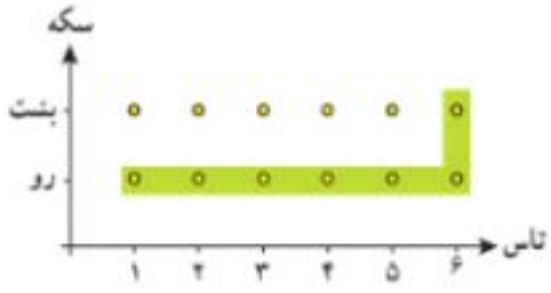
# درس ۴ پیشامدهای مستقل و وابسته

محرم محمدی

**فعالیت** صفحه ۶۷

یک سکه و یک تاس را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید $A$ پیشامد ۶ آمدن تاس و $B$ پیشامد رو شدن سکه باشد.

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای $A$، $B$ و $A\cap B$ را بنویسید.




$S=\{(ر,۱), \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

$A=\{\dots\dots,\dots\dots\}$

$B=\{\dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots, \dots\dots,\dots\dots\}$

$A\cap B=\{\dots\dots\}$

۲ احتمال وقوع پیشامدهای $A$، $B$ و $A\cap B$ را تعیین کنید.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\dots\dots}{\cdot۱۲۰۰}=\frac{۱}{۶} \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\dots۶۰۰}{\cdot۱۲۰۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{\dots۱۰۰}{\cdot۱۲۰۰}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید، یعنی $P(A|B)$ را به دست آورید.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{\dots۱۲۰۰}{\dots۱۲۰۰}}{\frac{\dots۶۰۰}{\dots۱۲۰۰}}=\frac{۲}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$$

$S=\{(ر,۱)\ (ر,۲)\ (ر,۳)\ (ر,۴)\ (ر,۵)\ (ر,۶)$
$(پ,۱)\ (پ,۲)\ (پ,۳)\ (پ,۴)\ (پ,۵)\ (پ,۶)\}$

$A=\{(ر,۶)، (پ,۶)\}$

$B=\{(ر,۱)\ (ر,۲)\ (ر,۳)\ (ر,۴)\ (ر,۵)\ (ر,۶)\}$

$A\cap B=\{(ر,۶)\}$



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

۳ با مقایسهٔ $P(A|B)$ و $P(A)$، آیا وقوع پیشامد $B$ تأثیری در احتمال وقوع پیشامد $A$ داشته است؟

۴ اگر $P(A|B)=P(A)$، چه رابطه‌ای بین $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cap B)$ برقرار است؟

۵ در تساوی $P(A|B)=P(A)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $P(B|A)=P(B)$ را نتیجه بگیرید.

۳- $P(A)=\frac{1}{6} = P(A|B)=\frac{1}{6}$

وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع پیشامد A نداشته است

---

۴- $P(A|B)=P(A)$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$ ← طرفین وسطین

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (۱)

---

۵- $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \overset{(۱)}{=} \frac{P(A)\times P(B)}{P(A)}=P(B)$



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

## کار در کلاس ..... صفحه ۶۹

۱ سکهٔ سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر $A$ پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و $B$ پیشامد مشاهدهٔ فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن $A$ و $B$ را بررسی کنید.

۲ در پرتاب دو تاس، $A$ را پیشامد عدد ۳ در تاس اول و $B$ را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا $A$ و $B$ مستقل‌اند؟

۳ در یک مسابقهٔ تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

① $R$=رو  $P$=پشت

$n(S)=۸ \rightarrow S=\{RRR, RRP, RPR, RPP, PRR, PRP, PPR, PPP\}$

$A=\{RRR, RRP, PRR, PRP\} \rightarrow P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

$B=\{RRP, PRR\}$  $A\cap B=\{PRR, RRP\}$

$P(B)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$  $P(A\cap B)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

$\frac{۱}{۴} \neq \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۴} \rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ A, B مستقل نیستند

---

② $n(S)=۳۶$

$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\} \rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

