

# حسابان ۲

پایه دوازدهم ریاضی

درسنامه، تمرین

محل: م. شمس

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

قسمت اول

جلسه اول: صفحات ۷۲ تا ۷۷

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش  
و پرورش استان  
همدان

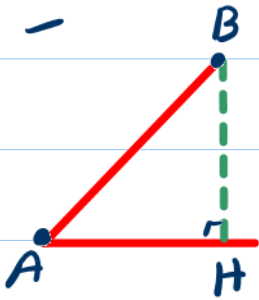
معاونت آموزش  
متوسطه

اداره تکنولوژی و  
گروه های  
آموزشی

گروه ریاضی  
استان همدان

آبچه تا به حال درباره شیب داشته ایم :

مفهوم فیزیکی شیب: نسبت افزایش ارتفاع به مسافت افقی طی شده را شیب سطح شیب‌دار می‌گوئیم.



$$\text{شیب} = \frac{BH}{AH}$$

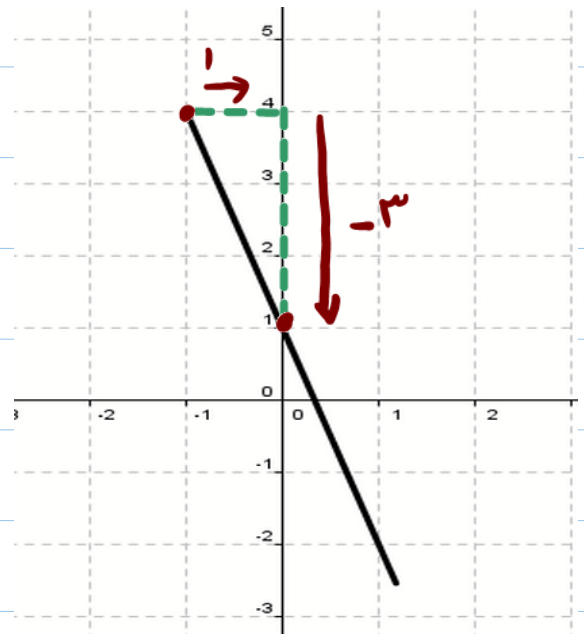
شیب خط: وقتی می‌گوئیم شیب خطی  $m$  است یعنی به ازای افزایش یک واحد متغیر  $x$

متغیر  $y$  به اندازه  $m$  واحد افزایش یا کاهش می‌یابد.



الف)

$$m = 2$$



ب)

$$m = -4$$

نکته: الف) هرگاه دوی محور  $x$ ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط به سمت بالا

برویم، شیب خط مثبت خواهد بود.

ب) هرگاه دوی محور  $x$ ها از چپ به راست حرکت کنیم و دوی خط به پائین سرخیزیم

شیب خط منفی خواهد بود.

ج) اگر خط موازی  $x$ ها باشد شیب خط صفر است (خطهای افقی)

د) اگر خط موازی  $y$ ها باشد شیب خط تعریف نشده است (خطهای قائم)

یافتن شیب خط با داشتن دو نقطه از آن :

اگر  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  دو نقطه از خط  $l$  باشند، شیب این خط برابر

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{است!}$$

نوشتن معادله خط با داشتن شیب خط و یک نقطه از آن :

اگر  $A(x_1, y_1)$  نقطه‌ای از خط  $l$  باشد و شیب  $m$  باشد معادله این خط

از رابطه زیر جهت می‌گیرید :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه به مختصات  $(1, -6)$  و  $(-4, -2)$  بگذرد

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 + 6}{-4 - 1} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5} \rightarrow y + 6 = -\frac{4}{5}(x - 1)$$

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5} - 6 \rightarrow y = -\frac{4}{5}x - \frac{26}{5}$$

رابطه شیب خط و تناثرات: تناثرات زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور  $x$ ‌ها می‌سازد برابر شیب خط است.

تذکره: (الف) به معادله‌های به شکل  $y = mx + h$  معادله رتاناژار خطی می‌گویند که  $m$  شیب خط و  $h$  عرض از مبدأ (محل برخورد خط با محور  $y$ ‌ها) است.

(ب) به معادله‌های به شکل  $ax + by + c = 0$  صورت کلی خطی می‌گویند که شیب از  $-\frac{a}{b}$  به دست می‌آید.

مثال: شیب خط‌های زیر را بیابید.

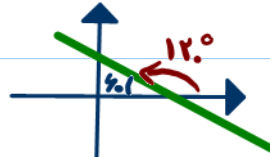
۱)  $x = 1 \rightarrow m$ : تعریف نشده

۲)  $y = \sqrt{3}x - 4 \rightarrow m = \sqrt{3}$

۳)  $y = -2 \rightarrow m = 0$

۴)  $4x + 12y - 10 = 0 \rightarrow m = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

۵)  $5x = 3y + 1 \rightarrow 3y = 5x - 1 \xrightarrow{:3} y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \rightarrow m = \frac{5}{3}$

۶)   $m = \tan 12^\circ = \tan(11.9^\circ) = -\tan 4^\circ = -\sqrt{3}$

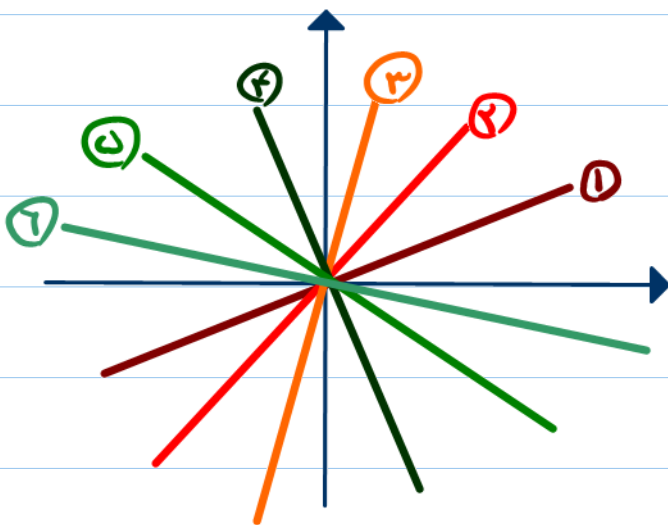
**نکته:** در خط‌های با شیب مثبت، هر چه خط به محور y ها نزدیک‌تر شود، شیب آن

بیشتری شود و در خط‌های با شیب منفی، هر چه خط به محور x ها نزدیک‌تر شود

شیب آن افزایش می‌یابد.

**مثال:** شیب خط‌های داده شده، تعبیر کنید {  $2, 2$ ،  $-\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{4}$ ،  $-1$ ،  $1$  } است.

هر شیب مربوط به کدام خط است؟



$$m_1 = \frac{1}{4}$$

$$m_2 = -2$$

$$m_3 = 1$$

$$m_4 = -1$$

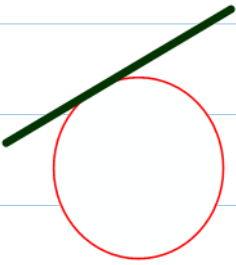
$$m_5 = 2$$

$$m_6 = -\frac{1}{3}$$

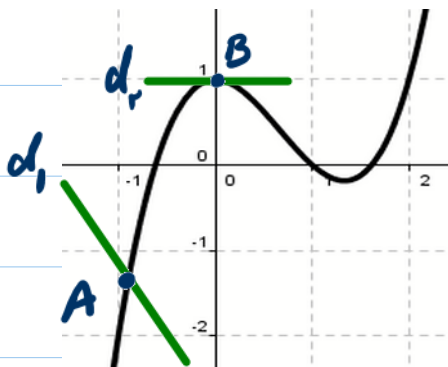
## خط مماس بر منحنی :

در هندسه ، خط مماس بر دایره ، خطی است که در آن نقطه دایره را فقط در یک نقطه قطع می کند .

ولی این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی ها صادق نیست .



منزوا در تابع زیر را در نظر بگیرید .



از لحاظ احساسی خط  $d_1$  در B

بر تابع مماس است ولی خط  $d_2$  در A

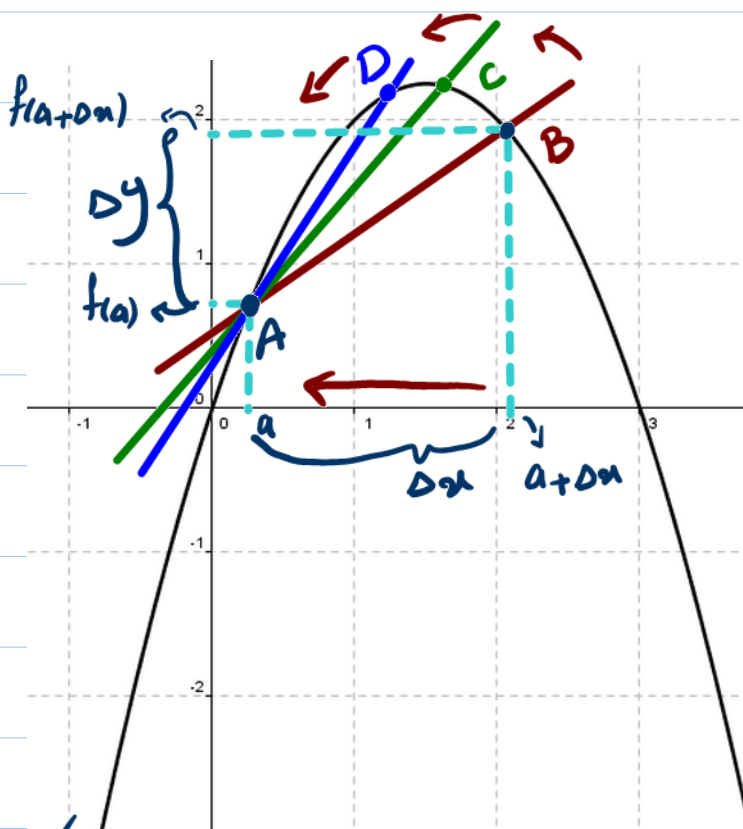
بر منحنی تابع مماس نیست .

## تعریف فیردین از خط مماس :

خط راستی است که منحنی تابع را در آن نقطه فقط لمس می کند . به صورت فیردین

خطی تری می شود که از دو نقطه واقع بر منحنی که بی نهایت به یکدیگر نزدیک اند می گذرد.

مثال: تابع  $y = -x^2 + 3x$  را از نظر بگیرید.



هر خطی که از دو نقطه منحنی می گذرد

را خط قاطع می گوئیم مانند:

$AB, AC, AD$ .

فرض کنید نقطه  $A$  ثابت باشد و نقطه  $B$  را به نقطه  $A$  نزدیک و نزدیکتری کنیم.

این عمل به کار این است که  $\Delta x \rightarrow 0$ . ضمن انجام این عمل، خط قاطع حول

نقطه ثابت  $A$  می گردد. این خط قاطع را برای یک وضعیت جاری است.

همین وضعیت جاری است که ما می خوانیم خط مماس بر منحنی در نقطه  $A$  باشد.



حال اگر شیب خط قاطع  $AB$  را  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  در نظر بگیریم. باری نام این عمل حدی شیب

خط قاطعی که به نقطه  $A$  بسیار نزدیک است به صورت:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  خواهد بود.

**تعریف دقیق خط مماس:**

مفروض کنید تابع  $f$  در  $x=a$  پیوسته باشد، خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه

$A(a, f(a))$  عبارت است از خطی که از نقطه  $A$  می‌گذرد و دارای شیب است

که از می به حد زیر بدست می‌آید:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد موجود باشد.

**تذکره مهم:** اگر حد بالا نامتناهی شود یعنی:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$  آنگاه خط مماس، خط

$x=a$  تعریف می‌شود.

