

فصل ۲ (عدد های حقیقی) گردآوری، تایپ و تنظیم مطالب: رویا حیازی - محمدباقر میرزاوند

فهرست

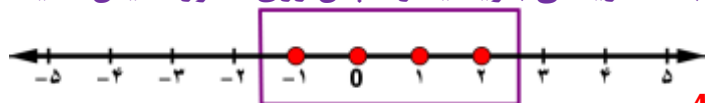
درس اول: عددهای گویا

درس دوم: عددهای حقیقی

درس سوم: قدر مطلق و محاسبه ی تقریبی

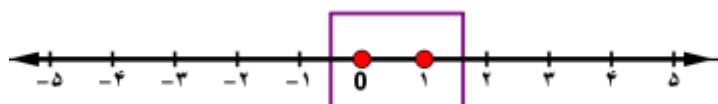
❖ درس اول عددهای گویا

یادآوری. هر کدام از مجموعه های زیر را با نماد ریاضی بنویسید و سپس روی محور نمایش دهید.



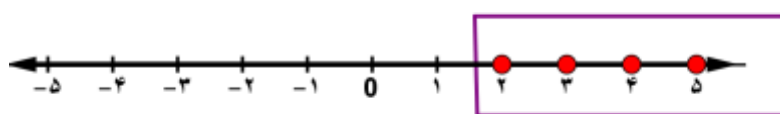
الف * A: اعداد صحیح بین ۲- و ۳؛

حل: $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ و } -2 < x < 3\}$



ب * B: اعداد حسابی کوچکتر از ۲؛

حل: $B = \{x | x \in \mathbb{W} \text{ و } x < 2\}$



پ * C: اعداد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲؛

حل: $C = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ و } 2 \leq x\}$

تمرین ۲. الف * مجموعه اعداد گویای بین ۲- و ۳ چند عضو دارد؟

حل: بی شمار عضو دارد

ب * آیا می توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد؟

حل: خیر - چون مجموعه اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست بنابراین نمی

توان این مجموعه را با نوشتن عضوهایش نمایش داد.

پ * آیا می توان این مجموعه را روی محور نمایش داد؟

حل: خیر

یادآوری

❖ مجموعه اعداد گویا

هر عددی که بتوان آن را به صورت کسر نوشت به طوری که صورت و مخرج آن عدد صحیح بوده و در ضمن، مخرج آن صفر نباشد عددی گویا است.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

❖ نکته: مجموعه اعداد گویا را با حرف \mathbb{Q} نشان می دهیم.

❖ نکته: همه عددهای طبیعی، صحیح و رادیکالی با جذر دقیق، عضو مجموعه اعداد گویا هستند. یعنی \mathbb{Q} .

❖ **نکته:** چون مجموعه اعداد گویا بی شمار عضو دارد و عدد بعد از هر عدد گویا مشخص نیست بنابراین

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا را فقط با نماد ریاضی نمایش می دهیم. یعنی

❖ **نکته:** بین هر دو عدد گویا، بی شمار عدد گویا وجود دارد.

❖ روش های پیدا کردن کسر بین دو کسر

روش ۱ (هم مخرج کردن): در این روش ابتدا با کمک مخرج مشترک، کسرها را هم مخرج کرده، سپس عددهای بین دو صورت را با مخرج مشترک می نویسیم.

تمرین ۳. الف * سه کسر بین $\frac{1}{6}$ و $\frac{5}{8}$ بنویسید.

حل:

$$\frac{1 \times 4}{6 \times 4} = \frac{4}{24} \quad \text{و} \quad \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{24} < \frac{5}{24} < \frac{6}{24} < \frac{7}{24} < \frac{15}{24}$$

ب * دو کسر بین $-\frac{3}{8}$ و $-\frac{4}{9}$ بنویسید.

حل:

$$-\frac{4 \times 8}{9 \times 8} = -\frac{32}{72} \quad \text{و} \quad -\frac{3 \times 9}{8 \times 9} = -\frac{27}{72} \quad \Rightarrow \quad -\frac{32}{72} < -\frac{31}{72} < -\frac{30}{72} < -\frac{27}{72}$$

❖ **نکته:** گاهی وقت ها پس از هم مخرج کردن کسرها، بین عددهای صورت، هیچ عدد طبیعی وجود ندارد. در این حالت می توانیم برای به دست آوردن کسرهای خواسته شده، صورت و مخرج دو کسر را در عددی طبیعی که یک واحد بیشتر از تعداد کسرهای خواسته شده است ضرب کنیم. (در واقع، مخرج مشترک را عدد بزرگتری در نظر می گیریم)

تمرین ۴. چهار کسر بین $-\frac{6}{7}$ و $-\frac{7}{8}$ بنویسید.

حل:

$$-\frac{6 \times 8}{7 \times 8} = -\frac{48}{56} \quad \text{و} \quad -\frac{7 \times 7}{8 \times 7} = -\frac{49}{56}$$

چون بین عددهای صورت، هیچ عدد طبیعی وجود ندارد و تعداد کسرهای خواسته شده چهار است بنابراین صورت و مخرج را در عدد پنج یا عددی بزرگتر از پنج ضرب می کنیم.

$$-\frac{48 \times 5}{56 \times 5} = -\frac{240}{280} \quad \text{و} \quad -\frac{49 \times 5}{56 \times 5} = -\frac{245}{280}$$

$$-\frac{245}{280} < -\frac{244}{280} < -\frac{243}{280} < -\frac{242}{280} < -\frac{241}{280} < -\frac{240}{280}$$

روش ۲ (میانگین گرفتن): در این روش، دو کسر را جمع کرده و سپس حاصل جمع را بر ۲ تقسیم می کنیم. برای به دست آوردن تعداد بیشتری کسر، این روش را با کسرهای جدید ادامه می دهیم.

❖ **نکته:** میانگین دو عدد دلخواه، دقیقاً وسط آن دو عدد قرار دارد و فاصله آن از دو عدد به یک اندازه می باشد.

تمرین ۵. الف * بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{3}$ دو کسر به روش میانگین پیدا کنید.

حل: $\frac{2}{3}$ ، $\frac{11}{24}$ ، $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{11}{24} \div 2 = \frac{11}{24} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{48} \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8+3}{12} = \frac{11}{12} \Rightarrow \frac{11}{12} \div 2 = \frac{11}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{24}$

حال برای پیدا کردن کسر دیگر کافی است که کسر $\frac{11}{24}$ را با یکی از دو کسر $\frac{1}{4}$ یا $\frac{2}{3}$ در نظر بگیریم و به همین روش

عمل کنیم؛ $\frac{1}{4} + \frac{11}{24} = \frac{6+11}{24} = \frac{17}{24} \Rightarrow \frac{17}{24} \div 2 = \frac{17}{24} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{48}$

$\frac{1}{4}$ ، $\frac{17}{48}$ ، $\frac{11}{24}$ ، $\frac{2}{3}$

ب * بین $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{8}$ کسری بنویسید که فاصله آن از دو کسر به یک اندازه باشد.

حل: در واقع باید میانگین این دو کسر را حساب کنیم؛

$\frac{3}{5} + \frac{5}{8} = \frac{24+25}{40} = \frac{49}{40} \Rightarrow \frac{49}{40} \div 2 = \frac{49}{40} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{80}$ $\frac{3}{5}$ ، $\frac{49}{80}$ ، $\frac{5}{8}$

روش ۳ (جمع صورت ها با هم و مخرج ها با هم): اگر صورت دو کسر را با هم و مخرج ها را نیز با هم جمع کنیم کسر حاصل، بین دو کسر داده شده خواهد بود.

تمرین ۶. الف * سه کسر بین $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{5}$ بنویسید.

حل: $\frac{2}{3} < \frac{6}{8} < \frac{10}{13} < \frac{14}{18} < \frac{4}{5}$

(Note: The original image has some errors in the fractions above, they should be $\frac{2}{3} < \frac{6}{9} < \frac{10}{13} < \frac{14}{18} < \frac{4}{5}$)

ب * چهار کسر بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{5}{9}$ بنویسید.

حل: $\frac{1}{2} < \frac{6}{11} < \frac{11}{20} < \frac{16}{29} < \frac{21}{38} < \frac{5}{9}$

❖ نمایش اعشاری اعداد گویا

تعریف: برای محاسبه ی کسر $\frac{5}{4}$ اگر با ماشین حساب عدد ۵ را بر ۴ تقسیم کنیم، حاصل 1.25 می شود. و برای

محاسبه ی کسر $\frac{7}{3}$ اگر با ماشین حساب عدد ۷ را بر ۳ تقسیم کنیم، حاصل $2.333333...$ می شود.

پس هر عدد گویا معادل یک عدد اعشاری است.

✓ مثال:

$\frac{3}{8} = 0.375$

$\frac{2}{3} = 0.666666...$

$\frac{7}{50} = 0.14$

$$\frac{5}{6} = 0.833333\dots$$

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$17 = 17.0$$

عدد اعشاری حاصل از یک عدد گویا به دو حالت کلی زیر تقسیم می شود:

الف) اعداد اعشاری مختوم یا متناهی (با پایان) **ب) اعداد اعشاری متناوب**

الف) کسری دارای نمایش اعشاری مختوم است که اگر صورت را بر مخرج تقسیم کنیم بالاخره باقی مانده صفر می شود. و تعداد رقم های بعد از اعشار آنها متناهی بوده، و در یک رقمی، قطع شده و تمام می شود.

✓ مثال:

قسمت اعشاری کسر $\frac{1}{8}$ متناهی (فقط ۱ و ۲ و ۵) است و بعد از رقم ۵ به پایان می رسد.

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

توجه: عدد صحیحی مانند ۶ نیز مختوم است زیرا اگر به آن مخرج یک ($\frac{6}{1}$) بدهیم و صورت را

۶

بر مخرج تقسیم کنیم باقی مانده صفر می شود.

ب) کسری دارای نمایش اعشاری متناوب است که با تقسیم صورت کسر بر مخرج آن، باقی مانده هیچ گاه صفر نمی شود و قسمت اعشاری آنها انتها ندارد. در قسمت اعشاری این اعداد یک یا چند رقم به صورت متناوب (یعنی پشت سرهم) تکرار می شوند. و از نماد زیر برای نمایش رقم هایی که تکرار می شود استفاده می کنند.