$B=\{(۴,۲),(۵,۵),(۲,۴)\} \rightarrow P(B)=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$

$A\cap B=\{\} \rightarrow P(A\cap B)=۰ \rightarrow P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$

A, B مستقل نیستند



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

۲ در یک مسابقهٔ تیراندازی، احتمال اینکه محمد (A) به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی (B)، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

$A \cap B$

A و B مستقل هستند چون نتیجهٔ تیراندازی هرکدام از آن‌ها، روی دیگری تأثیری ندارد

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{۵}{۷} \times \frac{۷}{۱۰} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

**کار در کلاس** ... صفحهٔ ۷۰

در مثال صفحهٔ قبل، اگر مهرهٔ دوم را پس از جای‌گذاری مهرهٔ اوّل در جعبه بیرون آوریم. با محاسبهٔ $P(B)$ و $P(B|A)$، مستقل بودن $A$ و $B$ را نتیجه بگیرید.

$$P(B) = \frac{۸}{۱۳}$$

چون مهره اول مجدداً برگردد. تعداد کل مهره ها مجدداً ۱۳ است بنابراین:

$$P(B|A) = \frac{۸}{۱۳}$$

یعنی:

$$P(B) = P(B|A)$$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightsquigarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

A و B مستقل هستند

ص ۴

## توجه

مستقل بودن پیشامدهای $A$ و $B$ در کار در کلاس بالا قابل حدس زدن است؛ زیرا با جای‌گذاری مهرهٔ اول انتخاب شده در جعبه، شرایط برای انتخاب مهرهٔ دوم، دقیقاً همانند انتخاب مهرهٔ اول است و در حقیقت آزمایش اول تکرار می‌شود. در حالت کلی، انتخاب‌هایی که با جای‌گذاری انجام می‌شوند، مستقل‌اند.

صفحه ۷۱

## تمرین

**۱** اگر $A$ و $B$ دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای $S$ باشند، آیا $A$ و $B$ می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

$(A\cap B)=\emptyset$ ①

اگر $A$ و $B$ بخواهند مستقل باشند باید داشته باشیم

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

① $\rightarrow P(A\cap B)=0 \rightarrow P(A)\times P(B)=0 \rightarrow \begin{cases} P(A)=0 \\ \text{یا} \\ P(B)=0 \end{cases}$

شرط مستقل بودن $A$ و $B$ این است که حداقل یکی از آنها تهی باشد

چون سوال $A$ و $B$ را ناتهی فرض کرده است. پس $A$ و $B$ نمی‌توانند مستقل باشند.

**۲** اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل و $E\subseteq A$ و $F\subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا $E$ و $F$ نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

خیر مثال زیر را دقت کنید

$S=\{1,2,3,4\}$  $A=\{1,2\}$  $B=\{2,4\}$

$A\cap B=\{2\} \rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ → $A$ و $B$ مستقل هستند

$\frac{1}{4}$  $\frac{1}{2}$  $\frac{1}{2}$

$E=\{2\}$  $F=\{4\}$

$E\cap F=\emptyset \rightarrow P(E\cap F)\neq P(E)\times P(F)$ → $E$ و $F$ مستقل نیستند

$0$  $\frac{1}{4}$  $\frac{1}{4}$

ص ۵

**۲** اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

الف) $A'$ و $B$

ب) $A'$ و $B'$

$A, B$ مستقل‌اند $\longrightarrow$ $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

(الف)
$$P(B\cap A') = P(B-A) = P(B) - P(A\cap B)$$
$$P(B\cap A') = P(B) - P(A)\cdot P(B) = P(B)\left[1-P(A)\right]$$
$$P(B\cap A') = P(B)\cdot P(A') \longrightarrow B, A' \text{ مستقل‌اند}$$

(ب)
$$P(A'\cap B') = P(A\cup B)' = 1 - P(A\cup B)$$
$$= 1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)$$
$$= 1-\left(P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)\right)$$
$$= 1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B) = P(A')-P(B)\left(1-P(A)\right)$$
$$= P(A')\left(1-P(B)\right) = P(A')\cdot P(B')$$

$A', B'$ مستقل‌اند



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

**۴** در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر $A$ پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و $B$ پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن $A$ و $B$ را بررسی کنید.

