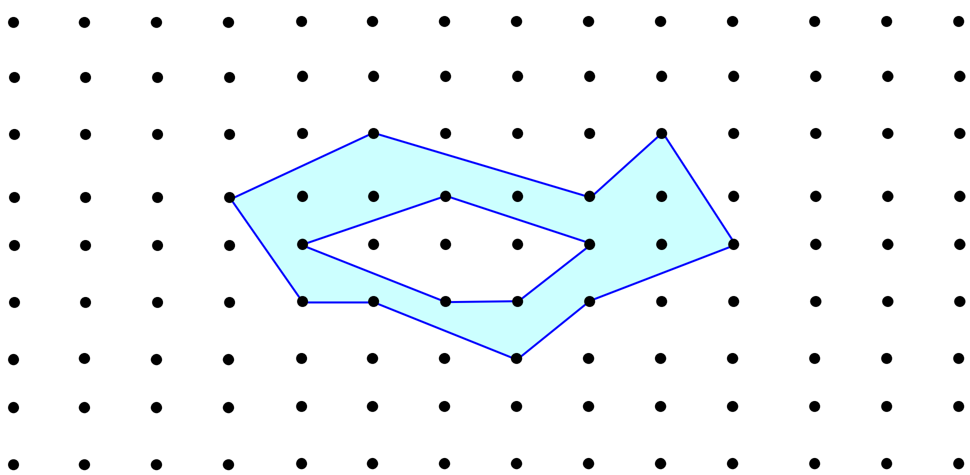
توجه : در اینجا فرمول پیک را به طور شهودی می پذیریم و به جهت نیاز به مقدمات زیاد، از اثبات استنتاجی آن خودداری می کنیم. اضافه می شود که می توان به کمک این فرمول مساحت شکل های نامنظم هندسی را نیز به طور تقریبی پیدا کرد.



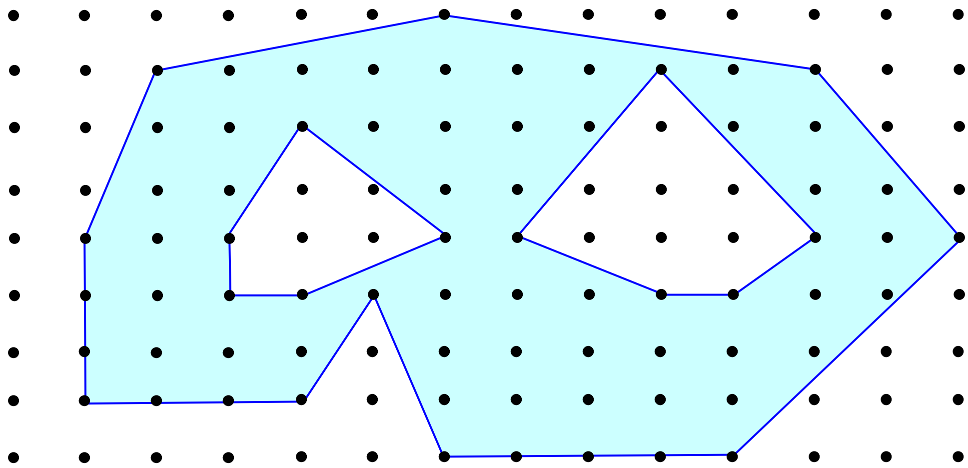
واضح است که با کوچک کردن واحدها (فاصله‌ی افقی و عمودی بین نقـاط شـبکه ای) مـی تـوان تقریـب بهتری از مساحت به دست آورد.

این فرمول در باستان شناسی و زیست شناسی و .... کاربردهای مختلفی دارد. برای مثال محاسبه‌ی مـساحت برگ درخت ، محاسبه‌ی مساحت اثر پای یک دایناسور و .... .

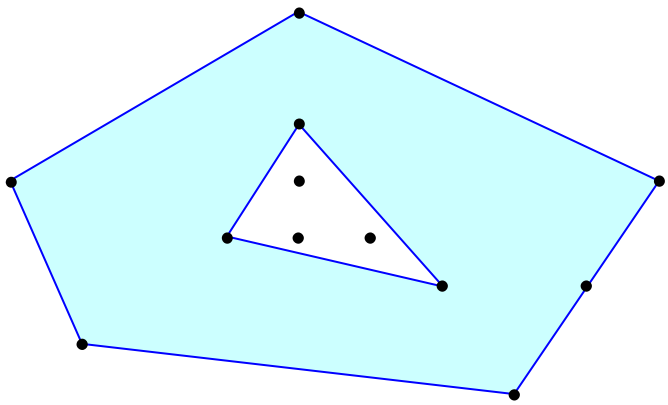
تمرین۶ : به کمک فرمول پیک ، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید.