✓ مثال:

$$\frac{5}{9} = 0.55555\dots = 0.\bar{5}$$

عدد ۵ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

عدد ۱۸ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

$$\frac{2}{11} = 0.181818\dots = 0.\bar{18}$$

$$\frac{7}{6} = 1.16666\dots = 1.\bar{6}$$

رقم ۱ ثابت و رقم ۶ به صورت متناوب تکرار شده و تمام نمی شود.

علامت تکرار (-) روی رقمی قرار می گیرد، که بطور متناوب تکرار می شود.

تمرین: به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری کسرهای زیر را به دست آورده و مختوم بودن یا متناوب بودن هر کدام را مشخص کنید.

$$\frac{13}{21} = 0.619047\dots$$

متناوب

$$\frac{17}{5} = 3.4$$

مختوم

$$\frac{2}{21} = 0.095238095\dots$$

متناوب

$$\frac{1}{4000} = 0.00025$$

مختوم

$$-\frac{1}{33} = -0.030303\dots$$

متناوب

$$\frac{7}{8} = 0.875$$

مختوم

$$0.\bar{7}$$

مختوم (دقت کنید قسمت اعشار عدد متناهی است. و تمام می شود).

سوال چالشی: بدون استفاده از ماشین حساب و انجام تقسیم چطور می‌تونیم بفهمیم کسر مختوم است یا

متناوب؟

✦ **نکته ۱:** *قبل از بررسی یک کسر باید مطمئن باشیم صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده

باشند. * اگر مخرج کسر را به عامل های اول تجزیه کنیم کسری که مخرج آن فقط عوامل اول ۲ یا ۵ داشته

باشد. مختوم یا متناهی است. مانند: $\frac{1}{2}, \frac{7}{5}, \frac{13}{20}, \dots$ توجه کسرهایی مانند $\frac{6}{1}$ که مخرج آنها یک است و هیچ عامل

اولی ندارد. نیز مختوم می‌باشد. (می‌دانیم عدد یک نه اول است، نه مرکب)

✓ **مثال:**

مخرج کسر تنها دارای عامل اول ۲ است. مختوم $\frac{7}{4} = \frac{7}{2 \times 2} = 1/75$

مخرج کسر دارای عامل اول ۲ و ۵ است. مختوم $\frac{9}{50} = \frac{9}{5 \times 5 \times 2} = 0/18$

کسر قابل ساده شدن است اول ساده می‌کنیم. مخرج فقط عامل اول ۵ دارد. مختوم $\frac{99 \div 3}{75 \div 3} = \frac{33}{25} = \frac{33}{5 \times 5} = 1/32$

مخرج کسر هیچ عامل اول ندارد. مختوم $\frac{10}{1}$

به عدد مخرج یک می‌دهیم. مخرج یک هیچ عامل اولی ندارد. مختوم $185 = \frac{185}{1}$

✦ **نکته ۲:** *قبل از بررسی یک کسر باید مطمئن باشیم صورت و مخرج کسر تا جایی که ممکن است ساده شده

باشند. * اگر مخرج کسر را به عوامل اول تجزیه کنیم. و عامل اولی غیر از ۲ یا ۵ مانند ۱, ۳, ۷, ۱۱, دیدیم. در

این صورت کسر متناوب خواهد بود.

✓ **مثال:**

مخرج دارای عامل اول غیر از ۲ یا ۵ است. متناوب $\frac{3}{11} = 0/272727\dots$

مخرج علاوه بر ۲ دارای عامل اول ۳ می‌باشد. متناوب $\frac{5}{6} = \frac{5}{2 \times 3} = 0/83333\dots$

مخرج علاوه بر ۲ و ۵ دارای عامل اول ۷ است. متناوب $\frac{1}{70} = \frac{1}{2 \times 5 \times 7} = 0/01428\dots$

✍ **تمرین:** نوع عدد اعشاری حاصل از هریک از اعداد گویای زیر را بدون انجام تقسیم مشخص کنید.

$\frac{7}{50} = \frac{7}{2 \times 5 \times 5}$ → مختوم $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ → مختوم $\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ → متناوب

$\frac{9}{14} = \frac{9}{2 \times 7}$ → متناوب $\frac{7}{33} = \frac{7}{3 \times 11}$ → متناوب $\frac{2}{5}$ → مختوم

$\frac{13}{12} = \frac{13}{2 \times 2 \times 3}$ → متناوب $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ → متناوب

سوالات امتحانی حل شده

۱- نمایش اعشاری کسر $\frac{5}{6}$ ، مختوم است. (سمنان-خرداد ۹۶) ص غ

حل: غ مخرج عامل غیر از ۲ یعنی ۳ دارد. $\frac{5}{2 \times 3}$

۲- نمایش اعشاری $\frac{3}{10}$ عدد به صورت $0.\overline{3333}$ است. (خراسان شمالی- خرداد ۹۵) ص غ
حل: $\frac{3}{10} = 0.\overline{3}$

۳- عدد $0.\overline{3}$ از عدد $0.\overline{32}$ کوچکتر است. (تهران نوبت صبح- خرداد ۹۶) ص غ
حل: غ رقم دوم اعشار هر دو عدد را مقایسه کنید. $0.\overline{32222222} > 0.\overline{333333}$

۴- نمایش اعشاری کسر $\frac{2}{5}$ است. (مختوم- متناوب) (اصفهان- خرداد ۹۶)
حل: مختوم زیرا مخرج فقط عامل ۵ دارد.

۵- عدد $3/\overline{13}$ از $3/13$ است. (بزرگتر- کوچکتر- مساوی) (سمنان- خرداد ۹۵)
حل: بزرگتر زیرا $3/13 > 3/\overline{13131313}$ رقم سوم اعشار عدد $(3/\overline{13131313})$ یک ولی رقم سوم اعشار عدد $(3/13)$ صفر است.

۶- کدام یک از اعداد زیر نمایش اعشاری مختوم دارد. (تهران- خرداد ۹۶)
 $\frac{3}{17}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{55}$ $\frac{7}{30}$
حل: زیرا مخرج فقط عامل ۲ دارد. $\frac{1}{8} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2}$

۷- کدام کسر نمایش اعشاری متناوب دارد. (قزوین- خرداد ۹۶)
 $\frac{7}{25}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{8}$
حل: مخرج عامل اول ۳ دارد. $\frac{5}{9} = \frac{5}{3 \times 3}$

۸- نمایش اعشاری $\frac{5}{16}$ برابر است با: (آذربایجان شرقی- خرداد ۹۵)
 $0.\overline{3125}$ $0.\overline{3135}$ $0.\overline{31}$ $0.\overline{312}$
حل: $0.\overline{3125}$ صورت را بر مخرج تقسیم کنید.

۹- کدام یک از اعداد زیر عدد اعشاری مختوم نمی باشد. (چهارمحال بختیاری- خرداد ۹۵)
 $\frac{21}{35}$ $\frac{12}{15}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{21}{39}$
حل: زیرا مخرج عامل اول ۱۳ دارد. $\frac{21}{39} = \frac{7}{13}$

$$10 - \text{حاصل کسر مرکب} \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{5} + \frac{3}{3} = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5} = 1 \frac{1}{5}$$

مسأوی عدد $\frac{-1}{3}$ است. (آذربایجان غربی- خرداد ۹۵) ص غ

حل: غ یادآوری ترتیب عملیات

۱- اول پرانتزها را حساب کن ۲- حاصل توان ۳- در هنگام محاسبه چه داخل پرانتز چه بیرون پرانتز همواره از سمت چپ به راست ضرب و تقسیم را انجام می دهیم ۴- پس از ضرب و تقسیم، جمع و تفریق را انجام می دهیم.

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2-3+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \text{ مخرج:}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \text{ صورت بر مخرج}$$

۱۱- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (کرمانشاه- خرداد ۹۵)

$$\frac{-1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} = \frac{-1}{2} + \frac{-5}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{-1 \times 7}{2 \times 7} - \frac{5}{14} = \frac{-7-5}{14} = \frac{-12}{14} = -\frac{6}{7}$$

❖ درس دوم عددهای حقیقی

آشنایی با عددهای گنگ

عددهایی مانند $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \dots$ که تعداد رقم های اعشاری آنها بی شمار است و دارای دوره تناوب نیست. **گنگ یا اصم** می گوئیم.

* مجموعه ای که این عددها در آن قرار دارد، مجموعه عددهای گنگ می نامیم و آن را **با نماد Q' یا Q^c** نمایش می دهیم.*

✓ مثال:

$$\sqrt{2} = 1/414212562... \longrightarrow \text{گنگ}$$

هیچ نظمی در قسمت اعشاری وجود ندارد. بی پایان و بدون تکرار است.

$$0/343443444... \longrightarrow \text{گنگ}$$

بی پایان و بدون تکرار است.

$$0/1211211121112... \longrightarrow \text{گنگ}$$

بی پایان و بدون تکرار است.

• *توجه در اعداد گویای متناوب یک یا چند عدد بصورت نامتناهی و به طور منظم تکرار می شود ولی در اعداد بالا اعداد به صورت نامنظم ادامه پیدا می کنند و ما نمی توانیم دوره ی تناوب مشخصی برای آنها قائل باشیم.*

✧ **نکته ۱:** یکی از اعداد معروف گنگ، عدد π است. که در زیر ، تا ۳۰ رقم اعشار نوشته شده است. اما در محاسبات حداکثر تا دو رقم اعشار استفاده می شود.

$$\pi = 3/141592653589793238462643383279$$

✧ **نکته ۲:** جذر عددهایی که مربع کامل نیستند، گنگ است.

