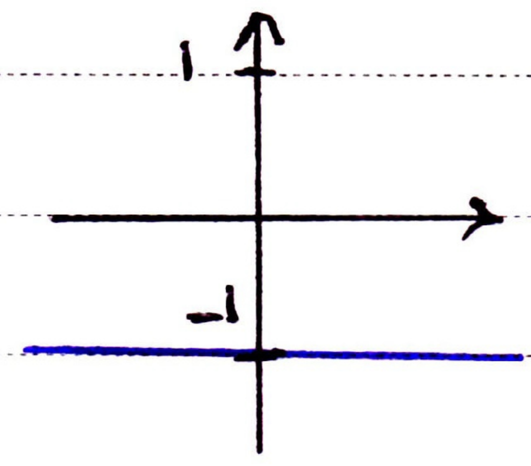
تابع های چند ضابطه ای :

1: تابع ثابت (درجه صفر) : $y =$ عدد

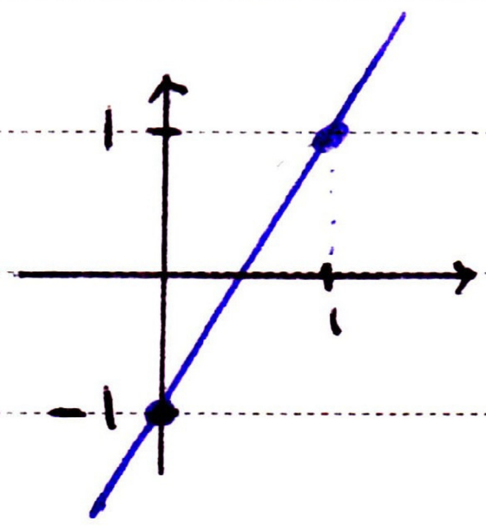
مثال: $y = -1$



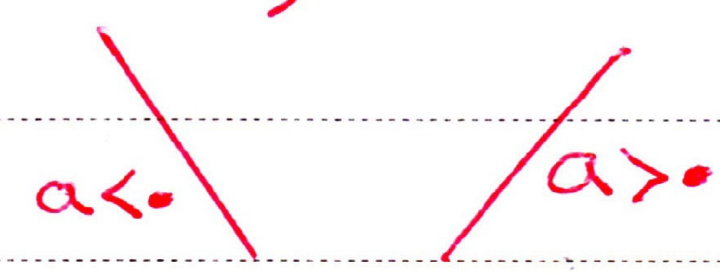
2: تابع خطی (درجه یک) : $y = \overset{\text{شیب}}{a}x + \overset{\text{عرض از مبدأ}}{b}$

مثال: $y = 2x - 1$

x	0	1
y	-1	1



تذکر



3. تابع سهمی (درجه دوم) : $y = ax^2 + bx + c$

$-\frac{b}{2a} = ?$

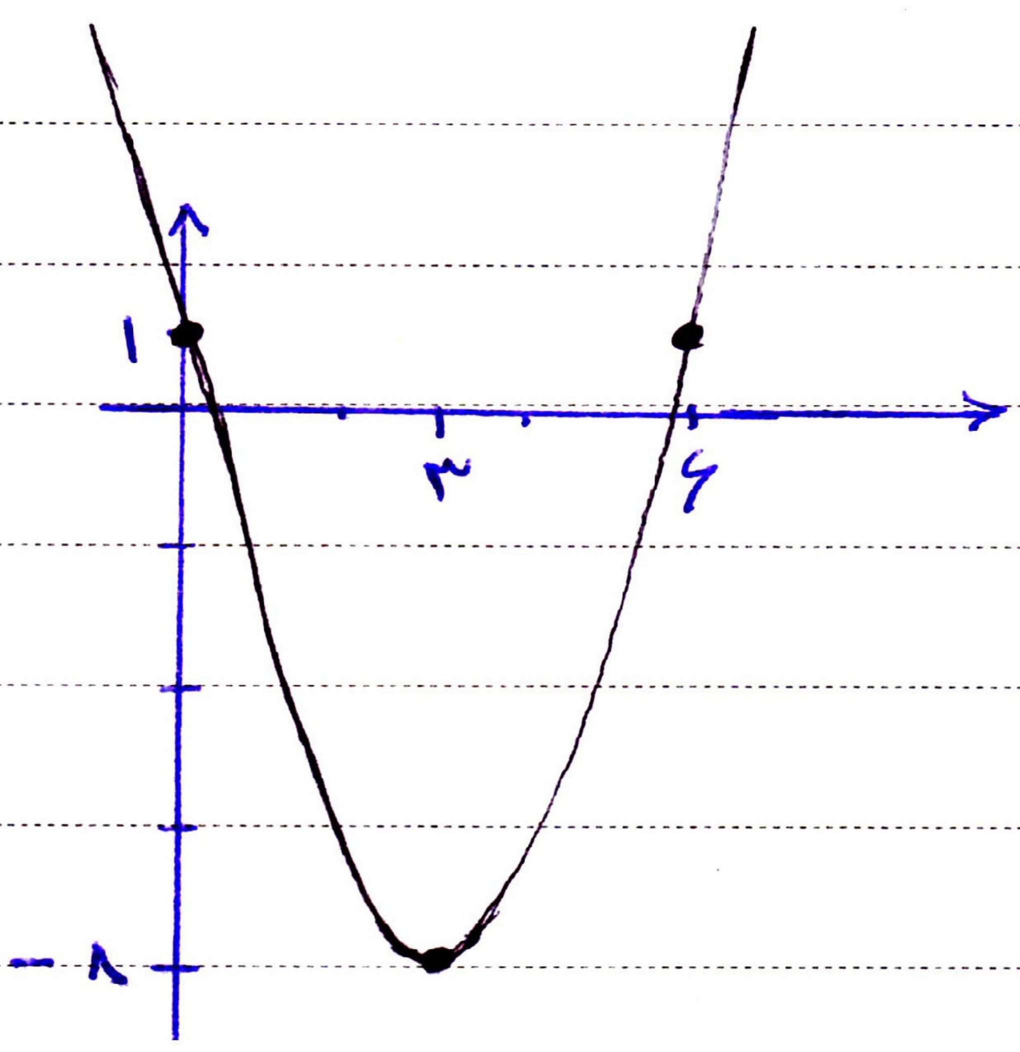
x	کمتر	$?$	بیشتر
y	$?$	$?$	$?$

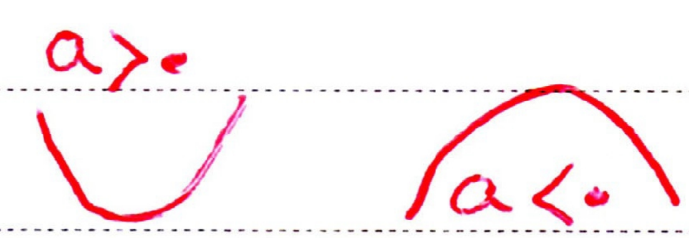
مثال: $y = x^2 - 6x + 1$

$\frac{-b}{2a} = \frac{6}{2\times 1} = 3$

x	0	3	6
y	1	-8	1

تذکر



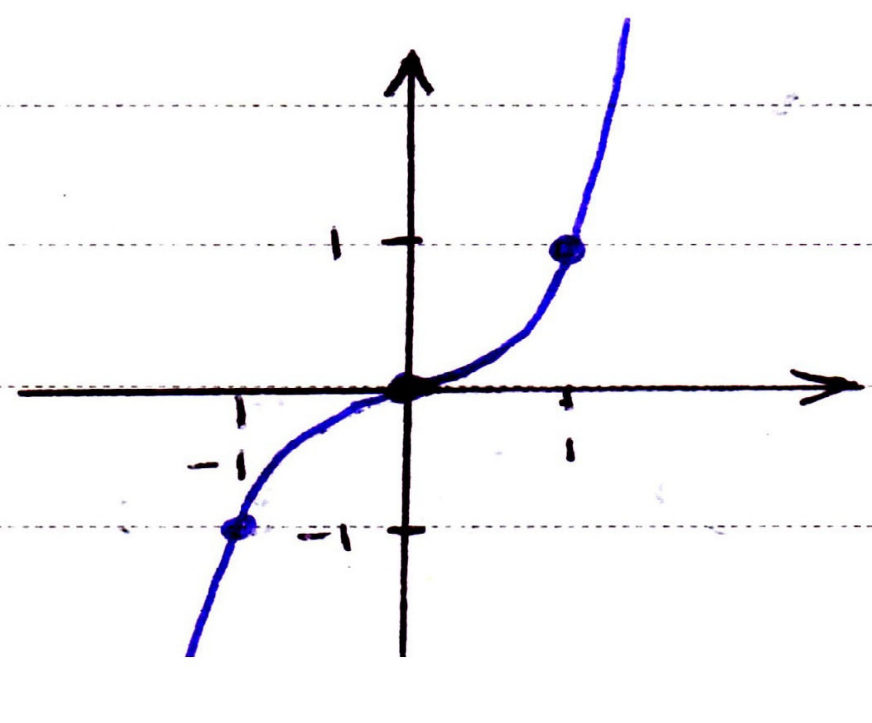


4. تابع درجه سوم :