**نکته:** اگر هیچکدام از حالت‌های بالا برقرار نباشد آنگاه خط مماس در  $A$  وجود ندارد.

**سؤال:** معادله خط مماس بر منحنی تابع  $y = x^2 + 3$  را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

$$a = x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7 \rightarrow A(-2, 7)$$

نقطه مماس

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{((-2 + \Delta x)^2 + 3) - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\Delta x + \Delta x^2 + 3 - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 - 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\Delta x - 4)}{\Delta x} = 0 - 4 = -4$$

$$y - 7 = -4(x + 2)$$

$$y = -4x - 8 + 7 \rightarrow y = -4x - 1 :$$

معادله خط مماس در نقطه  $A(-2, 7)$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

قسمت دوم

جلسه دوم: صفحات ۷۷ تا ۸۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش  
و پرورش استان  
همدان

معاونت آموزش  
متوسطه

اداره تکنولوژی و  
گروه های  
آموزشی

گروه ریاضی  
استان همدان

در جلسه قبل با تعریف خط مماس آشنا شدیم. حال به بحث اصلی یعنی مشتق می پردازیم.

## تعریف مشتق:

اگر  $f$  در  $a \in D_f$  باشد مشتق تابع  $f$  در نقطه  $a$  را با  $f'(a)$  نشان می دهیم و این گونه تعریف می کنیم:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

همانطور که می بینید شیب خط مماس بر نمودار تابع  $f$  در نقطه  $A(a, f(a))$

دقیقاً برابر مشتق تابع  $f$  در  $a$  است. به حد بالا شیب منحنی در  $a$  گفته می شود.

**نکته:** اکثر اوقات از  $h$  به جای  $\Delta x$  (استفاده می شود) و تعریف مشتق به این صورت

نوشته می شود:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: اگر  $f(x) = 3x^2 + 12$  باشد، مشتق تابع  $f$ ، در نقطه  $x = a$  را بیابید.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h)^2 + 12 - (3a^2 + 12)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 + 12 - 3a^2 - 12}{h}$$

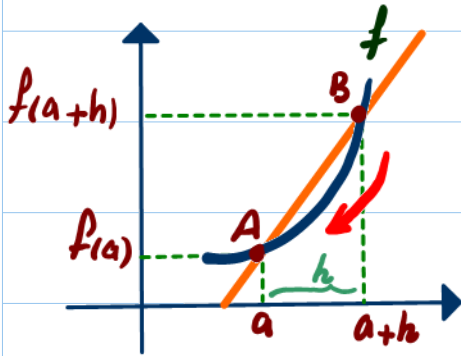
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h + 6a)}{h}$$

$$= 3 \times 0 + 6a = 6a$$

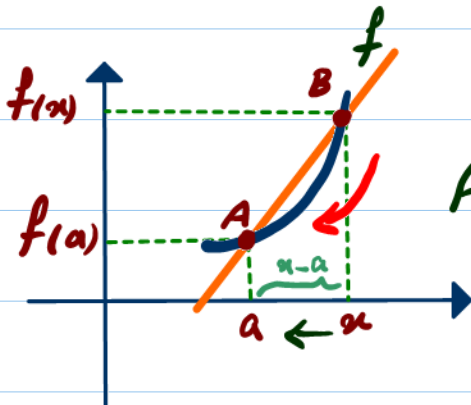
$$f'(a) = 6a$$

حالتی جزو هم با تعیری در بنا گذاری ها تعریف دیگر از مشتق ارائه دهیم. به شکل های

زیر وقت کنید



$$A \text{ در } f \text{ در } \text{شیب خط مماس} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$A \text{ در } f \text{ در } \text{شیب خط مماس} = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تعریف دیگر برای مشتق:

اگر  $a \in D_f$  باشد، مشتق تابع  $f$  در  $x=a$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرطی که حد بالا وجود داشته باشد.

مثلاً،  $f'(1), f'(0)$  :  $f(x) = -x^2 + 10x$  :  $f'(0)$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= -0^2 + 10 \times 0 \\ &= -0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + 10x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x^2 - 10x + 0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x-0)^2}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} -(x-0) = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= -1^2 + 10 \times 1 \\ &= -1 + 10 = 9 \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 10x - 9}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - 10x + 9)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x-9)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(x-9)$$

$$= -(1-9) = 8$$

مثال: مقدار مشتق تابع  $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-5)$  را در نقطه  $x=5$  حساب کنید.

$$f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-1)\dots(x-5) - 0}{x-5}$$

$$f(5) = (5-1)(5-2)\dots(5-5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال: اگر  $f(2) = 5$  و  $f'(2) = -3$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2}$  را بیابید.

از اتحاد فرابج استفاده می‌نماید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - f(2))(f(x) + f(2))}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + f(2)}{x+2}$$

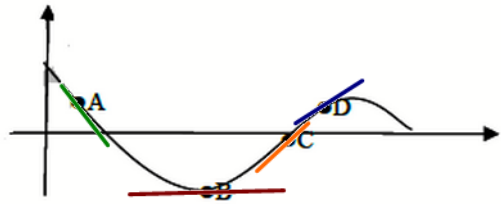
$$= f'(2) \times \frac{f(2) + f(2)}{2+2} = -3 \times \frac{2 \times 5}{4} = -3 \times \frac{5}{2}$$

$$= -\frac{15}{2}$$

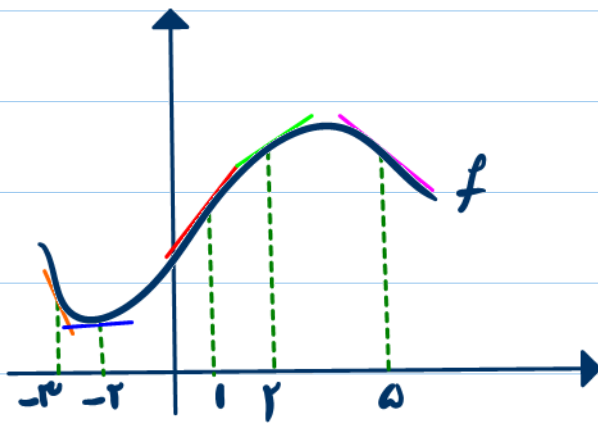


**مثال:** نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{1}{2}$	-۲
نقطه	C	B	D	A



**مثال:** با در نظر گرفتن نمودار تابع  $f$  در شکل زیر، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.



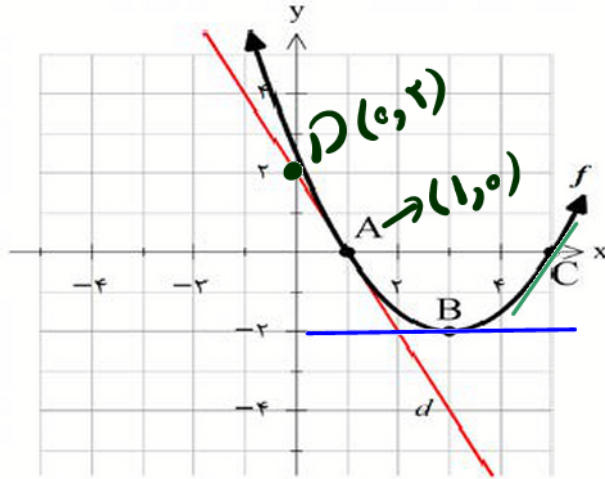
درست زیرا خط مماس در  $x=1$  شیب بیشتری دارد  $f'(1) > f'(2)$  (درست)

درست زیرا خط مماس در  $x=5$  شیب بیشتری دارد  $f'(5) > f'(-3)$  (ب)

نادرست زیرا عدد منفی  $f'(-2) < f'(5)$  (ب)

درست.  $f'(-3) < f'(-2) < f'(2) < f'(1)$  (ب)

مثال: در نمودار مقابل خط  $d$  در نقطه  $x = 1$  بر نمودار مماس شده است:  
 الف) مشتق تابع  $f$  را در نقطه  $x = 1$  محاسبه کنید.  
 ب) شیب نمودار را در نقاط  $C, B$  مقایسه کنید.



شیب خط مماس بر  $f$  در نقطه  $A = f'(1)$  (الف)

$$m_d = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2 - 0}{0 - 1} = -2 \rightarrow f'(1)$$

ب)  $m_C > m_B$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق

جلسه سوم: حل تمرین

صفحات ۸۱ و ۸۲

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش  
و پرورش استان  
همدان

معاونت آموزش  
متوسطه

اداره تکنولوژی و  
گروه های  
آموزشی

گروه ریاضی  
استان همدان

۱ اگر  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ،  $f'(2)$  را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی  $f$  را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$$

$3 \times 2 - 2 \times 2 + 1 = 12 - 4 + 1 = 9$

$3x^2 - 2x - 8 \quad | \quad x - 2$

۳	-۲	-۸
۳	$3 \times 2 - 2 = 4$	$2 \times 2 - 8 = 0$

ردیف هدرز

خارج‌قوت:  $3x + 4$

باقی‌مانده

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = 3 \times 2 + 4 = 10$$

$m = f'(2) = 10$        $A(2, f(2)) \Rightarrow A(2, 9)$

م

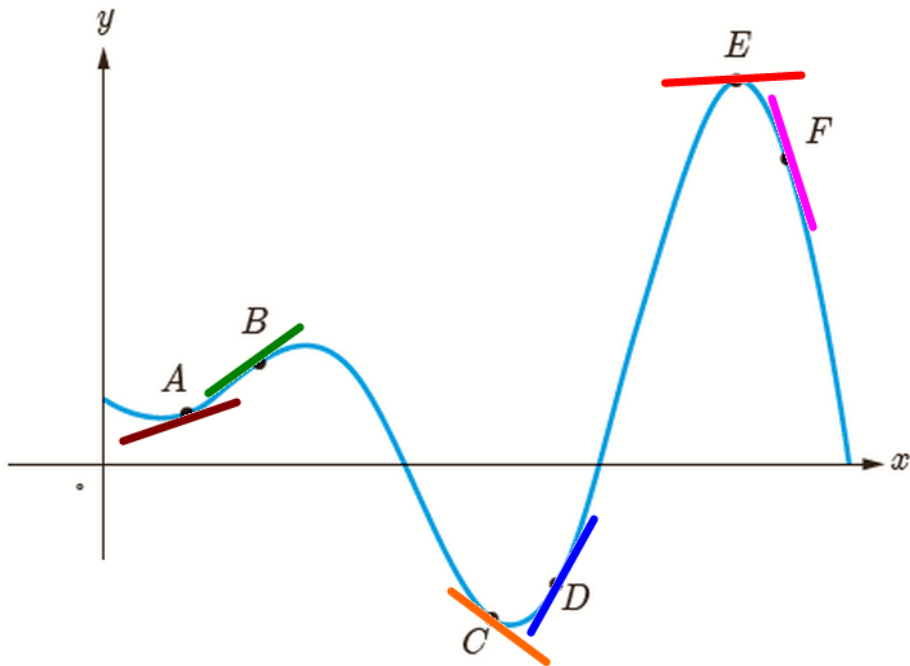
$$y - 9 = 10 \cdot (x - 2)$$

$$y = 10x - 20 + 9 \Rightarrow y = 10x - 11$$

معادله خط مماس در  $A$

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	نقطه
-۳	F
-۱	C
۰	E
$\frac{1}{2}$	A
۱	B
۲	D



۳ برای نمودار  $y = f(x)$  در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