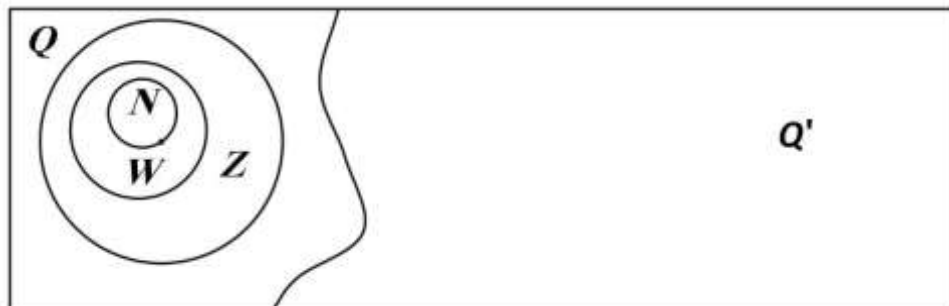
$$\sqrt{46}, \sqrt{20}, \sqrt{6}, \sqrt{15}, \sqrt{7/5}, \sqrt{0/9}, \sqrt{10}$$

مانند:

- توجه: عددهایی که جذر کامل دارند مثل ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ... این عددها وقتی زیر رادیکال هستند گویا هستند و گنگ نمی باشند. زیرا

$$\dots \sqrt{0/49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10} = 0/7, \sqrt{25} = 5, \sqrt{16} = 4, \sqrt{9} = 3$$

☆ نکته ۳: در نمودار ون مجموعه های N, W, Z, Q, Q' به صورت زیر می باشند.



☆ نکته ۴: مجموعه ی اعداد گویا و اعداد گنگ دو مجموعه ی جدا از هم هستند، یعنی اشتراک ندارند، به بیان

$$Q \cap Q' = \emptyset \text{ دیگر عددی وجود ندارد که هم گویا و هم گنگ باشد.}$$

- * توجه طبق نمودار ون $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$

✍ تمرین: کدام عبارت درست و کدام نادرست است.

غ	$-3 \in Q'$	ص	$2/3 \circ 3 \circ \circ 3 \circ \circ \circ 3 \dots \in Q'$	ص	$\sqrt{5} \in Q'$	ص	$\frac{3}{7} \in Q$
ص	$\sqrt{3/7} \in Q'$	غ	$\sqrt{7} \in Q$	غ	$\frac{\sqrt{9}}{4} \in Q'$	ص	$Q \cap Q' = \emptyset$
ص	$Z \cap Q' = \emptyset$	ص	$Z \subseteq Q$	غ	$N \subseteq Q'$	ص	$W \not\subseteq Q'$

سوالات امتحانی حل شده

۱- $0/3 \in Q$ (گیلان-خرداد ۹۵) ص غ

حل: ص

۲- عدد $0/17$ گنگ است. (البرز-خرداد ۹۶) ص غ

حل: غ گویاست.

۳- عددی وجود دارد که هم گویا و هم گنگ باشد. ص غ

حل: غ مجموعه گویا و گنگ دو مجموعه جدا از هم هستند.

۴- عدد $\sqrt{9}$ عدد گنگ است. (زنجان-خرداد ۹۵) ص غ

حل: غ گویاست. $\sqrt{9} = 3$

۵- عدد π عددی اصم است. (لرستان-خرداد ۹۶) ص غ

حل: ص

۶- عدد ... 202020202020 / یک عدد گویا است. (قم-خرداد۹۵) ص غ

حل: غ گنگ است.

۷- حاصل جمع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است. ص غ

حل: غ مثال نقض $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

۸- حاصلضرب هر دو عدد گنگ عددی گنگ است. ص غ

حل: غ مثال نقض $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

۹- حاصل تقسیم عددی گویای غیر صفر و عدد گنگ برهم، عددی گنگ است. ص غ

حل: ص مثال ۲ عددی گویا و $\sqrt{3}$ عددی گنگ است. حاصل تقسیم $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{2}{\sqrt{3}}$ هر دو گنگ هستند.

۱۰- کدام عدد به مجموعه عددهای گنگ تعلق دارد. (بوشهر-خرداد۹۵)

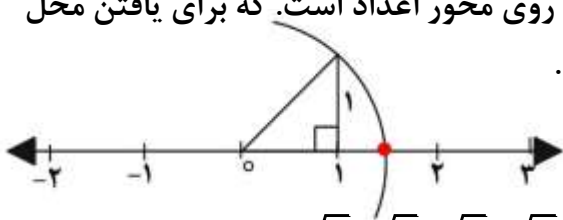
$\frac{7}{11}$ $\sqrt{3}$ $0/23$ $\sqrt{1}$

حل: $\sqrt{3}$

❖ نمایش هندسی اعداد گنگ

هر عدد گنگ متناظر با یک نقطه روی محور اعداد می باشد.

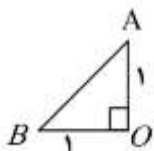
به عنوان مثال نقطه ی نمایش عدد $\sqrt{2}$ یک نقطه بین دو عدد ۱ و ۲ روی محور اعداد است. که برای یافتن محل دقیق در روی محور مطابق شکل از روش هندسی استفاده می کنیم.



* برای به دست آوردن محل دقیق اعداد گنگ رادیکالی مانند $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$ از همین روش که در پایه ی هشتم آموختیم استفاده می کنیم.*

یادآوری پایه ی هشتم

برای رسم پاره خط هایی به طول $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$ و از رابطه ی فیثاغورس و مثلث قائم الزاویه کمک



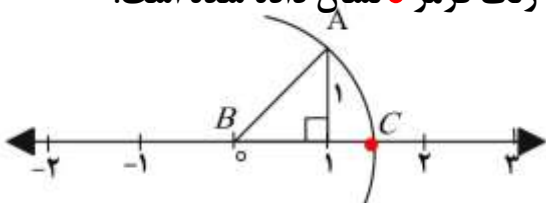
می گیریم. مثلاً برای رسم پاره خطی به طول $\sqrt{2}$ از مثلثی به شکل زیر استفاده می کنیم.

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \rightarrow AB = \sqrt{2}$$

همان طور که در شکل میبینید. طبق رابطه ی فیثاغورس، مثلث قائم الزاویه با ضلع های قائمه ۱ و تری به اندازه ی

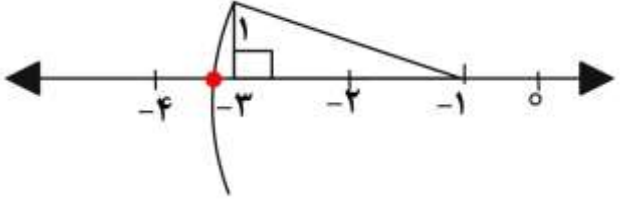
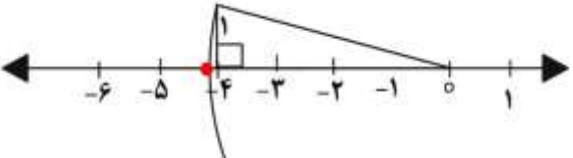
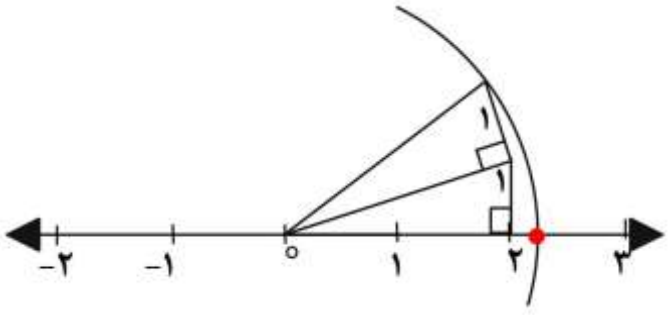
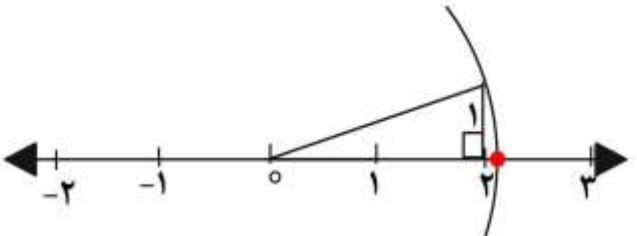
$\sqrt{2}$ به ما می دهد. اگر همین مثلث را روی محور رسم کنیم و کمانی به مرکز نقطه ی O و شعاع AB بزنیم.

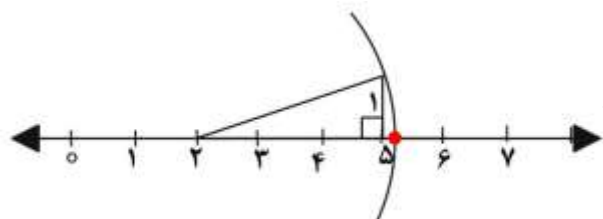
محل برخورد با محور یعنی نقطه ی C ، نقطه ی نمایش $\sqrt{2}$ است. که با رنگ قرمز نشان داده شده است.



- * توجه برای اینکه راحت تر بتوانیم مثلث قائم الزاویه مورد نظر را پیدا کنیم. عدد زیر رادیکال را به صورت مجموع دو یا چند مربع کامل می نویسیم. این اعداد مربع کامل، مجذور طول اضلاع قائمه ی مثلث هستند. *

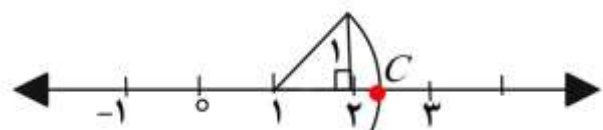
✓ مثال:

<p>$-1-\sqrt{5}$</p> <p>* نقطه ی شروع -۱</p> <p>* چون $\sqrt{5}$ منفی است به سمت چپ حرکت می کنیم.</p> 	<p>$-\sqrt{17}$</p> <p>$-\sqrt{17} = -\sqrt{16+1}$</p> <p>4 1</p> <p>* نقطه شروع مبدا مختصات</p> <p>* چون منفی است به سمت چپ حرکت می کنیم</p> 
<p>$\sqrt{6}$</p> <p>$\sqrt{6} = \sqrt{5+1} = \sqrt{4+1+1}$</p> <p>2 1</p> <p>ابتدا $\sqrt{5}$ را رسم می کنیم سپس مثل قسمت های قبلی برای بدست آوردن $\sqrt{6}$ مثلث قائم الزاویه به طول ضلع قائمه ی ۱ روی وتر مثلث اول می سازیم. و کمان می زنیم.</p> 	<p>$\sqrt{5}$</p> <p>$\sqrt{5} = \sqrt{4+1}$</p> <p>2 1</p> <p>زیرا: $2^2 + 1^2 = 5$ برای اینکه طول اضلاع را بفهمیم از ۴ و ۱ جذر می گیریم.</p> <p>پس برای رسم $\sqrt{5}$ داریم:</p> <p>مثلی به طول اضلاع قائمه ی ۱ و ۲ رسم می کنیم.</p> <p>* نقطه ی شروع مبدا مختصات</p> <p>* چون $\sqrt{5}$ مثبت است پس به سمت راست حرکت می کنیم.</p> <p>* ۲ واحد به سمت راست</p> <p>* یک واحد به سمت بالا</p> 



۱- نقطه ی نمایش عدد گنگ $2 + \sqrt{10}$ را روی محور نشان دهید.

