



تابع



❖ هر تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت میدهد.

❖ A را دامنه این تابع و B را هم دامنه این تابع می نامند.

❖ مجموعه عضوهایی از B را که به عضوی از A نسبت داده شده اند برد این تابع می نامند.



بنابراین برد تابع زیرمجموعه ای از هم دامنه تابع است.

❖ معادلاتی که دارای دو متغیر y, x هستند یک رابطه را نشان می دهند. بسیاری از توابع از طریق یک معادله معرفی می شوند اما الزاما یک معادله دو متغیره بر حسب y, x یک تابع را مشخص نمی کند.

❖ برای اینکه نشان دهیم تابع نیست باید یک عدد مناسب به x بدهیم و نشان دهیم چند مقدار y به دست می آید.

تعداد توابع از A به B

اگر مجموعه دارای m عضو و B دارای n عضو باشد آنگاه تعداد توابع از A به B برابر n^m است.

دامنه تابع



مجموعه اعدادی که بتوان به جای متغیر هر تابع قرار داد را دامنه تابع می گوئیم.

1 اگر تابع خطی باشد دامنه R است.

2 تابع کسری: اعدادی که مخرج را صفر میکنند را حذف میکنیم. $D = R - \{ \text{ریشه مخرج} \}$

3 تابع رادیکالی با فرجه زوج: اعدادی که زیر رادیکال را نامنفی نگه دارند مورد قبول هستند $f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow u \geq 0$

5 از روی نمودار: تصویر تابع روی محور طولها دامنه تابع است.

تساوی دو تابع



دو تابع f, g را مساوی گوئیم هرگاه

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند. $D_f = D_g$

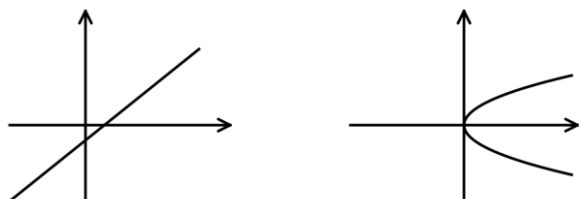
ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x) \quad \forall x \in D_f = D_g; f(x) = g(x)$



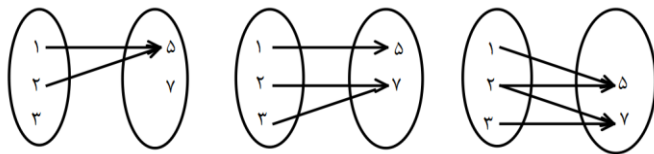
مثال: تابع $f(x) = 3x - 2$ با دامنه $\{-2, 0, 1\}$ مفروض است. برد تابع را بیابید.

مثال: اگر برد تابع $f(x) = \frac{2}{x+2}$ برابر $\{-1, 1, 2\}$ باشد، دامنه تابع را بیابید.

مثال: کدام یک از نمودارهای زیر تابع است؟




مثال: چند مورد از موارد زیر تابع است؟




مثال: توابع f, g با ضابطه های $f(x) = |x|$ ، $g(x) = \begin{cases} x+a & x \geq 0 \\ bx & x < 0 \end{cases}$ مساوی اند. مقدار عددی $a+b$ کدام است؟

مثال: اگر f, g با ضابطه های $f(x) = x - 4$ ، $g(x) = \begin{cases} x^2 - 16 & x \neq -4 \\ k & x = -4 \end{cases}$ باشند به ازای کدام مقدار k دو تابع برابرند؟




مثال  : اگر حاصل جمع عضوهای برد تابع $f = \{(-a^2, 1), (1, a), (-2, 2a^2), (-1, -3), (a, -1)\}$


برابر صفر باشد، حاصل جمع عضوهای دامنه f کدام است؟


مثال  : $A = \{(3, m^2), (2, 1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m تابع است؟


-۲(۱) -۱(۲)

۲(۳) ۴(هیچ مقدار m)

مثال  : اگر $\{(a, a-1), (a-1, 2), (3, 5), (5, 3), (a-2, b+3)\}$ یک تابع باشد در این صورت a و b را به دست آورید.

مثال  : تعداد توابع از مجموعه $A = \{0, 1, 2\}$ به $B = \{-1, 2\}$ چند تا است. مشخص کنید.

