

درس اول: معرفی و ساده کردن عبارات‌های گویا

مسئله

طول مستطیلی ۴ سانتیمتر از عرض آن بیشتر است. اگر نسبت عرض به طول این مستطیل $\frac{2}{3}$ باشد، طول و عرض آن را به دست آورید.

اگر x را عرض مستطیل در نظر بگیریم، طول آن $x+4$ است و نسبت عرض به طول را می‌توان با $\frac{x}{x+4}$ نمایش داد؛ بنابراین:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8 \quad \text{عرض} \quad \text{طول} = 12$$

عبارت $\frac{x}{x+4}$ را، که نسبت دو چندجمله‌ای است، عبارت گویا می‌نامیم.

به‌طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند.

عبارت‌های گویا در ریاضیات، علوم، پزشکی، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ به‌طور مثال سرعت متوسط اتومبیلی که مسیری را با سرعت v_1 طی کرده و سپس از همان مسیر با سرعت v_2 بازگشته است از رابطه $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ به دست می‌آید که عبارت گویای جبری است. برخی از مثال‌های دیگر از این قرار است:

| | | | | |
|---------------------------|--------------------------------|---|------------------------|---|
| $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ | میانگین حسابی دو عدد a و b | } | $\frac{v^2}{2k} = 222$ | محاسبه جرم یک جسم با سرعت v و انرژی جنبشی k |
|---------------------------|--------------------------------|---|------------------------|---|

با توجه به تعریف بالا عبارات‌های زیر گویا هستند:

$$\frac{2x-5}{5x^2-2x^2+1} \quad \text{و} \quad \frac{x+5}{x-1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{4} \quad \text{و} \quad \frac{2}{5} \quad \text{و} \quad \frac{x-3}{4} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x^2-\sqrt{3}x+1}{9xy}$$

$$\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad \frac{10}{x+2} \quad \text{و} \quad \frac{3x+\sqrt{7}}{x^2} \quad \text{و} \quad \frac{xy^2}{(x-y)^2} \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{1} \quad \text{و} \quad \frac{-a}{b} \quad \text{و} \quad x^2+2x-7$$

اما عبارات‌های زیر گویا نیستند. (چرا؟)

$$\sqrt{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{x}}{x+y} \quad \text{و} \quad |x-y| \quad \text{و} \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

چون چندجمله‌ای نیستند

کار در کلاس

کدام یک از عبارات های زیر گویا است؟

$$\frac{\sqrt{v}}{x-1} \text{ و } \frac{x+6}{3} \text{ و } \frac{ah}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3+x}}{5} \text{ و } \frac{\sqrt{2x}}{25} \text{ و } \frac{|x|+|y|}{x}$$

$$\frac{x\sqrt{y+1}}{x^2} \text{ و } \frac{x-5}{\sqrt{3+1}} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ و } \frac{mn+n^2}{5-n} \text{ و } 14 \text{ و } \frac{3-a}{2+x}$$

فعالیت

مقدار عددی عبارت $\frac{x+5}{x-3}$ را به ازای عددهای داده شده در جدول زیر به دست آورید:

| x | -2 | 7 | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | -5 |
|-------------------|------------------------------------|--------------------------------------|---|----------------------------------|---|--|
| $\frac{x+5}{x-3}$ | $\frac{-2+5}{-2-3} = \frac{3}{-5}$ | $\frac{7+5}{7-3} = \frac{12}{4} = 3$ | $\frac{\frac{1}{2}+5}{\frac{1}{2}-3} = \frac{\frac{11}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{11}{5}$ | $\frac{0+5}{0-3} = -\frac{5}{3}$ | $\frac{-1+5}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1$ | $\frac{-5+5}{-5-3} = \frac{0}{-8} = 0$ |

به ازای $x=3$ مخرج عبارت گویای $\frac{x+5}{x-3}$ مساوی صفر می شود و همان گونه که از قبل می دانید $\frac{0}{8} = 0$ به عنوان عدد تعریف نمی شود.