حل:



۲- در شکل زیر نقطه ی C چه عددی را نشان می دهد.

حل: اول طول وتر را پیدا می کنیم.

*نقطه ی شروع $+1$ است.

$$\sqrt{2} = \text{طول وتر} \rightarrow 1^2 + 1^2 = 2$$

* چون از نقطه ی شروع به سمت راست حرکت کرده پس $\sqrt{2}$ مثبت است.

$$C = +1 + \sqrt{2}$$

❖ چالش اعداد گنگ و گویا روی محور

*نکته: مربع های کامل $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, \dots$

بدون نمایش هندسی، چگونه تشخیص دهیم اعداد گنگ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند؟

✓ مثال ۱: $\sqrt{15}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

حل:

باید بررسی کنیم 15 بین مربع کدام دو عدد متوالی قرار می گیرد.

چون 15 بین دو مربع کامل 9 و 16 قرار دارد. ($9 < 15 < 16$) پس $\sqrt{15}$ بین دو عدد $\sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$ قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$9 < 15 < 16 \rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16} \rightarrow 3 = \sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16} = 4 \rightarrow 3 < \sqrt{15} < 4$$

پس بین دو عدد صحیح 3 و 4 قرار می گیرد.

✓ مثال ۲: $2 + \sqrt{7}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

حل:

باید بررسی کنیم 7 بین مربع کدام دو عدد متوالی قرار می گیرد.

چون 7 بین دو مربع کامل 4 و 9 قرار دارد. ($4 < 7 < 9$) پس $\sqrt{7}$ بین دو عدد $\sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3$ قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$4 < 7 < 9 \rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

اینجا باید $\sqrt{7}$ را طبق سوال با عدد 2 جمع کنیم. ($2 + \sqrt{7}$) پس دو طرف آن یعنی 2 و 3 را هم باید با 2 جمع

کنیم. ($2 + 2 < 2 + \sqrt{7} < 2 + 3$)

$$2 + 2 < 2 + \sqrt{7} < 2 + 3 \rightarrow 4 < 2 + \sqrt{7} < 5$$

پس بین دو عدد 4 و 5 قرار می گیرد.

❖ نکته: بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ مثال ۳: بین دو عدد ۵ و ۶ چهار عدد گنگ بنویسید.

حل:

* اول ۵ و ۶ را به اعداد رادیکالی تبدیل می کنیم و برای این کار هر عدد را در خودش ضرب می کنیم زیرا

$$5 \times 5 = 25, 6 \times 6 = 36$$

$$\sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{25} < \dots, \dots, ? \dots, \dots < \sqrt{36}$$

$$\sqrt{25} < \sqrt{26} < \sqrt{27} < \sqrt{28} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$$

توجه هنوز هم می توانیم بنویسیم. مانند: $\sqrt{25} < \sqrt{26/1} < \sqrt{27/5} < \sqrt{27/55} < \sqrt{30/1} < \sqrt{36}$

* این سوال بی شمار جواب داره یعنی می تونیم هنوز عدد بنویسیم که گنگ باشند. دانش آموز عزیز ۳ تا عدد گنگ دیگه رو برای تمرین اضافه کن.

✓ مثال ۲: بین دو عدد ۱ و ۲ هفت عدد گنگ بنویسید.

حل:

* اول ۱ و ۲ را به اعداد رادیکالی تبدیل می کنیم و برای این کار هر عدد را در خودش ضرب می کنیم زیرا

$$1 \times 1 = 1, 2 \times 2 = 4$$

$$\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{1} < \sqrt{1/5} < \sqrt{2} < \sqrt{2/1} < \sqrt{3} < \sqrt{3/4} < \sqrt{3/7} < \sqrt{3/9} < \sqrt{4}$$

❖ نکته: بین هر دو عدد گنگ بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ مثال ۳: بین دو عدد $\sqrt{7}$ و $\sqrt{10}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

حل:

* دو عدد زیر رادیکال هستند و ما براحتی می توانیم اعداد گنگ را پیدا کنیم.

$$\sqrt{7} < \sqrt{7/5} < \sqrt{8} < \sqrt{8/3} < \sqrt{9/4} < \sqrt{9/7} < \sqrt{10}$$

😊 توجه اشتباه رایج شاگردان، $\sqrt{9}$ را هم به عنوان عدد گنگ می نویسند ولی می دانیم $\sqrt{9} = 3$ گویاست.

❖ نکته: بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال ۴:** بین ۲ و $\sqrt{5}$ چهار عدد گویا و چهار عدد گنگ مشخص کنید.

حل:

برای پیدا کردن عدد گویا اول مقدار تقریبی $\sqrt{5}$ حدود دو رقم اعشار می نویسیم:

$$\sqrt{5} \approx 2/24$$

$$2 < 2/04 < 2/09 < 2/12 < 2/22 < \sqrt{5} \approx 2/24$$

برای عدد گنگ اول باید عدد ۲ را زیر رادیکال ببریم و برای اینکار عدد را دو بار در خودش ضرب می کنیم.

$$2 = \sqrt{4} < \sqrt{4/2} < \sqrt{4/23} < \sqrt{4/5} < \sqrt{4/8} < \sqrt{5}$$

☆ **جمع بندی:** بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد.

✓ **مثال ۵:** مجموعه ی A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q} | 3 \leq x \leq 5\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به صورت

زیر صحیح است چرا



حل:

خیر زیرا بین ۳ و ۵ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد. و نمودار رسم شده روی محور شامل همه ی اعداد گویا و گنگ از ۳ تا ۵ است. در صورتی که مجموعه A داده شده در سوال، فقط اعداد گویا ($x \in \mathbb{Q}$) از ۳ تا ۵ را از ما می خواهد.

✓ **مثال ۶:** مجموعه ی A به صورت $A = \{x \in \mathbb{Q}' | -1 < x < 5\}$ را در نظر بگیرید. آیا نمایش A به

صورت زیر صحیح است چرا



حل:

خیر زیرا بین -۱ و ۵ بی شمار عدد گویا و بی شمار عدد گنگ وجود دارد. و نمودار رسم شده روی محور شامل همه ی اعداد گویا و گنگ از -۱ تا ۵ است. در صورتی که مجموعه A داده شده در سوال، فقط اعداد گنگ ($x \in \mathbb{Q}'$) از -۱ تا ۵ را از ما می خواهد.

سوالات امتحانی حل شده

۱- عدد $\sqrt{3} + 1$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. (همدان-خرداد ۹۶)

۱, ۰ ۴, ۳ ۳, ۲ ۲, ۱

حل: $2 < \sqrt{3} + 1 < 3 \rightarrow 2 + 1 < \sqrt{3} + 1 < 2 + 1 \rightarrow 1 + 1 < \sqrt{3} + 1 < 2 + 1 \rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2 \rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$

۲- $\sqrt{10} + 4$ بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد. (آذربایجان-خرداد ۹۶)
 ۱,۰ - ۰,۱ ۱,۲ ۲,۳

حل:

$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16} \rightarrow 3 < \sqrt{10} < 4 \rightarrow -4 + 3 < -4 + \sqrt{10} < -4 + 4 \rightarrow -1 < -4 + \sqrt{10} < 0$$

۳- بین دو عدد ۳ و ۴ دو عدد گنگ بنویسید. (هرمزگان-خرداد ۹۶)

حل: $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{11} < \sqrt{16} = 4$

۴- بین $\sqrt{3}$ و ۴ یک عدد گنگ بنویسید. (البرز-خرداد ۹۶)

حل: $\sqrt{3} < \sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$

۵- عدد $10 - \sqrt{90}$ بین کدام اعداد صحیح قرار دارد.

حل:

چون ۹۰ بین دو مربع کامل ۸۱ و ۱۰۰ قرار دارد. ($81 < 90 < 100$) پس $\sqrt{90}$ بین دو عدد ۹ و ۱۰
 ($\sqrt{81} = 9, \sqrt{100} = 10$) قرار دارد. به قسمت زیر دقت کنید.

$$81 < 90 < 100 \rightarrow \sqrt{81} < \sqrt{90} < \sqrt{100} \rightarrow 9 < \sqrt{90} < 10$$

اینجا باید طبق سوال $\sqrt{90}$ ، منهای ۱۰ شود. ($\sqrt{90} - 10$) پس دو طرف آن یعنی ۹ و ۱۰ را هم باید منهای ۱۰ کنیم. ($9 - 10 < \sqrt{90} - 10 < 10 - 10$) به قسمت زیر دقت کنید.

$$9 - 10 < \sqrt{90} - 10 < 10 - 10 \rightarrow -1 < \sqrt{90} - 10 < 0$$

پس بین -۱ و ۰ قرار دارد

❖ اعداد حقیقی

عددها به دو دسته جدا از هم، عددهای گویا و عددهای گنگ تقسیم می شوند. **اجتماع** مجموعه ی عددهای گویا و عددهای گنگ را **مجموعه عددهای حقیقی** می نامیم و آن را با نماد \mathbb{R} نمایش می دهیم.

❖ **نکته ۱:** $\mathbb{R} = \mathbb{Q}' \cup \mathbb{Q}$ تساوی بین سه مجموعه اعداد گویا و گنگ و حقیقی برقرار است.

