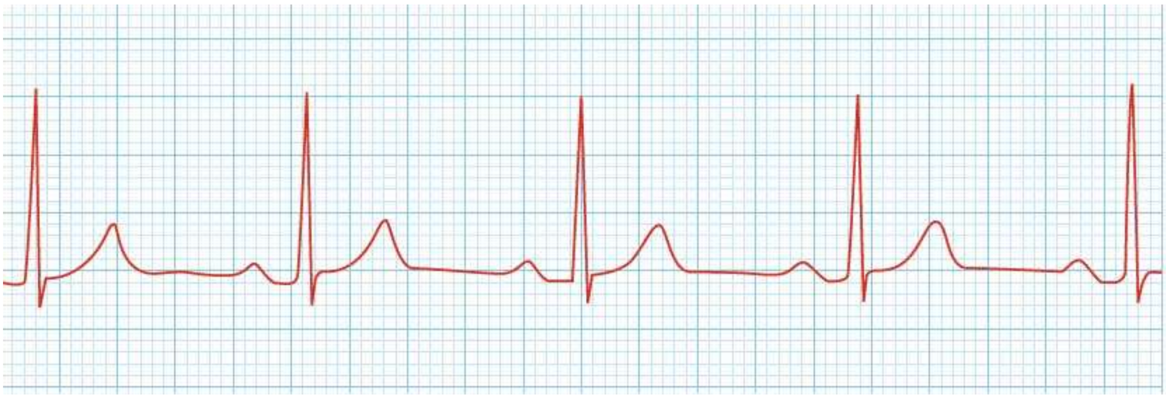
ما در دنیا ، نوسان های زیادی را مشاهده می کنیم از جمله: ضربان قلب، تاب خوردن، نوسان آونگ، نوسان فنر و.... برای درک رفتار نوسان ابتدا باید بدانیم که این نوسان ها دوره ای هستند یا غیر دوره ای. به این معنی که در نوسان دوره ای، نوسان، در هر چرخه، عیناً تکرار می شود. اما در نوسان غیر دوره ای اینطور نیست یعنی ممکن است زمان نوسان یا دامنه نوسان در دور بعدی نوسان تغییر کند. حرکت نوسانگر هماهنگ ساده یکی از مدل هایی است که به ما کمک می کند، تا حرکت نوسانی را راحت تر درک کنیم. برای مثالی از نوسان، نوار قلب یک انسان، نوسانی است دوره ای به صورت شکل زیر.



حرکت هماهنگ ساده

حرکت هماهنگ ساده، یک حرکت رفت و برگشتی روی خط راست است که در آن از نیروهای مقاوم مانند اصطکاک صرف نظر می شود. که در آن هر رفت و برگشت کامل را یک دوره می گویند.

مدت زمان یک چرخه، دوره تناوب حرکت نامیده می شود. که مثلا می توان بین دو نقطه که بیشترین ارتفاع را دارند، در نظر بگیریم.

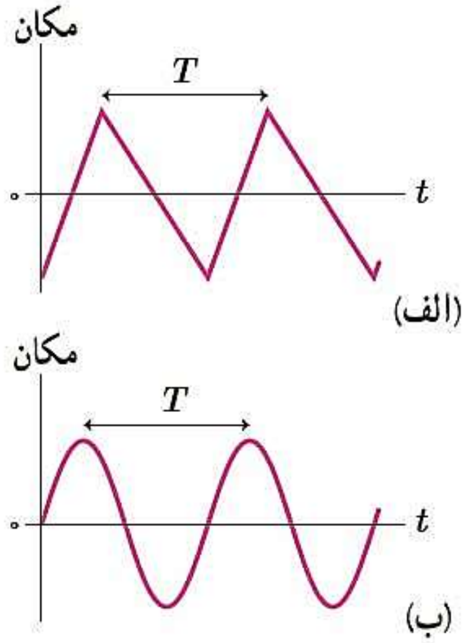
تعداد نوسان های انجام شده در هرثانیه، بسامد یا فرکانس نوسان نامیده می شود.

