۱- توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$ ب) $f(x) = \frac{x}{x - ۲}$

« پاسخ »

الف) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$ ب) $f(x) = \frac{x}{x - ۲}$

الف) $f'(x) = ۶x^۲ - ۶x - ۱۲ = x^۲ - x - ۲ = (x - ۲)(x + ۱) = ۰ \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۱ \end{cases}$

x	$-\infty$	-۱	۲	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

در بازه‌های $(-\infty , -۱)$ و $(۲ , +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-۱ , ۲)$ نزولی

ب) $D = R - \{۲\}$

$f'(x) = \frac{۱(x - ۲) - ۱(x)}{(x - ۲)^۲}$

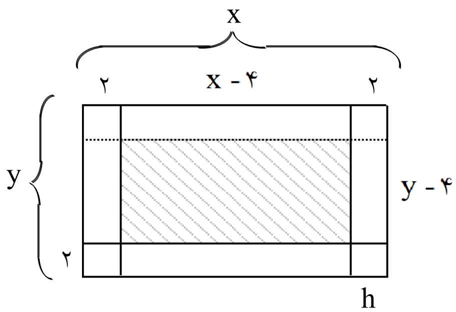
$f'(x) = \frac{-۲}{(x - ۲)^۲} < ۰$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f'	-		-
f	نزولی	۰	نزولی

در $R - \{۲\}$ یعنی در تمام نقاط دامنه نزولی می‌باشد.

۲- یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = 100\,cm^2$ و $h = 2\,cm$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیش‌ترین مقدار ممکن شود.

« **پاسخ** »



$$\begin{cases} xy = 100 \\ y = \dfrac{100}{x} \end{cases}$$

$$V = 2(x-4)(y-4) = 2xy - 8x - 8y + 32$$

$$V(x) = 232 - 8x - \frac{800}{x}$$

$$V(x) = \frac{232x - 8x^2 - 800}{x}$$

$$V'(x) = \frac{\cancel{(232 - 16x)}(x) - 1\left(\cancel{232}x - 8x^2 - 800\right)}{x^2} \Rightarrow V'(x) = \frac{-8x^2 + 800}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$$

۳- ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه $(1\,,\,2)$، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

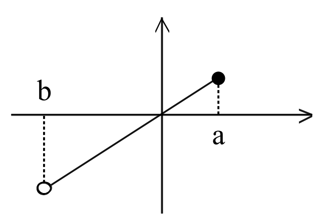
« **پاسخ** »

$$(1\,,\,2) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow -3 + b = 1 \Rightarrow b = 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

۴- نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

« **پاسخ** »



۵- اگر تابع $f(x) = ax^{۲} + bx$ در $x = ۱$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۲\alpha x + b \Rightarrow \underbrace{۰ = ۲\alpha + b}_{۰/۲۵} \Rightarrow b = -۲\alpha$$

$$f'(۱) = ۷ \Rightarrow \underbrace{۷ = \alpha + b}_{۰/۲۵} \Rightarrow \underbrace{\alpha = -۷ \,,\, b = ۱۴}_{۰/۲۵}$$

۶- الف) جدول تغییرات تابع $f(x) = ۲x^{۳} + ۳x^{۲} - ۱۲x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا مشخص کنید.
ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازه‌ی $(-۱ \,,\, ۳)$ مشخص کنید.

« **پاسخ** »

الف) تکمیل جدول نیم نمره

x		-۲		۱	
f'	+		-		+
		Max		Min	

$$f'(x) = ۶x^{۲} + ۶x - ۱۲ = ۰ \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \end{cases} (۰/۵)$$

ب)

$f(۱) = -۷$
$f(-۲) \notin [-۱ \,,\, ۳] \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \min : (۱ \,,\, -۷) \; (۰/۲۵) \,,\, \max : (۳ \,,\, ۴۵) \; (۰/۲۵)$
$f(-۱) = ۱۳$
$f(۳) = ۴۵$

نقطه بحرانی: $(۱ \,,\, -۷) \quad (۰/۲۵)$

۷- اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^{۴} - ۲x^{۳} + ۲$ را در بازه $[-۲ \,,\, ۱]$ به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۴x^{۲} - ۶x^{۲} = ۰ \xrightarrow{۰/۲۵} x = ۰$ ۰/۲۵ ق ق , $x = \frac{۳}{۲}$ ۰/۲۵ غ ق ق

$f(۰) = ۲$ ۰/۲۵ , $f(۱) = ۱$ ۰/۲۵ مینیمم مطلق $f(-۲) = ۳۴$ ۰/۲۵ ماکسیمم مطلق

۸- نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = Sin^{۲}x + ۲Cosx$ را در بازه $[۰ , ۲\pi]$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \underbrace{۲Sinx\ Cosx - ۲Sinx = ۰}_{(۰/۵)} \to ۲Sinx(Cosx - ۱) = ۰$$

$Sinx = ۰ \to x = k\pi \to x = ۰ , \pi , ۲\pi \quad (۰/۲۵)$

$Cosx = ۱ \to x = ۲k\pi \quad x = ۰ , ۲x \quad (۰/۲۵)$

طول نقطه بحرانی: $x = \pi , x = ۰ , x = ۲\pi \quad (۰/۲۵)$

$f(۰) = f(۲\pi) = ۲ \to (۰ , ۲) , (۲\pi , ۲)$ نقاط ماکسیمم مطلق $(۰/۵)$

$f(\pi) = -۲ \to (\pi , -۲)$ نقطه مینیمم مطلق $(۰/۲۵)$

۹- نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^{۲} - ۱}$ را تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$$D_f = R \ (۰/۲۵) \quad , f'(x) = \frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^{۲} - ۱)^{۲}}} \ (۰/۵) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ (۰/۲۵) \\ f'(x) \text{ ت.ن} \Rightarrow x = \pm ۱ \ (۰/۵) \end{cases} \Rightarrow \{۰, ۱ , -۱\}$$ نقاط بحرانی

۱۰- جهت تغییرات و مقدار ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $y = x^{۳} - \frac{۹}{۲}x^{۲} - ۱۲x + ۱$ را در بازه‌ی $[-۲, ۳]$ مشخص کنید.