❖ **نکته ۲:** نمودار ون:



$$\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$$

و

❖ **نکته ۳:** $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

✓ **مثال:**

$$-(1 + \sqrt{3}) \in \mathbb{R}$$

$$0, 5, 55, 555, 5555, \dots \in \mathbb{R}$$

$$3/24 \in \mathbb{R}$$

$$5 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{35} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{6}{7} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

تمرین: داخل علامت \in یا \notin قرار دهید.

$$\begin{array}{ccccc}
 -3 \dots Z & 0/47 \dots Q & \sqrt{17} \dots R & \frac{9}{0} \dots R & -\sqrt{9} \dots R \\
 \frac{-6}{3} \dots N & \sqrt{0/4} \dots Q & \sqrt{0/11} \dots Q & \sqrt{5/7} \dots Q' & \frac{0}{5} \dots R
 \end{array}$$

حل:

$$\underline{-3 \dots \in Z} \quad \underline{0/47 \dots \in Q} \quad \underline{\sqrt{17} \dots \in R} \quad \underline{\frac{9}{0} \dots \notin R} \quad \underline{-\sqrt{9} \dots \in R}$$

$$\underline{\frac{-6}{3} \dots \notin N} \quad \underline{\frac{9}{10} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \sqrt{0/11} \dots \in Q} \quad \underline{\sqrt{5/7} \dots \in Q'} \quad \underline{0 = \frac{0}{5} \dots \in R}$$

$$\underline{\sqrt{0/4} \dots \notin Q}$$

* توجه مجموعه ی اعداد گویا و مجموعه ی اعداد گنگ زیر مجموعه ی اعداد حقیقی هستند. $Q \subseteq R, Q' \subseteq R$

تمرین: با توجه به مفاهیم قبلی و یا استفاده از نمودار ون جاهای خالی را پر کنید.

$$\begin{array}{cccc}
 Q \cap R = \dots & Q \cup N = \dots & Q' \cup Q = \dots & N \cup Z = \dots \\
 Q \cup R = \dots & Q \cap N = \dots & Q' \cap Z = \dots & Q' \cap R = \dots
 \end{array}$$

حل:

$$\begin{array}{cccc}
 \underline{Q \cap R = \dots Q \dots} & \underline{Q \cup N = \dots Q \dots} & \underline{Q' \cup Q = \dots R \dots} & \underline{N \cup Z = \dots Z \dots} \\
 \underline{Q \cup R = \dots R \dots} & \underline{Q \cap N = \dots N \dots} & \underline{Q' \cap Z = \dots \phi \dots} & \underline{Q' \cap R = \dots \phi \dots}
 \end{array}$$

سوالات امتحانی حل شده

۱- عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. ص غ

حل: ص اعداد گویا و گنگ حقیقی هستند زیرا از اجتماع آنها اعداد حقیقی تشکیل می شود.

۲- هر عدد گویا حقیقی است. (خوزستان- خرداد ۹۶) ص غ

حل: ص اعداد گویا و گنگ حقیقی هستند زیرا از اجتماع آنها اعداد حقیقی تشکیل می شود.

$$3- \sqrt{1} \in R \quad \text{ص غ}$$

حل: ص

۴- از اجتماع دو مجموعه ی Q, Q' مجموعه ی بوجود می آید. (تهران- خرداد ۹۶)

حل: مجموعه اعداد حقیقی R

۵- اجتماع مجموعه ی عددهای گویا و عددهای مجموعه عددهای حقیقی می نامیم. (صحیح- اصم)

حل: اصم

۶- کدام گزینه کامل شده ی $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \dots\dots$ است. (آذربایجان-خرداد ۹۶)

$$W \quad \underline{\mathbb{Q}'} \quad Z \quad N$$

۷- کدام گزینه نادرست است. (تهران-خرداد ۹۶)

$$(\phi \cap \mathbb{Q}') \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \quad \underline{\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}} \quad \pi \in \mathbb{R} \quad 1/16 \in \mathbb{Q}$$

۸- کدام گزینه نادرست است. (کردستان-خرداد ۹۶)

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \phi \quad \underline{\mathbb{Q} - \mathbb{Z} = \mathbb{N}} \quad \mathbb{Z} \cap W = W \quad \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

۹- کدام گزینه درست است. (کرمان-خرداد ۹۵)

$$N \subseteq Z \subseteq R \subseteq Q \quad Q \subseteq Z \subseteq R \subseteq N \quad N \subseteq R \subseteq Q \subseteq Z \quad \underline{N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R}$$

۱۰- با توجه به مجموعه اعداد کدام گزینه صحیح نیست. (کرمانشاه-خرداد ۹۶)

$$\mathbb{Q} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \quad \underline{\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}} \quad \mathbb{N} - \mathbb{Z} = \phi \quad W - \mathbb{N} = \{0\}$$

✓ **مثال:** هر یک از مجموعه های زیر را با عضوهایش مشخص کنید.

$$A = \{\delta n + 3 | n \in \mathbb{N}\}, B = \{x^2 - 1 | x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 1\}, C = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 5\}$$

$$A = \{\delta n + 3 | n \in \mathbb{N}\} = \{8, 13, \dots\}$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots \rightarrow 5 \times 1 + 3 = 8, 5 \times 2 + 3 = 13, \dots$$

$$B = \{x^2 - 1 | x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 1\} = \{3, 0, -1\}$$

$$x = -2, -1, 0 \rightarrow (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3, (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0, (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$C = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 5\} = ?$$

$$x = -1, 1, 1/5, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \frac{-3}{2}, \dots$$

حل:

* توجه: در قسمت های قبلی یاد گرفتیم بین هر دو عدد حقیقی (گویا یا گنگ) **بی شمار** عدد حقیقی بصورت گویا یا گنگ وجود دارد. بنابراین مجموعه اعداد حقیقی را **نمی توان** با اعضا نمایش داد. پس برای نمایش مجموعه اعداد حقیقی از محور استفاده می کنیم. *

❖ **محور اعداد حقیقی**



اعداد حقیقی را می توان روی یک محور نشان داد که به این محور، محور اعداد حقیقی می گوییم.

* هر نقطه روی این محور نشان دهنده ی یک عدد گویا و یا یک عدد گنگ است.

به عبارت دیگر یک تناظر یک به یک بین اعداد حقیقی و نقاط روی محور اعداد حقیقی وجود دارد.

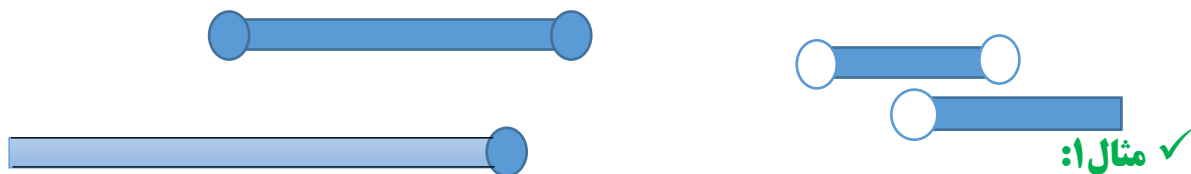
به صورت زیر:

* هر عدد حقیقی **فقط یک نقطه** را روی محور نشان می دهد و **هر نقطه** روی محور اعداد حقیقی، نمایش **یک عدد**

حقیقی است.

❖ نمایش هندسی مجموعه‌ها روی محور اعداد حقیقی

می‌خواهیم مجموعه‌های زیر را روی محور اعداد نشان دهیم برای این کار از خط‌ها و دایره‌های توپر و توخالی به شکل زیر استفاده می‌کنیم.



$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$$

انتهای خط
مسواوی دارد دایره توپر

ابتدای خط
مسواوی ندارد دایره توخالی

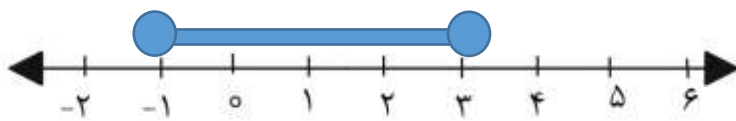
● **توجه:** در علامت‌های \leq, \geq (بزرگتر مساوی و کوچکتر مساوی) علامت **مسواوی** به معنای آن است که خود عدد هم **جزو مجموعه** است و ما برای نشان دادن نقاط ابتدایی یا انتهایی روی محور آن را با **دایره‌ی توپر** مشخص می‌کنیم.

علامت $<, >$ به معنای این است که نقاط ابتدا یا انتهایی جزو مجموعه **نیستند** و روی محور آن را با **دایره‌ی توخالی** نشان می‌دهیم.

✓ **مثال:** مجموعه‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

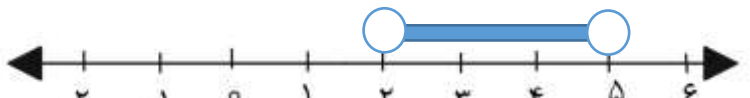
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$$

انتهای خط توپر
ابتدای خط توپر



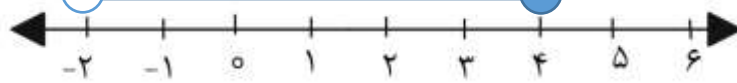
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$$

انتهای توخالی
ابتدای توخالی



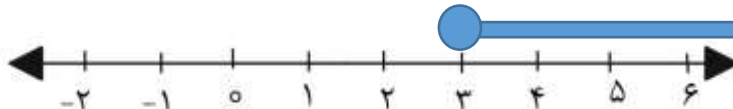
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$$

انتهای توپر
ابتدای توخالی

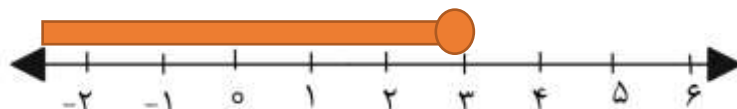


$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$$

ابتدای توپر



☺ ***اشتباه رایج دانش‌آموزان:** عدد ۳ را انتهای می‌گیرند و نمودار را به شکل زیر رسم می‌کنند. این غلط است.

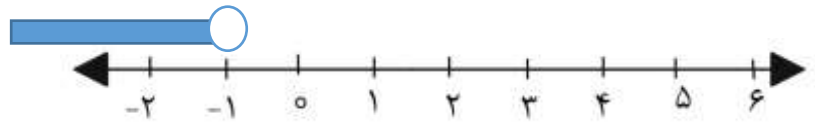


* دقت کنید عبارت را به این صورت بخوانید (های بزرگتر از ۳)

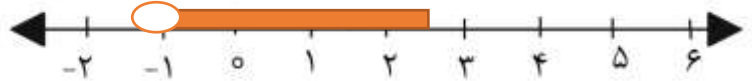
وقتی می خوانیم **بزرگتر** یعنی به **سمت راست ۳** باید حرکت کنیم. زیرا در محور اعداد حقیقی هر چقدر به سمت **راست** حرکت کنیم عدد **بزرگتر** و هر چقدر به سمت **چپ** حرکت کنیم عدد **کوچکتر** می شود.

$$E = \{x \in \mathbb{R} | x < -1\}$$

انتها و توخالی



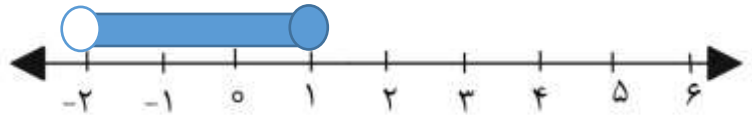
😊 *** اشتباه رایج دانش آموزان:** عدد -1 را ابتدا می گیرند. و به شکل زیر رسم می کنند که غلط می باشد.