برای تعیین همه مقادیری که به ازای آنها یک عبارت گویا تعریف می شود، باید مقادیری از متغیر را حذف کنیم که به ازای آنها مخرج کسر صفر می شود؛ به عبارت دیگر این مقادیر را نمی توان به جای متغیر در عبارت جبری قرار داد و حاصل را محاسبه کرد.

مثال: عبارت گویای $\frac{7x^2+1}{(x-1)(x+2)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟

حل: چه مقادیری مخرج کسر را صفر می کند؟

برای یافتن این عددها، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم؛ یعنی:

$$(x-1)(x+2)=0$$

از طرفی وقتی حاصل ضرب چند عبارت برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است؛ لذا:

$$\begin{cases} (x-1)=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ (x+2)=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

بنابراین عبارت گویای فوق به ازای $x=1$ و $x=-2$ تعریف نشده است.

کار در کلاس

هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده است؟

الف) $\frac{8x+5}{2}$ ب) $\frac{y+x}{x}$ ج) $\frac{2b+1}{2b-1}$ $2b-1=0 \Rightarrow b=\frac{1}{2}$

د) $\frac{3x}{x^2+4}$ ه) $\frac{x}{x^2-1}$ و) $\frac{a+5}{a^2-5a+6}$ $a^2-5a+6=0$
 $(a-2)(a-3)=0$
 $a=2$ یا $a=3$

ساده کردن یک عبارت گویا

کسر $\frac{36}{48}$ با کسرهای $\frac{9}{12}$ ، $\frac{6}{8}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{18}{24}$ مساوی است. بین این کسرها $\frac{3}{4}$ کسری است که

دیگر قابل ساده شدن نیست؛ در واقع:

$$\frac{36}{48} = \frac{3 \times 12}{4 \times 12} = \frac{3}{4}$$

در ساده کردن هر عدد گویا می‌توان صورت و مخرج را به عددی غیر صفر تقسیم کرد؛ یعنی

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

به همین ترتیب برای عبارت گویای $\frac{AC}{BC}$ داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0 \text{ و } C \neq 0 \text{ و چند جمله‌ای هستند})$$

فعالیت

توضیح دهید که هر یک از عبارت‌های گویای زیر چگونه ساده شده است؟ هر جا لازم است حل را کامل کنید (چگونگی استفاده از اتحادها و تجزیه را در هر مورد توضیح دهید).

الف) $\frac{18y^3}{60y^5} = \frac{3}{10y^2}$

ب) $\frac{4x^2y^3}{10y^4x^2y^3} = \frac{2}{5y}$

ب) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+3} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x+3}{x+1}$

۱۱۶

از ب. م. م. صورت و مخرج ساده شده

از تجزیه صورت و مخرج استفاده شده
 سپس عبارت مشترک با هم ساده شده است

توانی
دستیابی

$$ج) \frac{y^2 - 9}{3y + 9} = \frac{(y+3)(y-3)}{3(y+3)} = \frac{y-3}{3}$$

$$د) \frac{1ab^2}{2 \cdot a^2b^2} = \frac{2b^2 \times 1 \times ab^2}{5a \times 4ab^2} = \frac{2b^2}{5a} \quad ه) \frac{b-5}{5-b} = \frac{b-5}{-(b-5)} = -1$$

فضا کاغذ

کار در کلاس

۱- عبارات های گویای زیر را ساده کنید:

$$\frac{(m-4)(m+4)}{-(m-4)} = -(m+4) \quad الف) \frac{m^2 - 16}{4-m}$$

$$ب) \frac{6m+18}{7m+21} = \frac{6(m+3)}{7(m+3)} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{(a+2)(a-7)}{(a+2)(a-1)} = \frac{a-7}{a-1} \quad ج) \frac{a^2 - 5a - 14}{a^2 + a - 2}$$

$$د) \frac{x^2 - y^2}{y-x} = \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{-(x-y)} = \frac{(x-y)(x+y)(x^2 + y^2)}{-(x-y)}$$