« **پاسخ** »

$$y = x^{۳} - \frac{۹}{۲}x^{۲} - ۱۲x + ۱ \Rightarrow y' = ۳x^{۲} - ۹x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۴ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

x	-۲		-۱		۳
y'		+	۰	—	
y	-۱	↗	$\frac{۱۵}{۲}$	↘	$-\frac{۹۷}{۲}$

مطلق $max = \frac{۱۵}{۲}$

مطلق $min = -\frac{۹۷}{۲}$

۱۱- مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x^۴ - ۸x^۳$ را در بازه‌ی $[۱,۳]$ بیابید.

« **پاسخ** »

$D = R \quad y' = ۱۲x^۳ - ۲۴x^۲$ ۰/۲۵ $\quad ۱۲x^۳ - ۲۴x^۲ = ۰$ ۰/۲۵

$\rightarrow ۱۲x^۲(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & ۰/۲۵ \quad \text{غیر قابل قبول} \quad ۰/۲۵ \\ x = ۲ & ۰/۲۵ \end{cases}$

$f(۱) = -۵$ ۰/۲۵ $\quad f(۲) = -۱۶$ ۰/۲۵ مینیمم مطلق $\quad f(۳) = ۲۷$ ۰/۲۵ ماکسیمم مطلق

۱۲- نقاط ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $y=x+\frac{۴}{x}$ را در بازه‌ی $[-۳,-۱]$ تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$f'(x)=۱-\frac{۴}{x^۲}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow f'(x)=۰ \Rightarrow \begin{matrix} x=۲ \quad \text{غ ق ق} \quad ۰/۲۵ \\ x=-۲ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} f(-۳)=\frac{-۱۳}{۳} & ۰/۲۵ \\ f(-۲)=-۴ & ۰/۲۵ \\ f(-۱)=-۵ & ۰/۲۵ \end{cases}$

تابع در $x=-۲$ ماکسیمم مطلق ۰/۲۵ و در $x=-۱$ مینیمم مطلق دارد. ۰/۲۵

۱۳- طول نقاط ماکسیمم و می‌نیمم مطلق تابع $g(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ را درصورت وجود در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ مشخص کنید.

« **پاسخ** »

تابع g در بازه‌ی $[-۱, ۲]$ پیوسته است.

$g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۴ - x^۲}} \Rightarrow g'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} g(-۱) = \sqrt{۳} \\ g(۰) = ۲ \\ g(۲) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = ۰ \quad \text{طول ماکسیمم مطلق} \\ x = ۲ \quad \text{طول مینیمم مطلق} \end{matrix}$

۱۴- مقادیر a و b و c را طوری تعیین کنید که تابع $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ می‌نیممی به مختصات $(۱,-۲)$ داشته باشد و از مبدأ مختصات نیز بگذرد.

« **پاسخ** »

$(۰,۰) \in$ منحنی $\Rightarrow c = ۰$ ۰/۲۵

$(۱,-۲) \in$ منحنی $-۲ = ۱ + a + b \longrightarrow a + b = -۳$ ۰/۲۵

$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b \Rightarrow ۲a + b = -۳$ ۰/۵ $, \begin{cases} a + b = -۳ \\ ۲a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۰ , b = -۳$ ۰/۵

۱۵- مقادیر a و b را طوری بیابید که نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}-1\\-3\end{vmatrix}$ اکسترمم تابع $f(x) = ax^3 + bx$ باشد.

« **پاسخ** »

$$A\begin{vmatrix}-1\\-3\end{vmatrix} \in \text{تابع} \Rightarrow -3 = a(-1)^3 + b(-1) \Rightarrow -a - b = -3 \quad 0/25$$

$$y' = 3ax^2 + b \Rightarrow 0 = 3a(-1)^2 + b \Rightarrow 3a + b = 0 \quad 0/25$$

$$\begin{cases} -a - b = -3 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = \frac{-3}{2} \qquad b = \frac{9}{2} \quad 0/5$$

۱۶- تابع $y = x^2 + bx + 3$ مفروض است. b را چنان بیابید که تابع، می‌نیممی برابر ۲ داشته باشد.

« **پاسخ** »

روش اول:

$$y = x^2 + bx + 3$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{12 - b^2}{4} = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

روش دوم:

$$y' = 2x + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2}$$

$$\left(-\frac{b}{2}, 2\right) \Rightarrow 2 = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2}\right) + 3 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

۱۷- تابع $y = x^2 + 2ax + b$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که $A(2,4)$ مینیمم تابع باشد.