مثال  : رابطه ی $\{(5, a^2), (-2, a), (2, 1), (5, a+2), (a, 4)\}$ به ازای چه مقدار از a یک تابع است؟

مثال  : دامنه تابع $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x}$ را بیابید.



جزوه حسابان ۱ یازدهم ریاضی

مثال: دامنه تابع $y = \sqrt{4 - \sqrt{x+1}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

مثال: دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x^2 + ax + b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{2\}$ می باشد a و b را مشخص کنید.

مثال: دامنه $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{x-1}}$ را بیابید.

مثال: اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 + ax + b}$ برابر $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ باشد مقدار $a+b$ را بیابید.

مثال: در یک تابع خطی $f(0) = 7$ و $f(2) = 11$ مقدار $f(5)$ چند برابر $f(-1)$ است؟



مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \leq 1 \\ -x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

مثال: آیا دو تابع $f(x) = x+1$ ، $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ برابرند؟

مثال: اگر $f(x) = x+1$ ، $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3k^x & x = 1 \end{cases}$ ، مقدار k چقدر باشد تا $g(x)$ از $f(x)$ داشته باشیم:

$$f(x) = g(x) \text{ ؟}$$

جزء صحیح



جزء صحیح هر عدد، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بزرگ تر نباشد.


❖ برای یافتن مقدار آن باید ابتدا دقت کنید عدد مورد نظر کجای محور قرار دارد. اگر عدد مورد نظر صحیح باشد جواب جزء صحیح آن خود آن عدد می شود.

❖ اما اگر صحیح نباشد دقت می کنیم بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. عدد سمت چپ (یعنی عدد کوچکتر) جواب است.



❖ برای رسم باید به داخل جز صحیح دقت کنیم. عبارت داخل جز صحیح باید یک واحد یک واحد

مورد بررسی قرار گیرد. پس اگر در سوالی داخل جزء صحیح چیزی به جز x داشتیم حتماً آن عبارت را میسازیم و این عبارت ساخته شده را یک واحد یک واحد، مورد بررسی قرار می دهیم.

نکته: در آخر شکل رسم شده باید دقیقاً داخل همان بازه ای باشد که در صورت سوال گفته شده. 

❖ دامنه توابع شامل جزء صحیح: داخل جز صحیح هر عددی را میتوان قرار داد و از این بابت مشکل خاصی نیست، مشکل

از آنجا شروع میشود که این جزء صحیح یا زیر رادیکال قرار میگیرد یا در مخرج یک کسر. اگر جزء صحیح زیر رادیکال باشد تمام مقادیری که باعث میشود این جزء صحیح منفی شود را دور میریزیم. و اگر جزء صحیح در مخرج باشد تمام مقادیری که باعث میشود مخرج صفر شود را دور می ریزیم.

❖ جواب یک جزء صحیح همواره عدد صحیح است.

یعنی معادله $x = \frac{5}{2}$ جواب ندارد اما معادله $x = 2$ دارای جواب $2 \leq x < 3$ است. و معادله $x = -5$ دارای جواب $-4 \leq x < -5$ می باشد.

❖ برد تابع شامل جزء صحیح:

چند قانون کلی در مورد جزء صحیح ها وجود دارد که در اکثر سوالات مورد استفاده قرار می گیرد.

$$\forall x \in R \quad 0 \leq x - [x] < 1 \quad \text{2} \qquad [x+n] = [x] + n \quad n \in N \quad \text{1}$$

$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] \quad \text{4} \qquad [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases} \quad \text{3}$$

📖 مثال: جزء صحیح اعداد زیر را بیابید.

الف) $3/49$ ب) $-2/8$ پ) $\frac{32}{5}$ ت) -2π



📖 مثال: مقدار عددی $[-|2x|]$ را به ازای $x = \frac{3}{4}$ بیابید.

📖 مثال: نمودار تابع $y = [x]$ را در بازه $(-2, 3)$ رسم کنید.

📖 مثال: نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[-\frac{1}{2}, 1]$ رسم کنید.

📖 مثال: نمودار تابع $f(x) = [\frac{1}{2}x]$ را در بازه $[-4, 4]$ رسم کنید.