$D_f = R_f = \mathbb{R}$

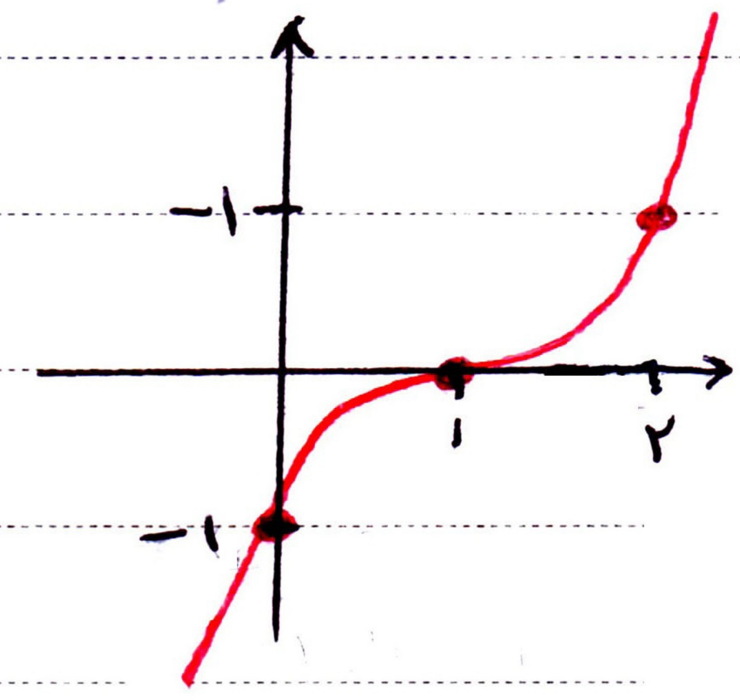
معروف‌ترین و ساده‌ترین نوع این تابع $y = x^3$ است.