الف) شیب نمودار در نقطه  $A$  :  $m_1$

ب) شیب نمودار در نقطه  $B$  :  $m_2$

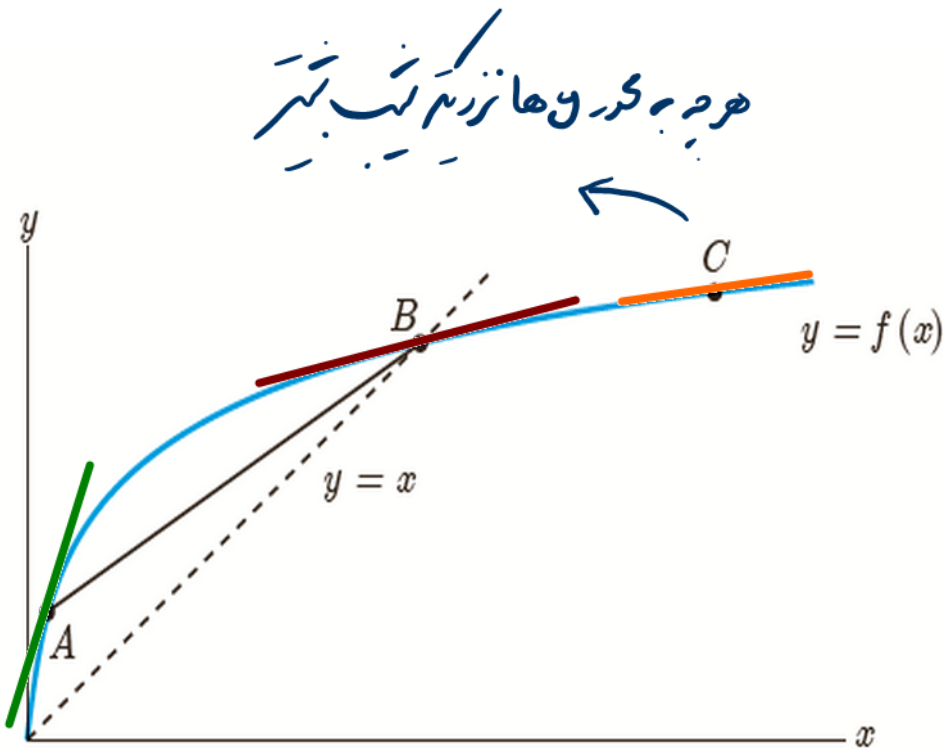
پ) شیب نمودار در نقطه  $C$  :  $m_3$

ت) شیب خط  $AB$  :  $m_4$

ث) شیب خط  $y=2$  :  $m_5 = 0$

ج) شیب خط  $y=x$  :  $m_6 = 1$

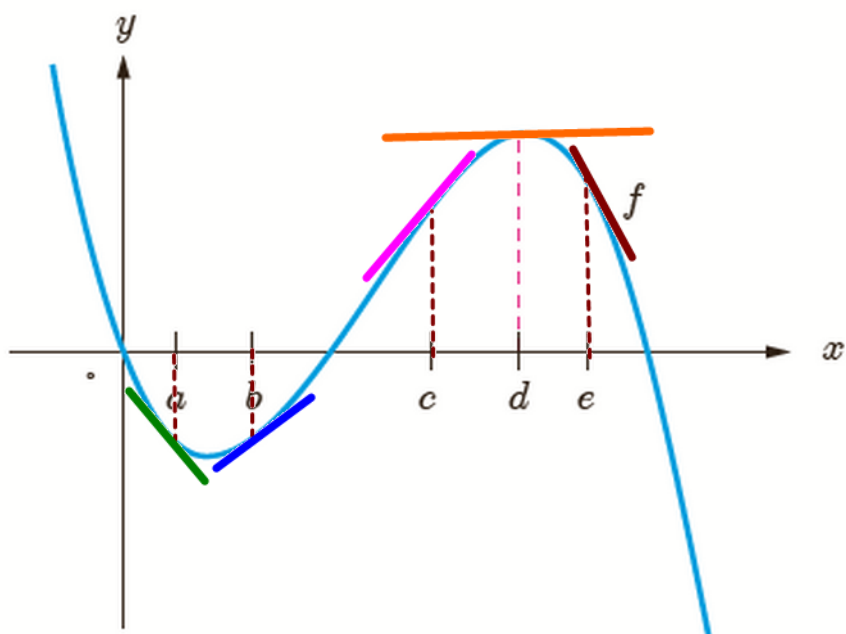
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب  $m_1, m_2, \dots, m_6$  در نظر بگیرید.



$$m_5 < m_3 < m_2 < m_4 < m_6 < m_1$$

با در نظر گرفتن نمودار  $f$  در شکل، نقاط به طول‌های  $a, b, c, d, e$  و  $e$  را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

$x$	$f'(x)$
$d$	$0$
$b$	$0.5$
$c$	$2$
$a$	$-0.5$
$e$	$-2$



۵ نقاطی مانند  $A, B, C, D, E, F, G$  را روی نمودار  $y = f(x)$  مشخص کنید به طوری که:

الف)  $A$ ، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

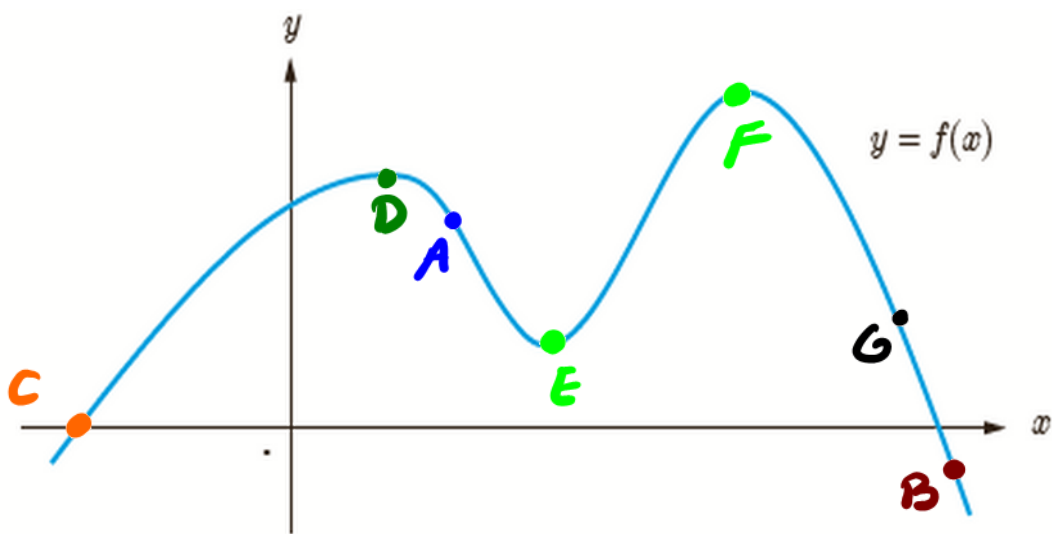
ب)  $B$  نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ)  $C$  نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت)  $D$  نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط  $E$  و  $F$  نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج)  $G$  نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.





۶ اگر  $f(x) = x^3 - 2$ ،  $f'(-1)$  را به دست آورید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2 - (-3)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1}$$

$$= (-1)^2 - (-1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

۷ نقاط  $A, B, C, D, E, F$  را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. **نادرست**

ب)  $m_A < m_B$  (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه  $A$  را **نادرست** با  $m_A$  نمایش داده‌ایم)

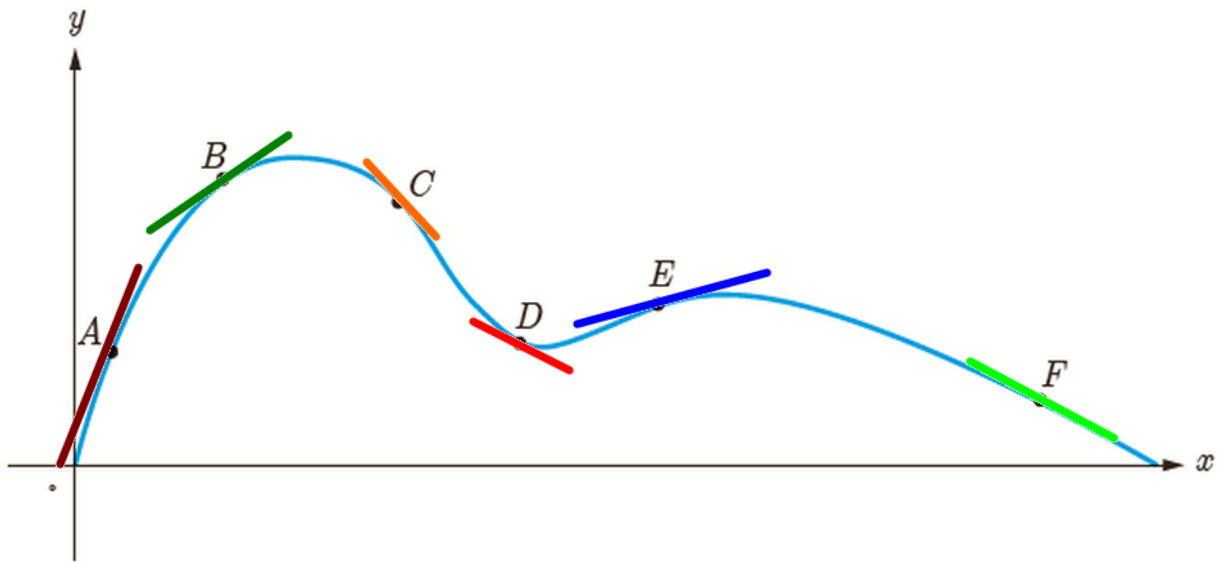
پ)  $m_E < m_B < m_A$  **درست**

ت) شیب منحنی در نقاط  $F, D, C$  منفی است. **درست**

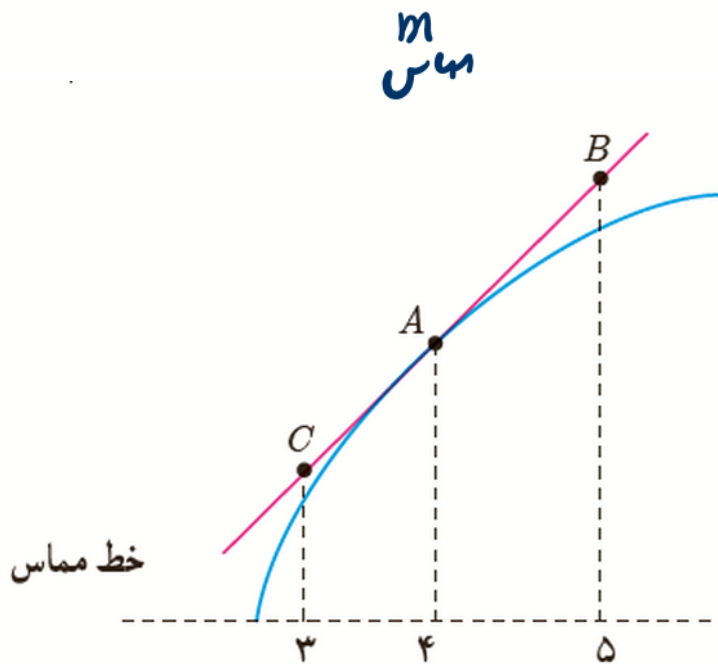
ث)  $m_F < m_D < m_C$  **نادرست** ←

ج)  $m_C < m_D < m_F < m_B < m_A$  **درست**

**درست این قمت :**  $m_C < m_D < m_F$



۸ برای تابع  $f$  در شکل روبه‌رو داریم:  $f'(4) = 1/5$  و  $f(4) = 25$  با توجه به شکل مختصات نقاط  $A$ ,  $B$ , و  $C$  را بیابید.



$$A(4, f(4)) \rightarrow A(4, 25)$$

معادله خط مماس بر  $f$  در  $A$ :

$$y - 25 = 1,5(x - 4)$$

$$y = 1,5x - 6 + 25 \rightarrow y = 1,5x + 19$$

$$x_B = 5 \xrightarrow{\text{روی خط مماس}} y_B = 1,5 \times 5 + 19 = 7,5 + 19 = 26,5$$

$$x_C = 3 \xrightarrow{\text{روی خط مماس}} y_C = 1,5 \times 3 + 19 = 4,5 + 19 = 23,5$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت اول

جلسه چهارم: صفحات ۸۴ تا ۸۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش  
و پرورش استان  
همدان

معاونت آموزش  
متوسطه

اداره تکنولوژی و  
گروه های  
آموزشی

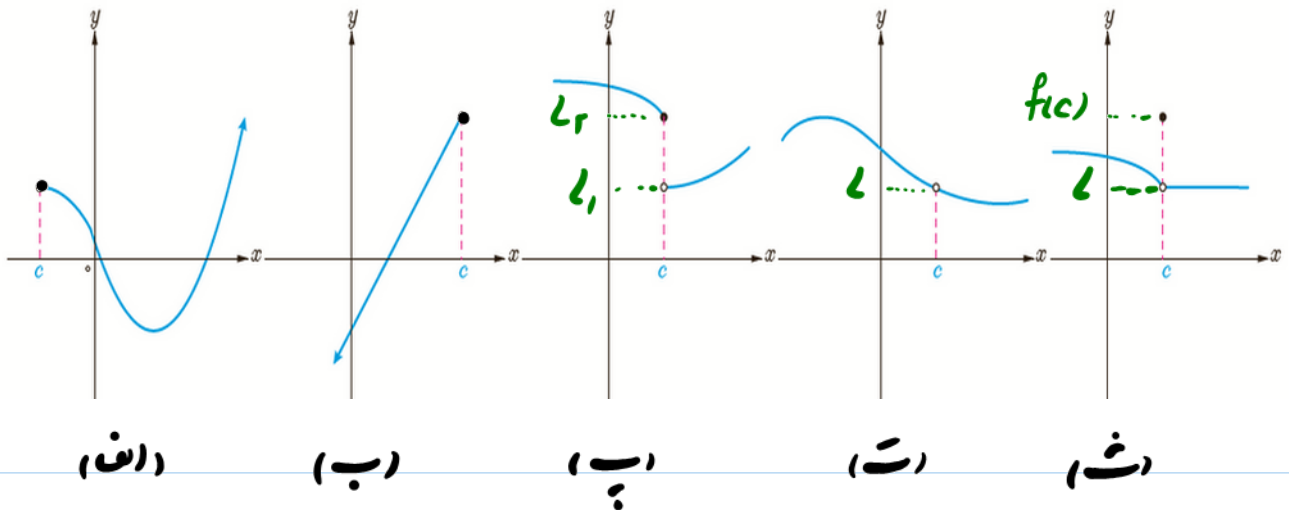
گروه ریاضی  
استان همدان

یادآوری:

تعریف یونانی: تابع  $f$  را در  $x=c$  پیوسته گوئیم هرگاه:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

یعنی مقادیر  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  و  $f(c)$  مورد و با هم برابر باشند.