جزوه حسابان ۱ یازدهم ریاضی

مثال: تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x \right] + 1$ را در بازه $-6 \leq x \leq 6$ رسم کنید.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \frac{5}{[x]-3}$ را بیابید.

مثال: دامنه تابع $y = \frac{x-1}{[x]+[-x]}$ را مشخص کنید.

مثال: برد تابع $y = [x+2] + [-x]$ را بیابید.

مثال: معادله $[2x+1] = 4$ را حل کنید.

مثال: دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{[x]+1}$ کدام است؟



📖 مثال - در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر $f(x) = [x-3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(-1 + \sqrt{2})$ برابر است.

ب) حاصل $\left[\frac{x}{x+1}\right]$ به ازای $x = \frac{1}{5}$ برابر است.

پ) اگر $f(x) = [x]$ باشد، حاصل $f(x - f(x))$ برابر است.

اعمال روی توابع



برای دو تابع f, g داریم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

❖ پس اولین شرط محاسبه در ترکیبات دو تابع (از نوع چهارعمل اصلی) این است که عضوی را انتخاب کنیم که در هر دو دامنه باشد.

❖ برای ضرب عددی حقیقی در تابع داریم: $(nf)(x) = n \times f(x)$ یعنی عدد داده در برد تاثیر دارد.

📖 مثال: اگر $f = \{(-2, 1), (3, 5), (1, 4), (6, 0)\}$ و $g = \{(1, 9), (5, 0), (7, 3), (2, -2), (6, \sqrt{2})\}$ دو تابع باشند، مطلوبست:

الف) $f + g$

ب) $2f - 3g$

ج) $\frac{g}{f}$



جزوه حسابان ۱ یازدهم ریاضی

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$, $g(x) = \sqrt{x} + 5$ باشد،

الف) مقدار $(f+g)(3)$ را محاسبه کنید
ب) دامنه $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$ باشد، مطلوب است:

الف) دامنه $\frac{f}{g}$
ب) $(f+g)(-1)$
پ) ضابطه $(\frac{f}{g})(x)$
ت) ضابطه $g-2f$

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (7, 0), (6, 9)\}$, $g = \{(7, 4), (-2, 1), (1, 0), (5, 6)\}$ باشند، تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت مجموعه

ای از زوج های مرتب نمایش دهید.



مثال: هرگاه $f = \{(4,0), (\frac{1}{3}, -2)\}$ آنگاه تابع $\frac{3}{f}$ را مشخص کنید.

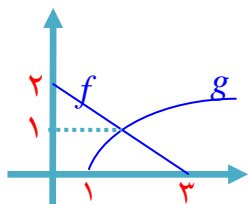
ترکیب دو تابع



ترکیب تابع‌های f, g را با $f \circ g$ نمایش می‌دهیم و تابعی است که دامنه آن $\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ است و به ازای هر x در دامنه این تابع داریم: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

مثال: اگر $f = \{(1,2), (2,3), (5,6)\}$ و $g = \{(3,5), (2,4), (1,5)\}$ در اینصورت $g \circ f(1)$ را مشخص کنید.

مثال: اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g = \{(1,-2), (-1,4), (0,3)\}$ در اینصورت $g \circ f(1) - \frac{f}{g}$ را مشخص کنید.



مثال: شکل زیر نمودار توابع f و g است، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را مشخص کنید.



مثال: اگر $f(x) = \sqrt{5-x}$ و $g(x) = x^2 + 4x$ در اینصورت $Df \circ g$ را مشخص کنید.

مثال: با فرض $f(x) = x^2 - x$ و $g = \{(2, 5), (0, 1)\}$ مقدار $(g \circ f)(-1)$ و $(g + f)(2)$ را به دست آورید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ ؛

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را تعیین کنید.

ب) ضابطه تابع $f \circ g$ را بدست آورید.

ج) مقدار عددی $g \circ f(0)$ را بیابید

مثال: اگر $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = x^2 - 1$ در اینصورت حاصل $\frac{(f+g)(1)}{(f \cdot g)(1)}$ را مشخص کنید.



مثال: اگر $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشد، مطلوب است:

الف) دامنه $g \circ f$ بدون محاسبه $(g \circ f)(x)$

ب) ضابطه $(g \circ f)(x)$ را بنویسید.