x	-1	0	1
y	-1	0	1



مثال: $y=(x-1)^3$

عمل درونی (کیلزی) روی x ها



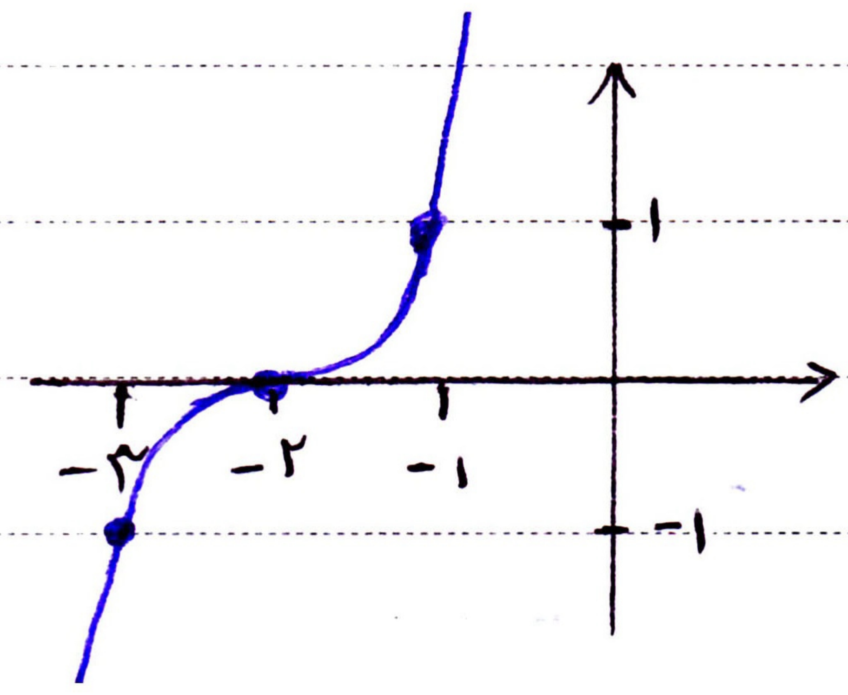
x^3

x	-1	0	1
y	-1	0	1

$\xrightarrow{+1}$

x	0	1	2
y	-1	0	1

مثال: $y=(x+2)^3$



x^3

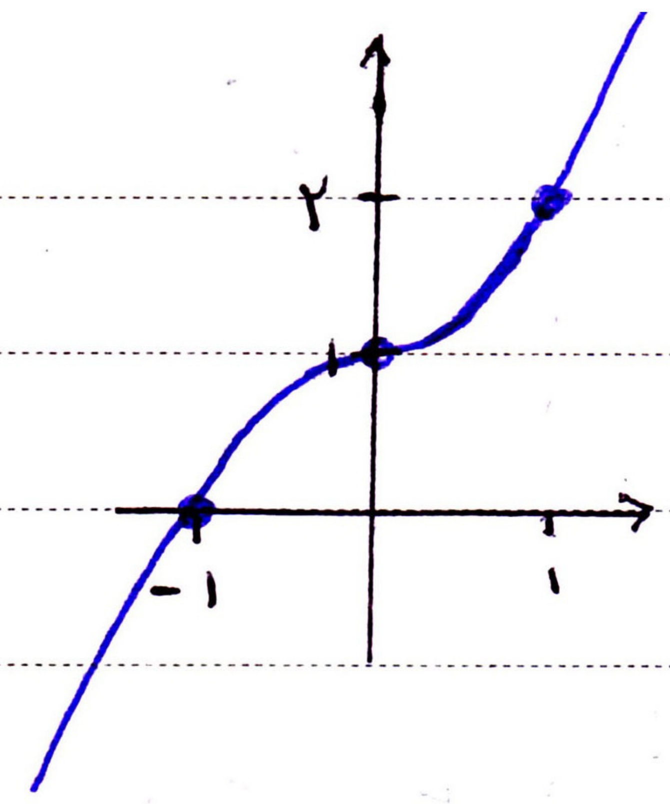
x	-1	0	1
y	-1	0	1

$\xrightarrow{-2}$

x	-3	-2	-1
y	-1	0	1

مثال: $y=x^3+1$

عمل بیرونی (طاعتی) روی y ها



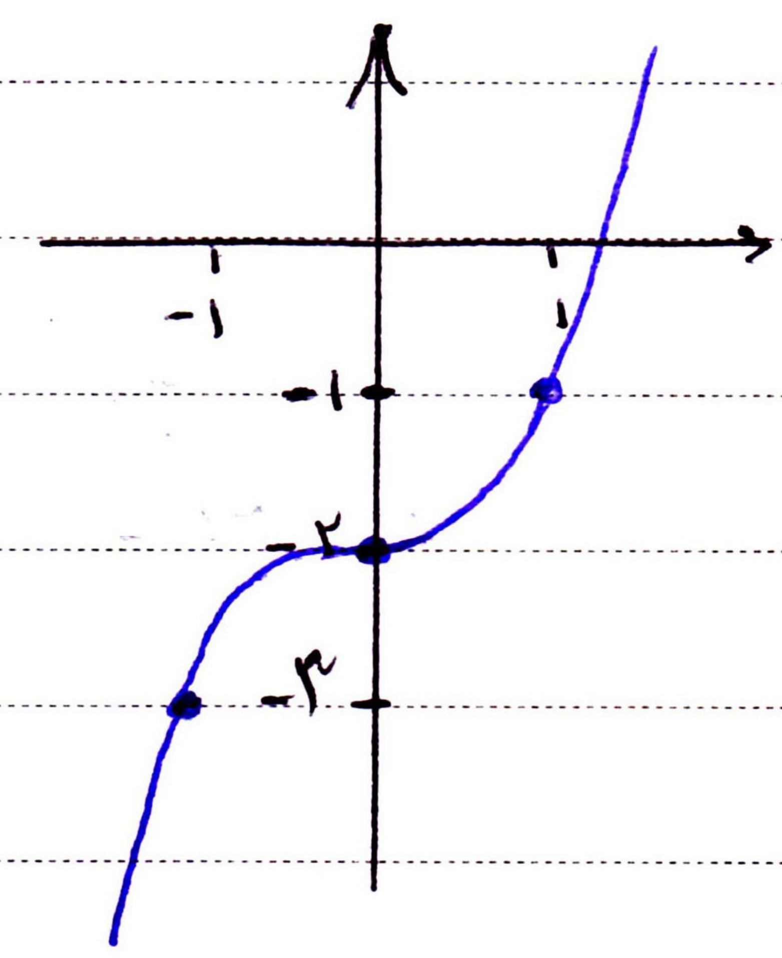
x^3

x	-1	0	1
y	-1	0	1

$\xrightarrow[+1]{}$

x	-1	0	1
y	0	1	2

مثال: $y=x^3-2$



x^3

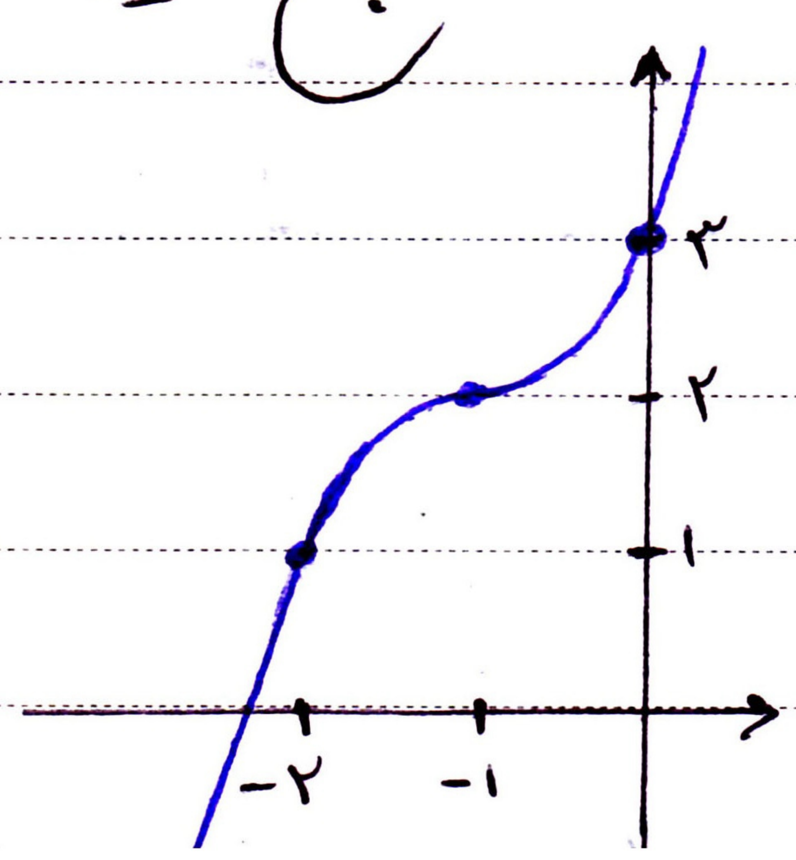
x	-1	0	1
y	-1	0	1

$\xrightarrow[-2]{}$

x	-1	0	1
y	-3	-2	-1

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

الف) $y=(x+1)^3+2$



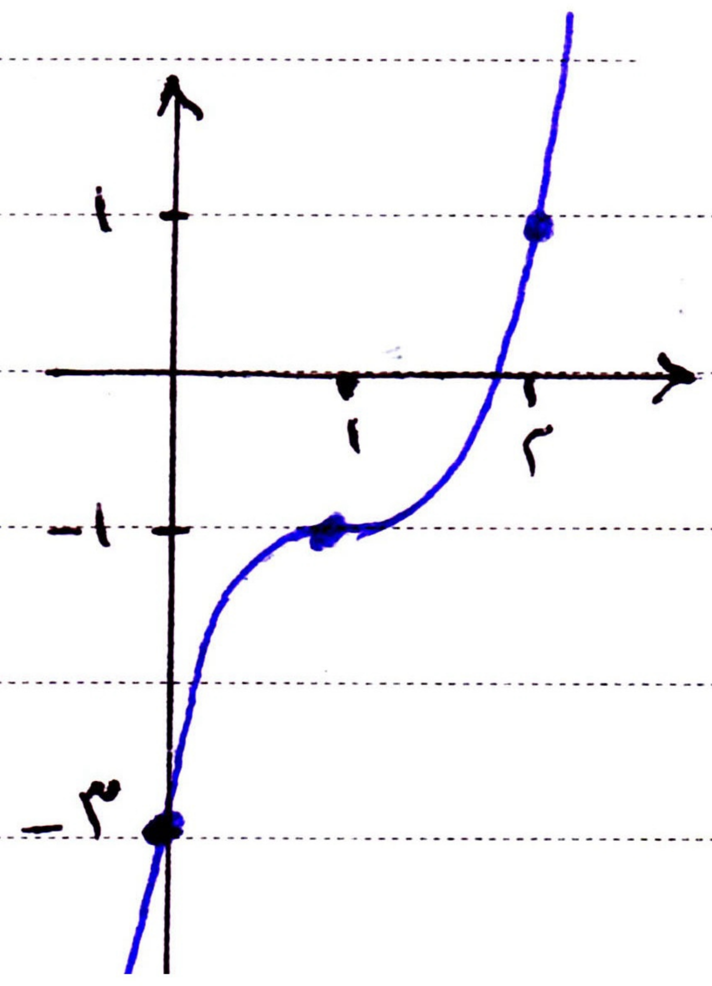
x^3

x	-1	0	1
y	-1	0	1

$\xrightarrow[+2]{-1}$

x	-2	-1	0
y	1	2	3

ب) $y = 2(x-1)^3 - 1$



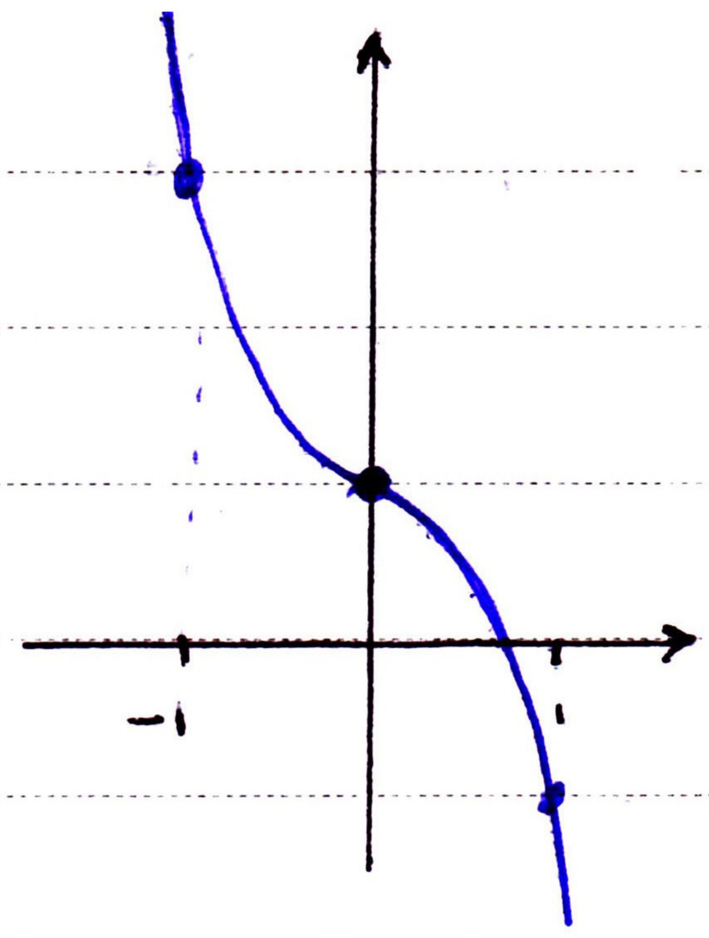
x^3

x	-1	0	1
y	-1	0	1

$\xrightarrow[\times 2 \text{ و } -1]{+1}$

x	0	1	2
y	-3	-1	1

ج) $y = -2x^3 + 1$



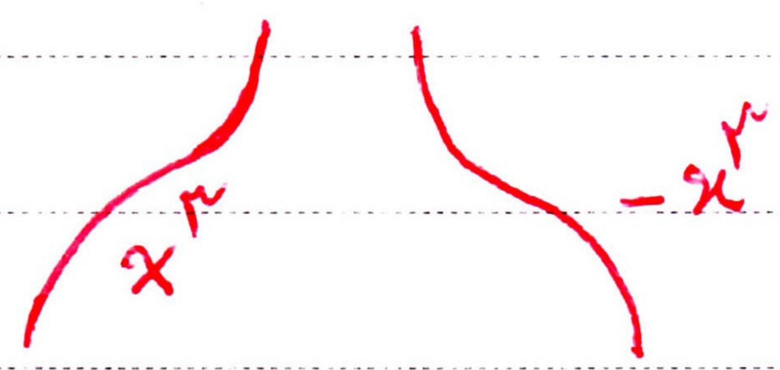
x^3

x	-1	0	1
y	-1	0	1

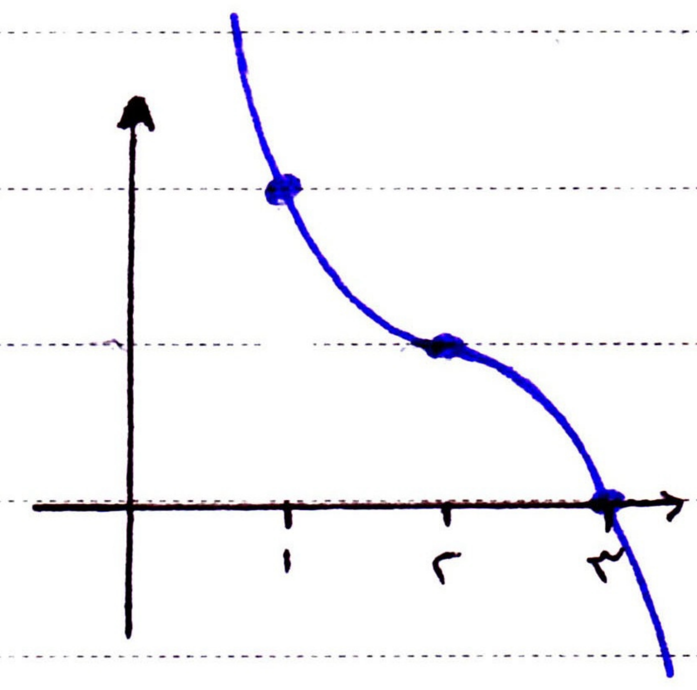
$\xrightarrow[\times(-2) \text{ و } +1]{}$

x	-1	0	1
y	3	1	-1

تذکر: اگر در منفی ضرب شود، نمودار برعکس می‌شود.