*** دقت کنید عبارت را به این صورت بخوانید (x های کوچکتر از -1)**

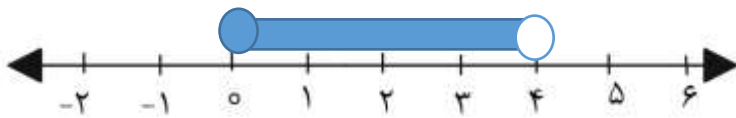
وقتی می خوانیم **کوچکتر** یعنی به **سمت چپ ۱-** باید حرکت کنیم. زیرا در محور اعداد حقیقی هر چقدر به سمت **چپ** حرکت کنیم عدد **کوچکتر** و هر چقدر به سمت **راست** حرکت کنیم عدد **بزرگتر** می شود.

$$F = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leq 1\}$$



به جهت علامت ها دقت کنید.

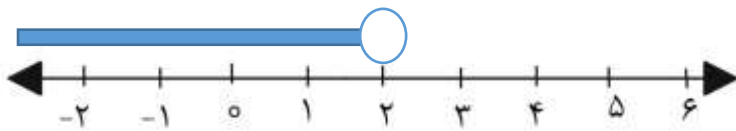
✓ **مثال:** با توجه به محور مجموعه ی متناظر با آن را بنویسید.



حل: ابتدا صفر و توپر، انتها ۴ و توخالی $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 4\}$

😊 *** دقت کنید** $x \in \mathbb{R}$ است. اشتباه رایج شاگردان $x \in \mathbb{Q}$ یا $x \in \mathbb{Z}$ می نویسند.

✓ **مثال ۳:**



حل: انتها ۲ و توخالی، حرکت به سمت چپ پس x های کمتر از ۲ $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$

😊 *** اشتباه رایج شاگردان** $x > 2$ می نویسند. دقت کنید حرکت به سمت چپ است.

سوالات امتحانی حل شده

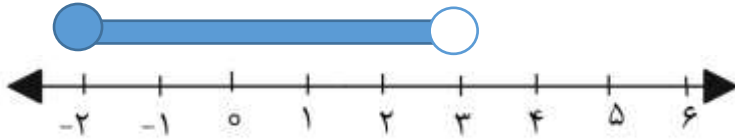
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$$

۱- الف) مجموعه را روی محور نشان دهید. (مرکزی- خرداد ۹۶)

ب) در داخل علامت \in یا \notin قرار دهید.

$$\sqrt{8} \dots\dots\dots A$$

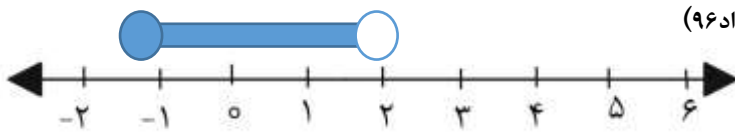
حل: الف



حل: ب) $\sqrt{8} \in A$ زیرا $\sqrt{8} \cong 2/82$ عددی بین ۲ و ۳ است. یا می توانیم از روش قبلی بدون استفاده از ماشین حساب استفاده کنیم.

$$\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9} \rightarrow 2 < \sqrt{8} < 3$$

۲- شکل مقابل معرف کدام مجموعه است. (اصفهان- خرداد ۹۶)



$$\{-1, 0, 1, 2\}$$

$$\{0, 1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$$

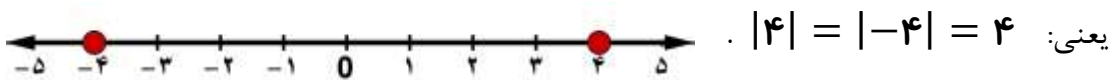
$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$$

❖ درس سوم قدر مطلق و محاسبه ی تقریبی

فاصله نقطه نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد، تا مبدأ (صفر) را قدر مطلق آن عدد می نامند.

قدر مطلق عدد a را با $|a|$ نشان می دهیم.

✓ **مثال:** فاصله نقاط نظیر دو عدد ۴ و -۴ تا مبدأ، برابر ۴ است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد ۴ و (-۴) برابر ۴ است؛



$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

❖ **نکته:** قدر مطلق عدد صفر، مساوی صفر می باشد. یعنی

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

❖ **نکته:** قدر مطلق عددهای مثبت، مساوی خود عدد می باشد. یعنی

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

❖ **نکته:** قدر مطلق عددهای منفی، مساوی قرینه آن عدد می باشد. یعنی

✍ **تمرین ۱.** حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$* \quad |0| = 0 \quad * \quad |\sqrt{7}| = \sqrt{7} \quad * \quad \left| \frac{-3}{8} \right| = \frac{3}{8} \quad * \quad |-4/0.2| = 4/0.2$$

❖ **نکته:** قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد، مساوی با حاصل ضرب قدر مطلق آنها است. یعنی برای هر دو عدد

$$|a \times b| = |a| \times |b| \quad ; \quad b \text{ و } a \text{ حقیقی دلخواه مانند}$$

✓ **مثال:**

$$\left. \begin{aligned} |(-8) \times (+6)| &= |-48| = 48 \\ |-8| \times |+6| &= 8 \times 6 = 48 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |(-8) \times (+6)| = |-8| \times |+6|$$

☆ نکته: قدر مطلق حاصل تقسیم دو عدد، مساوی با حاصل تقسیم قدر مطلق آنهاست. یعنی برای هر دو عدد

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad ; \quad b \neq 0 \quad \text{حقیقی دلخواه مانند } a \text{ و } b \text{ که } b \neq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{-24}{2} \right| &= |-12| = 12 \\ \frac{|-24|}{|2|} &= \frac{24}{2} = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left| \frac{-24}{2} \right| = \frac{|-24|}{|2|} \quad \checkmark \text{ مثال}$$

✍ تمرین ۲. آیا قدر مطلق حاصل جمع دو عدد، همواره مساوی با حاصل جمع قدر مطلق آنهاست؟

$$\left. \begin{aligned} |-9 + 2| &= |-7| = 7 \\ |-9| + |2| &= 9 + 2 = 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |-9 + 2| \neq |-9| + |2| \quad \checkmark \text{ حل: خیر - مثلاً}$$

☆ نکته: قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق آنها کوچکتر یا مساوی است. یعنی برای هر دو عدد

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{حقیقی دلخواه مانند } a \text{ و } b$$

$$\left. \begin{aligned} |-7 + 3| &= |-4| = 4 \\ |-7| + |3| &= 7 + 3 = 10 \end{aligned} \right\} \stackrel{4 < 10}{\Rightarrow} |-7 + 3| < |-7| + |3| \quad \checkmark \text{ مثال}$$

$$\left. \begin{aligned} |8 + 9| &= |17| = 17 \\ |8| + |9| &= 8 + 9 = 17 \end{aligned} \right\} \stackrel{17=17}{\Rightarrow} |8 + 9| = |8| + |9| \quad \checkmark \text{ مثال}$$

✍ تمرین ۳. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$|9 - 20 + 7| = \left| \overbrace{9 - 20 + 7}^{-11} \right| = |-11| = 11 \quad \text{(الف)}$$

$$|(-6) \times (+4)| = |-24| = 24 \quad \text{(ب)}$$

$$| -(-5 + 7) | = \left| -\overbrace{(-5 + 7)}^2 \right| = |-2| = 2 \quad \text{(پ)}$$

$$|-6 \times 3 + 7| = \left| \overbrace{-6 \times 3 + 7}^{-18} \right| = |-11| = 11 \quad \text{(ت)}$$

$$|-|3 - 15|| = \left| -\overbrace{|3 - 15|}^{-12} \right| = |-(+12)| = |-12| = 12 \quad \text{(ث)}$$

$$|-5^2| = |-25| = 25 \quad \text{(ج)}$$

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{9-2}{6} \right| = \left| \frac{7}{6} \right| = \frac{7}{6} \quad \text{(چ)}$$

$$|-\sqrt{7} + 3 + \sqrt{7}| = |-\cancel{\sqrt{7}} + 3 + \cancel{\sqrt{7}}| = |3| = 3 \quad \text{(ح)}$$

$$-| -8 - (-3) | = -| -8 + 3 | = -\overbrace{|-5|}^{+5} = -5 \quad \text{(خ)}$$

❖ **نکته:** برای محاسبه قدرمطلق هایی که دارای عبارت های گنگ هستند، می توان ابتدا مقدار تقریبی عبارت درون قدرمطلق را به دست آورد تا منفی یا مثبت بودن عبارت داخل قدرمطلق مشخص شود. اگر حاصل عبارت درون قدرمطلق منفی شد، عبارت درون قدرمطلق را قرینه کرده و از قدرمطلق خارج می کنیم و اگر حاصل عبارت درون قدرمطلق مثبت شد، عبارت درون قدرمطلق را بدون تغییر از قدرمطلق خارج می کنیم.