مثال:



(الف)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجود نیست پس  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  وجود ندارد پس تابع در  $x=c$  پیوسته نیست.

(ب)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  موجود نیست پس  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  وجود ندارد پس تابع در  $x=c$  پیوسته نیست.

(ج)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c} f(x)$  پس  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  وجود ندارد پس تابع در  $x=c$  پیوسته نیست.

(ت)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  وجود دارد ولی  $f(c)$  موجود نیست پس تابع در  $x=c$  پیوسته نیست.

(ث)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  و  $f(c)$  هر دو موجودند ولی با هم برابر نیستند پس تابع در  $x=c$  پیوسته نیست.

مشق یک طرفه:

$$x=a, \text{ مشق جانبی } f, \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \vee \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همین دبا  $f'_+(a)$  نیستی هم.

$$x=a, \text{ مشق جانبی } f, \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \vee \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

همین دبا  $f'_-(a)$  نیستی هم.

مثال: مشق جانبی و جانبی  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ x^2 + 5 & x < 2 \end{cases}$  در  $x=2$  با هم.

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 5 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 = 4$$

دقت کنید مقدار  $f(2)$  برای مشق جانبی و جانبی از ضابطه اول بدست می آید.

حال من خود هم دارد بحث مشتق پذیری توکم، یعنی بدانیم که تابع در چه نقطه ای مشتق دارد و

در چه نقطه ای مشتق ندارد.

**تعریف:** تابع  $f$  را در  $a$  مشتق پذیر می گوئیم اگر  $f'(a)$  وجود داشته باشد.

**تذکره:** وجود  $f'(a)$  این معناست که مشتق های چپ و راست موجود، مشخص و برابر باشند.

**تفسیر:** اگر تابع  $f$  در  $a$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $f$  در  $a$  پیوسته است.

**اثبات:** بنا به فرض  $f$  در  $a$  مشتق پذیر است پس  $f'(a)$  وجود دارد یعنی:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{وجود دارد}$$

شترت وجود بودن  $f'(a)$  برقرار است زیرا در زیر این صورت حد با بی معناست.

حد متناهی را در نظر بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a))$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left( (x-a) \times \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$= 0 \times f'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(a) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**نتیجه:** اگر تابع  $f$  در  $x=a$  پیوسته نباشد در  $a$  مشتق نیز هم نیست.

**تذکر:** عکس قضیه بالا درست نیست. یعنی اگر  $f$  در  $x=a$  پیوسته باشد لزوماً

در  $a$  مشتق نیز نیست.

**مثال:** مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 2 \\ 1-x & x > 2 \end{cases}$  را در  $x=2$  بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-1) = 0, \quad \underline{f(2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0 \quad \text{پس تابع } f \text{ در } x=2 \text{ پیوسته است}$$

$$\underline{f'_+(2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

$$\underline{f'_-(2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

$$\underline{f'_+(2)} \neq \underline{f'_-(2)}$$

پس تابع  $f$  در  $x=2$  مشتق پذیر نیست.



**مثال:** مشتق پذیری تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$  را در  $x=1$  بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \quad f(1) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

چون تابع در  $x=1$  پیوسته نیست لذا مشتق پذیر هم نخواهد بود.

**مثال:** اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x > 2 \\ x^2+b & x < 2 \end{cases}$  در  $x=2$  مشتق پذیر باشد،  $a$  و  $b$  را بیابید.

شرط پیوستگی:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} ax+1 = 2a+1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2+b = 4+b, \quad \underline{f(2) = 2a+1}$

$$\Rightarrow 2a+1 = 4+b \rightarrow 2a+1-4=b \rightarrow b = 2a-3$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax+1 - (2a+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax+1-2a-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(x-2)}{x-2} = a$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+b - (2a+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + \overset{2a-3}{b} - 2a - 1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2+2 = 4$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow a = 4 \rightarrow b = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$$

$$a = 1, b = 0$$

مثال: اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$  نشان دهید  $f_+(0)$  و  $f_-(0)$  موجودند ولی  $f'(0)$  موجود نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0^2 = 0, \quad \underline{f(0) = 0} \rightarrow \text{با } x=0 \text{ مطابقت دارد}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$$f'_+(0) \neq f'_-(0) \Rightarrow f'(0) \text{ موجود نیست.}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت دوم

جلسه پنجم: صفحات ۸۶ تا ۸۹

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش  
و پرورش استان  
همدان

معاونت آموزش  
متوسطه

اداره تکنولوژی و  
گروه های  
آموزشی

گروه ریاضی  
استان همدان

## مشق پذیریت

رشته اول: همانطور که در جلسه قبل دیدیم تابع در نقاطی که در آن ها پیوسته نیست

مشق پذیر نیست.

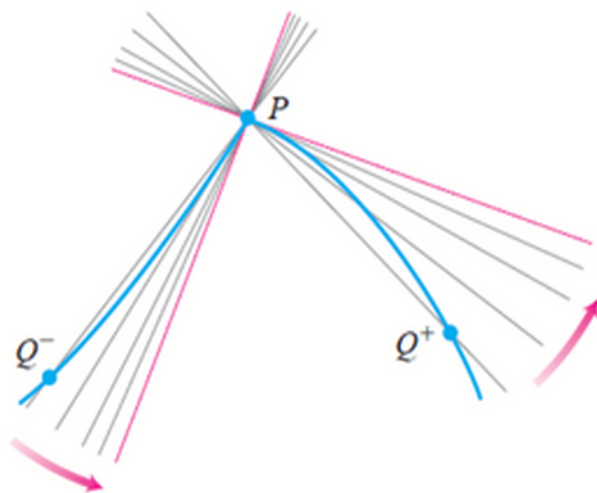
رشته دوم: اگر  $f$  در  $a$  پیوسته باشد، چنانچه مشتق های چپ و راست

موجود، مناسبتی و نابرابر باشند و یا حد اولی از مشتق های چپ و راست

ناسابتی باشد،  $f$  در  $a$  مشق پذیر نیست. بر این نقطه، نقطه گوشه ای

یا زاویه دار می گوئیم.

تذکر: در نقاط گوشه ای دو نیم مماس بر تابع قابل رسم است.



سؤال: به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع  $f(x) = |x^2 - 4|$  را در  $x = 2$  بررسی کنید.

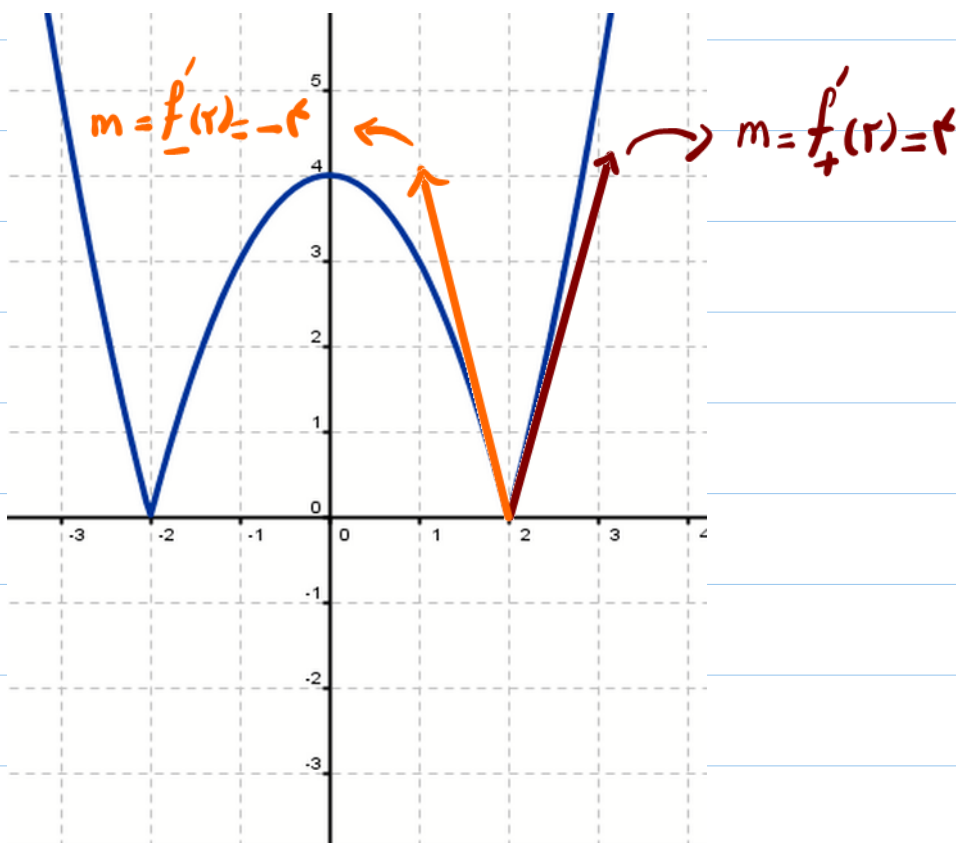
$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

	$x \rightarrow 2^+$	$x \rightarrow 2^-$
$x^2 - 4$	+	-
$x - 2$	+	-

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

چون  $f'_+(2) \neq f'_-(2)$  مشتق پذیری در این نقطه برقرار نیست.