« **پاسخ** »

$$y' = 2x + 2a \rightarrow 0 = 4 + 2a \rightarrow a = -2$$

$$4 = 4 + 4a + b \rightarrow 4a + b = 0 \rightarrow -8 + b = 0 \rightarrow b = 8$$

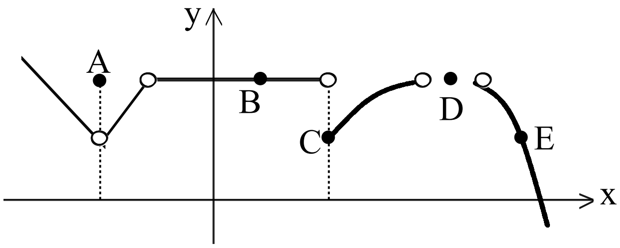
۱۸- تابع $y = x^3 + ax + b$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ای به طول ۱ دارای مینیمم یا ماکزیممی برابر ۲- باشد.

« **پاسخ** »

$$(1, -2) \xrightarrow{\text{در تابع}} -2 = 1 + a + b \Rightarrow a + b = -3$$

$$y' = 3x^2 + a = 0 \Rightarrow 0 = 3(1)^2 + a \Rightarrow a = -3 \;,\; b = 0$$

۱۹- شکل زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است. کدام‌یک از نقاط مشخص‌شده در شکل، نقطه‌ی بحرانی نیست؟



« **پاسخ** »

نقطه E بحرانی نیست ۰/۲۵

۲۰- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = |x - ۴| - |x + ۵|$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \frac{x - ۴}{|x - ۴|} - \frac{x + ۵}{|x + ۵|} = \begin{cases} ۰ & x < -۵ \\ -۲ & -۵ < x < ۴ \\ ۰ & x > ۴ \end{cases}$$

پس f در فاصله‌ی $[-۵ , ۴]$ اکیداً نزولی است و در هیچ فاصله‌ای اکیداً صعودی نمی‌باشد.

۲۱- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = x^۳ - ۵x^۲ + ۳x - ۱۱$ روی آنها اکیدا صعودی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۰x + ۳ \qquad , f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۳ , x = \frac{۱}{۳}$$

x		$\frac{۱}{۳}$		۳	
y'	+		-		+
y	↗		↘		↗

پس f در فاصله‌های $(-\infty , \frac{۱}{۳}]$ و $[۳ , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۲- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x = ۲$ ماکسیمم نسبی داشته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x - ۳ & x < ۲ \\ a & x = ۲ \\ ۱ - x & x > ۲ \end{cases}$$

« **پاسخ** »

باید همسایگی حول نقطه‌ی $x = ۲$ وجود داشته باشد که عرض تمام نقاط این همسایگی از عرض $x = ۲$ کمتر باشد.

پس:

$$\left.\begin{array}{l} f(۲) \geqslant \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) \\ f(۲) \geqslant \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(۲) \geqslant -۱ \\ f(۲) \geqslant -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a \geqslant -۱$$

پس a باید در فاصله‌ی $[-۱ , +\infty)$ باشد.

۲۳- نقاطی را پیدا کنید که تابع $f(x) = \frac{x^۳}{۳} - ۲x^۲ + ۴x - ۳$ در آنها اکسترمم نسبی دارد.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = x^۲ - ۴x + ۴ = (x - ۲)^۲ \geqslant ۰$$

f پیوسته است و $f'(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد پس تابع f اکسترمم نسبی ندارد.

۲۴- مقدارهای a , b و c را طوری تعیین کنید که نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ از نقطه‌ی $(۲ , ۱)$ عبور کند و در نقطه‌ی $\left(\frac{۵}{۲} , \frac{۳}{۴}\right)$ می‌نیمم نسبی داشته باشد.

« **پاسخ** »

$$\begin{cases} ۴a + ۲b + c = ۱ \\ \frac{۲۵}{۴}a + \frac{۵}{۲}b + c = \frac{۳}{۴} \\ -\frac{b}{۲a} = \frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow a = ۱ , b = -۵ , c = ۷$$

۲۵- به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}(a - ۱)x^{۳} + ۲ax^{۲} + ۴(a + ۲)x + ۲$ اکیدا صعودی است؟

« **پاسخ** »

$$f'(x) = (a - ۱)x^{۲} + ۴ax + ۴(a + ۲)$$

$f'(x)$ همواره باید مثبت باشد پس:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta \leqslant ۰ \\ x^{۲} \text{ ضریب } > ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -۱۶(a - ۲) \leqslant ۰ \\ a - ۱ > ۰ \end{cases} \Rightarrow a \geqslant ۲$$

پس به ازای $a \in [۲, +\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

۲۶- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = \sqrt{x^{۲} - x + ۱}$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$D_f = R$$

$$f'(x) = \frac{۲x - ۱}{۲\sqrt{x^{۲} - x + ۱}} \quad , \; f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$	$\frac{۱}{۲}$	$+\infty$
y'	-	•	+
y	↘		↗

پس این تابع در فاصله‌ی $(-\infty, \frac{۱}{۲}]$ اکیداً نزولی و در فاصله‌ی $[\frac{۱}{۲}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۷- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ + ۳x + ۲}$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \frac{۶x^۲ - ۱۲}{(x^۲ + ۳x + ۲)^۲} = \frac{۶(x^۲ - ۲)}{(x^۲ + ۳x + ۲)^۲}$$

$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$ و $x = -\sqrt{۲}$

$x = -۲$ و $x = -۱$: مجانب های قائم

x	$-\infty$		-۲		$-\sqrt{۲}$		-۱		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
y'		+	|	+	•	-	|	-	•	+	
y		$\nearrow$	|	$\nearrow$		$\searrow$	|	$\searrow$		$\nearrow$	

پس این تابع در فاصله‌های $(-\infty , -۲)$, $(-۲ , -\sqrt{۲}]$, $[\sqrt{۲} , +\infty)$ اکیداً صعودی و در فاصله‌های $(-۱ , \sqrt{۲}]$, $[-\sqrt{۲} , -۱)$ اکیداً نزولی است.