$n(S)=۳۶$

$A=\{(۱,۲)،(۲,۳)،(۳,۴)،(۴,۵)،(۵,۶)،(۲,۱)،(۳,۲)،(۴,۳)،(۵,۴)،(۶,۵)\} \rightarrow P(A)=\frac{۱۰}{۳۶}$

$B=\{(۳,۱)،(۳,۲)،(۳,۳)،(۳,۴)،(۳,۵)،(۳,۶)\} \rightarrow P(B)=\frac{۶}{۳۶}$

$A\cap B=\{(۳,۲)،(۳,۴)\} \rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۳۶}$

$P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$

$\frac{۲}{۳۶}\neq\frac{۱۰}{۳۶}\times\frac{۶}{۳۶} \rightarrow$ $A$ و $B$ مستقل نیستند

**۵** از مجموعهٔ $\{۱۰،\ldots،۳،۲،۱\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید $A$ پیشامد یک عدد زوج و $B$ پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن $A$ و $B$ را بررسی کنید.

$A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\} \rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۰}$

$B=\{۳,۶,۹\} \rightarrow P(B)=\frac{۳}{۱۰}$

$A\cap B=\{۶\} \rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰}$

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$

$\frac{۱}{۱۰}\neq\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰} \rightarrow$ $A$ و $B$ مستقل نیستند



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار ۰/۶ و روی بیمار دیگر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه :

الف) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

ب) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

A = موفقیت عمل برای بیمار اول  B = موفقیت عمل برای بیمار دوم

A و B مستقل هستند چون موفقیت عمل هر بیمار روی بیمار دیگر تاثیری ندارد

الف) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0/6\times 0/8=0/48$

طبق قسمت ب سوال ۳

ب) $P(A'\cap B')=P(A')\cdot P(B')=0/4\times 0/2=0/08$

---

پ) $P(A'\cap B)=$

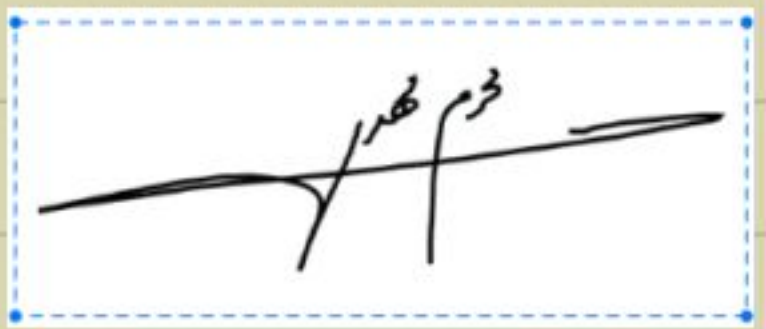
$A'$ ← روی بیمار اول موفقیت آمیز نبوده

$=P(A')\times P(B)$

و روی بیمار دوم موفقیت آمیز بوده است ← $B$

$=0/4\times 0/8$

$=0/32$



**۷** یک سکه و دو تاس به‌طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هردو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

پیشامد A  پیشامد B

$P(A)=\frac{1}{2}$  $P(B)=\frac{1}{36}$  A و B مستقل هستند

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{72}$

**۸** در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به‌دست آورید که:

الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

ب) تنها به پنج سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد.

پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

احتمال پاسخ صحیح هر سؤال $=\frac{1}{5}$

پیشامد پاسخ دادن به هر سوال مستقل از سوالهای دیگر است

الف) $P=\underbrace{\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\cdots\times\frac{1}{5}}_{\text{۱۰ تا}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$

ب) $P=\underbrace{\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times\cdots\times\frac{1}{5}\right)}_{\text{۵ تا}}\times\underbrace{\left(\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{4}{5}\right)}_{\text{۵ تا}}=\frac{4^5}{5^{10}}=\frac{2^{10}}{5^{10}}$

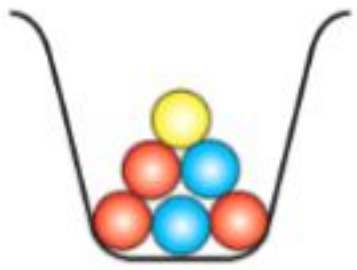
$=(0/4)^{10}$

ب) $\binom{10}{5}\times(0/4)^{10}=$ جواب قسمت قبل $\times\binom{10}{5}$

↳ انتخاب ۵ سوال از بین ۱۰ سوال موجود



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2



۹ در یک جعبه که شامل ۳ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر دو مهره قرمز باشند.

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

پ) هر دو مهره همرنگ باشند.

الف) $P = \frac{۳}{۶} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$

مهره اول قرمز — مهره دوم قرمز

ب)

① هر ۲ مهره آبی $\rightarrow P = \frac{۲}{۶} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۴}{۳۶}$

② مهره اول آبی ـ $\rightarrow P = \frac{۲}{۶} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۸}{۳۶}$

③ مهره اول غیرآبی ـ $\rightarrow P = \frac{۴}{۶} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۸}{۳۶}$

جواب کلی : $\frac{۴}{۳۶} + \frac{۸}{۳۶} + \frac{۸}{۳۶} = \frac{۲۰}{۳۶} = \frac{۵}{۹}$

---

ب)

① هر ۲ قرمز $\rightarrow P = \frac{۳}{۶} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۹}{۳۶}$

② هر ۲ زرد $\rightarrow P = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳۶}$

③ هر ۲ آبی $\rightarrow P = \frac{۲}{۶} \times \frac{۲}{۶} = \frac{۴}{۳۶}$

جواب کلی : $\frac{۹}{۳۶} + \frac{۱}{۳۶} + \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱۴}{۳۶} = \frac{۷}{۱۸}$



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

**۱۰** جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که :

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

(حداقل یک لامپ معیوب باشد) $P$ ـ ۱

الف) $P = \frac{۳}{۱۲} \times \frac{۲}{۱۱} \times \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۲۲۰}$

(معیوب بودن لامپ اول) (معیوب بودن لامپ دوم) (معیوب بودن لامپ سوم)

ب) $P$ (سالم بودن هر ۳ لامپ) $= \frac{۹}{۱۲} \times \frac{۸}{۱۱} \times \frac{۷}{۱۰} = \frac{۲۱}{۵۵}$

جواب ب) $۱ - \frac{۲۱}{۵۵} = \frac{۳۴}{۵۵}$

**۱۱** احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همهٔ افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

۰/۱ = احتمال عدم موفقیت

تأثیر دارو روی یک نفر مستقل از تأثیر آن روی دیگری است

$P = \underbrace{۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times \ldots \times ۰/۱}_{\text{۱۰ نفر}} = (۰/۱)^{۱۰}$

مورد نظر سؤال



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

۱۲ اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری‌که $P(A\cap B)=۰/۱$ و $P(A\cap B')=۰/۴$، حاصل $P(A\cup B')$ را به‌دست آورید.

$A, B$ مستقل هستند پس $A, B'$ مستقل هستند (در سوال ۳ اثبات شد)

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=۰/۱ \quad (۱)$$

$$P(A\cap B')=P(A)\times P(B')=۰/۴$$

$$=P(A)\times(1-P(B))=۰/۴$$

$$=P(A)-\underbrace{P(A)\times P(B)}_{۰/۱}=۰/۴ \longrightarrow P(A)=۰/۵$$

(۱) $$۰/۵\times P(B)=۰/۱ \longrightarrow P(B)=\frac{۰/۱}{۰/۵}=۰/۲$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-\underbrace{P(A\cap B')}$$

$$=۰/۵+۰/۸-۰/۴=۰/۹$$

با آرزوی توفیق و تداوم سلامتی برای همکاران عزیزم

محرم مهدی

تهران پردیس

۱۴۰۰/۱۱/۱۲



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2