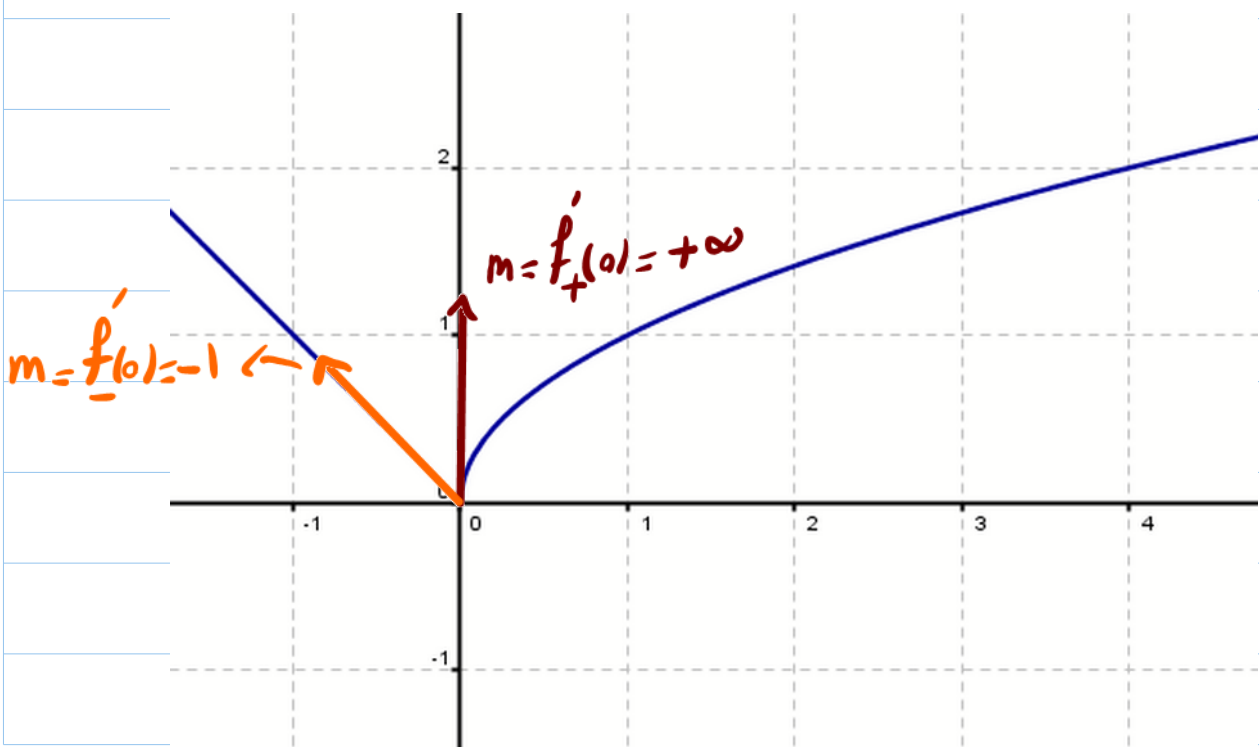
مثال: نشان دهید تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$  در نقطه گسسته ای دارد.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x \times \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

چون  $f'_+(0) \neq f'_-(0)$  در این نقطه نقطه گسسته ای داریم.



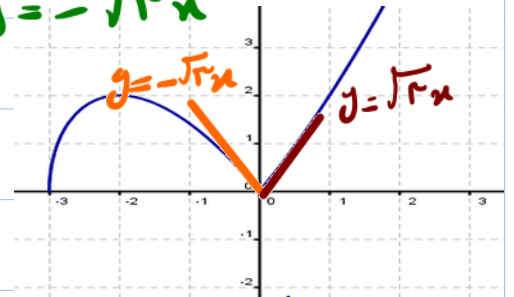
**مثال:** معادله نیم‌مماس‌های قبی‌رسم بر تابع  $f(x) = |x|\sqrt{x+4}$  را در  $x=0$

بدست آورید.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{x+4} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+4}}{x} = \sqrt{4}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|\sqrt{x+4} - 0}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{x+4}}{x} = -\sqrt{4}$$

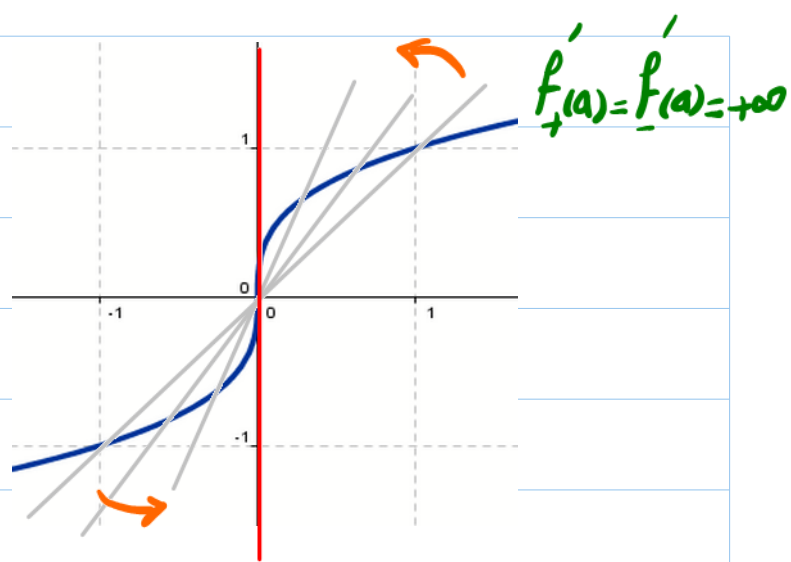
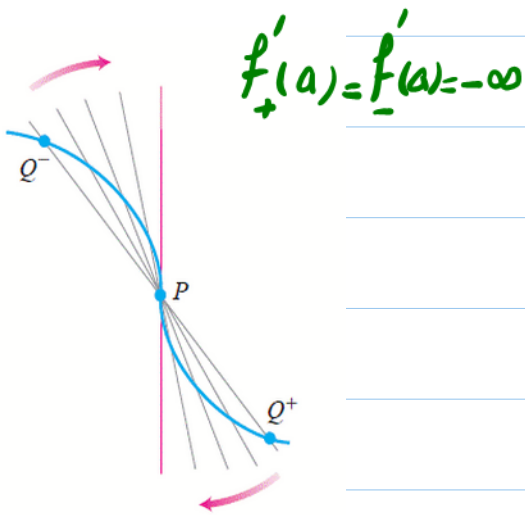
نیم‌مماس راست:  $y - 0 = \sqrt{4}(x - 0) \rightarrow y = \sqrt{4}x$   $A(0,0)$   
نیم‌مماس چپ:  $y - 0 = -\sqrt{4}(x - 0) \rightarrow y = -\sqrt{4}x$



**دسته سوم:** اگر  $f$  در  $x=a$  پیوسته باشد و مشتق‌های چپ و راست در  $a$  نامساوی

و هم‌علامت باشند،  $f$  در  $x=a$  مشتق‌پذیر نیست.

**نکته:** در این حالت تابع در این نقطه دارای **مماس قائم** با معادله  $x=a$  است.



مثال: مشتق پذیری تابع  $y = \frac{\sqrt[n]{x-1}}{x}$  را در  $n=1$  بررسی کنید.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\sqrt[n]{x-1}}{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[n]{x-1}}{x(x-1)} \times \frac{\sqrt[n]{(x-1)^n}}{\sqrt[n]{(x-1)^n}}$$

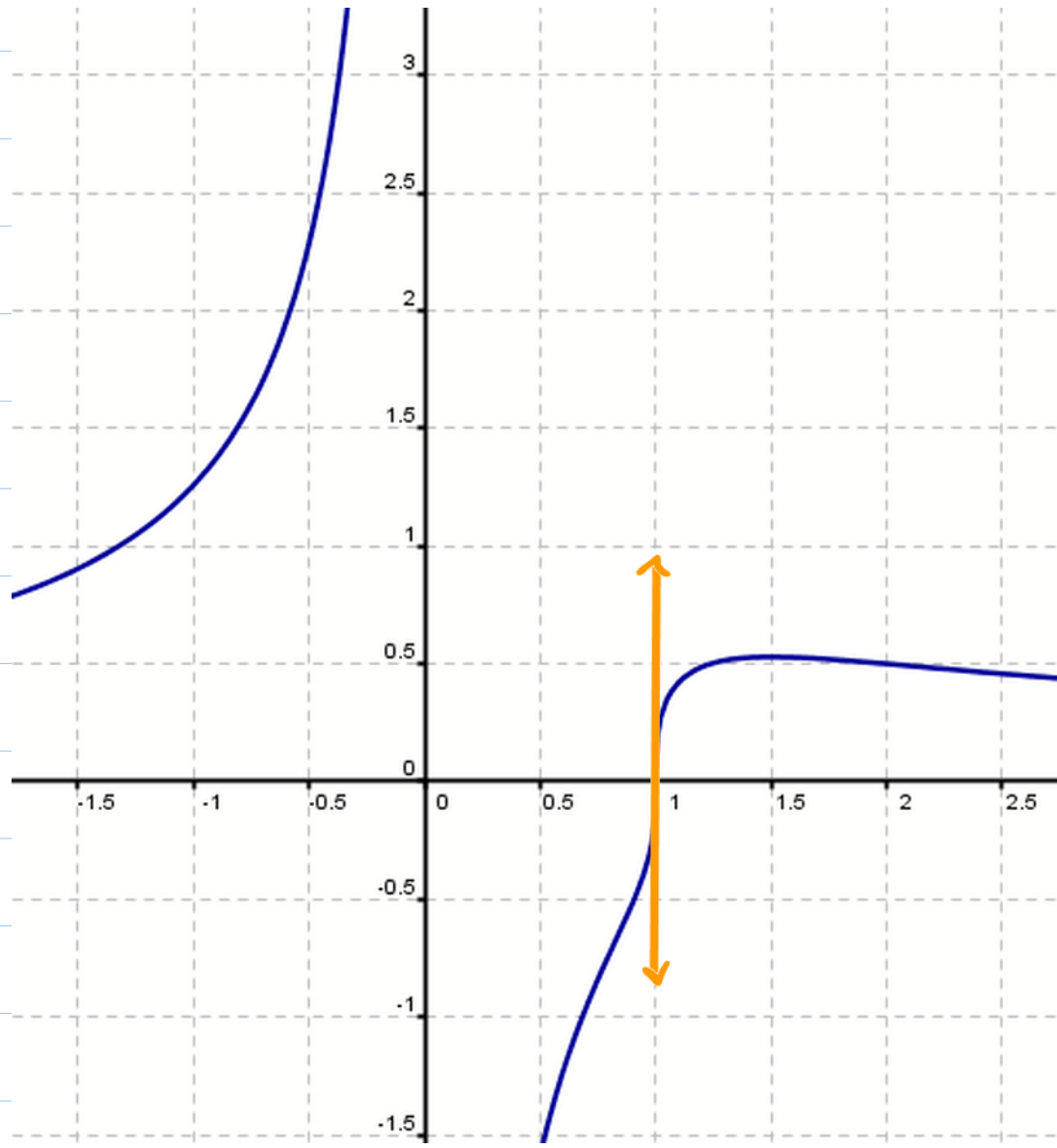
$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{\sqrt[n]{x-1}}^n}{x \cancel{(x-1)} \sqrt[n]{(x-1)^n}} = \frac{1}{1 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)}{x(x-1) \sqrt[n]{(x-1)^n}} = \frac{1}{1 \times 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

به طریقی که :

این تابع در  $n=1$  مشتق پذیر نیست و تابع در این نقطه مماس قائم دارد.



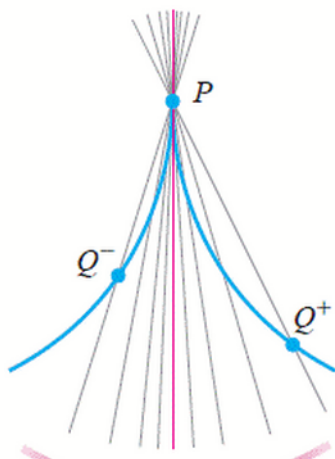


دسته چهارم: اگر  $f$  در  $a=0$  پیوسته باشد و مشتق چپ در  $a$  نامشعب و

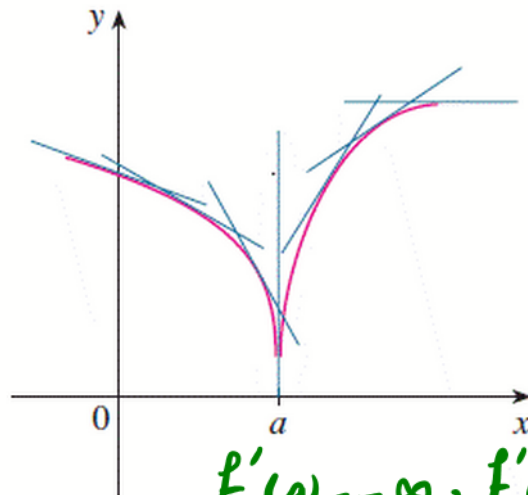
مشتق راست باشد،  $f$  در  $a$  مشتق پذیر نیست. به این نقطه، نقطه

بازگشت گفته می شود.