۲۸- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x + ۱۵$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲ = ۶(x - ۱)(x + ۲)$, $f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۱ , x = -۲$

x		-۲		۱	
y'	+	•	-	•	+
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

پس f در بازه‌های $(-\infty , -۲]$ و $[۱ , +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $[-۲ , ۱]$ اکیداً نزولی است.

۲۹- جهت تقعر نمودار f با ضابطه $f\ (x) = x^۴ - ۴x^۳$ را در دامنه‌اش مشخص کنید و نقاط عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x^۲$ ۰/۲۵

$f''(x) = ۱۲\ x^۲ - ۲۴x$ ۰/۲۵ $\xrightarrow{f''(x)\ =\ ۰}$ $۱۲x\ (x - ۲) = ۰ \rightarrow x = ۰\ ,\ x = ۲$ ۰/۲۵

x	$-\infty$	۰		۲	$+\infty$
علامت $f''(x)$	+	۰	—	۰	+
جهت تقعر f	رو به بالا		رو به پایین		رو به بالا

۰/۵

نقاط عطف: $(۰,۰)\ ,\ (۲,-۱۶)$ ۰/۲۵

۳۰- جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۴-۴x^۳$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقاط عطف آن را بیابید.

« **پاسخ** »

$f'(x)=۴x^۳-۱۲x^۲$ ۰/۲۵ $f''(x)=۱۲x^۲-۲۴x$ ۰/۲۵ $=۱۲x(x-۲)$

$۱۲x(x-۲)=۰ \rightarrow x=۰$ ۰/۲۵ , $x=۲$ ۰/۲۵

x	$-\infty$	۰		۲	$+\infty$
f''	+	۰	-	۰	+
f	$\cup$	۰ عطف	$\cap$	۱۶- عطف	$\cup$

۰/۵

نقاط عطف: (۰ و ۰) و (۱۶- و ۲) ۰/۵

۳۱- به ازای چه مقداری برای a نقطه‌ای به طول ۱ نقطه‌ی عطف منحنی $f(x) = \frac{۱}{۴}\ x^۴ + x^۳ + ۳ax^۲$ می‌باشد.

« **پاسخ** »

$f'(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۶\ ax$ ۰/۵ , $f''(x) = ۳x^۲ + ۶x + ۶a$ ۰/۵ $\Rightarrow ۹ + ۶a = ۰$ ۰/۲۵

$\Rightarrow\ a = -\frac{۳}{۲}$ ۰/۲۵

۳۲- مقادیر a ، b و c را طوری بیابید که نقطه‌ی (۱,۲) ، نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=ax^۳+۳bx^۲-c$ بوده و نمودار آن، محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع کند.

« **پاسخ** »

$f(۰)=۴ \Rightarrow C=-۴$ ۰/۲۵

$f'(x)=۳ax^۲+۶bx$ ۰/۲۵ , $f''(x)=۶ax+۶b$ ۰/۲۵

$f''(۱)=۰ \Rightarrow a+b=۰$ ۰/۲۵ , $f(۱)=۲ \Rightarrow a+۳b=-۲$ ۰/۲۵

$\begin{cases} a+b=۰ \\ a+۳b=-۲ \end{cases} \Rightarrow a=۱$ ۰/۲۵ , $b=-۱$ ۰/۲۵

۳۳- تابع $y = x^۳ + ax^۲ + bx + c$ مفروض است c,b,a را طوری بیابید که نقطه‌ی (۱- , ۱) اکسترمم منحنی و طول نقطه‌ی عطف آن ۲ باشد.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^۲ + ۲ax + b \qquad y'' = ۶x + ۲a$

اکسترمم $(۱, -۱) \rightarrow \begin{cases} -۱ = ۱ + a + b + c \\ ۰ = ۳ + ۲a + b \end{cases}$

طول نقطه ی عطف $x = ۲ \rightarrow ۰ = ۱۲ + ۲a \rightarrow a = -۶$

$۳ + ۲a + b = ۰ \rightarrow ۳ - ۱۲ + b = ۰ \rightarrow b = ۹$

$-۲ = a + b + c \rightarrow -۲ = -۶ + ۹ + c \rightarrow c = -۵$

۳۴- مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی (۱,۲) نقطه‌ی عطف تابع $y = ax^۳+bx^۲+۴$ باشد.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۳ax^۲ + ۲bx$ ۰/۲۵ , $f''(x) = ۶ax + ۲b$ ۰/۲۵ , $f''(۱) = ۰ \Rightarrow ۳a + b = ۰$ ۰/۲۵

$f(۱) = ۲ \Rightarrow a + b = -۲$ ۰/۲۵ $\Rightarrow a = ۱$ ۰/۲۵ , $b = -۳$ ۰/۲۵

۳۵- m را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی به طول $x = ۲$ نقطه‌ی عطف $y = x^۳ - mx^۲ + ۲x$ باشد.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^۲ - ۲mx + ۲$ ۰/۲۵ $\Rightarrow y'' = ۶x - ۲m$ ۰/۲۵

$f'(۲) = ۰$ ۰/۲۵ $\Rightarrow ۶(۲) - ۲m = ۰ \Rightarrow m = ۶$ ۰/۲۵

۳۶- به ازای چه مقادیری از a و b نقطه‌ی (۱,۲) مرکز تقارن منحنی نمایش تابع $y = ax^۳ + bx^۲$ است؟

« **پاسخ** »

در توابع درجه سوم، مرکز تقارن همان نقطه‌ی عطف است.