$$f = \frac{1}{T}$$

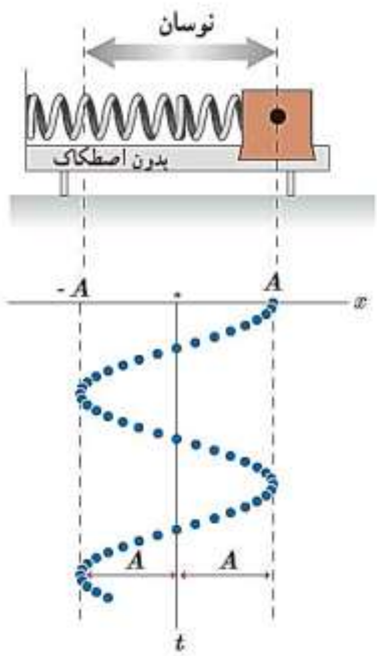
یکای بسامد در SIهرتزHz است که طبق تعریف:

$$1\mathrm{Hz} = \frac{1}{s} = 1s^{-1}$$

حال نمودار مکان–زمان دو نمونه از نوسان دوره ای را مورد بررسی قرار می دهیم. به شکل زیر نگاه کنید.



هر دوی این نوسان ها، نوسان های دوره ای هستند. اما به نوسانگری که به شکل سینوسی نوسان می کند، نوسانگر هماهنگ ساده می گویند. همه نوسان های دوره ای را می توان مجموعه ی از نوسان های هماهنگ ساده در نظر گرفت. یک نمونه از حرکت هماهنگ ساده، جسمی است که به سر فنر بسته شده است و نوسان می کند. اگر مکانهای جسم را در زمان های مختلف اندازه بگیریم، مشاهده می کنیم که نمودار مکان زمان این جسم به صورت سینوسی است. در شکل زیر جسم بین x=+A و x=-A نوسان می کند. A دامنه نوسان جسم است. یعنی دورترین فاصله ای که جسم می تواند از نقطه تعادل برود. توجه کنید که دامنه، فاصله بین دو سر مسیر نیست.



معادله حرکت هماهنگ ساده

در حرکت نوسانگر هماهنگ ساده، نمودار مکان زمان سینوسی است یعنی مکان را می توان به صورت تابعی سینوسی یا کسینوسی از زمان t نوشت. اگر فرض کنیم در زمان t=0 نوسانگر در دورترین فاصله خود یعنی x=A باشد، مکان نوسانگر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

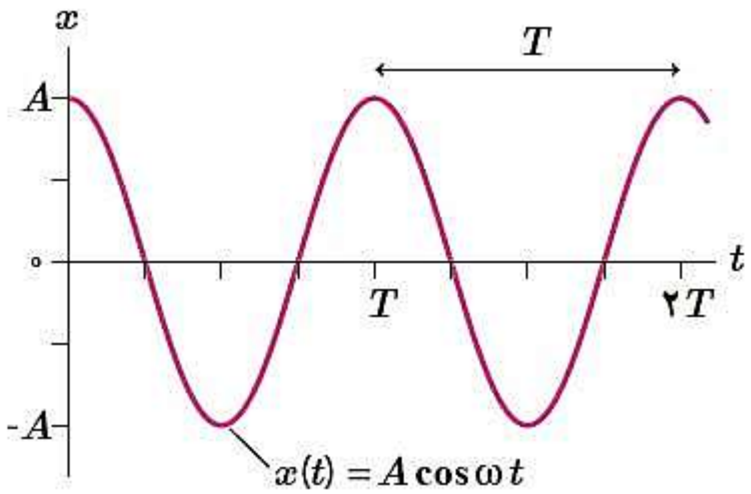
که در آن ω بسامد زاویه ای نوسانگر است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

یکای بسامد زاویه ای در SI، رادیان بر ثانیه (rad/s) است. و عبارتی که داخل کسینوس قرار می گیرد، بر حسب رادیان است.