نکته: در نقطه بازگشت مساحت قائم بر باریج قابل رسم است.



$$f'_-(a) = +\infty, f'_+(a) = -\infty$$



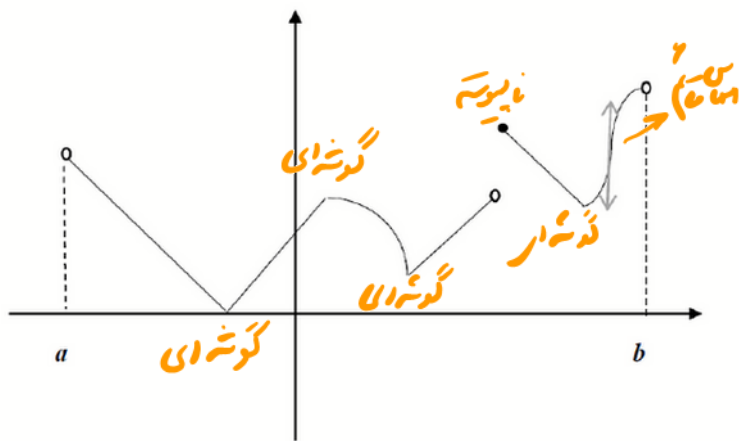
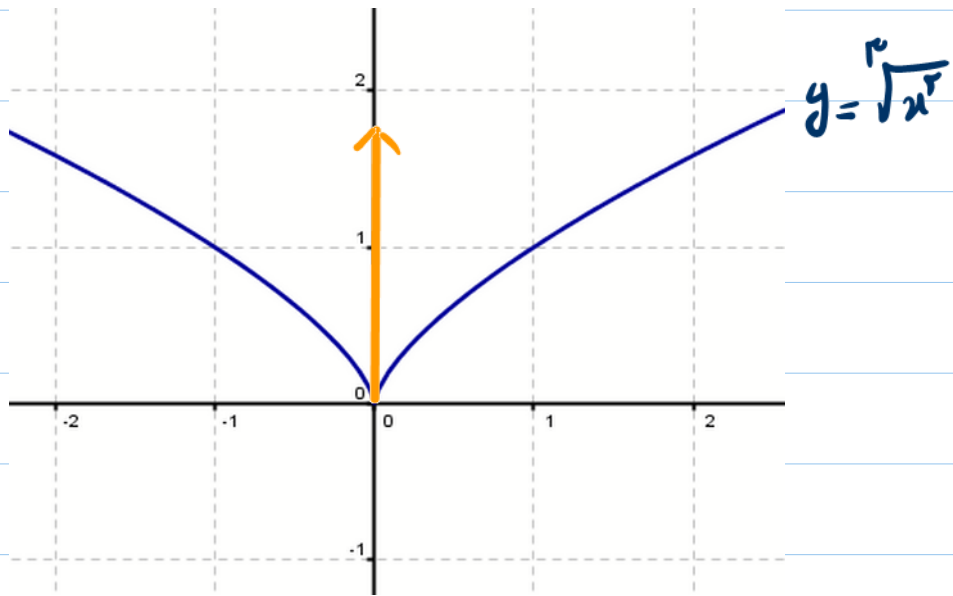
$$f'_-(a) = -\infty, f'_+(a) = +\infty$$

مثال: نشان دهید باریج  $y = \sqrt{x}$  در  $a=0$  مشتق پذیر نیست.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

به طریقی به



**مثال:** نمودار تابع  $f$  با دامنه  $(a, b)$  به شکل مقابل است.

این تابع در چند نقطه از دامنه اش مشتق پذیر نیست؟

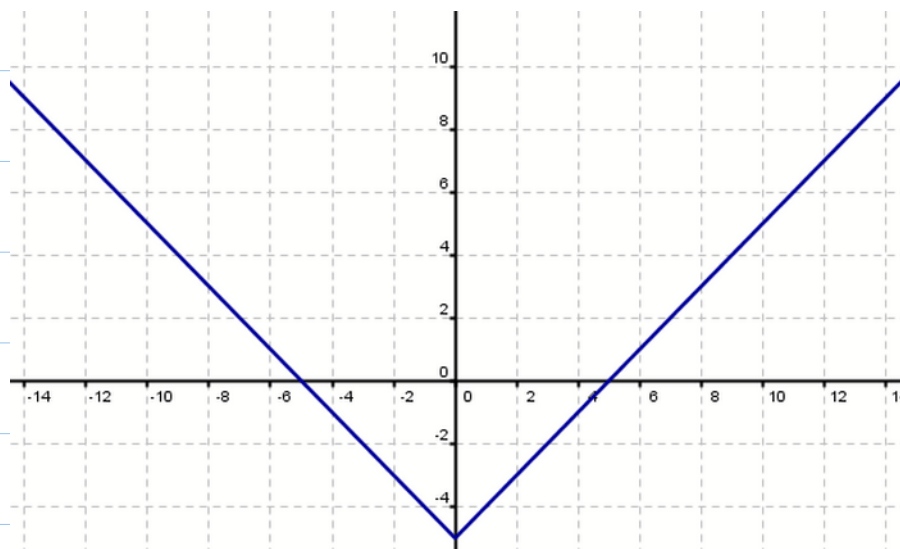
- (۱) چهار نقطه
- (۲) پنج نقطه
- (۳) شش نقطه
- (۴) هفت نقطه

**مثال:** توابع زیر در چند نقطه مشتق پذیر نیستند.

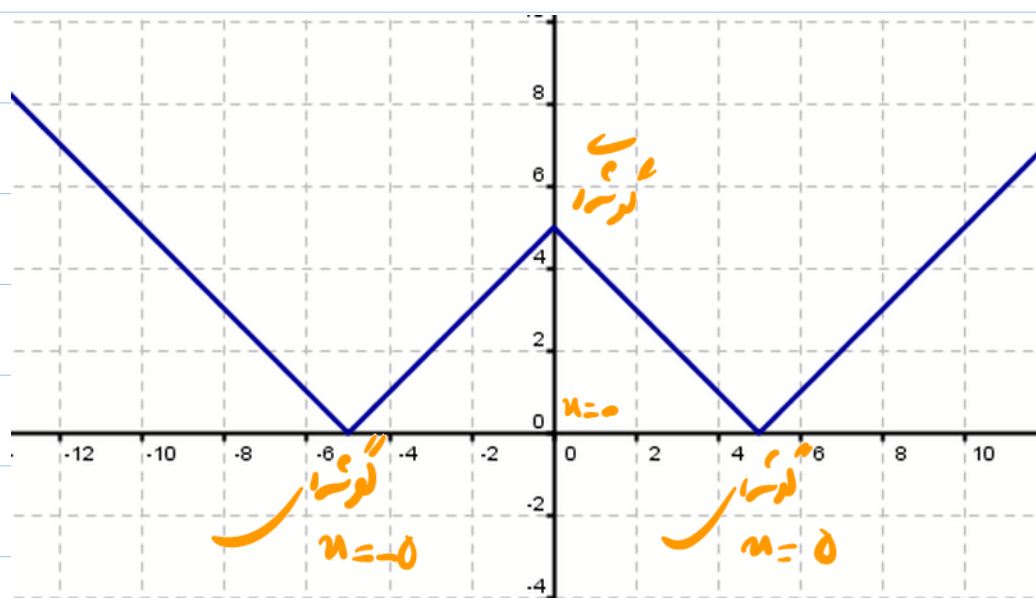
الف)  $f(x) = ||x| - 5|$

ب)  $g(x) = |2x - |x - 3||$

$$f(x) = |x| - 5 \quad \text{الف}$$



$$f(x) = ||x| - 5|$$



درسه نقطه

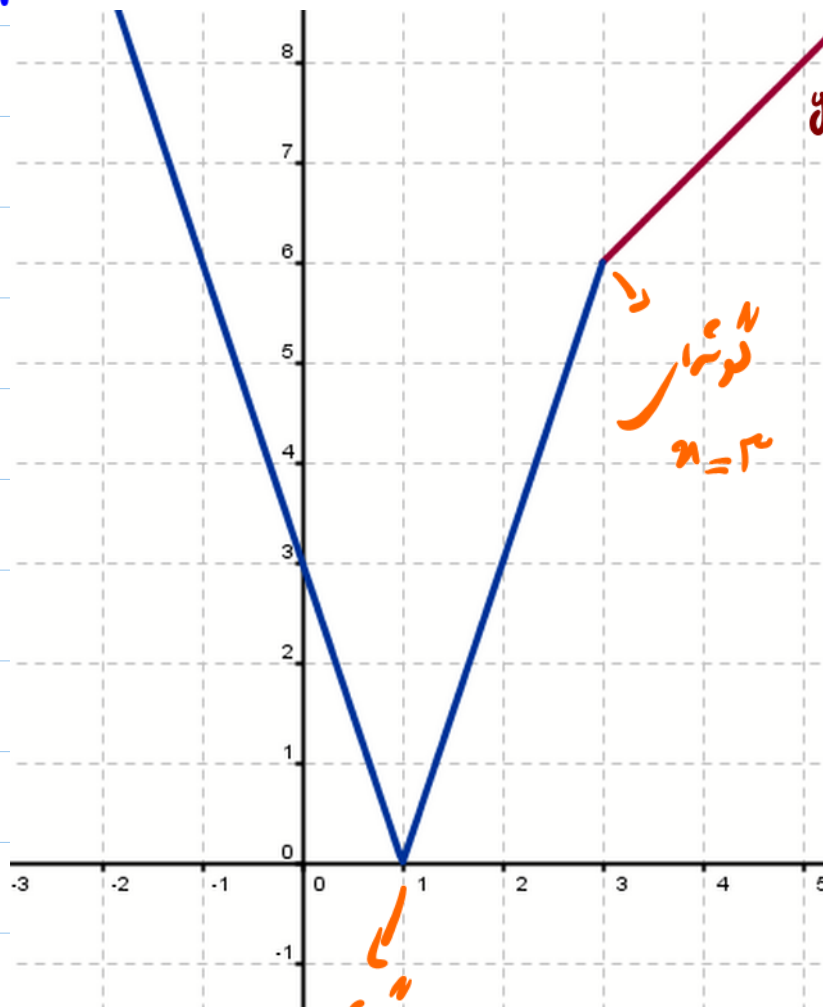
$$\text{ب) } g(x) = |2x - |x - 3||$$

$$x > 3 \rightarrow g(x) = |2x - x + 3| = |x + 3| = x + 3$$

$$x < 3 \rightarrow g(x) = |2x - (-(x - 3))| = |2x + x - 3| = |3x - 3|$$

$$g(x) = \begin{cases} |3x - 3| & x \leq 3 \\ x + 3 & x > 3 \end{cases}$$

$$y = |3x - 3|$$



نقطه کسره  
 $x=1$

در رونق

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت سوم

جلسه ششم: صفحات ۹۰ تا ۹۶

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش  
و پرورش استان  
همدان

معاونت آموزش  
متوسطه

اداره تکنولوژی و  
گروه های  
آموزشی

گروه ریاضی  
استان همدان

## تابع مشتق :

**تعریف:** تابع مشتق  $f'$  که با  $f$  هم‌پایه دارد و هرگز تابعی است که دامنه‌اش معکوسه

همه نقاطی است که تابع در آنجا مشتق پذیر است و مقدار آن در نقطه  $a$  از

دامنه‌اش برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**مثال:** تابع مشتق  $f(x) = \sqrt{x}$  را بدست آورید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

همانطور که تا بحال دیدیم یافتن مشتق یک تابع با استفاده از تعریف، خیلی زمان بر است.

مانند آنچه در مثال قبل برای تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  دیدیم، می توانیم

قواعدی را بیان کنیم که با استفاده از آنها مشتق توابع را بیابیم.

## قواعد مشتق گیری

۱. مشتق تابع ثابت صفر است.