$(۱,۲) \Rightarrow ۲ = a + b$

$y' = ۳ax^۲ + ۲bx \Rightarrow y'' = ۶ax + ۲b \Rightarrow ۰ = ۶a + ۲b \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۲ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = -۱ , b = ۳$

۳۷- معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y = x^{۳} - ۳x + ۱$ را در نقطه‌ی عطف آن بنویسید.

« **پاسخ** »

$y' = ۳x^{۲} - ۳ \qquad m_{\text{مماس}} = -۳ \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{۱}{۳}$

$y'' = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow (۰,۱)$

$y - ۱ = \frac{۱}{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + ۱$

۳۸- جهت تقعر و نقطه‌ی عطف تابع $y = -۲x^{۳} + ۶x^{۲} + ۱$ را در صورت وجود تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$y' = -۶x^{۲} + ۱۲x$

$y'' = -۱۲x + ۱۲ \xrightarrow{y''=۰} x = ۱ \Rightarrow y = ۵$ $(۱,۵)$ نقطه عطف

x	$-\infty$		۱		$-\infty$
علامت y''		+	۰	—	
جهت تقعر y		تقعر بالا $\cup$	۵	تقعر پایین $\cap$	

۳۹- نقاط عطف توابع زیر را پیدا کنید:

الف) $f(x) = (x - ۲)^{۴} + ۴x + ۴$ ب) $f(x) = x^{۴} - ۸x^{۳} + ۲۴x^{۲}$

« **پاسخ** »

الف) $f'(x) = ۴(x - ۲)^{۳} + ۴ \rightarrow f''(x) = ۱۲(x - ۲)^{۲} \geqslant ۰ \rightarrow$ f'' تغییر علامت نمی‌دهد پس f عطف ندارد

ب) $f'(x) = ۴x^{۳} - ۲۴x^{۲} + ۴۸x \rightarrow f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۴۸x + ۴۸ = ۱۲\left(x^{۲} - ۴x + ۴\right)$

$= ۱۲(x - ۲)^{۲} \geqslant ۰ \rightarrow$ f عطف ندارد

۴۰- معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۴$ را در نقطه عطف آن به‌دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۶x$$
$$f''(x) = ۶x + ۶ \Rightarrow f''(x) = ۰ \Rightarrow x = -۱$$
$$f(-۱) = (-۱)^{۳} + ۳(-۱)^{۲} + ۴ = ۶ \qquad A(-۱\ ,\ ۶)$$
$$m = f'(-۱) = ۳(-۱)^{۲} + ۶(-۱) = -۳$$
$$y - y_{۰} = m\left(x - x_{۰}\right)$$
$$y - ۶ = -۳(x + ۱) \Rightarrow y = -۳x + ۳$$

۴۱- معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y = x^{۳} + ۳x^{۲}$ را در نقطه‌ی عطف آن بنویسید.

« **پاسخ** »

$$y' = ۳x^{۲} + ۶x \rightarrow y'' = ۶x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \rightarrow y = ۲ \rightarrow (-۱,۲)\ \text{نقطه عطف}$$
$$m = -۳ \Rightarrow y - ۲ = -۳(x + ۱) \rightarrow y = -۳x - ۱$$

۴۲- نقاط عطف نمودار تابع $f(x) = x^{۲} + ۲\sqrt{۲}(\operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x)$ را در بازه‌ی $[۰\ ,\ ۲\pi]$ تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$$y' = ۲x + ۲\sqrt{۲}(\operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x) \rightarrow y'' = ۲ + ۲\sqrt{۲}(-\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x) = ۰$$
$$\operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \rightarrow \sqrt{۲}\operatorname{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\operatorname{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{۱}{۲} \rightarrow x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}\ \text{و}\ ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶}$$
$$\rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۱۲}\ \text{و}\ x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۱۲}$$

۴۳- معادله‌های خط مماس و قائم بر نمودار تابع $f(x) = x^{۳} - ۹x^{۲} + ۲۴x - ۷$ در نقطه‌ی عطف آن به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$y' = ۳x^{۲} - ۱۸x + ۲۴ \Rightarrow f'(۳) = ۲۷ - ۵۴ + ۲۴ = -۳ \Rightarrow \text{مماس} : y - ۱۱ = -۳(x - ۳)$$
$$y'' = ۶x - ۱۸ \Rightarrow x = ۳\ \text{عطف}\ (۳\ ,۱۱) \qquad \Rightarrow y = -۳x + ۲۰$$
$$\text{قائم} : y - ۱۱ = \frac{۱}{۳}(x - ۳) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + ۱۰$$

۴۴- جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تغییرات تابع مقابل را در صورت وجود تعیین کنید. $y = x^۲ + ۵x + ۴$

« **پاسخ** »

$y' = ۲x + b$
$y'' = ۲ > ۰$
نقطه عطف ندارد $\Rightarrow$ همواره تقعر به طرف بالاست.