د) $y = 1 - (x-2)^3 \longrightarrow y = -(x-2)^3 + 1$

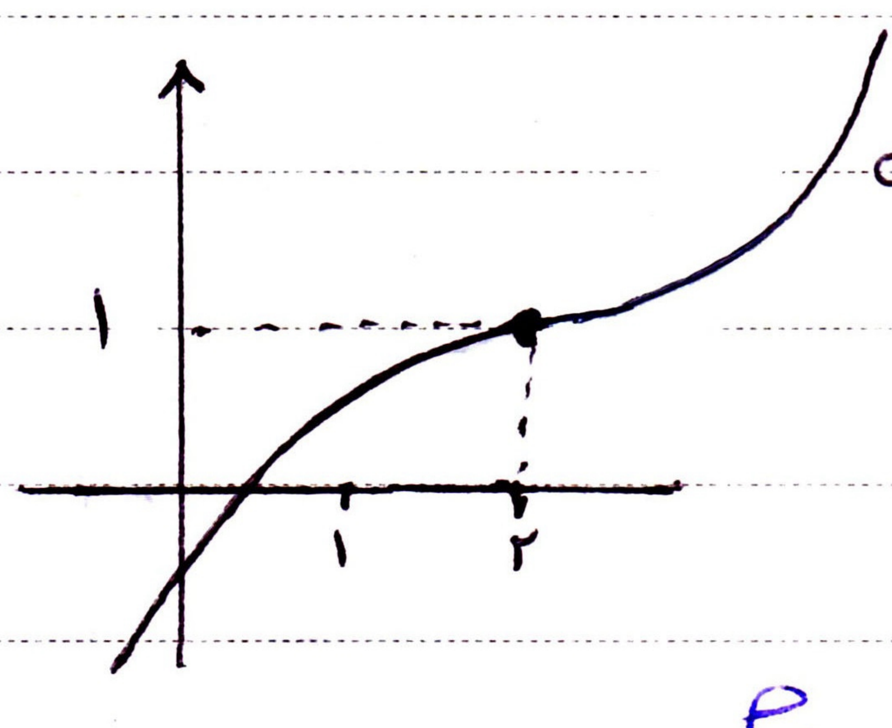


x^3

x	-1	0	1
y	-1	0	1

$\xrightarrow[\times(-1) \text{ و } +1]{+2}$

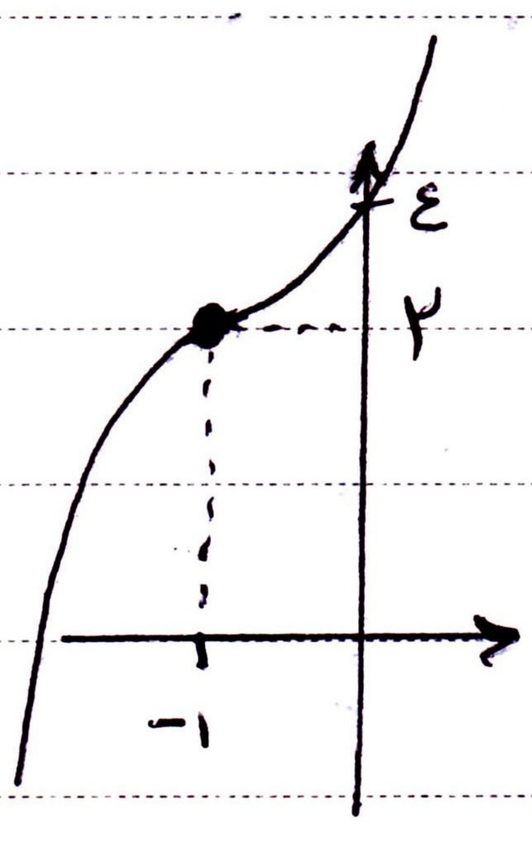
x	1	2	3
y	2	1	0



تست: نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 7$ به صورت مقابل است. مقدار $f(-1)$ کدام است؟

-17 -20 -26 -24

$f(x) = (x-2)^3 + 1 \Rightarrow f(-1) = -27 + 1 = -26$



تست: نمودار تابع $y = a(x+b)^3 + c$ به صورت مقابل است. حاصل $a \times b$ کدام است؟

1 2 -1 -2

$f(x) = a(x+1)^3 + 2$

$\xrightarrow[y=4]{x=0} a + 2 = 4 \Rightarrow a = 2 \quad f(x) = 2(x+1)^3 + 2$

$\Rightarrow a = 2 \,,\, b = 1 \Rightarrow a \times b = 2$

مثال: نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3$ را ابتدا به اندازه ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم نمودار حاصل سهمی $y=x^2+7x$ را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

$f \xrightarrow{\text{انتقال}} y=-(x-3)^3$ ، سهمی: $y=x^2+7x$

تلاقی: $x^2+7x=-(x-3)^3$

$\Rightarrow x^2+7x+(x-3)^3=0$

$\Rightarrow \underline{x^2}+\underline{\underline{7x}}+x^3\underline{-9x^2}+\underline{\underline{27x}}-27=0$

$\Rightarrow x^3-8x^2+34x-27=0$ حدس: $x=1$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -8 & 34 \\ 1 & & 1 & -7 \\ \hline & 1x^2 & -7x & 27 \end{array} \longrightarrow x^2-7x+27=0 \longrightarrow \Delta=49-4\times 27<0$$

معادله فقط یک جواب $x=1$ دارد پس در یک نقطه تلاقی دارند

$x=1 \xrightarrow{\text{سهمی}} y=8 \Rightarrow A\begin{vmatrix}1\\8\end{vmatrix}$ نقطه تلاقی

* یکنوایی و یکنوایی اکید *

① تابع f را در یک فاصله اکیداً صعودی گوییم هرگاه در آن فاصله داشته باشیم :

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

اما در صورتی که $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ آنگاه گوییم تابع صعودی است.

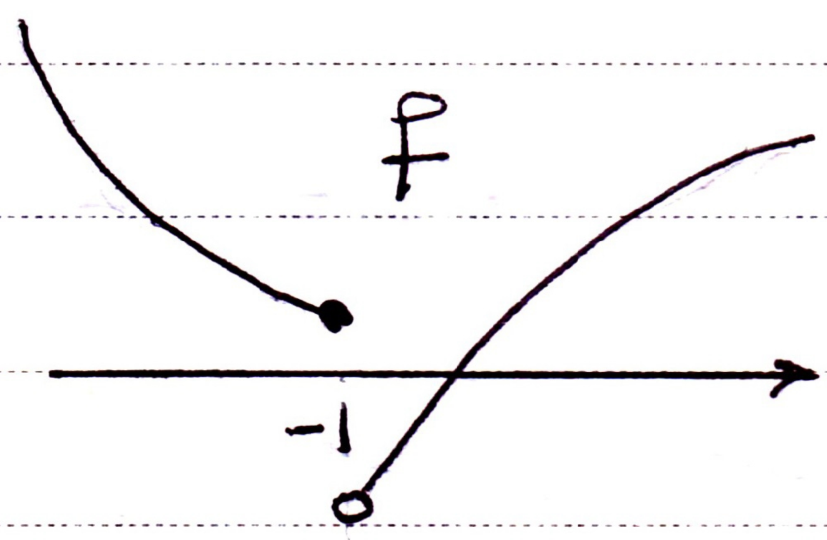
② تابع f را در یک فاصله اکیداً نزولی گوییم هرگاه در آن فاصله داشته باشیم :

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

و در صورتی که $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ آنگاه تابع نزولی است.

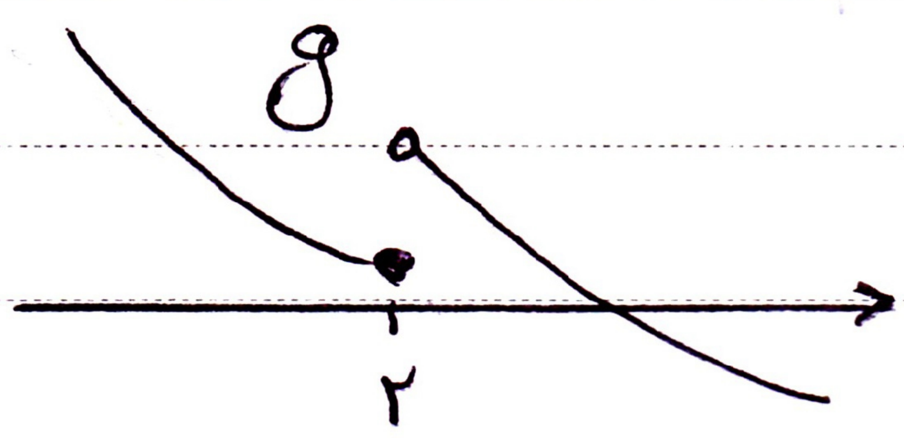
مثال: در هر تابع با توجه به نمودار آن، بازه‌های یکنوایی را تعیین کنید.