مثال:  $f(x) = 0 \rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = 0$

۲. مشتق تابع  $f(x) = ax^n$  برابر است با حاصل ضرب، ضریب عددی در توان متغیر در

متغیر به توان یک واحد کمتر یعنی:  $f'(x) = anx^{n-1}$

مثال:  $y = x \rightarrow y' = 1 \times x^{1-1} = 1 \times x^0 = 1 \times 1 = 1$

$y = 4x \rightarrow y' = 4x^0 = 4$

$y = 5x^3 \rightarrow y' = 3 \times 5x^2$

$y = 2x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2} \times 2x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

حالت خاص:  $(x)' = 1$

$(ax)' = a$



۳. مشتق جمع یا تفریق چند تابع برابر است با جمع یا تفریق مشتق تک تک آنها.

$$f(x) = 9x^4 - 2x^2 + \frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} + 7x - \sqrt{2} \quad \text{مثال:}$$

$$f'(x) = 0 \cdot 4x^3 - 2x + \frac{1}{7} \times \frac{7}{2} x^{\frac{7}{2}-1} + 7 + 0$$

$$f'(x) = 0 \cdot 4x^3 - 2x + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + 7$$

۴. مشتق ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در خود دومی بعلاوه مشتق دومی در خود

$$(f \times g)'(x) = f'g + g'f \quad \text{اولی یعنی:}$$

$$f(x) = (\sqrt{x} + 2)(x^3 + 4x^2 + x) \quad \text{مثال:}$$

$$f'(x) = (\sqrt{x})(x^3 + 4x^2 + x) + (2x^2 + 12x + 1)(\sqrt{x} + 2)$$

۵. مشتق تقسیم دو تابع برابر است با مشتق صورت در خود مخرج منهای مشتق مخرج در

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'g - g'f}{g^2} \quad \text{خود صورت تقسیم بر خود مخرج به توان دو یعنی:}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 9}}{x^2 + 2x} \quad \text{مثال:}$$

$$f'(x) = \frac{(21x^2)(x^2 + 2x) - (2x^2 + 2)(\sqrt{x^3 - 9})}{(x^2 + 2x)^2}$$

صورت خاص : ۱)  $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$  ۲)  $(\frac{a}{x})' = -\frac{a}{x^2}$

۳)  $(\frac{ax+b}{cx+d})' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

مثال :  $y = \frac{1}{x} \rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

$y = \frac{2x+6}{3x-4} \rightarrow y' = \frac{2(-4) - 6(3)}{(3x-4)^2} = \frac{-26}{(3x-4)^2}$

۶. مشتق توابع رادیکالی با فرجه دو برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر دو برابر خود

رادیکال یعنی اگر  $f(x) = \sqrt{u}$  که  $u$  تابع بر حسب  $x$  باشد آنگاه  $f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

مثال :  $f(x) = \sqrt{3x^2 - x + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{6x-1}{2\sqrt{3x^2 - x + 1}}$

$g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}}}$

$h(x) = \sqrt{(x^2+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}$

$h'(x) = \frac{(2x+2)(1-9x+\frac{1}{x}) - (-9-\frac{1}{x^2})(x^2+2x)}{2\sqrt{(x^2+2x)(1-9x+\frac{1}{x})}}$

صورت خاص  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۷. مشتق توابع رادیکالی با فرجه سه برابر است با مشتق زیر رادیکال تقسیم بر سه برابر خود

رادیکال به توان دو یعنی اگر  $f(x) = \sqrt[3]{u}$  که  $u$  تابع بر حسب  $x$  باشد آنگاه

$$f'(x) = \frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

مثال:  $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{2x-8}{x+1}} \rightarrow g'(x) = \frac{\frac{2-(-1)}{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{2x-8}{x+1}\right)^2}}$$

حالت خاص:  $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۸. مشتق هر تابع تواندار برابر است با حاصلضرب ضریب عددی (در صورت وجود) در

توان تابع در خود تابع با توان یک واحد کمتر در مشتق تابع بدون توان یعنی:

$$(au^n)' = anu^{n-1}u'$$

مثال:  $y = 4(3x^6 - 7x + 1)^6$

$$y' = 24(3x^6 - 7x + 1)^5(18x^5 - 7)$$

$$y = \left( \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x^2} \right)^3$$

$$y' = 3 \left( \frac{1}{x} + \sqrt{x} + \sqrt{2x^2} \right)^2 \times \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{2}x \right)$$

۹. مشتق توابع مثلثاتی:

مشتق سینوس یک کمان برابر است با مشتق کمان در کسینوس همان کمان.

مشتق کسینوس یک کمان برابر است با منهای مشتق کمان در سینوس همان کمان.

مشتق تانژانت یک کمان برابر است مشتق کمان در یک بعلاوه مربع تانژانت همان کمان.

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = u'(1 + \tan^2 u)$$

مثال:

$$y = \sin(2x + 5\sqrt{x})$$

$$y' = \left( 2 + 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \cos(2x + 5\sqrt{x})$$

$$y = \cos\left(\frac{2x+1}{x^2-2x}\right)$$

$$y' = -\frac{2(x^2-2x) - (2x-2)(2x+1)}{(x^2-2x)^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2-2x}\right)$$

$$y = \tan\left(2x + \frac{1}{x}\right)$$

$$y' = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \tan^2\left(2x + \frac{1}{x}\right)\right)$$

**مثال:** مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$1) f(x) = (x^2 + 1)^3 (5x - 1)$$

$$f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 (2x) (5x - 1) + (0)(x^2 + 1)^3$$

$$2) g(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = \frac{(9)(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$3) f(x) = \left(\frac{x^2}{3x - 1}\right)^5$$

$$f'(x) = 5 \left(\frac{x^2}{3x - 1}\right)^4 \times \frac{2x(3x - 1) - (3)x^2}{(3x - 1)^2}$$

$$f) g(x) = (\sqrt{rx+r})(x^r + 1)$$

$$g'(x) = \left( \frac{r}{2\sqrt{rx+r}} \right) (x^r + 1) + (rx^r)(\sqrt{rx+r})$$

$$o) f(x) = \frac{r \sin\left(\frac{x}{r}\right)}{x^r + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(r \times \frac{1}{r} \cos \frac{x}{r}\right)(x^r + \sqrt{x}) - \left(rx + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(r \sin \frac{x}{r})}{(x^r + \sqrt{x})^2}$$

$$y) g(x) = \sin^r(\Delta x)$$

$$g'(x) = r \sin^{r-1}(\Delta x) \times \Delta \cos \Delta x$$

$$v) g(x) = r \tan^r x + \cos x^r$$

$$g'(x) = r \tan^{r-1} x (1 + \tan^2 x) + (-rx) \sin x^{r-1}$$

$$a) g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$g'(x) = \frac{(-\cos x)(\cos x) - (-\sin x)(1 - \sin x)}{\cos^2 x}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی

قسمت چهارم

جلسه هفتم: صفحات ۹۶ تا ۹۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش  
و پرورش استان  
همدان

معاونت آموزش  
متوسطه

اداره تکنولوژی و  
گروه های  
آموزشی

گروه ریاضی  
استان همدان

**مثال:** اگر  $f'(1) = 3$  و  $g'(1) = 5$  باشد، آنگاه حاصل عبارت  $(3f + 2g)'(1)$  برابر ..... است.

$$(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) \quad \text{نکته: } (kf)' = kf'$$
$$= 3 \times 3 + 2 \times 5 = 9 + 10 = 19$$

**مثال:** اگر  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  باشد،  $f'(2)$  را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی تابع  $f$  را در نقطه ای به طول 2 واقع بر آن بنویسید.

**یادآوری نوشتن معادله خط مماس بر  $f$  در نقطه ای روی آن:**

۱- تکمیل معادله نقطه-مماس:

$$m = f'(A)$$

۲- معادله خط مماس:  $y - f(A) = m(x - A)$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow f'(x) = 6x - 2 = 10 \rightarrow m = f'(2) = 10$$

$$x = 2 \rightarrow y = f(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 = 12 - 4 + 1 = 9 \rightarrow (2, 9)$$

$$y - 9 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 20 + 9 \rightarrow y = 10x - 11$$

**مثال:** اگر  $f$  و  $g$  توابع مشتق پذیر باشند و  $f(2) = 3$ ،  $f'(2) = 1$ ،  $g(2) = -3$  و  $g'(2) = 2$ ، مقادیر  $(fg)'(2)$  و  $(f+g)'(2)$  را به دست آورید.

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = 1 \times (-3) + 2 \times 3 = -3 + 6 = 3$$
$$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 1 + 2 = 3$$

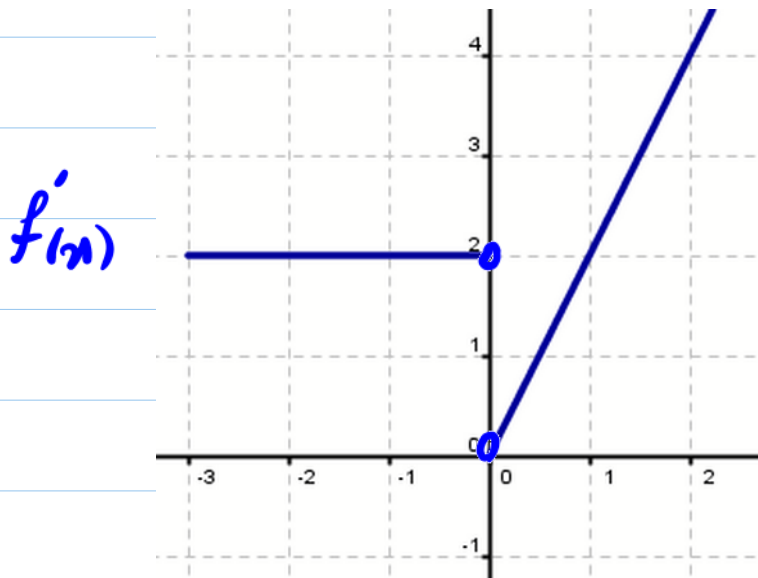


**مثال:** تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$  را در نظر بگیرید:

- الف) نشان دهید  $f'(0)$  وجود ندارد.  
 ب) ضابطه‌ی تابع مشتق را بنویسید.  
 ج) نمودار تابع  $f'$  را رسم کنید.

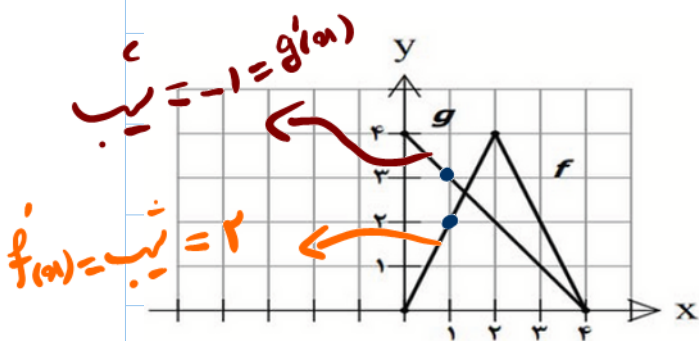
$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ \text{وجود ندارد} & x = 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

تابع در نقطه مشتق پذیر نیست  $f'_-(0) = 2 \neq 0$  ،  $f'_+(0) = 2 \times 0 = 0$



**مثال:** نمودار تابع  $f, g$  را در شکل مقابل در نظر بگیرید.

اگر  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  باشد،  $h'(1)$  را بیابید.