تمرین۷ : به کمک فرمول پیک ، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید.



تمرین۸ : در شکل زیر ، مساحت قسمت رنگی ۳۶/۵ می باشد. تعداد نقاط درونی چندضلعی بیرونی را بیابید.



حل : واضح است که مساحت قسمت رنگی با تفاضل مساحت مساحت های چندضلعی درونی از چند ضلعی بیرون است. حال اگر $b_۱$ و $i_۱$ به ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی بیرونی و $b_۲$ و $i_۲$ به ترتیب تعداد نقاط مرزی و درونی چندضلعی درونی فرض کنیم، در این صورت می توان نوشت:

$$S = S_۱ - S_۲$$

$$\rightarrow S = (\frac{b_۱}{۲} + i_۱ - ۱) - (\frac{b_۲}{۲} + i_۲ - ۱) \rightarrow S = \frac{b_۱ - b_۲}{۲} + i_۱ - i_۲$$

طبق معلومات مسئله داریم:

$$۳۶/۵ = \frac{۶ - ۳}{۲} + i_۱ - ۳ \rightarrow i_۱ = ۳۸$$

تمرین۹ : در یک چندضلعی شبکه ای ، تعداد نقاط درونی سه برابر تعداد نقاط مرزی است. اگر مساحت این چندضلعی برابر ۱۳ باشد. تعداد نقاط درونی را بیابید.

حل : طبق مسئله داریم:

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱ \xrightarrow{i=۳b\ ,\ S=۱۳} ۱۳=\frac{b}{۲}+۳b-۱ \to ۱۴=\frac{۷b}{۲} \to b=۴$$

$$\to i=۳b=۳(۴)=۱۲$$

تمرین۱۰ : در یک لوزی شبکه ای تمام نقاط مرزی فقط روی رئوس آن واقع اند، اگر مساحت لوزی ۴ باشد، تعداد نقاط درونی را بیابید.

حل : واضح است که $b=۴$ و $S=۴$ لذا :

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱ \to ۴=\frac{۴}{۲}+i-۱ \to i=۳$$

تمرین۱۱ : یک مستطیل شبکه ای با ضلع های افقی و قائم که اندازه های ضلع های آن m و n واحد هستند، را در نظر بگیرید. به کمک فرمول پیک ثابت کنید که مساحت مستطیل برابر mn است.

حل : اگر اندازه ی طول مستطیل را m و عرض آن را n فرض کنیم. در این صورت روی طول مستطیل $m+۱$ نقطه و به همین صورت روی عرض مستطیل $n+۱$ نقطه داریم. امّا واضح است که دو نقطه روی عرض قبلاً در محاسبه‌ی نقاط روی طول محاسبه شده اند. لذا نقاط روی عرض برابر $n-۱$ می مانند. از اینجا نتیجه می شود که تعداد نقاط مرزی مستطیل برابر

$$b=۲(m+۱)+۲(n-۱)=۲(m+n)$$

است.

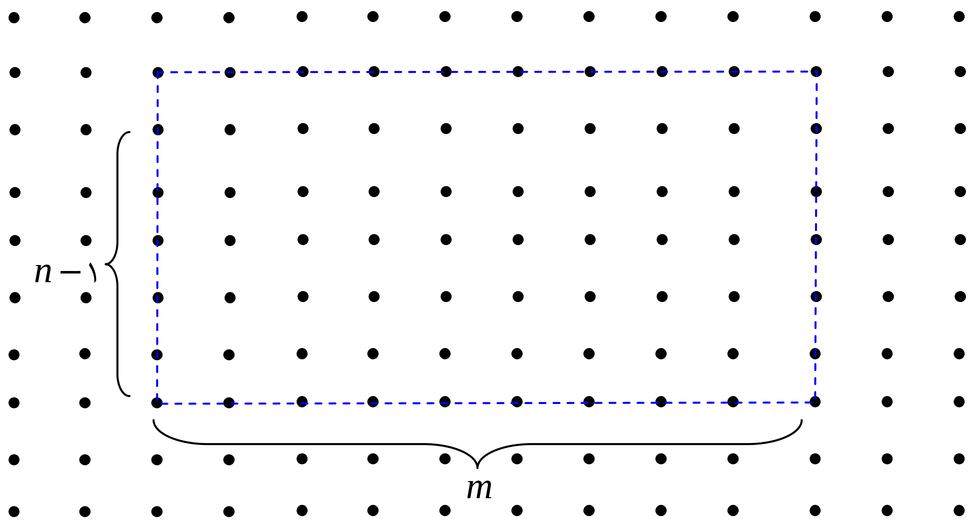
امّا برای محاسبه‌ی تعداد نقاط درونی ستون اوّل و آخر را کنار می گذاریم. چون $n-۱$ ستون داریم و روی هر ستون $m-۱$ نقطه است. پس تعداد نقاط درونی برابر