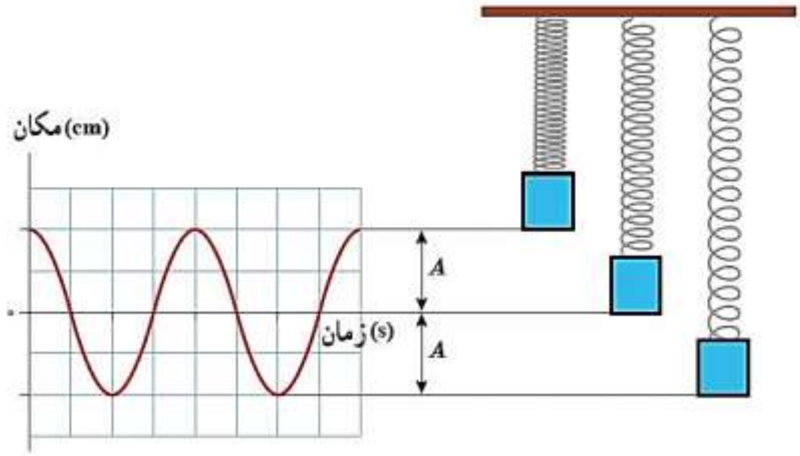
مطابق شکل بالا وقتی نوسانگر در $x=\pm A$ باشد، سرعت نوسانگر برابر با صفر است. به این نقطه ها، نقطه بازگشت حرکت می گویند. همچنین وقتی نوسانگر از نقطه تعادل یعنی $x=0$ بگذرد، سرعت برابر با v_{max} یا $-v_{max}$ می شود که علامت آن بستگی به جهت حرکت نوسانگر دارد.

نمودار مکان– زمان حرکت نوسانگر هماهنگ ساده را می توان به صورت زیر رسم کرد.



مثال 1:

جرمی متصل به یک فنر با بسامد 0.20Hz و دامنه 3cm به طور هماهنگ ساده در امتداد قائم نوسان می کند. پس از گذشت 10.66s از رها شدن جرم از بالای نقطه تعادل، جابجایی این جرم نسبت به نقطه تعادل چقدر است؟



پاسخ:

از رابطه زیر برای یافتن جابجایی نسبت به نقطه تعادل استفاده می کنیم:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

$$A = 0.03\,m \quad \text{و} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \times (0.2\,s^{-1}) = 0.4\pi\frac{rad}{s}$$

در زمان t=10.66 s جرم طبق رابطه بالا، مکان نوسانگر به صورت زیر است:

$$x(t) = 0.03m \times \cos(0.4\pi\, rad/s \times 10.66s) = 0.02m$$

مثال 2:

ذره ای در حال نوسان هماهنگ ساده با دوره تناوب T است. با فرض اینکه در t=0s ذره در x=+A باشد، تعیین کنید در هر یک از لحظات زیر، آیا ذره در x=-A ، در x=+A ، یا در x=0 خواهد بود؟

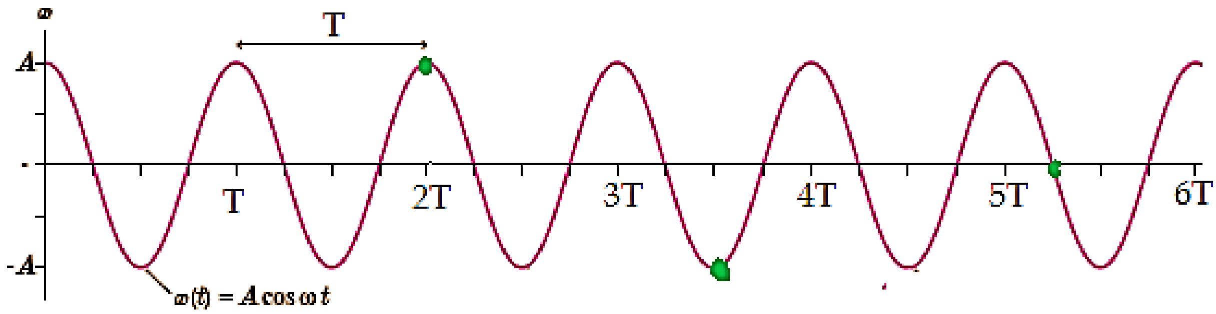
الف) t=2.00T

ب) t=3.5T

پ) t=5.25T

پاسخ:

نمودار مکان–زمان نوسانگر را رسم می کنیم و دوره های نوسان را نمایش دادیم.



مطابق شکل بالا،همانطور که با نقاط سبز رنگ نشان داده شده است، در زمان t=2T ، نوسانگر در مکان x=A قرار دارد. در زمان t=3.5T، نوسانگر در مکان x=-A قرار دارد و در زمان t=5.25T ، نوسانگر در مکان x=0 قرار دارد.