الف)



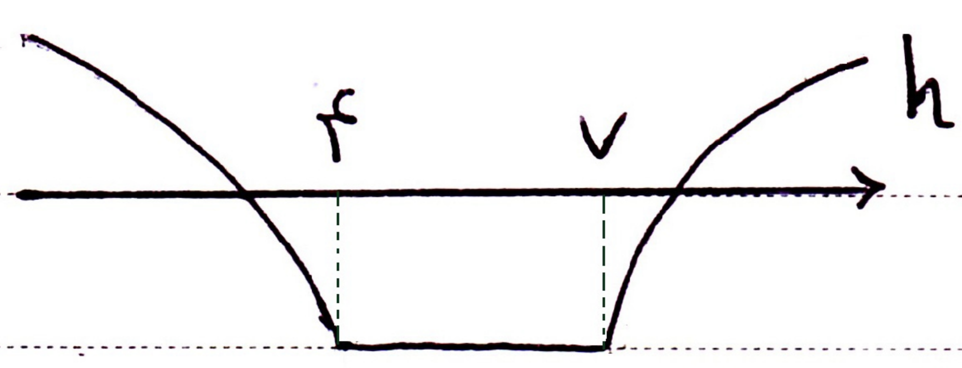
f روی بازهٔ $(-\infty, -1]$ نزولی اکید و بر بازهٔ $(-1, +\infty)$ صعودی اکید است.

ب)



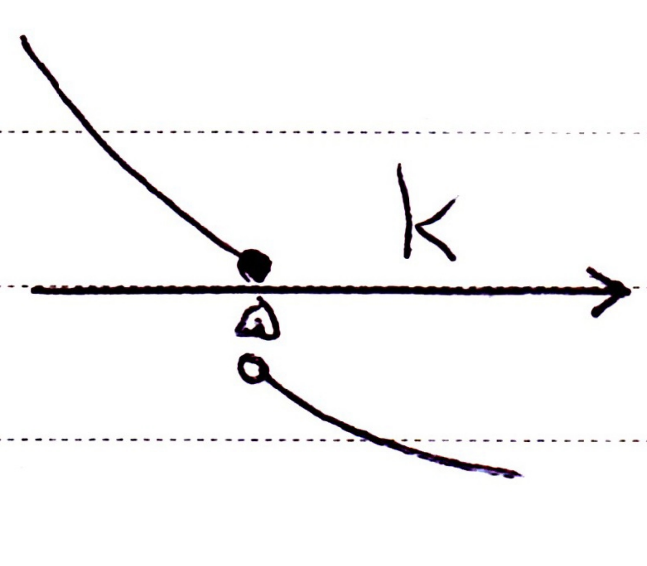
g روی هر یک از بازه‌های $(-\infty, 2]$ و $(2, +\infty)$ نزولی اکید است ولی در کل یکنوا نیست.

پ)



تابع h روی $(-\infty, 4]$ نزولی اکید است
و روی $(-\infty, 7]$ نزولی است.
و روی $[4, 7]$ ثابت است.
و روی $[4, +\infty)$ صعودی است.
و روی $[7, +\infty)$ صعودی اکید است.

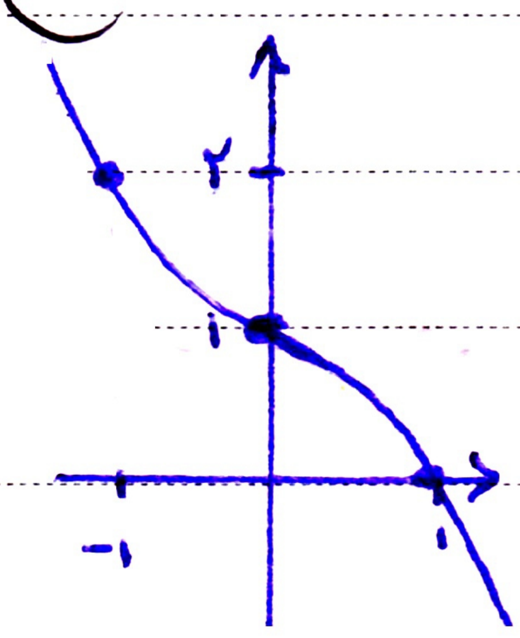
ت)



تابع k روی $\mathbb{R}$ نزولی اکید است.

مثال: به کمک رسم، یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید

الف) $y=-x^3+1$



x^3

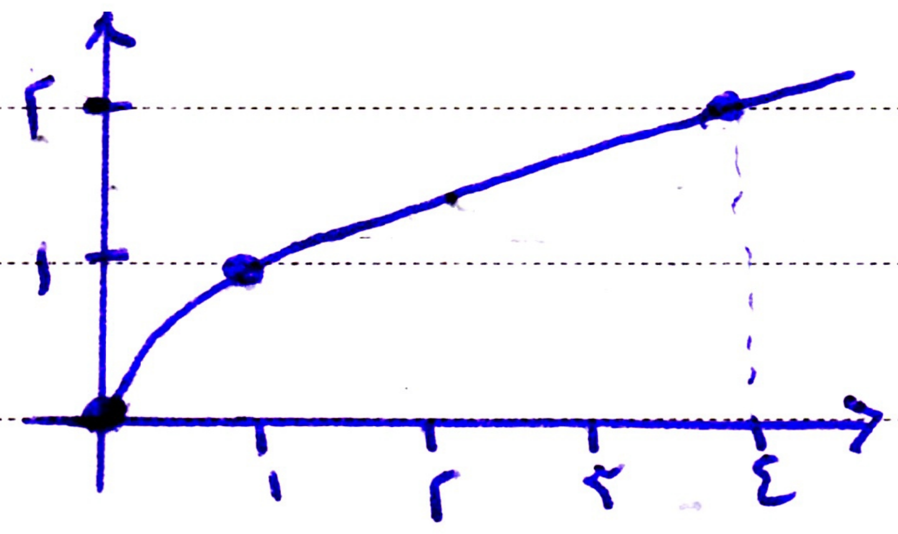
x	-1	0	1
y	-1	0	1

$\xrightarrow{\times(-1)\ \text{و}\ +1}$

x	-1	0	1
y	2	1	0

تابع نزولی اکیدا است

ب) $y=\sqrt{x}$



تابع اکیداً صعودی است

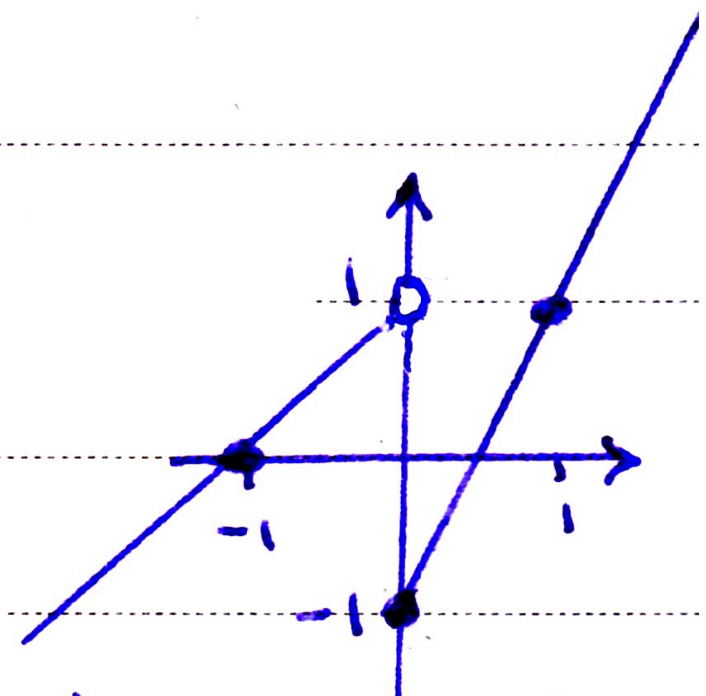
$\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