$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \rightarrow h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{g^2(1)}$$

چون تابع  $f$  به شکل درختار و یک خط است، شیب خطها همین تابع مشتق شود یعنی

تیب خط و  $g(x) = ax + b \rightarrow g'(x) = a$  :

$$h'(1) = \frac{2 \times 1^2 - (-1) \times 1}{1^2} = \frac{1+2}{1} = \frac{1}{1}$$

مثال: در تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$  کدام است؟

$\frac{5}{6}$  (۴)

$\frac{7}{12}$  (۳) ✓

$\frac{5}{12}$  (۲)

$\frac{4}{9}$  (۱)

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(5-2x) - (-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}$$

$$f'(4) = \frac{\frac{1}{2}(5-1) + 2 \times 1^2}{(5-1)^2} = \frac{-\frac{1}{2} + 6}{4} = \frac{-\frac{1}{2} + 6}{4} = \frac{\frac{11}{2}}{4}$$

$$= \frac{11}{8} = \frac{11}{8}$$

مثال: مشتق تابع با ضابطه  $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^2$  در نقطه  $x=2$ ، کدام است؟

$-\frac{15}{4}$  (۴) ✓

$-\frac{5}{2}$  (۳)

$-\frac{5}{4}$  (۲)

$-\frac{3}{4}$  (۱)

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x^2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-x)^2 - 2(x^2-x)(2x-1)(x^2+2x)}{(x^2-x)^4}$$

$$f'(u) = \frac{(u^r - u)^r ((ru+r)(u^r - u) - r(ru-1)(u^r + ru))}{(u^r - u)^{2r}}$$

$$f'(u) = \frac{(ru+r)(u^r - u) - r(ru-1)(u^r + ru)}{(u^r - u)^{2r}}$$

$$f'(r) = \frac{(4)(2) - r(r)(1)}{r^4} = \frac{12 - 7r}{16} = \frac{-9}{16} = -\frac{15}{4}$$

مثال: تابع یا ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$  در  $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار  $c$  کدام است؟

$\frac{2}{3}$  (4)       $\frac{1}{3}$  (3) ✓       $-\frac{1}{3}$  (2)       $-\frac{2}{3}$  (1)

شرط پیوستگی:

$$\lim_{u \rightarrow -2^+} -\frac{1}{2}u^2 + bu + c = -2 - 2b + c$$

$$\lim_{u \rightarrow -2^-} \sqrt{5-2u} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3 = f(-2)$$

$$\Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \rightarrow -2b + c = 5 \quad (1)$$

برابری مشتق در دو طرف:

$$f'(u) = \begin{cases} \frac{-2}{2\sqrt{5-2u}} & u < -2 \\ -u + b & u > -2 \end{cases}$$

$$f'_+(-2) = -(-2) + b = 2 + b$$

$$f'_{-}(-2) = \frac{-2}{2\sqrt{8+4}} = \frac{-1}{2}$$

$$f'_{+}(-2) = f'_{-}(-2) \Rightarrow 2+b = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

شرط پیوستگی

$$(1) \rightarrow -2b + c = 0 \rightarrow -2\left(-\frac{5}{2}\right) + c = 0$$

$$c = 0 - \frac{10}{2} \rightarrow c = -5$$

مثال: مقدار مشتق تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt[m]{\left(\frac{2x-x^2}{2x+5}\right)^r}$  در نقطه  $x = -2$ ، کدام است؟

۶ (۴) ✓      ۵ (۳)      ۴ (۲)      ۳ (۱)

$$\left(\sqrt[m]{u^n}\right)' = \frac{n u^{n-1} u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

نیل:

$$f'(x) = \frac{r \frac{(2-x)(2x+5) - (2x-x^2)}{(2x+5)^2}}{m \sqrt[m]{\left(\frac{2x-x^2}{2x+5}\right)^{r-1}}}$$

$$f'(-2) = \frac{r \frac{4(-1) - 2(-4)}{1}}{m \sqrt[m]{\frac{-1}{-1}}} = \frac{r(-4+2)}{m \sqrt[m]{1}} = \frac{r \times 1 \times 2}{4} = 4$$

مشتق تابع مرکب: (قاعده زنجیری)

اگر  $f, g$  دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه:  $(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$

نماد دیگر:  $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

مثال: اگر  $f(x) = x^2 - x + 1$  و  $g(x) = 2 - x^2$ ، مقدار  $(g \circ f)'(1)$  را بیابید.

$$(g \circ f)'(1) = f'(1) g'(f(1))$$

$$f'(x) = 2x - 1 \rightarrow f'(1) = 2 - 1 = 1, \quad f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$g'(x) = -2x \rightarrow g'(f(1)) = g'(1) = -2 \times 1 = -2$$

$$(g \circ f)'(1) = 1 \times (-2) = -2$$

مثال: اگر  $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$  و  $(f \circ g)'(2) = 4$  باشد،  $f'(5)$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱) ✓

$$(f \circ g)'(2) = 4 \rightarrow g'(2) f'(g(2)) = 4 \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{-2-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = \frac{-3}{1} = -3$$

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} (-2) f'(0) = 4 \rightarrow f'(0) = \frac{4}{-2} = -2$$

مشق مرتبه دوم:

اگر تابع مشتق  $y = f(x)$  مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم را با  $y'' = f''(x)$  نمایش می‌دهیم. در برای محاسبه آن از مشتق اول یعنی  $f'(x)$  یک بار دیگر مشتق می‌گیریم.

مثال: مشتق مرتبه دوم توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x) = 5x^3 - 7x^2 + \sqrt{2}x$$

$$f'(x) = 15x^2 - 14x + \sqrt{2}$$

$$f''(x) = 30x - 14$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{2x+1} \rightarrow f(x) = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (2x+1)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) (2x+1)^{\frac{1}{2}-2} = -\frac{1}{4} (2x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-9}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}} \rightarrow f''(x) = \frac{-9}{\sqrt{(2x+1)^3}}$$

مشتق پذیری روی بازه :

الف) تابع  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

ب) تابع  $f$  روی بازه  $[a, b]$  مشتق پذیر است هرگاه  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد

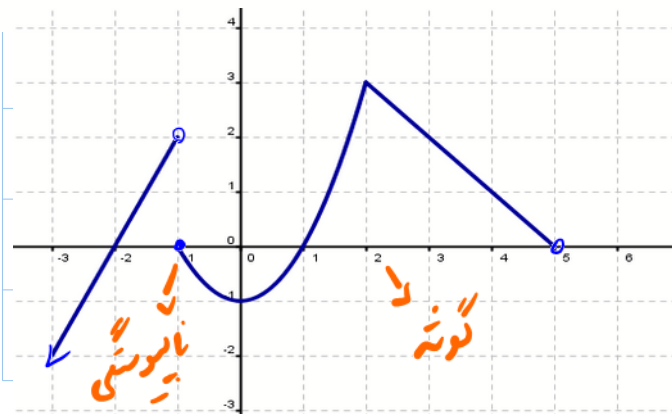
و در  $x=a$  مشتق راست در  $x=b$  مشتق چپ داشته باشد.

پ) مشتق پذیری روی بازه های  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $(-\infty, b)$

$(a, +\infty)$ ,  $(a, +\infty]$  به طرز مشابه قریب شود.

کار در کلاس

$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$  نمودار  $f$  را رسم کنید و مشتق پذیری  $f$  را روی بازه های  $[-1, 1]$ ,  $(2, 5)$  و  $[-2, 0]$  بررسی کنید.



مشتق پذیر :  $[-1, 1]$

مشتق پذیر :  $(2, 5)$

مشتق پذیر نیست زیرا در  $x=-1$  مشتق پذیر نیست  $[-2, 0]$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل چهارم: مشتق

درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و

آهنگ لحظه‌ای تغییر

جلسه هشتم: صفحات ۱۰۲ تا ۱۰۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش  
و پرورش استان  
همدان

معاونت آموزش  
متوسطه

اداره تکنولوژی و  
گروه های  
آموزشی

گروه ریاضی  
استان همدان



## آهنگ متوسط و کفای تغییر

اگر ماشینی مسافت ۱۸۰ کیلومتر را در ۹ ساعت طی کند سرعت متوسط آن  $9.0 = \frac{180}{20}$  کیلومتر بر ساعت است. یعنی در این بازه زمانی به طور متوسط در هر ساعت ۹ کیلومتر مسافت طی می کند. اگر بازه زمانی را خیلی کوچک کنیم سرعت متوسط به سرعت کفای نزدیک می شود. یا وقتی می گوئیم آهنگ متوسط رشد یک کودک در بازه [۶ ماه] ۶ ماه، دو سالی تقریباً به این معنی در طی این ۶ ماه، رشد متوسط قد کودک ۲ سانتی متر در هر ماه است. به جز مثال های بالا، در مطالعه پدیده های گوناگونی، کمیت های ویدر دارند به تغییر یکی وابسته به تغییرات دیگری است مانند تغییرات دما در زمان های مختلف، تغییرات یک دایره وقتی شعاع آن تغییر می کند یا تغییر جنسیت در زمان های مختلف.

اگر رابطه بین دو تغییر  $x$  و  $y$  به صورت  $y = f(x)$  باشد، نسبت تغییرات  $y$  (تغیرو) به تغییرات  $x$  (تغیرو) (تغیرو) آهنگ متوسط تغییر  $y$  نسبت به  $x$  می گوئیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**تعریف:** آهنگ تغییر متوسط تابع  $f$  در بازه  $[x_1, x_2]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

شیب خط مقطع

**تذکره:** اگر بازه را به صورت  $[x_1, x_1 + \Delta x]$  بنویسیم، تعریف آهنگ متوسط تغییر به شکل زیر می‌شود:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

**تعریف:** آهنگ لحظاتی تغییر تابع  $f$  در  $x = x_1$  برابر است با مشتق تابع  $f$  در  $x_1$ .

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

شیب خط مماس

**مثال:** آهنگ تغییر متوسط تابع  $f(x) = \sqrt{x+2}$  را وقتی متغیر از  $x_1 = 2$  به  $x_2 = 7$  تغییر می‌کند به دست آورید.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = \frac{\sqrt{7+2} - \sqrt{2+2}}{5} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

**مثال:** جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است، که معادله ارتفاع آن از سطح زمین به صورت  $f(t) = -2t^2 + 10t$  می‌باشد. سرعت لحظه‌ای این جسم را در  $t = 2$  به دست آورید.

$$f'(t) = -4t + 10 \rightarrow f'(2) = -4(2) + 10 = -8 + 10 = 2$$

**سؤال:** یک توده ی باکتری پس از  $t$  ساعت دارای جرم  $x(t) = \sqrt{t} + 2t^3$  گرم است.

الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه ی زمانی  $[3, 4]$  چقدر است؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه ی  $t = 3$  چقدر است؟

$$\text{الف) } \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{\sqrt{4} + 2(4)^3 - (\sqrt{3} + 2(3)^3)}{1} = 2 + 128 - \sqrt{3} - 54 = 74 - \sqrt{3}$$

$$\text{ب) } x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^2 \rightarrow x'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 6(3)^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 54$$

**سؤال:** معادله حرکت متحرکی به صورت  $f(t) = t^2 - t + 10$  بر حسب متر در بازه زمانی  $[0, 5]$  (بر حسب ثانیه) داده

شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی  $[0, 5]$  با هم برابرند؟

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{(5^2 - 5 + 10) - (0^2 - 0 + 10)}{5} = \frac{20 - 10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$f'(t) = \text{سرعت متوسط} = 2 \rightarrow 2t - 1 = 2 \rightarrow 2t = 3 \rightarrow t = 1.5$$

**سؤال:** آهنگ متوسط تغییر تابع  $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$  در بازه  $[5, 6]$  برابر آهنگ تغییر لحظه ای این تابع، با کدام مقدار

$x$  است؟

$$2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$2 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad (3)$$

$$3 + 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$4 + \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36} + 24 - (\sqrt{21 - 25} + 20)}{1} = 3 - 4 = -1$$

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2} + 4x} = -1 \rightarrow \sqrt{21 - x^2} + 4x = x - 2$$

برابر کردن  $\rightarrow 21 - u^2 + 4u = u^2 - 4u + 4$

$\rightarrow 2u^2 - 8u - 17 = 0 \rightarrow \Delta = 64 - 4(2)(-17) = 64 + 136 = 200$

$u = \frac{8 \pm \sqrt{200}}{4} = \frac{8 \pm 10\sqrt{2}}{4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{8+10\sqrt{2}}{4} = 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \checkmark \\ \frac{8-10\sqrt{2}}{4} = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2} \times \end{array} \right.$

**مثال:** در تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه  $[0, 4]$  از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن

در  $x = \frac{3}{2}$ ، چقدر کمتر است؟

۰/۰۶ (۴)

۰/۰۵ (۳)

۰/۰۴ (۲)

۰/۰۳ (۱)

رشد متوسط  $= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\sqrt{2(4)+1} + \frac{1}{4+1} - (\sqrt{2(0)+1} + \frac{1}{0+1})}{4}$

$= \frac{2 + \frac{1}{4} - 1 - 1}{4} = \frac{1 + \frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{5}{4}}{4} = \frac{5}{16} = \frac{3}{4}$

رشد لحظه‌ای:  $f'(u) = \frac{2}{2\sqrt{2u+1}} + \frac{-1}{(u+1)^2}$

$f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{3}{2} + 1}} - \frac{1}{(\frac{3}{2} + 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}}$

$= \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25 - 8}{50} = \frac{17}{50} \times 2 = \frac{34}{100}$

$\frac{34}{100} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$