📌 **تمرین ۴:** حاصل عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|\sqrt{6} - \sqrt{7}|$$

حل: چون مقدار $\sqrt{7}$ از $\sqrt{6}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبه قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|\underbrace{\sqrt{6} - \sqrt{7}}_{\text{منفی}}| = -(\sqrt{6} - \sqrt{7}) = -\sqrt{6} + \sqrt{7} = \sqrt{7} - \sqrt{6}$$

$$|7 - \sqrt{15}| =$$

حل: مقدار $7 = \sqrt{49}$ از $\sqrt{15}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره مثبت است. پس برای

$$|\underbrace{7 - \sqrt{15}}_{\text{مثبت}}| = 7 - \sqrt{15}$$

محاسبه قدرمطلق باید عبارت درون آن را بدون تغییر خارج کنیم.

$$|6 - 5\sqrt{3}| =$$

حل: مقدار $5\sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75}$ از $6 = \sqrt{36}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبه قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|\underbrace{6 - 5\sqrt{3}}_{\text{منفی}}| = -(6 - 5\sqrt{3}) = -6 + 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 6$$

$$|5 - \sqrt{2}| + |-1 + \sqrt{2}| = \underbrace{|5 - \sqrt{2}|}_{\substack{\text{مثبت} \\ 5 = \sqrt{25} > \sqrt{2}}} + \underbrace{|-1 + \sqrt{2}|}_{\substack{\text{مثبت} \\ 1 = \sqrt{1} < \sqrt{2}}} = 5 - \cancel{\sqrt{2}} - 1 + \cancel{\sqrt{2}} = 4$$

$$|\sqrt{3} - 2| + |7 + \sqrt{3}| = \underbrace{|\sqrt{3} - 2|}_{\substack{\text{منفی} \\ \sqrt{3} < 2 = \sqrt{4}}} + \underbrace{|7 + \sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} = -(\sqrt{3} - 2) + 7 + \sqrt{3} = -\cancel{\sqrt{3}} + 2 + 7 + \cancel{\sqrt{3}} = 9$$

$$|-\sqrt{6} - 11| - |\sqrt{6} + 2| = \underbrace{|-\sqrt{6} - 11|}_{\text{منفی}} - \underbrace{|\sqrt{6} + 2|}_{\text{مثبت}} = -(-\sqrt{6} - 11) - (\sqrt{6} + 2) = \cancel{\sqrt{6}} + 11 - \cancel{\sqrt{6}} - 2 = 9$$

$$|4 - \sqrt{5}| + |-\sqrt{5}| = \underbrace{|4 - \sqrt{5}|}_{\substack{\text{مثبت} \\ 4 = \sqrt{16} > \sqrt{5}}} + \underbrace{|-\sqrt{5}|}_{\text{منفی}} = 4 - \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 4 - \cancel{\sqrt{5}} + \cancel{\sqrt{5}} = 4$$

$$4|\sqrt{3}-2| + |13+4\sqrt{3}| - |-7| = 4 \times \underbrace{|\sqrt{3}-2|}_{\substack{\text{منفی} \\ \sqrt{3}<2=\sqrt{4}}} + \underbrace{|13+4\sqrt{3}|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{|-7|}_{\substack{\text{منفی} \\ +7}} =$$

$$-4 \times (\sqrt{3}-2) + 13 + 4\sqrt{3} - (+7) = -4\sqrt{3} + 8 + 13 + 4\sqrt{3} - 7 = 14$$

$$\left| \frac{1-\sqrt{5}}{-2} \right| = \frac{\overbrace{|1-\sqrt{5}|}^{\text{منفی}}}{|-2|} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

• توجه: اعدادی که بین صفر و یک هستند هر چه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می شوند.

✓ مثال:

$$\left. \begin{array}{l} (0/2)^2 = 0/04 \\ (0/2)^3 = 0/008 \\ (0/2)^4 = 0/0016 \\ (0/2)^5 = 0/00032 \end{array} \right\} \Rightarrow (0/2)^2 > (0/2)^3 > (0/2)^4 > (0/2)^5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{21} < \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \quad \text{و} \quad (0/92)^{17} > (0/92)^{19} \quad \checkmark \text{ مثال:}$$

تمرین ۵. حاصل عبارت های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$|(0/5)^{20} - (0/5)^{19}| =$$

*الف

حل: مقدار $(0/5)^{19}$ از $(0/5)^{20}$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره منفی است. پس برای محاسبه قدرمطلق باید عبارت درون آن را قرینه کنیم.

$$|(0/5)^{20} - (0/5)^{19}| = -((0/5)^{20} + (0/5)^{19}) = -(0/5)^{20} + (0/5)^{19}$$

$$|(2/3)^{12} - (2/3)^8| =$$

حل: مقدار $(2/3)^{12}$ از $(2/3)^8$ بزرگتر است بنابراین حاصل عبارت درون قدرمطلق همواره مثبت است. پس برای محاسبه قدرمطلق، عبارت درون آن را بدون تغییر می نویسیم.

$$|(2/3)^{12} - (2/3)^8| = (2/3)^{12} - (2/3)^8$$

تمرین ۶. در جاهای خالی علامت $<$ ، $=$ یا $>$ قرار دهید.

$$|\sqrt{3}-2| \square |\sqrt{3}| + |-2|$$

$$|\sqrt{3}-2| \approx \left| \overbrace{1/7-2}^{-0/3} \right| = 0/3 \quad \text{و} \quad |\sqrt{3}| + |-2| \approx 1/7 + 2 = 3/7$$

$$|\sqrt{3}-2| \square < |\sqrt{3}| + |-2| \quad \text{بنابراین}$$

$$\left| \frac{-\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \frac{|-\sqrt{5}|}{|2|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{-\sqrt{5}}{2} \right| \boxed{=} \frac{|-\sqrt{5}|}{|2|} \quad \text{حل:}$$

$$|2^2 - 3^2| \boxed{>} |2^2| - |3^2|$$

$$\left. \begin{aligned} |2^2 - 3^2| &= |4 - 9| = |-5| = 5 \\ |2^2| - |3^2| &= |4| - |9| = 4 - 9 = -5 \end{aligned} \right\} \quad \text{حل:}$$

$$\Rightarrow |2^2 - 3^2| \boxed{>} |2^2| - |3^2|$$

تمرین ۷. اگر $a = 2$ ، $b = \frac{1}{3}$ و $c = -\frac{3}{4}$ باشد، حاصل عبارت $|4a - b - c|$ را به دست آورید.

حل: مقادیر داده شده را در عبارت $|4a - b - c|$ جایگذاری کرده و حاصل را به دست می آوریم:

$$|4a - b - c| = \left| 4 \times 2 - \left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) \right| = \left| 8 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{96 - 4 + 9}{12} \right| = \left| \frac{101}{12} \right| = \frac{101}{12}$$

تمرین ۸. اگر $a = -3$ ، $b = 1$ و $c = 7$ باشد، حاصل عبارت $\frac{|b-c|}{|a-b+c|}$ را به دست آورید.

$$\frac{|b-c|}{|a-b+c|} = \frac{|1-7|}{|-3-1+7|} = \frac{1-7}{|3|} = \frac{-4}{3} \quad \text{حل:}$$

تمرین ۹. مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

$$a = -5 \quad * \quad b = 9 \quad : \quad \frac{|a+3|b|}{4|a-b|} =$$

$$\frac{|a+3|b|}{4|a-b|} = \frac{|-5+3| \times |9|}{4 \times |-5-9|} = \frac{2 \times 9}{4 \times |-14|} = \frac{18}{4 \times 14} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28} \quad \text{حل:}$$

$$a = -5 \quad , \quad b = 2 \quad : \quad |a+b| - 3|ab| =$$

$$|a+b| - 3|ab| = |-5+2| - 3 \times |-5 \times 2| = |-3| - 3 \times |-10| = 3 - 3 \times 10 = 3 - 30 = -27$$

$$a = -8 \quad , \quad b = \sqrt{3} \quad : \quad |2a-b| - b =$$

$$|2a-b| - b = |2 \times (-8) - \sqrt{3}| - \sqrt{3} = |-16 - \sqrt{3}| - \sqrt{3} = 16 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 16 \quad \text{حل:}$$

تمرین ۱۰. بزرگترین عدد صحیحی که اگر به جای مربع قرار دهیم، نامساوی زیر برقرار باشد چیست؟

$$|3 - 2 \times 4| > 4 + \square$$

$$|3 - \underbrace{2 \times 4}_8| > 4 + \square \Rightarrow |-5| > 4 + \square \Rightarrow 5 > 4 + \square \Rightarrow \text{حل:}$$

$$\begin{cases} 5 \neq 4 + \boxed{1} = 5 \\ 5 > 4 + \boxed{0} = 4 \checkmark \\ 5 > 4 + \boxed{-1} = 3 \\ 5 > 4 + \boxed{-2} = 2 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \text{بنابراین جواب مورد نظر، عدد صحیح صفر می باشد.}$$

تمرین ۱۱. عبارت کلامی مربوط به هر یک از رابطه های زیر را بنویسید.

الف * $a > 0$ پاسخ a عددی مثبت است. پ * $a \geq 0$ پاسخ a عددی نامنفی است.

ب * $a < 0$ پاسخ a عددی منفی است. ت * $a \leq 0$ پاسخ a عددی نامثبت است.

تمرین ۱۲. الف * فرض کنید $a < 0$ و $b < 0$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$1) |a| \xrightarrow{\text{پاسخ}} \overset{\text{منفی}}{a} = -a \qquad 2) |b| \xrightarrow{\text{پاسخ}} \overset{\text{منفی}}{b} = -b$$

$$3) |-b| \xrightarrow{\text{پاسخ}} |-b| = -\overset{\text{منفی}}{b} = -(-b) = b$$

$$4) |ab| \xrightarrow{\text{پاسخ}} \overset{\text{مثبت}}{a \times b} = ab \quad \text{چون حاصل ضرب دو عدد منفی همواره مثبت است پس علامت عبارت درون قدر مطلق مثبت می شود.}$$

$$5) |a + b| \xrightarrow{\text{پاسخ}} \overset{\text{منفی}}{a + b} = -(a + b) = -a - b$$

(-) + (-) = -

چون حاصل جمع دو عدد منفی همواره منفی است پس علامت عبارت درون قدر مطلق منفی می شود.