پ) $y=\begin{cases} 2x-1 & , x\geq 0 \\ x+1 & , x<0 \end{cases}$

x	0	1
y	-1	1

x	0	-1
y	1	0

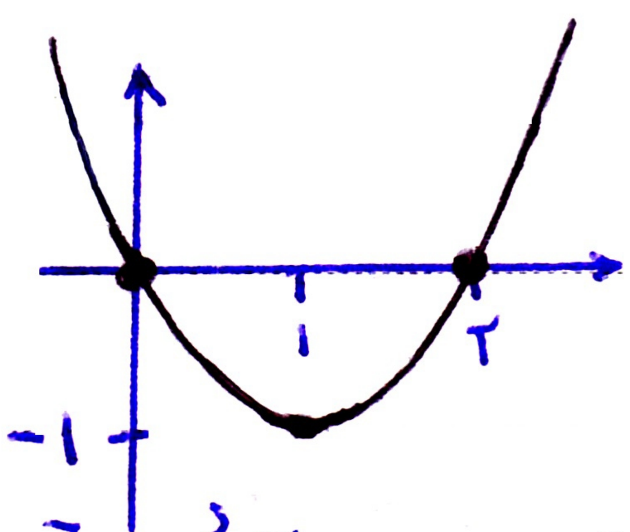


تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در کل یکنوا نیست

ت) $f(x)=x^2-2x$

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$

x	0	1	2
y	0	-1	0



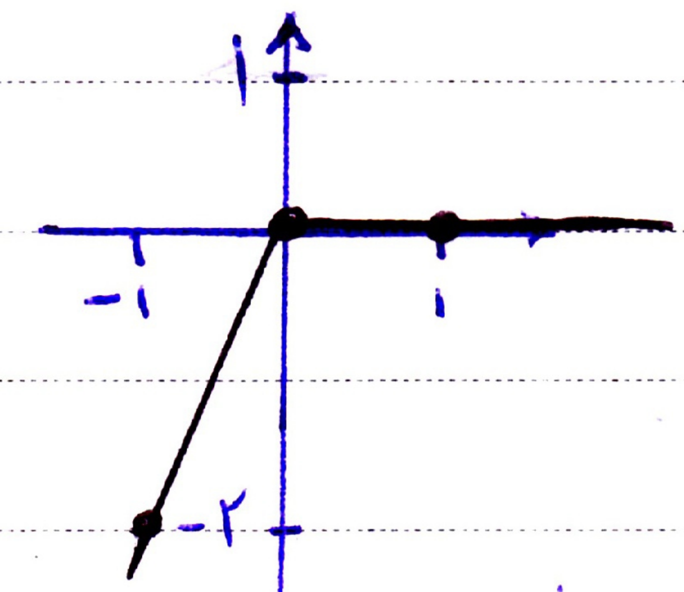
تابع در بازه $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-\infty,1]$ اکیداً نزولی است ولی در کل یکنوا نیست

ج) $f(x) = x - |x|$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$

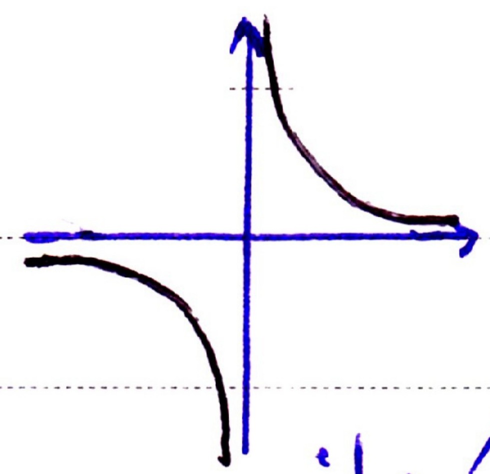
x	0	1
y	0	0

x	0	-1
y	0	-2



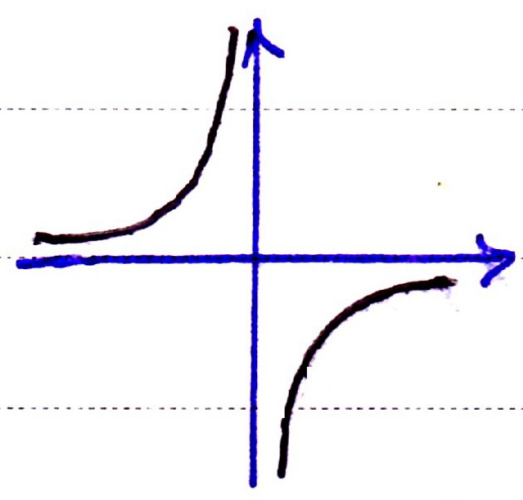
تابع درکل صعودی است

چ) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



تابع در هر شاخه یعنی $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است ولی درکل یکنوا نیست

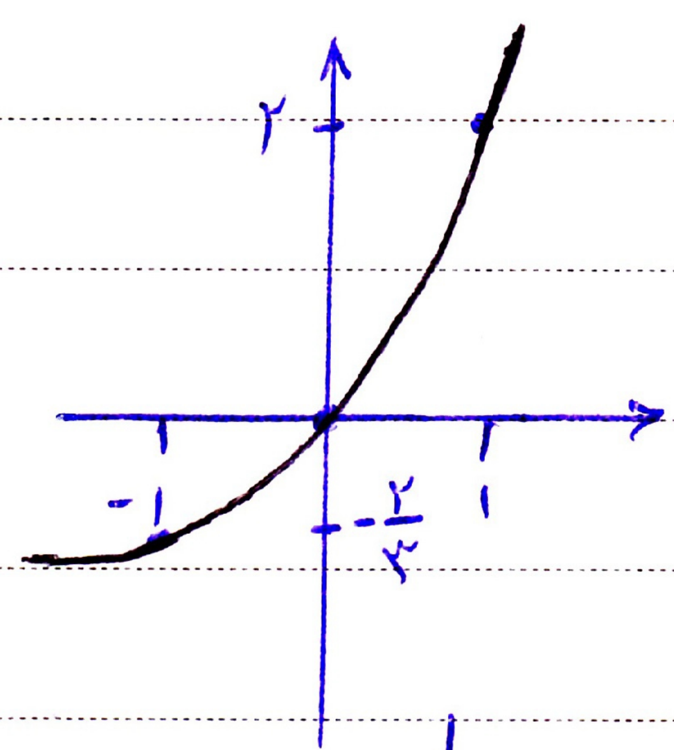
ح) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$

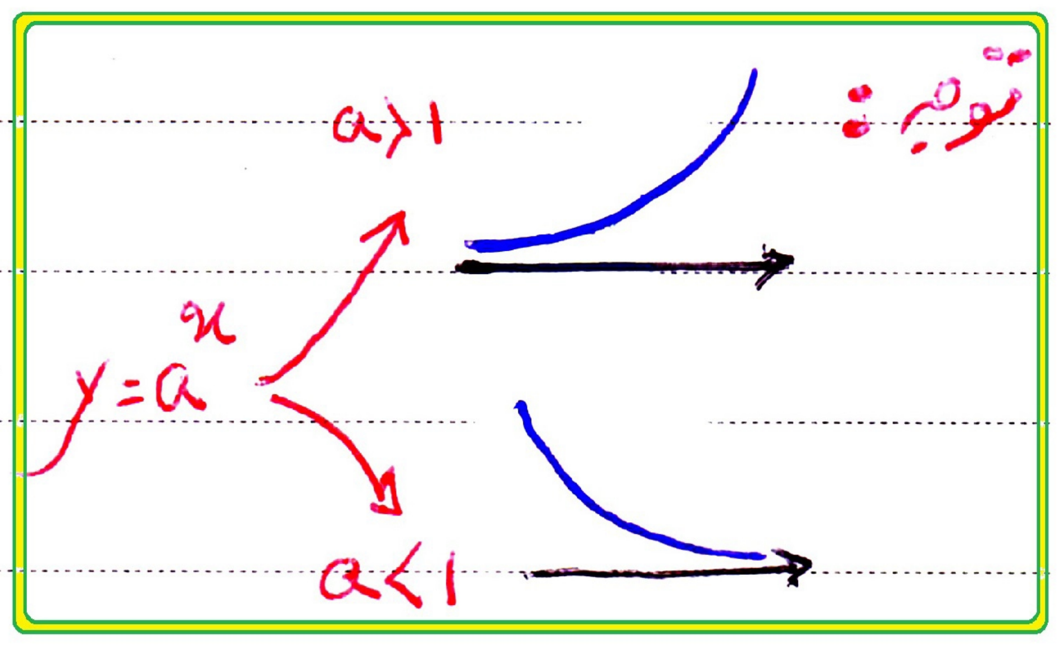


تابع در هر شاخه یعنی $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است ولی درکل یکنوا نیست