۴۵- جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

پ) $f(x) = -x(x+۲)^{۲}$ ت) $f(x) = \dfrac{۲x-۱}{x-۲}$

« **پاسخ** »

پ) $f(x) = -x(x+۲)^{۲} \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۰$

$f'(x) = -۱(x+۲)^{۲} + ۲(x+۲)(-x) = ۰$

$(x+۲)(-x-۲-۲x) = ۰$

$(x+۲)(-۳x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = -\dfrac{۲}{۳} \end{cases}$

$f''(x) = ۱(-۳x-۲) + (-۳)(x+۲) = ۰ \Rightarrow f''(x) = -۳x - ۲ - ۳x - ۶$

$\Rightarrow -۶x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = -\dfrac{۴}{۳}$

x	$-\infty$	-۲	$-\frac{۴}{۳}$	$-\frac{۲}{۳}$ $+\infty$
f'	-	+	+	-
f''	+	+	-	-
f	↘	↗	↗	↘
	۰		۰	

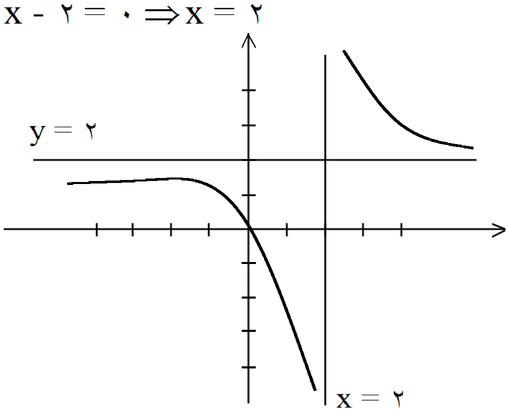
ت) $f(x) = \dfrac{۲x-۱}{x-۲} \Rightarrow D = R - \{۲\}$

۱) $\begin{cases} x = ۲ \Rightarrow \lim\limits_{x \to ۲} f(x) = \pm\infty & \text{مجانب قائم} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{۲x-۱}{x-۲} = ۲ \Rightarrow y = ۲ & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

۲) $f'(x) = \dfrac{۲(x-۲) - (۲x-۱)}{(x-۲)^{۲}} = \dfrac{-۳}{(x-۲)^{۲}} < ۰$

۳) $f''(x) = \dfrac{۰ + ۶(x-۲)}{(x-۲)^{۴}} = \dfrac{+۶}{(x-۲)^{۳}}$

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$



x	$-\infty$	۰	۲ $+\infty$
f'	-	-	-
f''	-	-	+
f	۲ ↘	$-\infty$ ↘	$+\infty$ ↘ ۲
		۰ کمکی	

از نقاط کمکی دیگری می‌توان استفاده کرد.

۴۶- جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = ۲x^{۲} - ۴x + ۱$ ب) $f(x) = x^{۳} - ۵x + ۵$

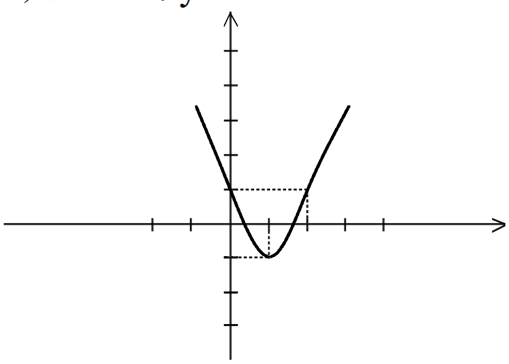
« پاسخ »

الف) $f(x) = ۲x^{۲} - ۴x + ۱ \Rightarrow D = R$

۱) $f'(x) = ۴x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۰$

۲) $f''(x) = ۴ > ۰$

۳) $x = ۰ \Rightarrow y = ۱$



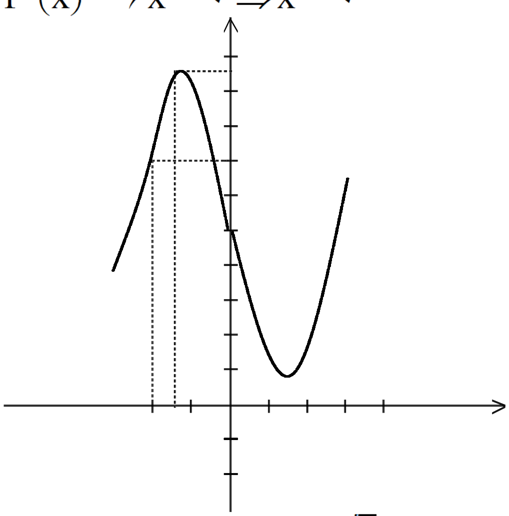
کمکی

x	$-\infty$		۰		۱		۲
f'		-		-		+	
f''		+		+		+	
f		↘		↘		↗	
			۱		-۱		

ب) $f(x) = x^{۳} - ۵x + ۵ \Rightarrow D_f = R$

$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۵ = ۰ \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{۵}{۳}} \simeq ۱/۳ \\ x = -\sqrt{\frac{۵}{۳}} \simeq ۱/۳ \end{cases}$$

$f''(x) = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰$



x	$-\infty$		-۲		$-\sqrt{\frac{۵}{۳}}$		۰		$\sqrt{\frac{۵}{۳}}$		۲		$+\infty$
f'		+		+		-		-		+		+	
f''		-		-		-		+		+		+	
f		↗		↗		↘		↘		↗		↗	
			۷		۹/۳		۵		۰/۷		۳		

۴۷- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ را رسم کنید.