$$i=(m-۱)(n-۱)=mn-m-n+۱$$

است.

لذا مساحت مستطیل ، طبق فرمول پیک به شکل زیر است.

$$S=\frac{b}{۲}+i-۱=\frac{۲(m+n)}{۲}+(mn-m-n+۱)-۱=mn$$



تمرین۱۲ : مساحت یک چندضلعی شبکه ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت های مختلف که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل های چهارضلعی های نظیر آن را رسم کنید.

حل : طبق مسئله داریم:

$$S=۳\rightarrow \frac{b}{۲}+i-۱=۳\rightarrow b+۲i=۸$$

از طرفی از اینکه $b\ge ۳$ و $i\ge ۰$ نتیجه می شود.

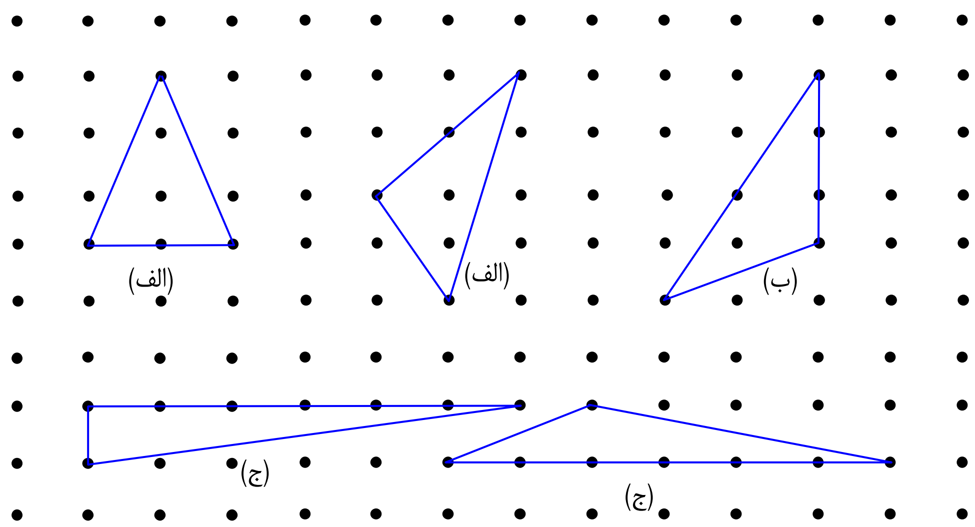
$$i\ge ۰\xrightarrow{\times ۲}۲i\ge ۰\rightarrow ۸-b\ge ۰\xrightarrow{b\ge ۳}۳\le b\le ۸$$

و چون $b=۲(۴-i)$ پس b باید زوج باشد. لذا b فقط می تواند سه مقدار ۸ و ۶ و ۴ را اختیار کند.

به کمک این اطلاعات می توان جدول زیر را تنظیم کرد.

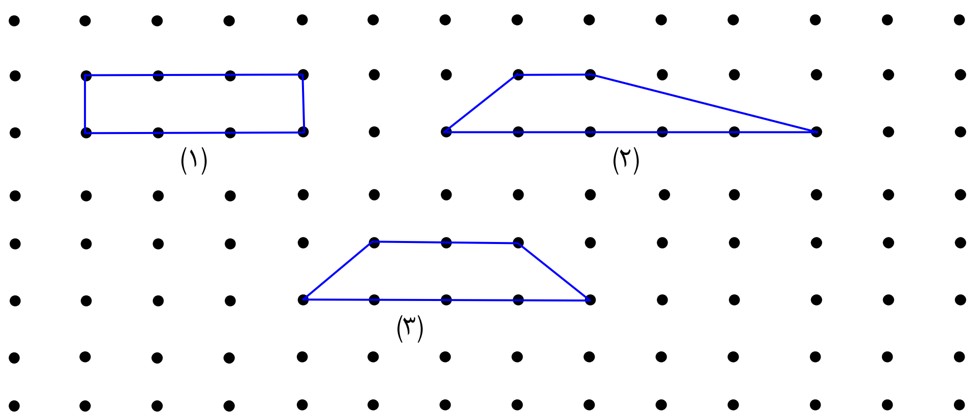
حالت	الف	ب	ج
b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰

اکنون به این تعداد مثلث شبکه ای را با توجه به حالت های فوق رسم می کنیم.