خ) $f(x) = 3^x - 1$

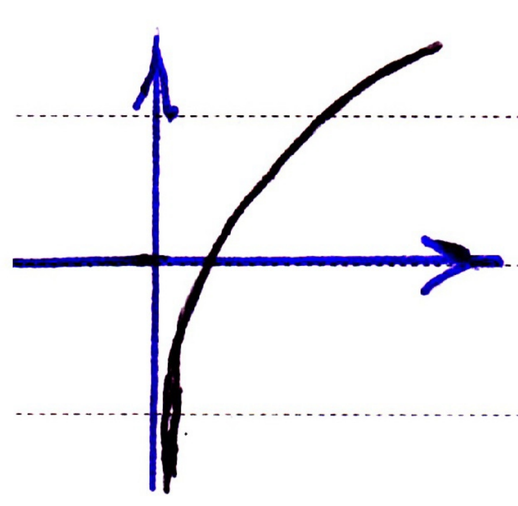
x	-1	0	1
y	$-\frac{2}{3}$	0	2



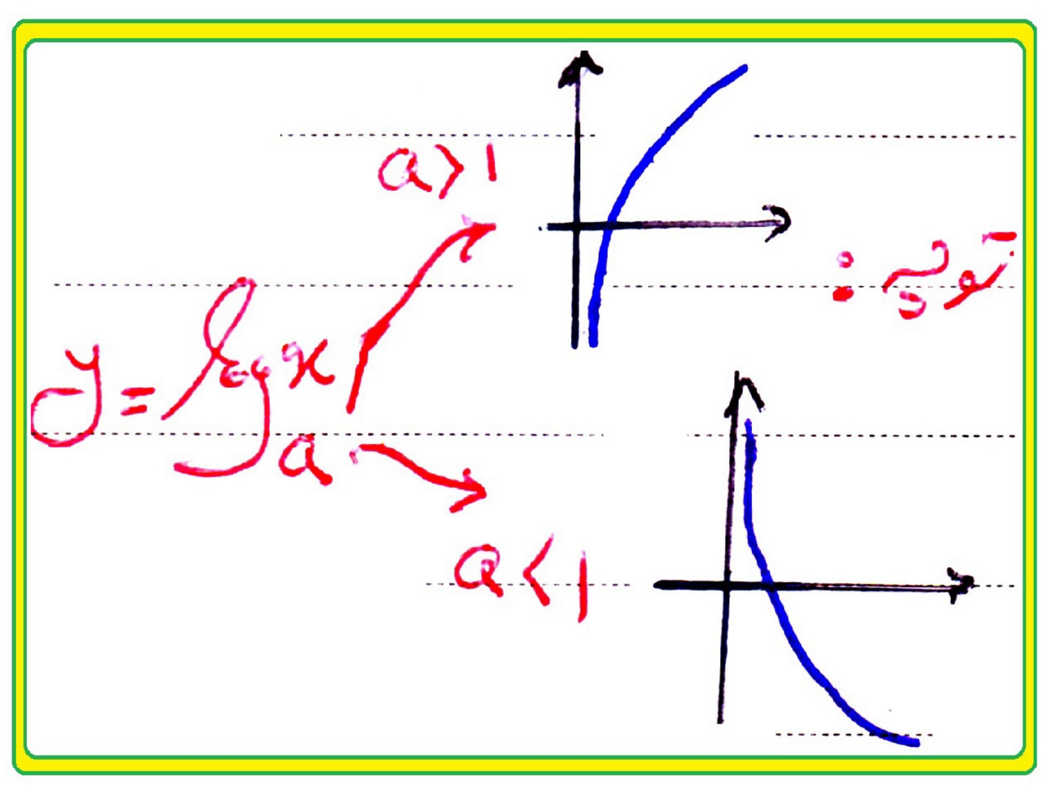


تابع اکیداً صعودی است

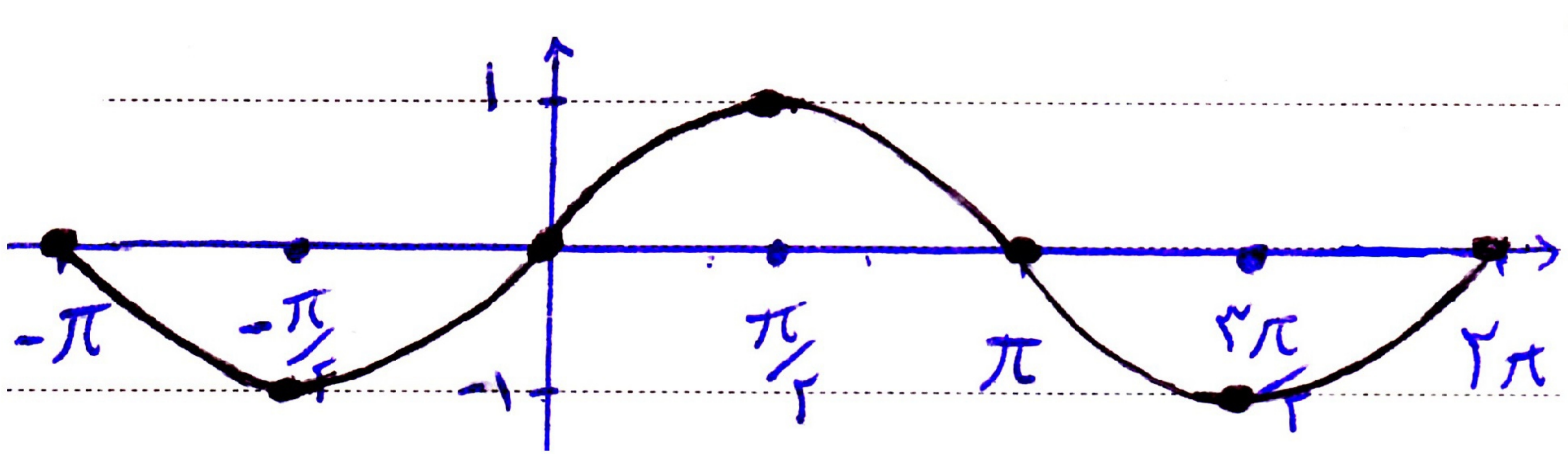
د) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x = -(-\log_2 x) \Rightarrow f(x) = \log_2 x$



تابع اکیداً صعودی است



$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [-\pi, 2\pi]$



$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow$ نزولی اکید

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \rightarrow$ صعودی اکید

مثال: تابع $f(x) = |x| + |1-x|$ در کدام بازه اکیداً صعودی است؟

$$|x| \to 0 \qquad |1-x| \to 1$$

x	-1	0	1	2
y	3	1	1	3

نزولی اکید   ثابت   صعودی اکید

$\Longrightarrow$ در بازه $[1, +\infty)$ صعودی اکیداً است

مثال: یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید

الف) $f = \{(0,0), (-1,2), (1,-2), (-2,4)\}$

x	-2	-1	0	1
y	4	2	0	-2

$\longrightarrow$ نزولی اکید است

ب) $g = \{(-2,-6), (-3,-9), (1,3), (2,6), (4,6), (5,15)\}$

x	-3	-2	1	2	4	5
y	-9	-6	3	6	6	15

$\longrightarrow$ صعودی است

test

مثال: بدون استفاده از شکل یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید

الف) $y = 2x + 1$

$$x_2 > x_1 \xrightarrow{\times 2} 2x_2 > 2x_1 \xrightarrow{+1} 2x_2 + 1 > 2x_1 + 1 \Rightarrow y_2 > y_1$$

صعودی اکید است

ب) $y = \sqrt[3]{-7x} + 4$

$$x_2 > x_1 \xrightarrow{\times(-7)} -7x_2 < -7x_1 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{-7x_2} < \sqrt[3]{-7x_1}$$

$$\xrightarrow{+4} \sqrt[3]{-7x_2} + 4 < \sqrt[3]{-7x_1} + 4 \Rightarrow y_2 < y_1$$ اکیداً نزولی

test

مثال: به سریع‌ترین حالت، یکنوایی توابع زیر را تعیین کنید

الف) $y = 2x + 1 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 2 > 0 \Rightarrow$ صعودی اکیداً

ب) $y = 5 - 4x \longrightarrow y' = -4 \longrightarrow$ نزولی اکید است

پ) $y = x^3 + 5x - 2 \longrightarrow y' = 3x^2 + 5 > 0 \longrightarrow$ صعودی اکید

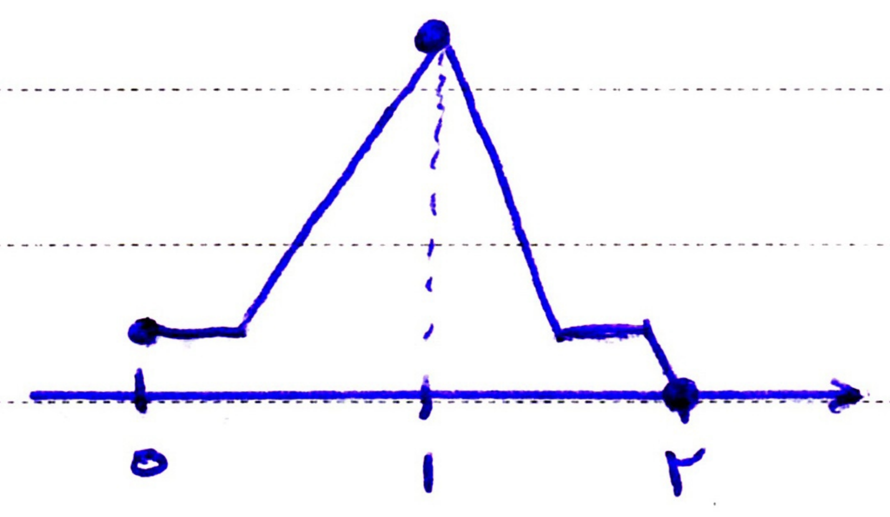
ت) $y = x^2 - 6x \longrightarrow y' = 2x - 6$