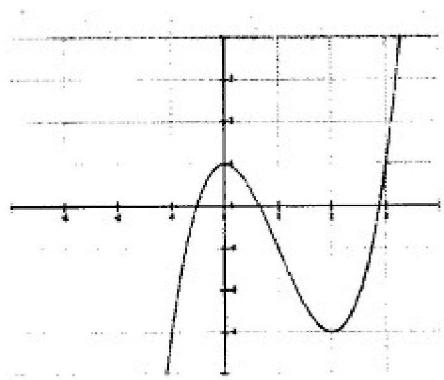
« **پاسخ** »

$D_f = R \,,\, f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \xrightarrow{۰/۲۵} x = ۰,۲$ ۰/۲۵

$f''(x) = ۶x - ۶ = ۰ \xrightarrow{۰/۲۵} x = ۱$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	۰	+	
y''		−		−	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۱	↘	−۱	↘	−۳	↗	$+\infty$

۰/۵



۰/۵

۴۸- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = -x^۳ + ۳x$ را رسم کنید.

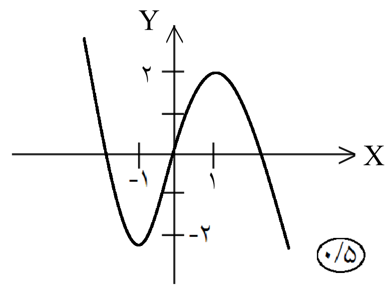
« **پاسخ** »

$f'(x) = -۳x^۲ + ۳$ ۰/۲۵ $\xrightarrow{f' = ۰} x = \pm ۱$ ۰/۲۵

$f''(x) = -۶x$ ۰/۲۵ $\xrightarrow{f'' = ۰} x = ۰$ ۰/۲۵

X	$-\infty$		−۱		۰		۱		$+\infty$
f'		-	۰	+		+	۰	-	
f''		+		+	۰	-		-	
f	$+\infty$	↘	−۲	↗	۰	↗	۲	↘	$-\infty$
			مینیمم		عطف		ماکسیمم		

۰/۵



۰/۵

۴۹- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۹x$ را رسم کنید.

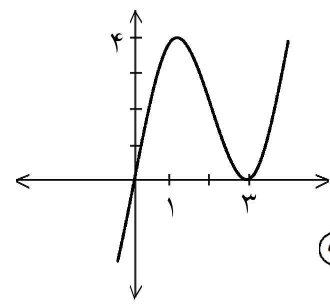
« پاسخ »

$D = R \ , \ y' = ۳x^{۲} - ۱۲x + ۹ \rightarrow ۳x^{۲} - ۱۲x + ۹ = ۰$ ۰/۲۵ $\rightarrow \begin{cases} x = ۱ & ۰/۲۵ \\ x = ۳ & ۰/۲۵ \end{cases}$

$y'' = ۶x - ۱۲ \rightarrow ۶x - ۱۲ = ۰ \rightarrow x = ۲$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		۱		۲		۳		$+\infty$
y'		+	۰	-		-	۰	+	
y''			-		۰		+		
y	$-\infty$	↗	۴	↘	۲	↘	۰	↗	$+\infty$
			ماکسیمم		عطف		مینیمم		

۰/۵



۰/۵

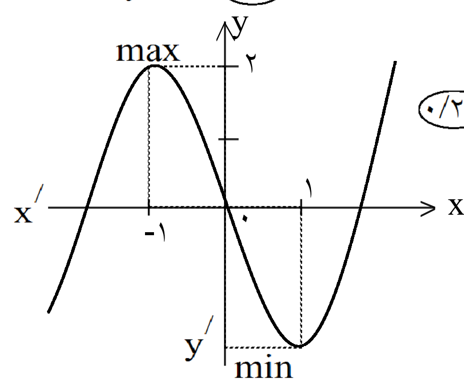
۵۰- نمودار تابع $y = x^{۳} - ۳x$ را به کمک جدول تغییرات رسم کنید.

« پاسخ »

$D = R$ ۰/۲۵ $\Rightarrow x \longrightarrow \pm\infty \Rightarrow y \longrightarrow \pm\infty$ ۰/۲۵ $, y' = ۳x^{۲} - ۳ \Rightarrow ۳x^{۲} - ۳ = ۰$

$x = ۱$ ۰/۲۵ $x = -۱$ ۰/۲۵ $\Rightarrow y''$ ۰/۲۵ $= ۶x \Rightarrow x = ۰ , y = ۰$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$	
y'		+		—		—		+		۰/۲۵
y	$-\infty$	↗	۲	↘	۰	↘	-۲	↗	$+\infty$	۰/۲۵
			max				min			



رسم ۰/۲۵

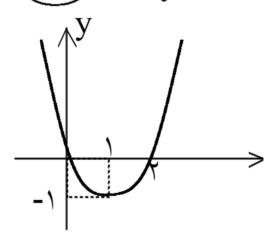
۵۱- جدول تغییرات و نمودار تابع $y = x^{۲} - ۲x$ را رسم کنید.