ب * فرض کنید $a > 0$ و $b < 0$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$1) |ab| \xrightarrow{\text{پاسخ}} \overset{\text{منفی}}{a \times b} = -(ab) = -ab \qquad 2) |a - b| \xrightarrow{\text{پاسخ}} \overset{\text{مثبت}}{a - b} = a - b$$

(+)-(-)=+

پ * فرض کنید $a > b > 0$ و $c < 0$ باشد. طرف دیگر تساوی های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

$$1) \left| \frac{ab}{c} \right| =$$

حل: چون علامت a و b مثبت و c منفی است بنابراین علامت کل عبارت $\frac{ab}{c}$ منفی می شود. بنابراین هنگام خروج

$$\left| \frac{ab}{c} \right| = -\frac{ab}{c} \quad \text{از قدرمطلق باید قرینه شود.}$$

$$۲) |abc^۲| =$$

حل: علامت $c^۲$ همواره مثبت است. از طرفی علامت a و b نیز مثبت است بنابراین علامت کل عبارت $abc^۲$

مثبت می شود. بنابراین هنگام خروج از قدرمطلق تغییری نمی کند.

$$|abc^۲| = abc^۲$$

تمرین ۱۳: فرض کنید $۰ < x < ۱$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|x - ۵| + |x + ۷| =$$

حل: با توجه به این که x عددی بین ۰ و ۱ است (مانند $۰/۲$) پس عبارت $x - ۵$ همواره منفی است.

(مثلاً $۰/۲ - ۵ = -۴/۸$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، قرینه می شود.

از طرفی عبارت $x + ۷$ همواره مثبت است. (مثلاً $۰/۲ + ۷ = ۷/۲$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، تغییری نمی کند.

$$\underbrace{|x - ۵|}_{\text{منفی}} + \underbrace{|x + ۷|}_{\text{مثبت}} = -x + ۵ + x + ۷ = ۱۲$$

تمرین ۱۴: فرض کنید $۳ < x < ۴$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|x - ۴| + |x| =$$

حل: با توجه به این که x عددی بین ۳ و ۴ است (مانند $۳/۵$) پس عبارت $x - ۴$ همواره منفی است.

(مثلاً $۳/۵ - ۴ = -۰/۵$) پس هنگام خروج از قدرمطلق، قرینه می شود.

$$\underbrace{|x - ۴|}_{\text{منفی}} + \underbrace{|x|}_{\text{مثبت}} = -x + ۴ + x = ۴$$

نکته: جذر توان دوم هر عدد با قدر مطلق آن عدد مساوی است. یعنی $\sqrt{a^۲} = |a|$.

✓ **مثال:**

$$\begin{aligned} \sqrt{(-۳)^۲} = \sqrt{۹} = ۳ &\Rightarrow \sqrt{(-۳)^۲} = |-۳| = ۳ \\ \sqrt{(+۵)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵ &\Rightarrow \sqrt{(+۵)^۲} = |+۵| = ۵ \\ \sqrt{(-۱۲)^۲} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ &\Rightarrow \sqrt{(-۱۲)^۲} = |-۱۲| = ۱۲ \end{aligned}$$

تمرین ۱۵: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{(\sqrt{۷} - ۶)^۲} = \underbrace{|\sqrt{۷} - ۶|}_{\substack{\text{منفی} \\ \sqrt{۷} < ۶ = \sqrt{۳۶}}} = -(\sqrt{۷} - ۶) = -\sqrt{۷} + ۶$$

$$\sqrt{(۱ - \sqrt{۵})^۲} = \underbrace{|۱ - \sqrt{۵}|}_{\substack{\text{منفی} \\ \sqrt{۱} < \sqrt{۵}}} = -(۱ - \sqrt{۵}) = -۱ + \sqrt{۵}$$

$$\sqrt{(2\sqrt{6} - 5)^2} = \left| \overbrace{2\sqrt{6} - 5}^{\text{منفی}} \right| = -(2\sqrt{6} - 5) = -2\sqrt{6} + 5$$

$2\sqrt{6} = \sqrt{24} < 5 = \sqrt{25}$

$$5\sqrt{(\sqrt{11} - 4)^2} = 5 \times \left| \overbrace{\sqrt{11} - 4}^{\text{منفی}} \right| = -5(\sqrt{11} - 4) = -5\sqrt{11} + 20$$

$\sqrt{11} < 4 = \sqrt{16}$

$$\sqrt{(5 + \sqrt{17})^2} - \sqrt{17} = \left| \overbrace{5 + \sqrt{17}}^{\text{مثبت}} \right| - \sqrt{17} = 5 + \sqrt{17} - \sqrt{17} = 5$$

$$\sqrt{(12 - \sqrt{31})^2} + |5 - \sqrt{31}| = \left| \overbrace{12 - \sqrt{31}}^{\text{مثبت}} \right| + \left| \overbrace{5 - \sqrt{31}}^{\text{منفی}} \right| = 12 - \sqrt{31} - (5 - \sqrt{31}) =$$

$12 = \sqrt{144} > \sqrt{31}$ $5 = \sqrt{25} < \sqrt{31}$

$$12 - \sqrt{31} - 5 + \sqrt{31} = 7$$

$$\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} - |-9\sqrt{10}| = \left| \overbrace{3 - \sqrt{10}}^{\text{منفی}} \right| - \left| \overbrace{-9\sqrt{10}}^{+9\sqrt{10}} \right| = -(3 - \sqrt{10}) - (+9\sqrt{10}) =$$

$3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$

$$-3 + \sqrt{10} - 9\sqrt{10} = -3 - 8\sqrt{10}$$

❖ **توجه:** در فصل چهار خواهیم دید که برای جمع و تفریق رادیکال هایی که عبارت زیر رادیکال آنها مساوی است، کافی است ضریب آن رادیکال ها را با هم جمع جبری کنیم. مثلاً

$$\boxed{9}\sqrt{5} - \boxed{2}\sqrt{5} = (9 - 2)\sqrt{5} = 7\sqrt{5} \quad \text{و} \quad \sqrt{7} - 4\sqrt{7} = (1 - 4)\sqrt{7} = -3\sqrt{7}$$

📌 **تمرین ۱۶.** حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف * $x < 0$ ، $y < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} =$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \left| \overbrace{\hat{x}}^{\text{منفی}} \right| + \left| \overbrace{\hat{y}}^{\text{منفی}} \right| = -x - y$$

حل:

ب * $x < 0$ ، $y > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} =$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \left| \overbrace{\hat{x}}^{\text{منفی}} \right| + \left| \overbrace{\hat{y}}^{\text{مثبت}} \right| = -x + y = y - x$$

حل:

پ * $x < 0$ ، $y < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} =$

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = \left| \overbrace{\hat{x}}^{\text{منفی}} \right| - \left| \overbrace{\hat{y}}^{\text{منفی}} \right| = -x - (-y) = -x + y = y - x$$

حل:

ت * $x < 0$ ، $y > 0 \Rightarrow \sqrt{(xy)^2} =$

$$\sqrt{(xy)^2} = \left| \overbrace{x \times y}^{\text{منفی}} \right| = -(xy) = -xy$$

$- \times + = -$

حل:

$$\text{مث} \quad x < 0 \Rightarrow 5\sqrt{x^2} - x =$$

$$5\sqrt{x^2} - x = 5 \times \overset{\text{منفی}}{|x|} - x = -5x - x = -6x$$

حل:

نمونه سوال امتحانی پایان فصل

- ۱- اگر $a < 0, b > 0$ آنگاه $|a-b| = b-a$ ص غ
- ۲- مجموعه عدد های گویا را می توان با محور اعداد نمایش داد. ص غ
- ۳- عدد $3/252252225\dots$ عددی گویا است. ص غ
- ۴- تساوی $\sqrt{a^2} = -a$ به ازای $a < 0$ همواره برقرار است. ص غ
- ۵- حاصل $\mathbb{R} - \mathbb{Q}'$ برابر با مجموعه اعداد است.
- ۶- حاصل عبارت $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ برابر است.
- ۷- اگر $x > 0, y > 0$ و باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ برابر با است.
- ۸- عدد $0/345$ از عدد $0/345$ است. (بزرگتر-کوچکتر-مساوی)
- ۹- مقدار عبارت $|x| + x$ به ازای $x = -2$ برابر کدام گزینه است
 $\begin{matrix} 4 & 0 & -4 & 2 \end{matrix}$
- ۱۰- نمایش اعشاری کدام یک از کسره های زیر مختوم است.
 $\begin{matrix} \frac{2}{3} & \frac{8}{20} & \frac{5}{12} & \frac{7}{11} \end{matrix}$
- ۱۱- عدد $\sqrt{3} + 1$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی است.
 $\begin{matrix} 0, 1 & 1, 2 & 2, 3 & 3, 4 \end{matrix}$
- ۱۲- کدام گزینه نادرست است
 $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N} \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset \quad \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- ۱۳- الف-بین $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}$ سه کسر بنویسید.
- ب- نمایش اعشاری کسر $\frac{14}{55}$ متناوب است یا مختوم؟

۱۴- مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} - 2 \leq x < 3\}$ را روی محور نشان دهید.

سپس با توجه به مجموعه A درستی و نادرستی عبارات های زیر را مشخص کنید.

$$\sqrt{5} + 1 \in A \quad +3 \in A \quad -2 \in A$$

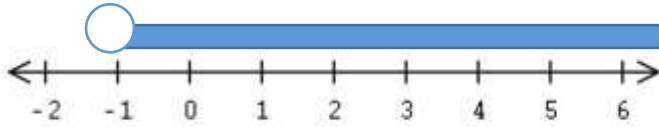
۱۵- بین دو عدد ۵ و ۶ چهار عدد گنگ بنویسید

۱۶- عدد $3 - \sqrt{5}$ را روی محور نشان دهید.

۱۷- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right) \times \frac{5}{3}$$

۱۸- با توجه به محور مجموعه ی متناظر را بنویسید.



۱۹- در مورد مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Q}' \mid -2 < x < 3\}$ کدام درست و کدام نادرست است.

$$\begin{array}{cccccc} 1/53553553... \in A & \pi \notin A & \sqrt{5} \in A & -\frac{1}{3} \notin A & \frac{5}{3} \in A \\ & & & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \in A & 0 \in A \end{array}$$

۲۰- حاصل عبارت های زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بدست آورید.

$$\begin{array}{l} \text{الف) } \left|5 - \sqrt{5}\right| + \left|-4 - \sqrt{5}\right| \\ \text{ب) } \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} + -\sqrt{10} \end{array}$$

۲۱- حاصل عبارت های زیر را به ازای مقادیر داده شده بنویسید.

$$\begin{array}{l} \text{الف- اگر } a = -2, b = 3, c = -4 \text{ باشد, } |a+b| + 5|c-b| \\ \text{ب- اگر } a = -2, b = \sqrt{3}, c = 3 \text{ باشد, } |2a-b+c| \end{array}$$