۲- عبارات $\frac{a+ax}{a}$ به دو شکل ساده شده: کدام درست و کدام نادرست است؟

$$الف) \frac{a+ax}{x} = a+x$$

$$ب) \frac{a+ax}{a} = \frac{a(1+x)}{a} = 1+x$$

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

$$3ab^2 = 0 \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \quad الف) \frac{5x}{3ab^2}$$

$$y(2y-2) = 0$$

$$ب) \frac{2y}{y(2y-6)} \begin{cases} y=0 \\ 2y-6=0 \\ y=3 \end{cases}$$

$$ج) \frac{2P}{P^2 - P - 12}$$

$$P^2 - P - 12 = 0$$

$$(P-4)(P+3) = 0$$

$$P=4 \quad P=-3$$

$$د) \frac{2x+5}{x}$$

$$ه) \frac{x^2-1}{x+5}$$

$$و) \frac{a+3}{2a+1}$$

$$2a+1 = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$x=5$$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید:

$$\frac{-(n-3)}{(n-2)(n-2)} = \frac{-1}{n-2} \quad الف) \frac{3-x}{x^2-5x+6}$$

$$ب) \frac{4x^2+8x}{12x+24}$$

$$ج) \frac{24x^2}{12x^2-6x}$$

$$د) \frac{y^2-2y^2-3y}{y^2+y}$$

$$ه) \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$و) \frac{16x^2-9y^2}{8x-6y}$$

$$ب) \frac{4x(x+2)}{12(x+2)} = \frac{x}{3}$$

$$ج) \frac{24x^2}{4x(2x-1)} = \frac{6x}{2x-1}$$

$$د) \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{y^2-2y-3}{y+1}$$

$$ه) \frac{(1-t^2)(1+t^2)}{(1+t^2)}$$

$$= 1-t^2$$

$$و) \frac{(4x-3y)(4x+3y)}{2(4x-3y)} = \frac{4x+3y}{2}$$

$$= \frac{(y+1)(y-3)}{y+1}$$

$$= y-3$$

$$ز) \frac{6a^2b^2}{2ab^4} = \frac{3a}{b^2} \quad ح) \frac{-2a-8}{a^2+2a-8} = \frac{-2(a+4)}{(a+4)(a-2)} = \frac{-2}{a-2}$$

۳- عبارتهایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

$$الف) \frac{2y+3}{2y-3}$$

$$ب) \frac{2y-3}{3-2y} = \frac{-(3-2y)}{3-2y} = -1$$

$$ج) \frac{2y+3}{3+2y} = \frac{3+2y}{3+2y} = 1$$

$$د) \frac{2y+3}{-2y-3} = \frac{2y+3}{-(2y+3)} = -1$$

سؤال خرد خوب - هر یک از عبارتهای داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

$$1 \rightarrow 9$$

$$2 \rightarrow 7$$

$$3 \rightarrow 10$$

$$4 \rightarrow 6$$

$$5 \rightarrow 8$$

| | | | | |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| ۱) $\frac{a-2}{a+5}$ | ۲) $\frac{a+2}{a-5}$ | ۳) $\frac{a-2}{a-5}$ | ۴) $\frac{a+2}{a+5}$ | ۵) $\frac{2-a}{a+5}$ |
| ۶) $\frac{-a-2}{-a-5}$ | ۷) $\frac{-a-2}{5-a}$ | ۸) $\frac{a-2}{-a-5}$ | ۹) $\frac{2-a}{-a-5}$ | ۱۰) $\frac{-a+2}{-a+5}$ |

۵- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

$$ب) \frac{3x}{x-3} = \frac{\boxed{}}{x^2-x-6} = \frac{3n(x+2)}{(n-2)(n+2)}$$

$$الف) \frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{(1-z)(z^2+1)}}{z^2+z}$$

$$ج) \frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5} (\boxed{3y+2})$$

$$د) \frac{(x-5) \boxed{(n-2)(n+1)}}{(x-2)(x-5)} = x+1$$

۶- از عبارتهای زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

$$الف) \frac{z}{t}(x+y)$$

$$ب) \frac{zx+y}{t}$$

$$ج) \frac{1}{t} \times z(x+y) \checkmark$$

$$د) z \times \frac{x+y}{t}$$

$$ه) \frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$$

$$و) \frac{zx}{t} + y$$