مثال 3:

در حرکت هماهنگ ساده، مکان x(t) باید پس از گذشت یک دوره تناوب برابر مقدار اولیه اش شود. یعنی اگر x(t) مکان در زمان دلخواه t باشد، آنگاه نوسانگر باید در زمان t+T دوباره به همان مکان برگردد و بنابر این Acosωt=Acosω(t+T). بر این اساس نشان دهید ω=2π/T

پاسخ:

برای اثبات از رابطه داده شده شروع می کنیم.

$$Acos(\omega t) = Acos\big(\omega(t+T)\big)$$

$$\rightarrow Acos(\omega t + \omega T) = Acos(\omega t) = Acos(\omega t + 2\pi) \rightarrow \omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

دوره و بسامد نوسان در سامانه جرم– فنر

آزمایش های متنوع با جرم و فنر نشان می دهد که افزایش جرم m در سیستم جرم–فنر باعث افزایش دوره تناوب T می انجامد. همچنین اگر جرم وزنه ها ثابت باشد اما سختی فنر(k) متفاوت باشد، با افزایش ثابت فنر Tکمتر می شود. بنابر این از رابطه تجربی زیر برای دوره تناوب سیستم جسم و فنر استفاده می شود.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

مثال4:

قطعه ای به جرم 680g به فنری با ثابت فنر k=65N/m بسته شده است. قطعه را به اندازه مشخصی از مکان تعادل خود روی یک سطح افقی بدون اصطکاک می کشیم و از حالت سکون رها می کنیم. الف) دوره تناوب و ب) بسامد زاویه ای نوسان چقدر می شود؟

پاسخ:

الف) برای به دست آوردن دوره تناوب از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$T = 2\pi f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.68\,kg}{65\,\frac{N}{m}}} = 0.64s$$

ب)بسامد زاویه ای را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65\,\frac{N}{m}}{0.68\,kg}} = 9.8\,\frac{rad}{s}$$

مثال5:

یک وزنه 20N را از انتهای یک فنر قائم می آویزیم. فنر 20cm کشیده می شود. سپس این فنر را در حالی که به یک وزنه 5N متصل است روی میز بدون اصطکاکی به نوسان در می آوریم. دوره تناوب این نوسان چقدر است؟

پاسخ:

در ابتدا باید ثابت فنر را به دست بیاوریم. برای این کار نیروی وارد بر فنر را حساب می کنیم و با نیروی کشسانی فنر برابر قرار می دهیم. به صورت زیر:

$$F = W = kx \rightarrow 20N = k \times 0.20m \rightarrow k = 100\frac{N}{m}$$

حال برای به دست آوردن دوره تناوب نوسان، از رابطه زیر استفاده می کنیم. قبل از آن چون در صورت سوال به ما وزن وزنه را داده است اما در رابطه بالا باید جرم وزنه را وارد کنیم بنابر این باید جرم وزنه را به دست بیاوریم:

$$W = mg \rightarrow 5N = m \times 10\frac{N}{kg} \rightarrow m = 0.5\ kg$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5\ kg}{100\frac{N}{m}}} = 0.44\ s$$

مثال 6:

دامنه نوسان یک حرکت هماهنگ ساده 3×10^{-2} متر و بسامد آن 5Hz است. معادله حرکت این نوسانگر را بنویسید و نمودار مکان–زمان آن را در یک دوره رسم کنید.

پاسخ:

برای رسم نمودار مکان – زمان ابتدا باید رابطه مکان نوسانگر با زمان را به دست بیاوریم که به صورت زیر عمل می کنیم:

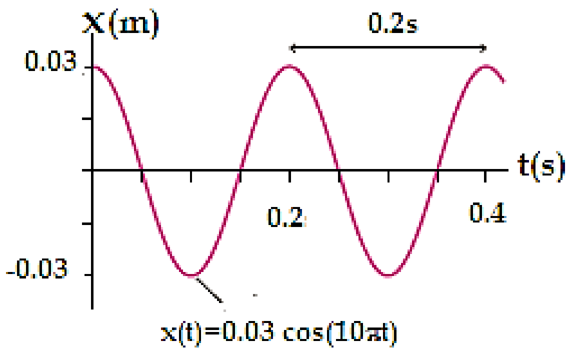
$$x(t) = A\cos(\omega t) \rightarrow \omega = 2\pi f \rightarrow x(t) = A\cos(2\pi f \times t)$$

$$x(t) = 3 \times 10^{-2} \times \cos(2\pi \times 5 \times t)$$

$$x(t) = 3 \times 10^{-2} \times \cos(10\pi t)$$

دوره تناوب نوسان به صورت زیر است:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5Hz} = 0.2s$$