$$\begin{array}{c|c|c} & 3 & \\ \hline - & 0 & + \end{array}$$

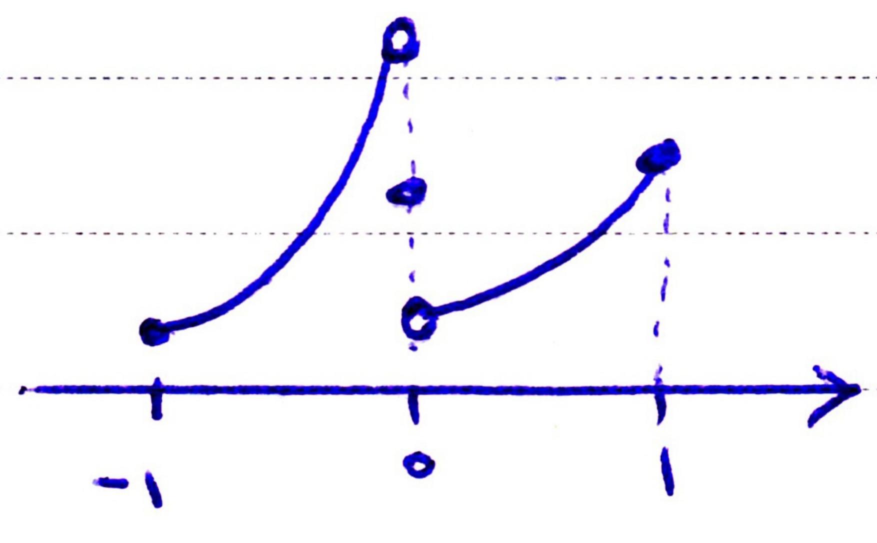
نزولی اکید   صعودی اکید

روی بازهٔ $(-\infty, 3]$ نزولی اکید و بر بازهٔ $[3, +\infty)$ صعودی اکید است

مثال: الف) روی بازه $[0, 2]$ نمودار یک تابع رسم کنید که روی بازه $[0, 1]$ صعودی و روی بازهٔ $[1, 2]$ نزولی باشد.



ب) روی بازهٔ $[-1, 1]$ نمودار تابعی رسم کنید که روی بازهٔ $[-1, 0)$ و $[0, 1]$ صعودی باشد ولی روی بازهٔ $[-1, 1]$ صعودی نباشد.



ترکیب توابع:

تعریف می‌کنیم: $fog(x)=f(g(x))$

مثال: اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=3x^2-4x$ مطلوب است:

$$fog(x)=f(g(x))=2(3x^2-4x)-1=6x^2-8x-1$$

$$gof(x)=g(f(x))=3\underbrace{(2x-1)^2}_{4x^2-4x+1}-4(2x-1)=12x^2-12x+3-8x+4$$

$$=12x^2-20x+7$$

مثال: در صورتی که $f(x)=2-3x$ و $g(x)=4x-1$ معادله زیر را حل کنید

$$fog(x)+2\,fof(x)=gof(x)-g(2x)$$

$$fog(x)=f(g(x))=2-3(4x-1)=2-12x+3=-12x+5$$

$$fof(x)=f(f(x))=2-3(2-3x)=2-6+9x=9x-4$$

$$gof(x)=g(f(x))=4(2-3x)-1=8-12x-1=-12x+7$$

$$g(2x)=4(2x)-1=8x-1$$

معادله: $\cancel{-12x}+5+18x-8=\cancel{-12x}+7-8x+1$

$$\Rightarrow 26x=11$$

$$\Rightarrow x=\frac{11}{26}$$

حل تمرین هایی از کتاب درسی:

الف) $f(x)=x^2-5$ ، $g(x)=\sqrt{x+6}$

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{x+6}^{\,2}-5=x+6-5=x+1$$

ب) $f(x)=\sqrt{3-2x}$ ، $g(x)=\dfrac{6}{3x-5}$

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{3-2\times\frac{6}{3x-5}}=\sqrt{3-\frac{12}{3x-5}}=\sqrt{\frac{9x-15-12}{3x-5}}=\sqrt{\frac{9x-27}{3x-5}}$$

پ) $f(x)=\sqrt{x+2}$ ، $g(x)=\sqrt{x^2-16}$

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{\sqrt{x+2}^{\,2}-16}=\sqrt{x+2-16}=\sqrt{x-14}$$

ت) $f(x)=\sin x$ ، $g(x)=\sqrt{x}$

$$gof(x)=g(f(x))=\sqrt{\sin x}$$

ث) $f(x)=x^2-4$ ، $g(x)=\sqrt{x^2-4}\xrightarrow{x=5}g(5)=\sqrt{21}$

$$fog(5)=f(g(5))=f(\sqrt{21})=\sqrt{21}^{\,2}-4=21-4=17$$

ج) $f(7)=5$ ، $g(4)=7$

$$fog(4)=f(g(4))=f(7)=5$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=2x-1$ آیا تساوی $fog(5)=g(2)$ صحیح است؟

$\hookrightarrow g(5)=10-1=9$

$$fog(5)=f(g(5))=f(9)=\sqrt{9}=3$$

$$g(2)=2\times2-1=4-1=3$$ $\longrightarrow$ صحیح است

مثال: اگر $f(x)=3x+1$ ، $g(x)=5-2x$ ، $fog(x)=-2$ ، مقدار x را بدست آورید.

$$fog(x)=f(g(x))=3(5-2x)+1=15-6x+1=-6x+16$$

$$\Longrightarrow -6x+16=-2\Longrightarrow -6x=-18\Longrightarrow x=3$$

مثال: با توجه به ضابطه‌های توابع f و g معادلات مورد نظر را حل کنید

الف) $f(x)=2x-5$, $g(x)=x^2-3x+8$, $fog(x)=7$

$$fog(x)=f(g(x))=2(x^2-3x+8)-5=2x^2-6x+11$$

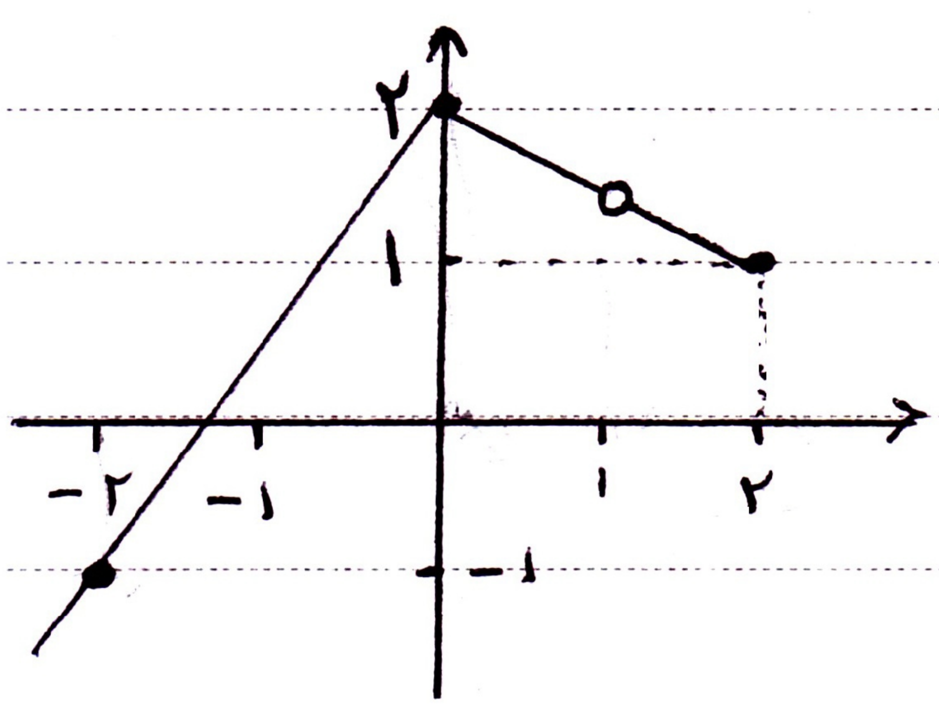
$$\Rightarrow 2x^2-6x+11=7 \Rightarrow 2x^2-6x+4=0 \rightarrow x=1 \ , \ x=2$$

ب) $f(x)=3x^2+x-1$, $g(x)=1-2x$, $gof(x)=-5$

$$gof(x)=g(f(x))=1-2(3x^2+x-1)=1-6x^2-2x+2=-6x^2-2x+3$$

$$\Rightarrow -6x^2-2x+3=-5 \Rightarrow -6x^2-2x+8=0 \rightarrow x=1 \ , \ x=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$$

مثال: اگر $f=\{(1,2),(-1,0),(0,1)\}$ و نمودار تابع g به صورت روبه‌رو باشد مطلوبست



$fog(-2)=f(g(-2))=f(-1)=0$

$fog(0)=f(g(0))=f(2)=$ تعریف نشده $\qquad gof(1)=g(f(1))=g(2)=1$

$gof(-1)=g(f(-1))=g(0)=2 \qquad gof(0)=g(f(0))=g(1)=$ تعریف نشده

$fog(2)=f(g(2))=f(1)=2 \qquad fof(-1)=f(f(-1))=f(0)=1$

$fof(0)=f(f(0))=f(1)=2 \qquad gog(0)=g(g(0))=g(2)=1$

مثال: درصورتی که $f(x)=x-2$, $g(x)=x^2+x$, $fog(x)=ax^2+bx+c$ باشد a، b و c را بیابید

$$fog(x)=f(g(x))=x^2+x-2=ax^2+bx+c$$

$$\Rightarrow a=1 \ , \ b=1 \ , \ c=-2$$