« پاسخ »

$y = x^{۲} - ۲x \Rightarrow y' = ۲x - ۲ = ۰$ ۰/۲۵ $\Rightarrow x = ۱$ ۰/۲۵ $\Rightarrow y = ۱ - ۲ = -۱$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		—		+	
y	$+\infty$	↘	-۱	↗	$-\infty$

جدول تغییرات ۰/۷۵



رسم ۰/۵

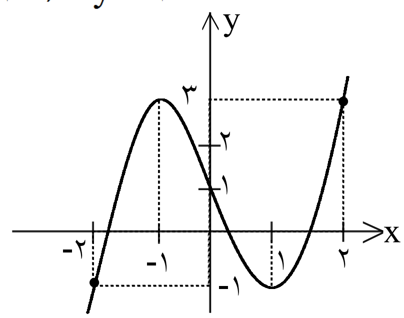
۵۲- جهت تغییرات و نمودار تابع $y = x^۳ - ۳x + ۱$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$$y' = ۳x^۲ - ۳ \rightarrow y' = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \rightarrow y = -۱ \\ x = -۱ \rightarrow y = ۳ \end{cases}$$

$y'' = ۶x = ۰ \rightarrow x = ۰$ و $y = ۱$ $(۰, ۱)$ نقطه عطف

x	-∞		-۲		-۱		۰		۱		۲		+∞
y'			+		۰		−		۰		+		
y''	-∞	↗	-۱	↗	۳ max	↘	۱	↘	-۱ min	↗	۳	↗	+∞



۵۳- ضرایب a و b را چنان بیابید که مرکز تقارن توابع $y = x^۳ - ۳x^۲ + a$ و $y = \frac{-۲x + ۱}{x + b}$ بر هم منطبق باشد.

« **پاسخ** »

$$y' = ۳x^۲ - ۶x \Rightarrow y'' = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = a - ۲ \Rightarrow$$

نقطه عطف یا مرکز تقارن $= (۱, a - ۲)$

$$\begin{cases} x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y = -۲ \\ y \rightarrow \pm\infty \Rightarrow x = -b \end{cases} \rightarrow$$ مرکز تقارن $= (-b , -۲) \Rightarrow b = -۱$ و $a = ۰$

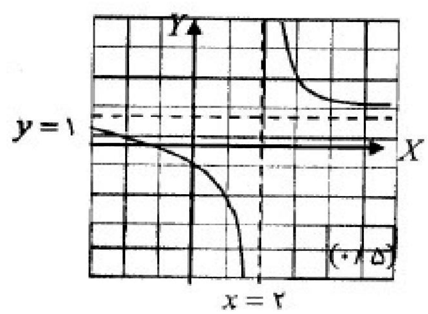
۵۴- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x + ۱}{x - ۲}$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

$x = ۲$ $(۰/۲۵)$ م . قائم

$y = ۱$ $(۰/۲۵)$ م . افقی $y' = \frac{-۳}{(x - ۲)^۲}$ $(۰/۲۵)$

x	-∞		۲		+∞
y'		−	‖	−	
y	۱	↘	-∞ ‖ +∞	↘	۱



۵۵- جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ را رسم کنید.

« **پاسخ** »

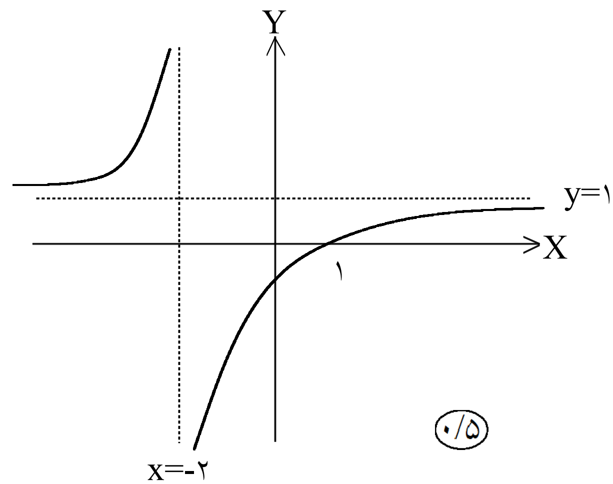
$x=-۲$ مجانب قائم ۰/۲۵ , $y=۱$ مجانب افقی ۰/۲۵

$$f'(x)=\frac{۳}{(x+۲)^{۲}}, x\neq -۲$$ ۰/۲۵

$$f''(x)=\frac{-۶}{(x+۲)^{۳}}, x\neq -۲$$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		-۲	۱		$+\infty$
f'		+	⁞		+	
f''		+	⁞		-	
f	۱	↗	$+\infty$ ⁞ $-\infty$	↗ ۰	↗	۱

۰/۵



۵۶- مقدارهای a , b و c را طوری تعیین کنید که نمودار تابع $f(x)=\frac{x+a}{bx+c}$ از نقطه‌ی (۱ , ۳) عبور کند و مجانب‌های آن یکدیگر را در نقطه‌ی $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ قطع کنند.

« **پاسخ** »

$$f(۱)=۳\Rightarrow \frac{a+۱}{b+c}=۳$$

محل برخورد مجانب ها $\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)\Rightarrow \begin{cases} -\frac{c}{b}=\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=۲ \end{cases} \Rightarrow c=-۱ \Rightarrow a=۲$

پس $a=۲$, $b=۲$, $c=-۱$ هستند.