ج) $(\frac{2f+g}{g})(1)$

تابع یک به یک



تابع f را یک به یک گوئیم هرگاه از هر عضو دامنه تنها به یک عضو برد وصل شده باشد. یعنی از دو عضو دامنه به یک عضو

$$\forall x_1, x_2 \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

پیکان نداشته باشیم.

تابع معکوس



تابع f را معکوس پذیر گوئیم هرگاه یک به یک باشد. یعنی هرگاه خواستیم معکوس تابعی را محاسبه کنیم اولین کار بررسی یک به یک بودن تابع است.

❖ اگر f تابعی وارون پذیر باشد، آن گاه

❶ به ازای هر x از دامنه f داریم: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

❷ به ازای هر x از دامنه f^{-1} داریم: $(f \circ f^{-1})(x) = x$

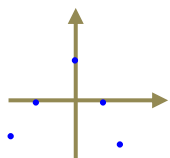
❖ اگر f, g تابع هایی وارون پذیر باشند آنگاه:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

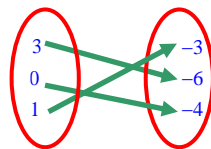
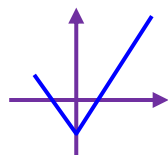


مثال: اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x+1}$ باشد، نمودار تابع $y = (f \circ f^{-1})(x)$ را رسم کنید.

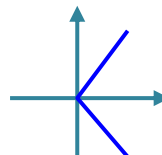
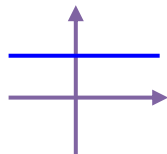
مثال: چند تا از توابع زیر وارون پذیرند؟



$\{(1, -1), (2, 4), (-1, 1), (-2, 4)\}$



x	2	4	6	8	10
y	6	4	2	0	-2



مثال: به ازای کدام یک از مقادیر a تابع $\{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ یک به یک است؟

مثال: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$$y = |3x| + x$$

$$y = 4x + |x|$$

$$y = |2x| - x$$

$$y = x + |x|$$



مثال: اگر تابع $f = \{(1, 2), (-1, b), (a, 2), (-1, \sqrt{a} - 2)\}$ معکوس پذیر باشد در این صورت b را

مشخص کنید.

مثال: تابع $f = \{(1, m^2 - m), (1, m), (2, 3)\}$ یک به یک باشد مقدار m را به دست آورید.

مثال: نمودار تابع خطی f از مبدا گذشته و $f(6) = 2$. ضابطه f^{-1} را مشخص کنید.

مثال: در تابع خطی f از $f(2) = 13$ و $f(0) = 7$ ، ضابطه f^{-1} را مشخص کنید.

مثال: وارون تابع $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ را بدست آورید.

مثال: وارون تابع $y = \frac{3 - 2x}{5}$ را به دست آورید.



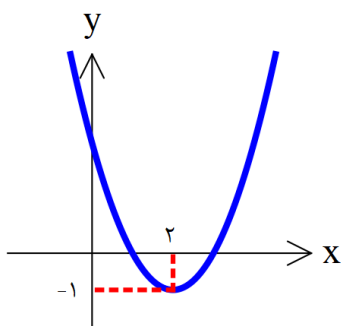
مثال: اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ در اینصورت

$g \circ f^{-1}$ را مشخص کنید.

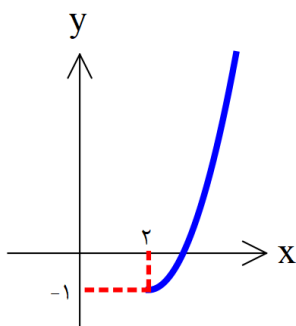


نکته: گاهی اوقات تابعی در کل دامنه اش یک به یک نیست اما با محدود کردن دامنه اش میتوان یک تابع یک به

یک ساخت. مثلاً سهمی‌ها در کل دامنه شان یک به یک نیستند اما اگر بازه‌ای کاملاً بعد از طول راس یا قبل از طول راس قرار داشته باشد، در این صورت تابع یک به یک میشود.



یک به یک نیست



یک به یک

مثال: تابع $f(x) = x^2 + 4x - 3$ مفروض است. دامنه رو طوری بیابید که تابع وارون پذیر باشد و سپس وارون آن را

به دست آورید.

نکته: تابع و وارون تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه هستند.