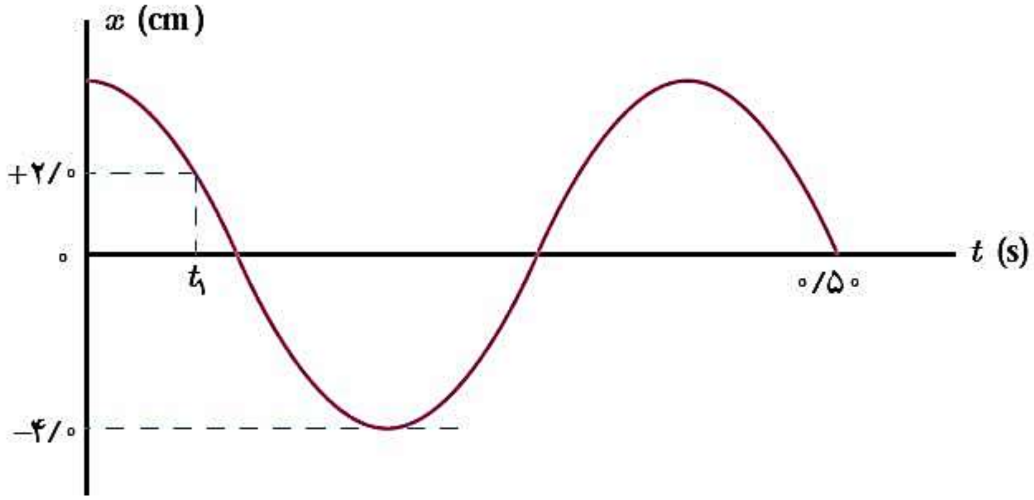


مثال 7: نمودار مکان–زمان نوسانگری مطابق شکل زیر است:

الف) معادله حرکت این نوسانگر را بنویسید.

ب)مقدار t_1 را به دست آورید.

پ)شتاب نوسانگر را در لحظه t_1محاسبه کنید.



پاسخ:

الف) از شروع نمودار تا پایان که در زمان 5s نمایش داده شده است، به اندازه یک نوسان کامل به اضافه یک چهارم نوسان طی شده است بنابر این:

$$T + \frac{1}{4}T = 5s \rightarrow T = 4s \rightarrow f = \frac{1}{4} = 0.25Hz$$

$$\rightarrow \omega = 2\pi f = 0.5\pi$$

$$x(t) = Acos(\omega t) \rightarrow x(t) = 4cm \times cos(0.5\pi \times t)$$

ب) در زمان t_1 مکان نوسانگر 2cm است بنابر این با جایگذاری در رابطه به دست آمده در قسمت قبل داریم:

$$2cm = 4cm \times cos(0.5\pi \times t_1) \rightarrow \frac{1}{2} = cos(0.5\pi \times t_1) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$0.5\pi \times t_1 = \frac{\pi}{3} \rightarrow t_1 = \frac{2}{3}s$$

پ) برای به دست آوردن شتاب معادله نیرو را در دو حالت می نویسیم تا معادله شتاب- مکان حرکت هماهنگ ساده بدست آید.

$$\begin{cases} F = ma \\ F = -kx \end{cases} \to ma = -kx \to a = -\frac{k}{m}x \to a = -\omega^2 x$$

$$a = -\omega^2 x$$

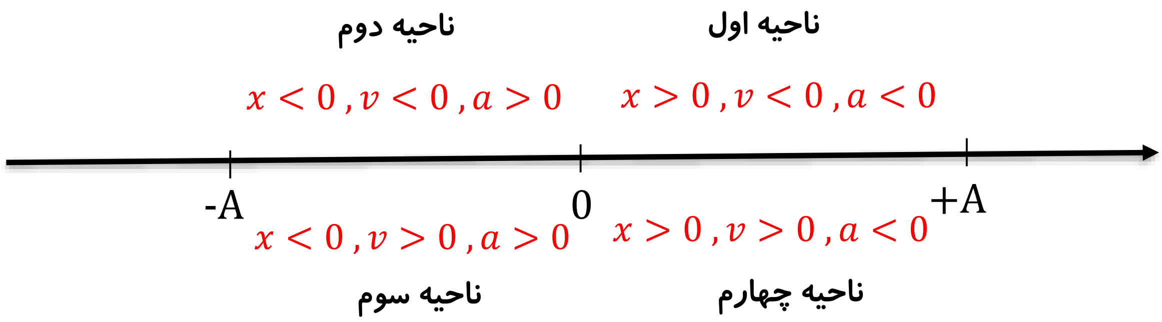
$$a_{max} = \omega^2 A$$

در زمان t_1 مکان نوسانگر 2cm است بنابر این با جایگذاری در رابطه بالا داریم:

$$a(t) = -(0.5\pi)^2 \times 0.2m = -0.05\pi^2 \frac{m}{s^2}$$

علامت سرعت و شتاب در ناحیه های مختلف حرکت هماهنگ ساده

برای تعیین نوع حرکت هماهنگ ساده نیاز داریم علامت های سرعت و شتاب را در مکان های مختلف تعیین کنیم. از اینرو در سامانه جرم- فنر روی خط راست (محور x) به صورت شکل زیر می توان علامت ها را تعیین کرد. اگر نوسانگر به سمت چپ حرکت کند، علامت سرعت منفی است و اگر به سمت راست حرکت کند، علامت سرعت مثبت است. اگر فنر در حالت کشیده شده (مکانش بعد از نقطه تعادل باشد) باشد، علامت شتاب منفی و اگر فنر در حالت فشرده شده (مکانش قبل از نقطه تعادل باشد) باشد، علامت شتاب مثبت است.



در نتیجه حرکت در ناحیه های اول و سوم ، تند شونده و در ناحیه های دوم و چهارم ، کند شونده است.

در شکل بالا تعریف ناحیه ها به صورت زیر است:

- **ناحیه اول یعنی زمانی که نوسانگر از مثبت A به نقطه تعادل می رود.**
- **ناحیه دوم یعنی زمانی که نوسانگر از نقطه تعادل به منفی A می رود.**
- **ناحیه سوم یعنی زمانی که نوسانگر از منفی A به نقطه تعادل می رود.**
- **ناحیه چهارم یعنی زمانی که نوسانگر از نقطه تعادل به مثبت A می رود.**

تمرین ها

تمرین 1: هرگاه جسمی به جرم m به فنری متصل شود و به نوسان درآید، با دوره تناوب 2s نوسان می کند. اگر جرم این جسم 2kg افزایش یابد، دوره تناوب 3s می شود. مقدار m چقدر است؟

پاسخ:

برای پاسخ به این سوال باید رابطه بین جرم و دوره تناوب نوسان را بدانیم:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2s$$

$$\frac{m}{k} = (\frac{T_1}{2\pi})^2 = (\frac{2}{2\pi})^2 = \frac{1}{\pi^2}$$

$$m = \frac{1}{\pi^2} \times k$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{(m+2)}{k}} = 3s$$

$$\frac{m+2}{k} = \left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 = \frac{9}{4\pi^2}$$

$$\frac{m}{k} + \frac{2}{k} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{2}{k} = \frac{9}{4\pi^2} \rightarrow \frac{2}{k} = \frac{5}{4\pi^2} \rightarrow k = \frac{8\pi^2}{5}$$

$$m = \frac{1}{\pi^2} \times k = \frac{1}{\pi^2} \times \frac{8\pi^2}{5}$$

$$m = \frac{8}{5}\ kg = 1.6kg$$

تمرین 2: جرم خودرویی همراه با سرنشینان آن $1600kg$ است. این خودرو روی چهار فنر با ثابت 2.00×10^4 نیوتون بر متر سوار شده است. دوره تناوب، بسامد و بسامد زاویه ای ارتعاش خودرو وقتی از چاله ای می گذرد چقدر است؟ فرض کنید وزن خودرو به طور یکنواخت روی فنرهای چهارچرخ توزیع شده است.

پاسخ:

چون وزن خودرو روی هر چهار چرخ به صورت یکسان توزیع شده است پس می توانیم پارامتر ها را برای یک فنر که یک چهارم وزن خودرو به آن وصل شده است درنظر بگیریم و بقیه فنر ها هم مانند این فنر رفتار می کنند بنابر این:

جرم متصل به یک فنر:

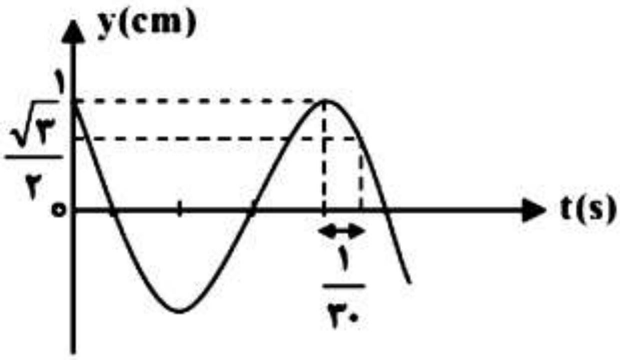
$$m' = \frac{m}{4} = \frac{1600kg}{4} = 400kg$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{400\ kg}{2\times10^4\frac{N}{m}}} = 0.89s$$

$$f = \frac{1}{T} = 1.12\ Hz$$

$$\omega = 2\pi f = 7.06\frac{rad}{s}$$

تمرین 3: نمودار مکان–زمان نوسانگر ساده ای مطابق شکل مقابل است. دوره آن چند ثانیه است؟



پاسخ: برای به دست آوردن دوره نوسان، می توانیم ابتدا معادله مکان زمان نوسانگر را بیابیم و از آنجا، دوره تناوب نوسان را به دست بیاوریم:

$$x(t_1) = A cos(\omega t_1) = 1 \times cos(\omega t_1) = 1 \to cos(\omega t_1) = 1$$

$$\to \omega t_1 = 2\pi$$

$$x(t_2) = A cos(\omega t_2) = 1 \times cos(\omega t_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \to cos(\omega t_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\to \omega t_2 = \frac{\pi}{6} \text{ یا } 2\pi + \frac{\pi}{6} \to \omega\left(t_1 + \frac{1}{30}\right)$$

اینجا چون طبق نمودار،نقطه مورد نظر، بیش از یک دوره نوسان بود، بنابر این زاویه آن باید بیشتر از یک دوره باشد به همین دلیل عبارت 2π را اضافه کردیم.

$$\to \begin{cases} \omega t_1 = 2\pi \\ \omega\left(t_1 + \frac{1}{30}\right) = 2\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \to \omega \times \frac{1}{30} = \frac{\pi}{6} \to \omega = 5\pi$$

می دانیم:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \to T = \frac{2}{5}\ s = 0.4\ s$$

تمرین 4: جسمی به جرم m به فنری با ثابت k متصل است و با دوره 0.1π ثانیه نوسان می کند. اگر جرم جسم 190g کاهش یابد، با دوره 0.09π ثانیه نوسان می کند. k چند نیوتون بر سانتی متر است؟

پاسخ:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0.1\pi$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0.09\pi = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 - 0.19}{k}}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{m_1 - 0.19}{k}} = 0.045 \\ \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0.05 \end{cases} \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{m_1 - 0.19}{k}}}{\sqrt{\frac{m_1}{k}}} = \sqrt{\frac{m_1 - 0.19}{m_1}} = \frac{0.045}{0.05}$$

$$\frac{m_1 - 0.19}{m_1} = 0.81 \rightarrow 100m_1 = 81m_1 + 19 \rightarrow 19m_1 = 19$$

$$m_1 = 1kg$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0.1\pi \rightarrow \sqrt{k} = 20 \rightarrow k = \frac{400N}{m} = 4\frac{N}{cm}$$

تمرین 5: نوسانگر وزنه–فنر، روی سطح افقی بدون اصطکاک با دامنه ی A_1 و بسامد f_1 نوسان می کند. در لحظه ای که نوسانگر در بیشترین فاصله از مرکز نوسان قرار دارد، 3/4 وزنه، کنده شده و جدا می شود و جرم باقی مانده ی متصل به همان فنر به نوسان ادامه می دهد. اگر در این حالت بسامد، f_2 و دامنه، A_2 باشد، نسبت های A2/A1 و f2/f1 را حساب کنید.

پاسخ:

دامنه نوسان، بستگی به جرم و ثابت فنر و پارامتر های مسئله ندارد بلکه شرط اولیه ای است که به صورت دستی به مسئله اعمال می شود یعنی ما با دست خود به مقدار دلخواه جسم را از نقطه تعادل جابجا می کنیم. بنابر این

$$A_1 = A_2$$

حال نسبت فرکانس های دو حالت را به دست می آوریم:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{\omega_2}{2\pi}}{\frac{\omega_1}{2\pi}} \rightarrow \frac{\sqrt{\frac{K}{m_2}}}{\sqrt{\frac{K}{m_1}}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{m_1}{\frac{1}{4}m_1}} = 2$$