البته می توان رأی بالا را روی هر یک از نقاط بالایی ضلع قرار داد.

وقتی نقاط مرزی بیشترین مقدار را دارند که $i = ۰$ و $b = ۸$ باشد. سه چهارضلعی نظیر آن به صورت زیر است.

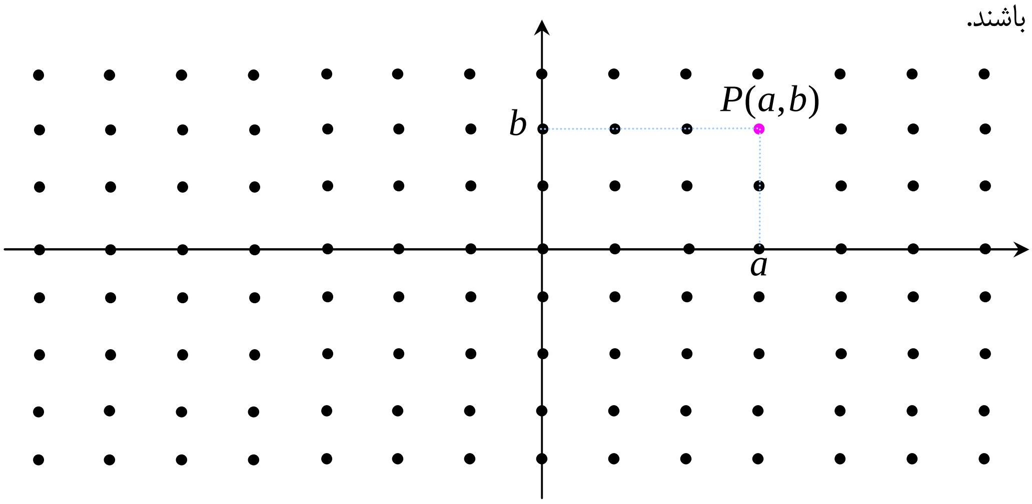


با تغییر دو نقطه‌ی بالایی می توانید، ذوزنقه‌های دیگری را نیز رسم کنید.

***

نقاط شبکه ای و دستگاه مختصات

مطابق تعریف نقاط شبکه ای ، می توان گفت که مختصات هر نقطه‌ی شبکه ای اعداد صحیح می باشند. به عبارت دیگر هر نقطه‌ی شبکه دارای مختصاتی به صورت (a,b) است، به طوری که b و a اعداد صحیح می باشند.



بدیهی است که اگر $A(a,b)$ و $B(c,d)$ دو نقطه‌ی شبکه‌ای باشند، در این صورت اندازه‌ی پاره خط AB به صورت زیر است:

$$AB=\sqrt{(a-c)^{2}+(b-d)^{2}}$$

لذا :

$$AB^{2}=(a-c)^{2}+(b-d)^{2}$$

نتیجه :

۱ : توان دوّم ، اندازه‌ی هر پاره خط که ابتدا و انتهای آن نقاط شبکه‌ای باشند، یک عدد گویا است.

۲ : طبق فرمول پیک، مساحت هر چند ضلعی شبکه‌ای یک عدد گویا و مثبت است. (زیرا تعداد نقاط مرزی و درونی یک عدد طبیعی است.)

تمرین۱۳ : ثابت کنید که مثلث متساوی الاضلاعی وجود ندارد که مختصات هر سه رأس آن عدد صحیح باشند.

حل : فرض کنیم که مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع m وجود دارد، طوری مختصات تمام رئوس آن عدد صحیح باشند. لذا مساحت آن طبق فرمول پیک یک عدد گویا است. از طرفی می دانیم که مساحت هر

مثلث متساوی الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}m^۲$ است و این یک عدد گنگ می باشد. چون مساحت مثلث نمی تواند هم گنگ و هم گویا باشد، پس چنین مثلثی وجود ندارد.

***

تهیه کننده : جابرعامری

عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان