فصل اول

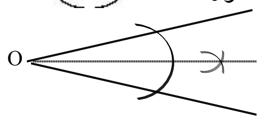
ترسیم های هندسی و استدلال

ترسیم های هندسی

استدلال

۱ - مراحل رسم نیمساز یک زاویه را به کمک خط کش و پرگار توضیح دهید.

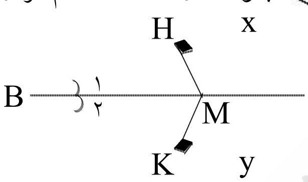
به مرکز رأس زاویه‌ی (O) و به شعاع دل‌خواه یک دایره رسم می‌کنیم که این دایره هرکدام از ضلع‌های زاویه را در یک نقطه قطع می‌کند. به مرکز نقاط به‌دست آمده و به شعاع دایره‌ی قبل، دایره‌هایی رسم می‌کنیم. این دایره‌ها هم‌دیگر را قطع می‌کنند. از محل تقاطع دایره‌ها به O وصل می‌کنیم. پاره‌خط رسم شده، نیمساز زاویه‌ی مذکور است. ۰/۷۵



۲ - ثابت کنید نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه‌ی آن زاویه است که فاصله‌ی آن از دو ضلع زاویه برابر باشد.

مرحله‌ی اول: نقطه‌ی M را روی نیمساز زاویه‌ی $x\hat{B}y$ درنظر می‌گیریم، از M خط هایی بر ضلع‌های Bx و By عمود می‌کنیم ۰/۲۵ تا آن‌ها را به ترتیب در H و K قطع کنند، دو مثلث $\overset{\frown}{BMH}$ و $\overset{\frown}{BMK}$ به حالت (وتر و یک زاویه‌ی تند) هم‌نهشت هستند، پس MH=MK. ۰/۵

مرحله‌ی دوم: اگر نقطه‌ی M از دو ضلع Bx و By به فاصله‌ی یکسان باشد ۰/۲۵ چون دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\frown}{BMH}$ و $\overset{\frown}{BMK}$ به حالت تساوی وتر و یک ضلع قائمه، هم‌نهشت هستند، پس $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$ ۰/۵ یعنی خطی که از B و M می‌گذرد، نیمساز زاویه‌ی $x\hat{B}y$ است.

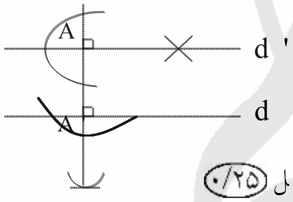


۳ - مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف پاره‌خط AB باز کرده و از هر طرف یک کمان رسم می‌کنیم (از نقاط A و B) خط حاصل از اتصال نقاط تقاطع این دو کمان عمودمنصف AB است.

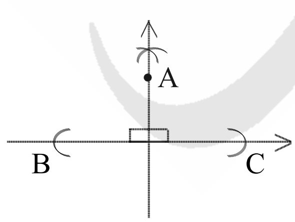
۴ - با استفاده از خطکش و پرگار خطی موازی یک خط از یک نقطه‌ی خارج آن خط رسم کنید. (مراحل رسم را توضیح دهید.)

مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. می‌دانیم که دو خط عمود بر یک خط با هم موازیند. ابتدا از نقطه‌ی A بر خط d عمودی رسم می‌کنیم ۰/۲۵ تا آن‌را در نقطه‌ی 'A قطع کند. سپس از نقطه‌ی A خطی عمود بر 'AA رسم می‌کنیم. ۰/۲۵ و آن‌را 'd می‌نامیم. خط 'd همان خط مطلوب است.



کل ۰/۲۵

۵ - از نقطه‌ی A خارج از خط L خطی بر آن عمود کنید. (با خط کش و پرگار)



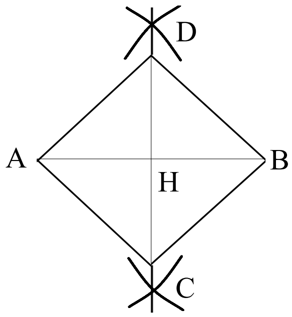
۶ - مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن‌را توضیح دهید.

ابتدا نقطه‌ای دلخواه روی خط d درنظر می‌گیریم. به شعاع دلخواه یک دایره به مرکز این نقطه رسم می‌کنیم. حال عمودمنصف پاره‌خط به دست آمده از محل تقاطع خط مفروض و دایره را رسم می‌کنیم.

۷ - روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیرواقع برآن‌را توضیح دهید.

ابتدا از نقطه‌ی T خطی عمود بر d و سپس از همین نقطه خط دیگری عمود بر خط عمود بر d رسم می‌کنیم.

۸ - مربعی رسم کنید که طول قطرهای آن برابر با ۴ سانتی‌متر است؟

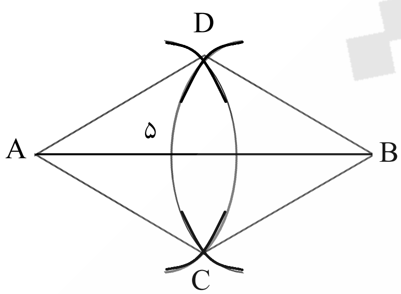


در مربع قطرها عمودمنصف یک‌دیگر و برابر هستند. ابتدا پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر را رسم کرده و سپس عمودمنصف آن‌را رسم می‌کنیم. محل برخورد عمودمنصف و AB را H می‌نامیم.

نقاط D و C را چنان اختیار می‌کنیم که $HD = HC = ۲$.

نقاط A، B، C و D را به صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم.

۹ - یک لوزی رسم کنید که قطر آن ۵ سانتی‌متر و ضلع‌هایش برابر ۳ سانتی‌متر باشد.



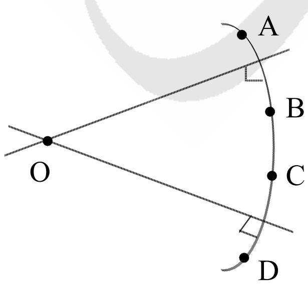
ابتدا قطر ۵ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم و آن‌را A و B می‌نامیم. سپس دو کمان به مرکز دو سر پاره‌خط و به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم و آن‌ها را D و C می‌نامیم. نقاط A , B , C , D را به هم وصل می‌کنیم.

۱۰ - به قسمت (الف) پاسخ دهید و از نتیجه‌ی آن در قسمت (ب) استفاده کنید.

الف) وتری مانند AB از یک دایره را درنظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ب) آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطه‌ی پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه‌ی جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند، متوجه می‌شود که نقطه‌ی پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه‌ی هجده قدم، نقطه‌ی پنالتی را مشخص کند.



الف) عمودمنصف AB از نقطه‌ی O (مرکز دایره) می‌گذرد. چون O از دو سر پاره‌خط AB می‌گذرد.

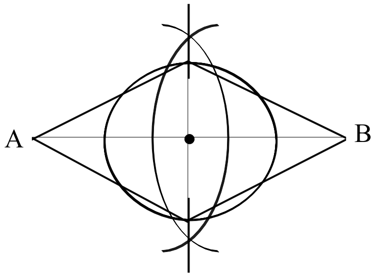
ب) نقطه‌ی پنالتی محل تقاطع دو وتر از قوس جلوی محوطه‌ی هیجده قدم است.

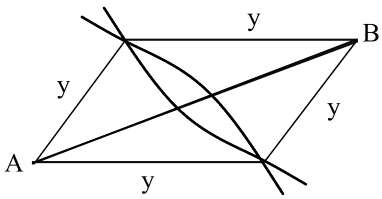
۱ - فرض کنیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یک‌دیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

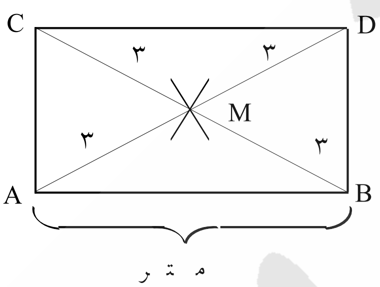
الف) دو پاره‌خط عمود بر هم یکی به طول ۳ و دیگری به طول ۵ رسم می‌کنیم، چهارضلعی به دست می‌آید.





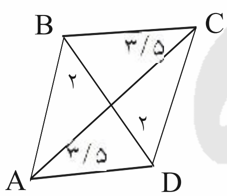
ب) مانند رسم متوازی‌الاضلاع ابتدا قطر را رسم می‌کنیم.

۲ - فرض کنیم هر چهارضلعی که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.



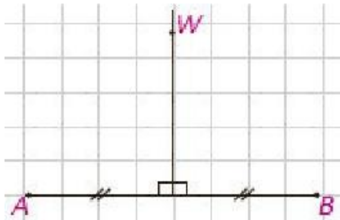
ابتدا پاره‌خط دلخواه AB را رسم می‌کنیم، مثلاً به طول ۵ سانتی‌متر، سپس از دو سر آن دو کمان به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم و محل برخورد آن‌ها را M می‌نامیم. AM و BM را به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر امتداد می‌دهیم و نقاط پایانی را C و D می‌نامیم. نقاط A , C , D , B را به هم وصل می‌کنیم.

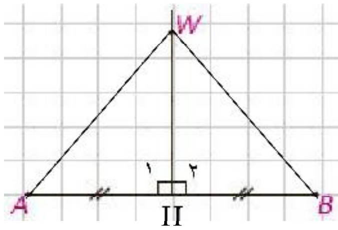
۳ - فرض کنیم هر چهارضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟



دو پاره‌خط طوری رسم می‌کنیم که هم‌دیگر را نصف کنند. با اتصال متوالی دو سر این پاره‌خط هاچهارضلعی موردنظر (متوازی‌الاضلاع) حاصل می‌شود. بی‌شمار متوازی‌الاضلاع خواهیم داشت.

۱۴ - پاره‌خط AB و عمودمنصف آن‌را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه‌ی W از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.

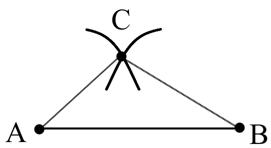




$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{مشترک} = WH = WH \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AWH} \cong \overset{\triangle}{BWH} \Rightarrow AW = BW$$

(ض ض ض)

۱۵ - توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

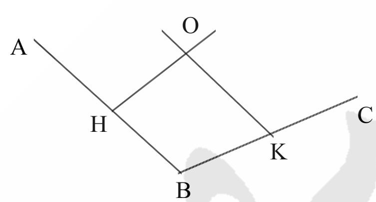


ابتدا با خط کش یک پاره‌خط به اندازه ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس از دو سر این پاره‌خط یک کمان به شعاع ۴ و از یک کمان به شعاع ۵ رسم می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است.

۱۶ - در مثلث کدام نقطه از سه رأس به یک فاصله است؟

محل برخورد عمودمنصف‌ها

۱۷ - سه نقطه‌ی A و B و C غیرواقع بر یک راستا می‌باشند، نقطه‌ای تعیین کنید که از این سه نقطه به یک فاصله باشند.



هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

A را به B و B را به C وصل می‌کنیم عمودمنصف‌های پاره‌خطهای AB و BC را رسم می‌کنیم.

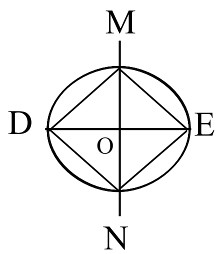
این دو عمودمنصف یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع می‌کنند.

این نقطه جواب مسئله است واز هر سه نقطه به یک فاصله است.

$O \in AB$ عمود منصف $\rightarrow OA = OB$

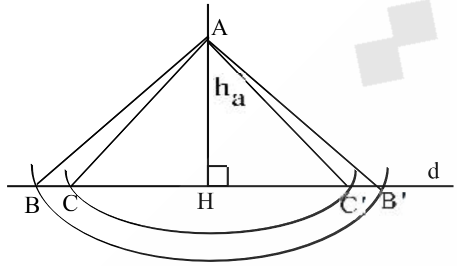
۱۸ - مربعی رسم کنید که پاره‌خط مفروض DE قطر آن باشد.

عمودمنصف DE را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز O و شعاع OD دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف DE را در نقاط N , M قطع کند. در این صورت چهارضلعی $MDNE$ مربع است. به‌طوری‌که DE قطر آن می‌باشد.

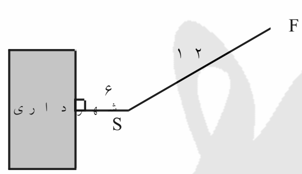


۱۹ - از مثلث ABC، اندازه‌ی ضلعهای $AC = b$, $AB = c$ و طول ارتفاع $AH = h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید

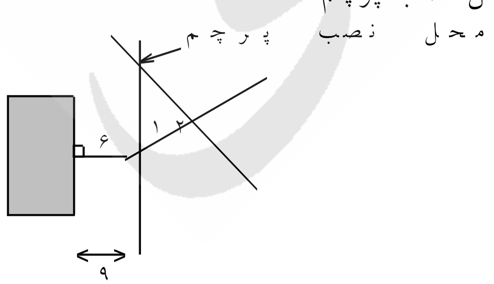
خط d را رسم می‌کنیم در نقطه‌ی H روی آن عمودی بر خط d وارد می‌کنیم. روی این خط عمود، پاره‌خط AH را مساوی h_a جدا می‌کنیم. به مرکز A و شعاعهای c , b کمانهایی می‌زنیم تا خط d را در نقاط B' , B , C' , C قطع کند. آنگاه $\widehat{ABC}$ ، $\widehat{AB'C}$ ، $\widehat{ABC'}$ ، $\widehat{AB'C'}$ مثلث‌های مورد نظر می‌باشند.



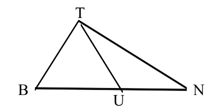
۲۰ - نمودار مقابل محل قرار گرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه‌ی S و فواره‌ی F را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میله‌ی پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میله‌ی پرچم را تعیین کنید.



مکان هندسی نقاطی که از دیواره‌ی ساختمان شهرداری به فاصله‌ی ۹ متری می‌باشد خطی موازی دیواره‌ی ساختمان شهرداری می‌باشد. در ضمن مکان هندسی نقاطی که از S , F به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط FS می‌باشد. نقطه تلاقی عمودمنصف FS با خط موازی با دیواره‌ی ساختمان، محل نصب پرچم است.



۱ - در شکل مقابل:

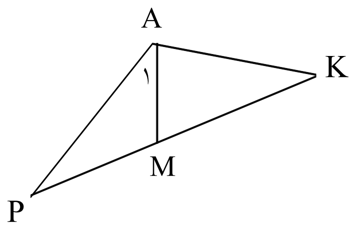


فرض کنیم $BT = BU$

ثابت کنید $\widehat{BTN} > \widehat{TUB}$

$$BT = BU \Rightarrow \hat{T}_۱ = \hat{U}_۱ \Rightarrow \hat{T}_۱ + \hat{T}_۲ > \hat{U}_۱ \Rightarrow \widehat{BTN} > \widehat{TUB}$$

۲ - در مثلث PAK ، نقطه‌ی M روی ضلع PK قرار دارد. ثابت کنید اگر $AM = AK$ آنگاه $AP > AK$.

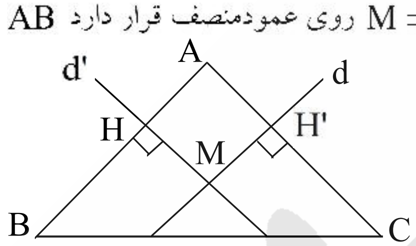


$$\left.\begin{array}{l} AM = AK \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{K} \\ \text{زاویه خارجی } \hat{M}_۱ > \hat{P} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{K} > \hat{P} \Rightarrow AP > AK$$

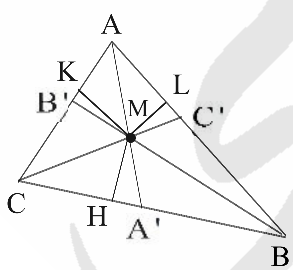
۳ - قضیه: ثابت کنید عمودمنصف‌های ضلع‌های هر مثلث هم‌رأس‌اند.

دو عمودمنصف AC و AB یکدیگر را در M قطع می‌کنند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AC \text{ روی عمودمنصف قرار دارد } M \Rightarrow MA = MC \\ AB \text{ روی عمودمنصف قرار دارد } M \Rightarrow MA = MB \end{array}\right\} \Rightarrow MC - MB \Rightarrow \text{قرار دارد } BC \text{ روی عمودمنصف} M$$



۴ - قضیه: ثابت کنید سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.



فرض: AA' و BB' و CC' نیمساز

حکم: $AA' \cap BB' \cap CC' = \{M\}$

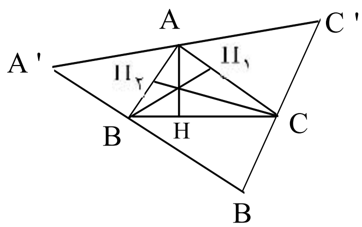
برهان: در مثلث ABC نیمسازهای دو زاویه‌ی داخلی B و C یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع می‌کنند زیرا اگر یکدیگر را قطع نکنند باید موازی باشند. موازی بودن BB' و CC' بدین معنی است که نصف زاویه‌ی B و نصف زاویه‌ی C مجموعشان ۱۸۰ است و این امکان ندارد زیرا می‌دانیم مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است. از M بر ضلع‌های AB و AC و BC عمود می‌کنیم تا به ترتیب آن‌ها را در نقاط L و K و H قطع کنند. M روی نیمساز زاویه‌ی B است: $MH = ML \quad (۱)$

M روی نیمساز زاویه‌ی C است پس: $MH = MK \quad (۲)$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $ML = MK$ پس M روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد.

بنابراین M محل تلاقی سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث است.

۵ - ثابت کنید ارتفاعات یک مثلث همرسند.



حکم: $AH \cap BH_1 \cap CH_2 = \{O\}$ فرض $\widehat{H} = \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = ۹۰ \Rightarrow$

از رئوس مثلث خطوطی موازی سه ضلع مقابل رسم می‌کنیم. در شکل جدید چند چهارضلعی وجود دارد.

$$\left.\begin{matrix} AA' \parallel BC \\ AC \parallel A'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA'BC \text{ متوازی الاضلاع است}$$

$(۲) , (۱) \Rightarrow AA' = AC'$ (۳) $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp A'C'$ $(۴) \Rightarrow$

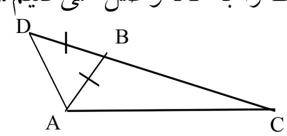
با توجه به (۳) و (۴) AH عمودمنصف $A'C'$ است. به همین ترتیب ثابت می‌شود، که BH_1 عمودمنصف ضلع $A'B'$ و CH_2 عمودمنصف $B'C'$ است. چون عمودمنصف های اضلاع یک مثلث همرسند پس این سه ارتفاع همرس می‌باشند.

۶ - قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است.

فرض: ABC یک مثلث است   حکم: $AB + BC > AC$

برهان: ضلع BC را از رأس B امتداد می‌دهیم و به اندازه‌ی AB روی آن جدا می‌کنیم تا نقطه‌ی D به دست آید. سپس D را به A وصل می‌کنیم. ۰/۲۵ بنابراین در مثلث ABD داریم:

$BD = AB \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{A}_1$ ۰/۲۵

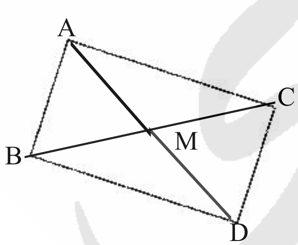


همچنین در مثلث ADC داریم:

$$DC = DB + BC \Rightarrow DC = AB + BC \text{ ۰/۲۵}$$

باتوجه به شکل $D\widehat{A}C > \widehat{A}_1$ بنابراین $D\widehat{A}C > \widehat{D}_1$ در نتیجه $DC > AC$ ۰/۲۵ بنابراین $AB + BC > AC$

۷ - ثابت کنید در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچک‌تر است.

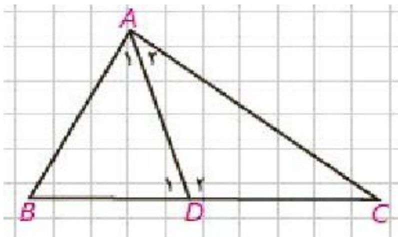


در مثلث ABC میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه‌ی D برسیم از D به C و B وصل می‌کنیم. ۰/۲۵ در این صورت چهار ضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود. زیرا اقطارش منصف یکدیگرند. ۰/۲۵

$$A\overset{\triangle}{D}C : AD < AC + DC \text{ ۰/۲۵} \Rightarrow ۲AM < AC + AB$$

$$\Rightarrow AM < \frac{AC + AB}{۲} \text{ ۰/۲۵}$$

۱۸ - فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه‌ی A باشد. دلایل هریک از نتایج زیر را بنویسید و نتیجه‌ی نهایی که در پایان آمده است را کامل کنید.



الف) $\widehat{D}_۲ > \widehat{A}_۱$، زیرا ....

ب) $\widehat{D}_۲ > \widehat{A}_۲$، زیرا ....

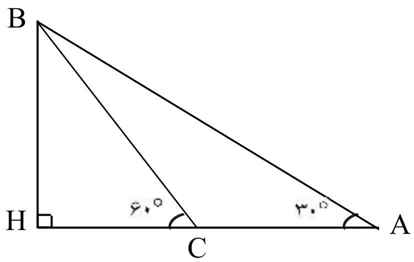
پ) $AC > DC$، زیرا ....

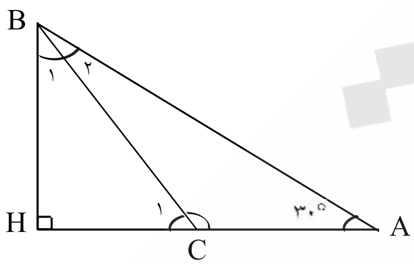
ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید: $AB > BD$

ث) حال نشان دهید

نتیجه: در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه‌ی .... ، .... است.

۱۹ - در شکل روبه‌رو $\angle\widehat{A} = ۳۰^\circ$ و $\angle C = ۶۰^\circ$ است. اگر طول AC برابر با ۵۰ متر باشد، طول AH را به دست آورید.





با توجه به مثلث BCA و این‌که $\widehat{C}_۱$ زاویه‌ی خارجی است، بنابراین:

$$\widehat{A} + \widehat{B}_۲ = ۶۰ \Rightarrow \widehat{B}_۲ = ۳۰^\circ$$

بنابراین ΔBCA یک مثلث متساوی‌الساقین است که:

$$BC = CA = ۵۰ \quad (*)$$

در مثلث BAC چون $\widehat{C}_۱$ و $\widehat{B}$ معلوم است $B_۱ = ۳۰^\circ$ می‌شود و از آن‌جا

که مثلث قائم‌الزاویه است و ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است، پس:

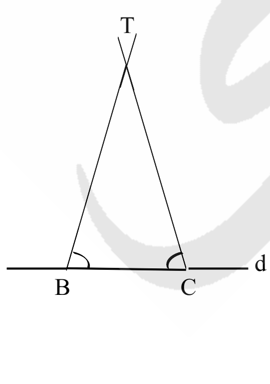
$$HC = \frac{BC}{۲} = ۲۵ \quad (**)$$

با توجه به (*) و (**):

$$AH = HC + AC = ۵۰ + ۲۵ = ۷۵$$

۲۰ - با استفاده از برهان خلف ثابت کنید:

«از یک نقطه خارج خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد.»



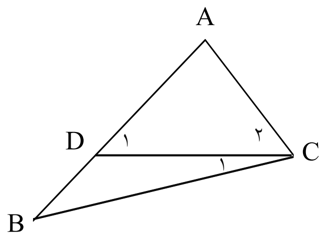
خط d و نقطه‌ی T بیرون خط d مفروض است.

فرض خلف: از نقطه‌ی T دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم. بنابراین دو عمود خط d را در ۲ نقطه‌ی B و C قطع کرده‌اند. بنابراین یک مثلث داریم که مجموع زاویه‌های داخلی آن از ۱۸۰° بیش‌تر خواهد شد و این امکان وجود ندارد. بنابراین از نقطه‌ی T دو عمود نمی‌توان رسم کرد و فقط یک عمود می‌توانیم رسم کنیم.

۱ - اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال: برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگر نداشته باشد.

فرض کنیم در مثلث ABC، $AB > AC$ است. روی ضلع AB نقطه‌ی D را طوری انتخاب می‌کنیم که $AC = AD$.



$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \Rightarrow \widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۲ \\ \text{BDC زاویه خارجی مثلث } \widehat{D}_۱ > \widehat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C}_۲ > \widehat{B} \quad (۱)$$

از طرف دیگر زاویه‌ی $\widehat{C}_۲$ قسمتی از زاویه‌ی $\widehat{C}$ است پس حتماً $\widehat{C} > \widehat{C}_۲$ بنابراین با مقایسه از رابطه‌ی (۱) معلوم می‌شود که $\widehat{C} > \widehat{B}$.

۲ - قضیه: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر است.

فرض: $\widehat{A} > \widehat{B}$ حکم: $BC > AC$

برهان خلف: فرض می‌کنیم $AC \geqslant BC$ ۰/۲۵ دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

الف) $AC=BC$ در این حالت مثلث متساوی‌الساقین است. پس $\widehat{A}=\widehat{B}$ که این خلاف فرض است. ۰/۵

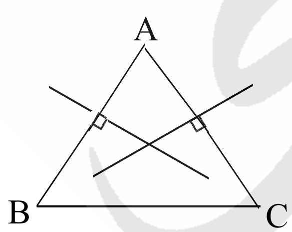
ب) $AC>BC$ در این حالت با توجه به قضیه‌ی لولا $\widehat{A} < \widehat{B}$ که این نیز خلاف فرض است. ۰/۵

پس فرض خلف باطل است و حکم درست می‌باشد.

۳ - با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.

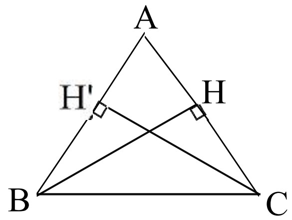
در هر مثلث عمودمنصف‌های هر دو ضلع متقاطعند.

فرض کنیم عمودمنصفهای اضلاع AB , AC در مثلث $\overset{\frown}{ABC}$ موازی باشند. در این صورت اضلاع AB , AC در یک راستا قرار می‌گیرند. و این در مثلث غیرممکن است پس دو عمودمنصف متقاطعند.



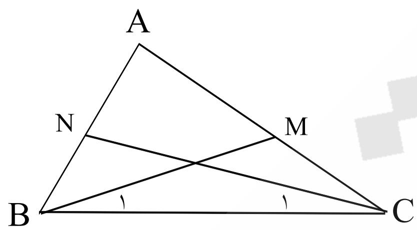
۲۴ - با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در هر مثلث هر دو ارتفاع متقاطعند.

فرض کنیم دو ارتفاع BH , CH' در مثلث $\widehat{ABC}$ موازی باشند. در این صورت اضلاع AB , AC در یک راستا قرار می‌گیرند و این در مثلث غیرممکن است پس دو ارتفاع متقاطعند.



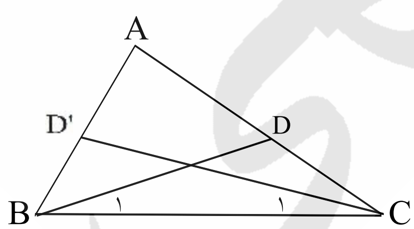
۲۵ - با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در هر مثلث هر دو میانه متقاطعند.

اگر دو میانه‌ی وارد بر اضلاع AB , AC در مثلث $\widehat{ABC}$ موازی باشند، آنگاه زوایای $\widehat{B}_1$, $\widehat{C}_1$ طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب باید مکمل باشند. که چنین چیزی در مثلث درست نیست. پس دو میانه متقاطعند.



۲۶ - با استفاده از برهان خلف، مسئله‌ی زیر را حل کنید.
در هر مثلث هر دو نیمساز زاویه‌های داخلی متقاطعند.

اگر دو نیمساز داخلی زوایای B , C در مثلث $\widehat{ABC}$ موازی باشند آنگاه زوایای $\widehat{B}_1$, $\widehat{C}_1$ طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب باید مکمل باشند که چنین چیزی در مثلث درست نیست. پس دو نیمساز داخلی زوایای $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ متقاطعند.



۲۷ - نقیض گزاره‌ی «a مساوی b است.» را بنویسید.

این طور نیست که a مساوی b باشد، یعنی a مساوی b نیست به عبارت دیگر $a > b$ یا $a < b$

۲۸ - برای گزاره‌های زیر مثال نقض بیاورید.
الف) حاصل‌جمع دو عدد گنگ همیشه گنگ است.
ب) تمام عددهای حقیقی معکوس دارند.

الف)
$$\begin{array}{l}\sqrt{۲} \in Q \\ -\sqrt{۲} \in Q\end{array} \Rightarrow \left(\sqrt{۲}\right) + \left(-\sqrt{۲}\right) = ۰ \notin Q$$

ب) عدد صفر معکوس ندارد، چون معکس صفر $\frac{۱}{۰}$ می‌شود که تعریف نشده است.

۲۹ - نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید.
اگر در مثلثی دو ضلع با هم برابر نباشند. آن‌گاه زاویه‌های مقابل به آن‌ها نیز با هم برابر نیست.

این طور نیست که اگر در مثلثی دو ضلع با هم برابر نباشند، آن‌گاه زاویه‌های مقابل آن‌ها نیز با هم برابر نیست. که معادل جمله‌ی زیر است:
اگر در مثلثی دو ضلع با یک‌دیگر برابر باشند، آن‌گاه زاویه‌های مقابل به آن‌ها با هم برابر نیست.

۳۰ - نقیض هریک از گزاره‌های زیر را بنویسید.
الف) هر لوزی یک مربع است.
ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.
پ) مثلثی با دو زاویه‌ی قائمه وجود ندارد.
ت) همه‌ی فلزات جامدند.

الف) هر لوزی یک مربع نیست.
ب) مستطیلی وجود دارد که مربع است.
پ) همه‌ی مثلث‌ها بیش از یک زاویه قائمه دارند.
ت) ؟؟؟

۱ - در یک چهارضلعی، از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن، یک مربع ایجاد شده است. الزاماً نوع این چهارضلعی کدام است؟

۱) محاطی ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) محیطی ۴) مستطیل

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => ریاضی

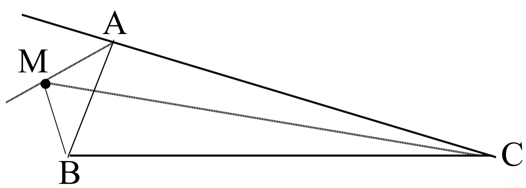
۲ - در مثلث ABC نیم‌سازهای زاویه‌ی داخلی، در نقطه‌ی O متقاطع‌اند. اگر زاویه‌های AOB و BOC و COA متناسب با اعداد ۷ و ۶ و ۵ باشند، بزرگ‌ترین زاویه‌ی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۰

سراسری => ریاضی => ۹۷

۳ - در شکل روبه‌رو، نقطه‌ی M روی نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی A است.

نسبت $\frac{MB + MC}{AB + AC}$، چگونه است؟



۱) بزرگ‌تر از ۱ ۲) کم‌تر از ۱

۳) برابر با ۱ ۴) غیرمشخص

کنکورهای خارج از کشور => سراسری => ریاضی

۴ - در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = ۷$ و $c = ۵$ و میانه $m_a = ۴$ با خط کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) بی‌شمار جواب ۲) جواب منحصر به فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) سه جواب

سراسری => ریاضی => ۸۳

۵ - در مثلث متساوی‌الساقین $ABC \; (\hat{A} = ۳۲°\,,\ AC = AB)$ قاعده BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه D امتداد می‌دهیم. زاویه $\widehat{ADC}$ چند درجه است؟

۱) °۳۶ ۲) °۳۴ ۳) °۳۷ ۴) °۳۹

سراسری => ریاضی => ۸۱

۶ - کدام گزاره مثال نقض دارد؟

۱) محل همرسی ارتفاع‌های یک مثلث نمی‌تواند روی مثلث باشد.

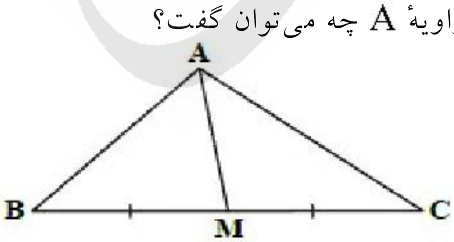
۲) در یک مثلث، نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه سوم همرسند.

۳) عمود منصف یک پاره‌خط مکان هندسی نقاطی است که با آن پاره‌خط مثلث متساوی‌الساقین می‌سازند.

۴) در دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ و $A'\overset{\triangle}{B'}C'$، اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $BC > B'C'$ باشد، آنگاه $B\hat{A}C > B'\hat{A'}C'$ است.

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۷ - در شکل مقابل میانهٔ $AM = ۴$ و ضلع $BC = ۱۰$ مفروض است. در مورد زاویهٔ A چه می‌توان گفت؟



۱) $\hat{A} = ۹۰°$

۲) $\hat{A} > ۹۰°$

۳) $\hat{A} < ۹۰°$

۴) با این اطلاعات نمی‌توان اظهارنظر کرد.

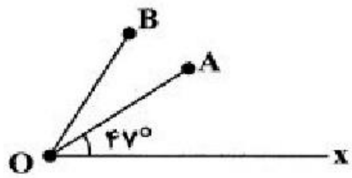
آزمونهای گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۸ - پاره‌خط BC به طول ۹ مفروض است. به مرکز B و شعاع R و به مرکز C و شعاع R' کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کنند. در کدام حالت مثلث ABC به‌وجود می‌آید؟

۱) $R = ۵$ و $R' = ۴$ ۲) $R = ۵$ و $R' = ۵$ ۳) $R = ۶$ و $R' = ۳$ ۴) $R = ۴$ و $R' = ۴$

آزمون‌های گزینه ۲ <= دهم <= سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۹ - در شکل زیر طول پاره‌خط‌های OA و OB با هم برابر است و به ترتیب با محور OX زاویه‌های ۴۷° و ۸۵° می‌سازند. با افزایش طول OA، در مورد زاویه بین ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث $O\overset{\triangle}{A}B$ و محور OX، کدام درست است؟



۱) برابر ۶۶° خواهد بود.
۲) برابر ۷۷° خواهد بود.
۳) بزرگتر از ۶۶° خواهد بود.
۴) کمتر از ۶۶° خواهد بود.

آزمایشی سنجش <= دهم <= سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۱۰ - در شکل روبه‌رو AH ارتفاع وارد بر ضلع BC و AD نیمسازهای داخلی زاویه در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ است.اگر $\hat{\alpha} = ۷۵^\circ$ باشد، اندازهٔ $|\hat{B} - \hat{C}|$ کدام است؟

۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۴۰° ۴) ۴۵°

آزمایشی سنجش <= دهم <= سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۱۱ - اگر زاویه بین دو نیمساز زوایای خارجی B و C، در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ برابر ۵۵° درجه باشد، اندازه زاویه کدام است؟

۱) ۷۰° ۲) ۸۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۰۰°

آزمایشی سنجش <= دهم <= سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۱۲ - کدام دسته از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: در هر مثلث ارتفاع وارد بر هر ضلع، از نیم‌سازی که به آن ضلع وارد می‌شود، کوچکتر است.
ب: در هر مثلث ارتفاع وارد بر هر ضلع از دو ضلع دیگر کوچکتر یا مساوی است.
پ: می‌توان مثلثی رسم کرد که در آن نیم‌ساز وارد بریک ضلع، بر میانه متناظر با آن ضلع منطبق باشد.
ت: می‌توان مثلثی رسم کرد که ارتفاع وارد بر یک ضلع و عمود منصف همان ضلع دو خط موازی متمایز نباشند.

۱) الف و ب و پ ۲) الف و ب و ت ۳) الف و پ و ت ۴) ب و پ و ت

آزمایشی سنجش <= دهم <= سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۱۳ - اگر تعداد قطرهای m ضلعی منتظم از دو برابر تعداد قطرهای n ضلعی منتظم دو واحد بیش‌تر و تعداد قطرهای m ضلعی برابر ۹۰ باشد، آن‌گاه مجموع زوایای داخلی m ضلعی از مجموع زوایای داخلی n ضلعی، چند درجه بیش‌تر است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۰۸۰

آزمایشی سنجش <= دهم <= سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۱۴ - در چهارضلعی $ABCD$ ، عمودمنصف‌های دو ضلع AB و CD در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. اگر $BC > AD$ باشد، کدام مورد همواره صحیح است؟

۱) $C\widehat{M}D > A\widehat{M}B$ ۲) $B\widehat{M}C > A\widehat{M}D$

۳) $A\widehat{M}B > B\widehat{M}C$ ۴) $C\widehat{A}B > C\widehat{A}D$

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۱۵ - در مثلث ABC داریم $\widehat{A} > \widehat{B}$. عمودمنصف BC ، اضلاع BC و AC را به‌ترتیب در N و M قطع می‌کند. کدام گزینه درست است؟

۱) $MC > MB$ ۲) $BC > ۲BM$ ۳) $AB > AC$ ۴) $۲BM > AC$

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۱۶ - در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ می‌دانیم $AC = ۱۰$، $AB = ۱۶$ و $\widehat{B} = ۳۰$ است چند مثلث می‌توانیم رسم کنیم؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) بی‌شمار

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۱۷ - نقیض چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

آ) هر لوزی، یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود ندارد که مربع نباشد.

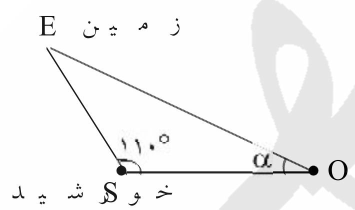
پ) هیچ مثلثی، بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهار ضلعی محدب، برابر با ۳۶۰° است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۱۸ - در شکل زیر، فرض کنید می‌خواهیم جسمی را که در راستای SO قرار دارد از زمین (E) رصد کنیم. برای اجسامی که فاصله آن‌ها تا خورشید (SO) بیش‌تر از فاصله‌ی زمین تا خورشید (SE) است، زاویه‌ی α در چه محدوده‌ای قرار می‌گیرد؟



۱) $(۵^{\circ} , ۳۵^{\circ}]$

۲) $(۵^{\circ} , ۴۵^{\circ}]$

۳) $(۰^{\circ} , ۳۵^{\circ}]$

۴) $(۰^{\circ} , ۴۰^{\circ}]$

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۱۹ - طول دو ضلع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر ۵ و ۴ و طول یک قطر آن $\sqrt{۳}$ است. با این سه طول داده شده چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

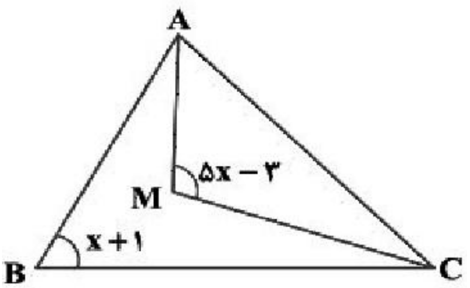
آزمونهای گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۲۰ - سه پاره‌خط با طول‌های $۶x$ ، $x + ۷$ و $۴(x - ۱)$ داده شده‌اند. اگر مجموع طول‌های این سه پاره‌خط ۳۶ باشد، با این سه پاره‌خط چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) دقیق نمی‌توان تعیین کرد.

آزمونهای گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۱ - در مثلث شکل مقابل، محدودهٔ x کدام است؟



۱) $x > ۲$
۲) $x < ۲$
۳) $x > ۱$
۴) $x < ۱$

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۲ - مثلث ABC مفروض است. عمودمنصف دو ضلع AB و BC یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. اگر فاصلهٔ O تا نقاط B و C به‌ترتیب ۱ - ۲x و x + ۲ باشد، اندازهٔ OA چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۳ - دو نقطه‌ی A و C از یک‌دیگر ۵ واحد فاصله دارند. از رأس A کمانی به شعاع ۳ واحد و از رأس C کمانی به شعاع ۴ واحد رسم می‌کنیم. این دو کمان یک‌دیگر را در دو نقطه‌ی B و D قطع می‌کنند. چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) هیچ‌کدام

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۴ - چند مستطیل به قطر ۶ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۵ - نقطه‌ی A از خط d به فاصله‌ی قرار دارد. اگر هیچ نقطه‌ای روی خط d تا نقطه‌ی A فاصله‌ی ۵ نداشته باشد، x کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۶ - برای رسم خطی به موازات خط d از نقطه‌ی T خارج از خط و فقط به کمک پرگار و خط کش، چند بار از پرگار استفاده می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۷ - عکس کدام‌یک از احکام زیر درست <u>نیست</u>؟

۱) محل برخورد نیمسازهای یک مثلث، مرکز دایره محاطی آن مثلث است.
۲) محل برخورد ارتفاع‌های یک مثلث با زاویه‌ای باز، خارج مثلث قرار دارد.
۳) در مثلث متساوی‌الاضلاع، محل برخورد ارتفاع‌ها بر محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث منطبق است.
۴) مساحت‌های هر دو مثلث هم‌نهشت با هم برابرند.

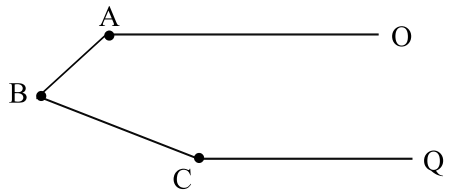
آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۸ - در آغاز اثبات درستی گزاره‌ی «اگر در مثلثی دو زاویه‌ی نابرابر باشند، آنگاه ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.» از کدام روش استدلال استفاده می‌کنیم؟

۱) استقرایی ۲) مثال نقض ۳) استنتاجی ۴) برهان خلف

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۱۹ - در شکل مقابل $AO \parallel CQ$ است. اگر $\widehat{A} = ۱۰۰^\circ$ و $\widehat{C} = ۱۳۰^\circ$ باشد، زاویه $\widehat{B}$ چند درجه است؟



۱) ۲۲۰°
۲) ۱۳۰°
۳) ۱۱۵°
۴) ۶۵°

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۲۰ - در چهارضلعی $ABCD$ داریم: $AB = AD\ ,\ BC = CD$، در مورد این چهارضلعی کدام گزاره قطعاً درست است؟

۱) قطر AC روی عمودمنصف BD است.
۲) قطر BD نیمساز $\widehat{B}$ است.
۳) قطر BD روی عمود منصف AC است.
۴) قطرهای AC و BD برابرند.

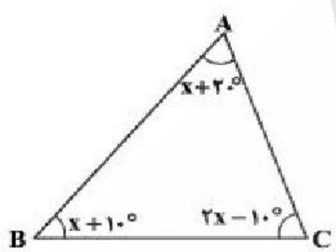
آزمونهای گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۲۱ - در یک n ضلعی منتظم، حاصل‌جمع تعداد قطرهای رسم شده از دو رأس غیرمجاور برابر ۲۹ است. اندازه هر زاویه خارجی این n ضلعی، چند درجه است؟

۱) ۲۰°
۲) ۲۴°
۳) ۳۲°
۴) ۳۶°

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۲۲ - در مثلث ABC، بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟



۱) AC
۲) AB
۳) BC
۴) هر سه ضلع برابرند.

آزمونهای گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۲۳ - اگر در n ضلعی محدب، نسبت تعداد قطرها به تعداد اضلاع برابر یک عدد صحیح مانند K باشد، n کداد عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۱

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۲۴ - ۴ نقطهٔ متمایز A، B، C و D در صفحه مفروضند. تعداد نقاطی که از A و B به فاصلهٔ یکسان و از C و D نیز به فاصلهٔ یکسان قرار دارند، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) بی‌شمار

آزمونهای گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۲۵ - نقطهٔ A خارج خط d مفروض است. از A عمود d' را بر d رسم کرده و سپس در A عمود d'' را بر d' رسم می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟

۱) $d \perp d''$
۲) $d \parallel d''$
۳) d و d'' متقاطعند.
۴) d ، d' و d'' همرسند

آزمونهای گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۲۶ - از سه رأس متوالی یک ۲۰ ضلعی، چند قطر متمایز می‌گذرد؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۰ ۳) ۵۱ ۴) ۲۵

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۲۷ - چند لوزی به طول ضلع ۴ که یک قطر آن ۶ باشد، می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۲۸ - دو خط موازی d_1 و d_2 به فاصلهٔ ۳ از یکدیگر قرار دارند. دو خط دیگر به نام ℓ_1 و ℓ_2 چنان قرار دارند که مجموع فاصلهٔ هر نقطه روی آن‌ها از دو خط d_1 و d_2، برابر ۵ است. ℓ_1 و ℓ_2 چقدر از هم فاصله دارند؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۸-۹۷

۲۹ - اختلاف مجموع زوایای داخلی دو چند ضلعی منتظم، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲۷۰° ۲) ۵۴۰° ۳) ۹۰° ۴) ۳۰۰°

آزمایشی سنجش => دهم => سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۳۰ - وسط اضلاع یک مستطیل را به‌طور متوالی به هم‌وصل می‌کنیم. اگر طول و عرض مستطیل به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، مساحت چهارضلعی حاصل کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

آزمون‌های گزینه ۲ => دهم => سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۱ - در یک چهارضلعی، از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن، یک مربع ایجاد شده است. الزاماً نوع این چهارضلعی کدام است؟

۱) محاطی ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) محیطی ۴) مستطیل

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این‌که در مستطیل این اتفاق می‌افتد قضیه کتاب درسی است. مثال نقض هر سه گزینه‌ی دیگر مربع است که از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن یک نقطه به وجود می‌آید.

۲ - در مثلث ABC نیم‌سازهای زاویه‌ی داخلی، در نقطه‌ی O متقاطع‌اند. اگر زاویه‌های AOB و BOC و COA متناسب با اعداد ۷ و ۶ و ۵ باشند، بزرگ‌ترین زاویه‌ی این مثلث چند درجه است؟

۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A\widehat{O}B + B\widehat{O}C + C\widehat{O}A = ۷x + ۶x + ۵x = ۳۶۰^\circ \rightarrow x = \frac{۳۶۰^\circ}{۱۸} = ۲۰^\circ$$

$$\rightarrow A\widehat{O}B = ۱۴۰^\circ,\ B\widehat{O}C = ۱۲۰^\circ,\ C\widehat{O}A = ۱۰۰^\circ$$

نکته: در مثلث ABC اگر نیمسازهای دو زاویه‌ی داخلی $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند آن‌گاه:

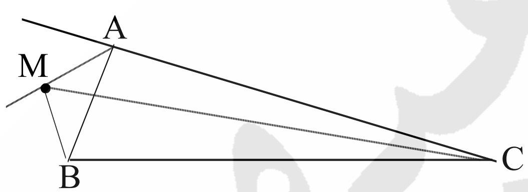
$$B\widehat{O}C = ۹۰^\circ + \frac{\widehat{A}}{۲}$$

برای بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث ABC خواهیم داشت:

$$A\widehat{O}B = ۱۴۰^\circ = ۹۰^\circ + \frac{\widehat{C}}{۲} \rightarrow \widehat{C} = ۱۰۰^\circ$$

۳ - در شکل روبه‌رو، نقطه‌ی M روی نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی A است.

نسبت $\frac{MB + MC}{AB + AC}$، چگونه است؟



۱) بزرگ‌تر از ۱ ۲) کم‌تر از ۱

۳) برابر با ۱ ۴) غیرمشخص

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در امتداد ضلع AC نقطه‌ی D را طوری انتخاب می‌کنیم تا $AD = AB$ باشد در این‌صورت دو مثلث AMD و AMB به حالت (ض ز ض) همنهشت می‌شوند پس $MD = MB$ داریم.

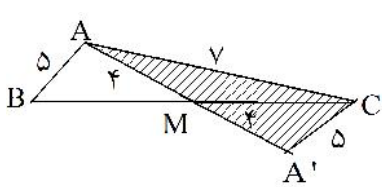
$$C\overset{\triangle}{M}D : CD < MD + MC \Rightarrow CA + AD < MD + MC \xrightarrow[AD = AB]{MD = MB}$$

$$CA + AB < MB + MC$$

بنابراین $\frac{MB + MC}{CA + AB} > ۱$

۴ - در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = ۷$ و $c = ۵$ و میانه $m_a = ۴$ با خط کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) بی‌شمار جواب ۲) جواب منحصر به فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) سه جواب



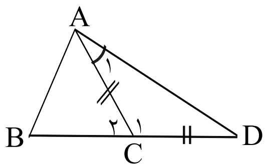
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مسئله را حل شده فرض کنید میانه m_a را به اندازه خودش ادامه داده مثلث $AA'C$ با معلوم بودن سه ضلع قابل رسم است.

بعد از رسم مثلث $AA'C$ راس C را به M وصل کرده به اندازه خودش ادامه می‌دهیم تا B بدست آید. پس جواب مثلث، منحصر به فرد است.

۵ - در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(\widehat{A} = 32^\circ , AC = AB)$ قاعده BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه D امتداد می‌دهیم. زاویه $\widehat{ADC}$ چند درجه است؟

۱) 36° ۲) 34° ۳) 37° ۴) 39°

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{C}_2 = \widehat{B} = \frac{180 - \widehat{A}}{2} = \frac{148}{2} = 74^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 = 180 - \widehat{C}_2 = 106$$

$$AC = CD \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{D} = \frac{180 - \widehat{C}_1}{2} = \frac{74}{2} = 37^\circ$$

۶ - کدام گزاره مثال نقض دارد؟

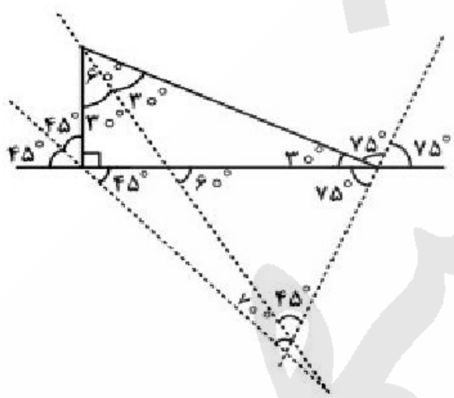
۱) محل همرسی ارتفاع‌های یک مثلث نمی‌تواند روی مثلث باشد.

۲) در یک مثلث، نیمسازهای خارجی دو زاویه و نیمساز داخلی زاویه سوم همرسند.

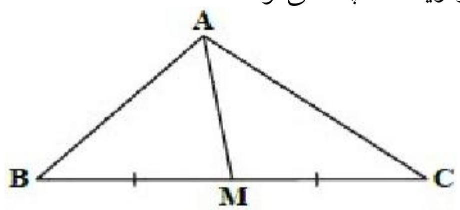
۳) عمود منصف یک پاره‌خط مکان هندسی نقاطی است که با آن پاره‌خط مثلث متساوی‌الساقین می‌سازند.

۴) در دو مثلث $A\widehat{B}C$ و $A'\widehat{B'}C'$، اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $BC > B'C'$ باشد، آنگاه $B\widehat{A}C > B'\widehat{A'}C'$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثال نقض: مثلث قائم‌الزاویه با زوایای حاده 30° و 60°



۷ - در شکل مقابل میانهٔ $AM = ۴$ و ضلع $BC = ۱۰$ مفروض است. در مورد زاویهٔ A چه می‌توان گفت؟



۱) $\hat{A} = ۹۰^\circ$

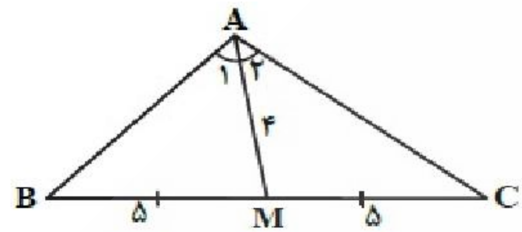
۲) $\hat{A} > ۹۰^\circ$

۳) $\hat{A} < ۹۰^\circ$

۴) با این اطلاعات نمی‌توان اظهارنظر کرد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر مثلثی دو ضلع نابرابر داشته باشد، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.



مطابق شکل و نکته داریم:

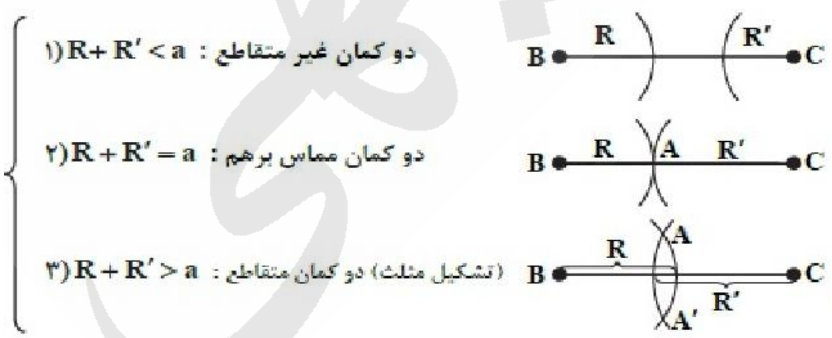
$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} < \hat{A} \xrightarrow{+\hat{A}} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < ۲\hat{A} \Rightarrow ۱۸۰^\circ < ۲\hat{A} \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$$

۸ - پاره‌خط BC به طول ۹ مفروض است. به مرکز B و شعاع R و به مرکز C و شعاع 'R کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کنند. در کدام حالت مثلث ABC به‌وجود می‌آید؟

۱) $R = ۵$ و $R' = ۴$ ۲) $R = ۵$ و $R' = ۵$ ۳) $R = ۶$ و $R' = ۳$ ۴) $R = ۴$ و $R' = ۴$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: پاره‌خط $BC = a$ مفروض است. اگر به مرکز B و شعاع R و به مرکز C و شعاع 'R کمان‌هایی بزنیم، ممکن است یکی از حالت‌های زیر به وجود بیاید:



با توجه به نکتهٔ بالا، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱ : $R + R' = ۹ = BC$ ✗

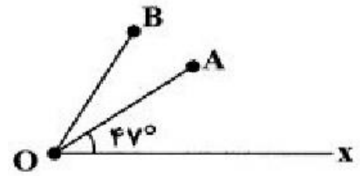
گزینهٔ ۲ : $R + R' = ۱۰ > BC$ ✓

گزینهٔ ۳ : $R + R' = ۹ = BC$ ✗

گزینهٔ ۴ : $R + R' = ۸ < BC$ ✗

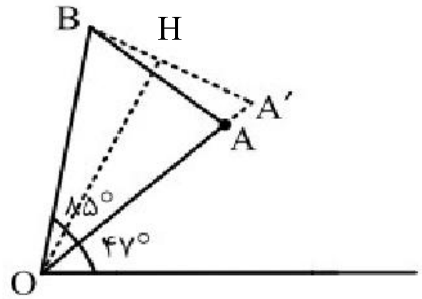
پس گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۹ - در شکل زیر طول پاره‌خطهای OA و OB با هم برابر است و به ترتیب با محور OX زاویه‌های ۴۷° و ۸۵° می‌سازند. با افزایش طول OA، در مورد زاویه بین ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث $O\overset{\triangle}{A}B$ و محور OX، کدام درست است؟



۱) برابر ۶۶° خواهد بود.
۲) برابر ۷۷° خواهد بود.
۳) بزرگتر از ۶۶° خواهد بود.
۴) کمتر از ۶۶° خواهد بود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$A\widehat{O}B = ۸۵^\circ - ۴۷^\circ = ۳۸^\circ$

$OA = OB \Rightarrow$ مثلث $O\overset{\triangle}{A}B$ متساوی‌الساقین است

در نتیجه: زاویه میان OH با محور ox برابر است با:

$\frac{۳۸^\circ}{۲} + ۴۷^\circ = ۱۹^\circ + ۴۷^\circ = ۶۶^\circ$

با زیاد شدن طول OA، ارتفاع به نقطه B نزدیک‌تر شده، در نتیجه زاویه بزرگتری با محور ox می‌سازد.

۱۰ - در شکل روبه‌رو AH ارتفاع وارد بر ضلع BC و AD نیمسازهای داخلی زاویه در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ است.اگر $\widehat{\alpha} = ۷۵^\circ$ باشد، اندازهٔ $|\widehat{B} - \widehat{C}|$ کدام است؟

۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۴۰° ۴) ۴۵°

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$AD \perp Ad$

$$\begin{cases} \widehat{D}_۱ + \widehat{\theta} = \frac{\pi}{۲} \\ \widehat{D}_۱ = \widehat{\theta} + \widehat{B} + \widehat{C} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{۲} - \widehat{\theta} = \widehat{\theta} + \widehat{B} + \widehat{C}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \widehat{۲\theta} = \frac{\pi}{۲} - \widehat{B} - \widehat{C} \\ \frac{\pi}{۲} - \widehat{B} = \widehat{B} \end{cases} \Rightarrow \widehat{۲\theta} = |\widehat{B} - \widehat{C}| \Rightarrow \widehat{\theta} = \frac{|\widehat{B} - \widehat{C}|}{۲} = ۱۵^\circ$$

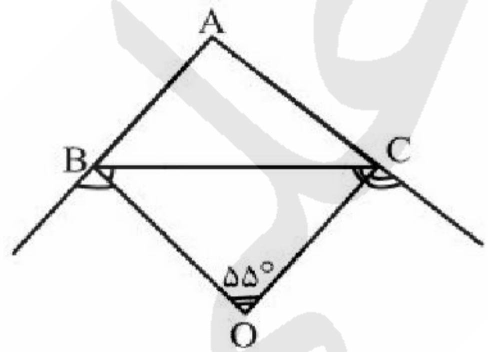
$|\widehat{B} - \widehat{C}| = ۳۰^\circ$

۱ ۱ - اگر زاویه بین دو نیمساز زوایای خارجی B و C، در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ برابر ۵۵° درجه باشد، اندازه زاویه $\hat{A}$ کدام است؟

۱) ۷۰° ۲) ۸۰° ۳) ۹۰° ۴) ۱۰۰°

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در مثلث $O\overset{\triangle}{B}C$:



$$۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} + ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲} + \hat{O} = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{O} = \frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} = ۵۵^\circ$$

$$\frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰^\circ - ۵۵^\circ = ۳۵^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۷۰^\circ$$

نکته: زاویه بین دو نیمساز خارجی در هر مثلث برابر است با تفاضل نصف زاویه سوم و یک قائمه.

۲ ۱ - کدام دسته از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: در هر مثلث ارتفاع وارد بر هر ضلع، از نیم‌سازی که به آن ضلع وارد می‌شود، کوچکتر است.

ب: در هر مثلث ارتفاع وارد بر هر ضلع از دو ضلع دیگر کوچکتر یا مساوی است.

پ: می‌توان مثلثی رسم کرد که در آن نیم‌ساز وارد بریک ضلع، بر میانه متناظر با آن ضلع منطبق باشد.

ت: می‌توان مثلثی رسم کرد که ارتفاع وارد بر یک ضلع و عمود منصف همان ضلع دو خط موازی متمایز نباشند.

۱) الف و ب و پ ۲) الف و ب و ت ۳) الف و پ و ت ۴) ب و پ و ت

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قسمت «الف» نادرست است. ارتفاع و نیمساز در مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند.

۳ ۱ - اگر تعداد قطرهای m ضلعی منتظم از دو برابر تعداد قطرهای n ضلعی منتظم دو واحد بیش‌تر و تعداد قطرهای m ضلعی برابر ۹۰ باشد، آن‌گاه مجموع زوایای داخلی m ضلعی از مجموع زوایای داخلی n ضلعی، چند درجه بیش‌تر است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۰۸۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض: تعداد قطرهای n ضلعی برابر k باشد، یعنی $\frac{n(n-۳)}{۲} = K$

در این صورت: $۹۰ = \frac{m(m-۳)}{۲} = ۲\left(\frac{n(n-۳)}{۲}\right) + ۲$

$$n(n-۳) + ۲ = ۹۰ \Rightarrow n^۲ - ۳n - ۸۸ = ۰ \Rightarrow (n-۱۱)(n+۸) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = -۸ & \text{غیرقابل قبول} \\ n = ۱۱ & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$m^۲ - ۳m - ۱۸۰ = ۰ \Rightarrow (m-۱۵)(m+۱۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۱۵ & \text{قابل قبول} \\ m = -۱۲ & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

مجموع زوایای داخلی ۱۵ ضلعی منتظم $= (۲ \times ۱۵ - ۴) \times ۹۰ = ۲۶ \times ۹۰ = ۲۳۴۰^\circ$

مجموع زوایای داخلی ۱۱ ضلعی منتظم $= (۲ \times ۱۱ - ۴) \times ۹۰ = ۱۸ \times ۹۰ = ۱۶۲۰^\circ$

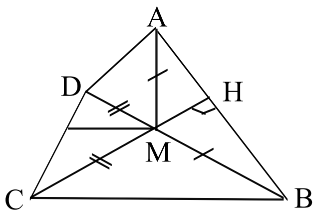
در نتیجه: $۲۳۴۰^\circ - ۱۶۲۰^\circ = ۷۲۰^\circ$

۱۴ - در چهارضلعی $ABCD$ ، عمودمنصف‌های دو ضلع AB و CD در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. اگر $BC > AD$ باشد، کدام مورد همواره صحیح است؟

۱) $C\widehat{M}D > A\widehat{M}B$ ۲) $B\widehat{M}C > A\widehat{M}D$

۳) $A\widehat{M}B > B\widehat{M}C$ ۴) $C\widehat{A}B > C\widehat{A}D$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. MH و MH' روی عمودمنصف‌های اضلاع AB و CD قرار دارند.



$$\begin{cases} MA = MB \\ MC = MD \end{cases}$$

دو مثلث AMD و BMC را درنظر بگیرید، دو ضلع از این دو مثلث برابرند و ضلع سوم مثلث روبه‌رو ضلع سوم مثلث BMC از ضلع سوم مثلث AMD بزرگ‌تر است $(BC > AD)$ پس زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است یعنی $B\widehat{M}C > A\widehat{M}D$

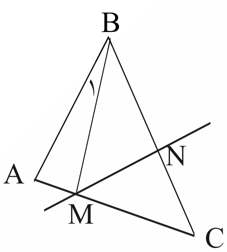
۱۵ - در مثلث ABC داریم $\widehat{A} > \widehat{B}$. عمودمنصف BC ، اضلاع BC و AC را به‌ترتیب در N و M قطع می‌کند. کدام گزینه درست است؟

۱) $MC > MB$ ۲) $BC > ۲BM$ ۳) $AB > AC$ ۴) $۲BM > AC$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{A} > \widehat{B} \Rightarrow BC > AC$$

چون MN عمودمنصف BC می‌باشد در نتیجه:



$$MC = MB$$
$$\widehat{A} > \widehat{B}_۱ \Rightarrow MB > AM$$
$$MB + MC > AM + MC$$
$$۲MB > AC$$

۱۶ - در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ می‌دانیم $AC = ۱۰$ ، $AB = ۱۶$ و $\widehat{B} = ۳۰$ است چند مثلث می‌توانیم رسم کنیم؟

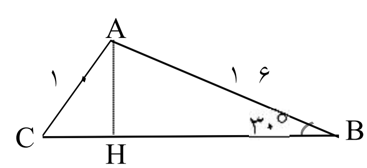
۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) بی‌شمار

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$AH = AB\,\mathrm{Sin}\,B = AC\,\mathrm{Sin}\,C \Rightarrow ۱۶\,\mathrm{Sin}\,۳۰^\circ = ۱۰\,\mathrm{Sin}\,C$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}\,\widehat{C} = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow \widehat{C} = ۵۳^\circ$$

$$\widehat{C} = ۱۸۰ - ۵۳^\circ \quad (\text{ربع دوم})$$



پس دو مثلث قابل رسم است.

۱۷ - نقیض چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

آ) هر لوزی، یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود ندارد که مربع نباشد.

پ) هیچ مثلثی، بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهار ضلعی محدب، برابر با ۳۶۰° است.

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

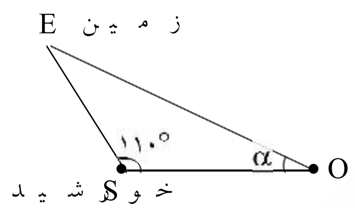
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید ببینیم چند گزاره نادرست است یعنی برای آن‌ها مثال نقض داشته باشیم.

آ) لوزی می‌تواند یک مربع باشد.

ب) مستطیلی می‌توان مثال زد که مربع نباشد، یعنی طول و عرض آن برابر نباشد.

ولی دو گزاره‌ی دیگر درست است.

۱۸ - در شکل زیر، فرض کنید می‌خواهیم جسمی را که در راستای SO قرار دارد از زمین (E) رصد کنیم. برای اجسامی که فاصله آن‌ها تا خورشید (SO) بیش‌تر از فاصله‌ی زمین تا خورشید (SE) است، زاویه‌ی α در چه محدوده‌ای قرار می‌گیرد؟



۱) $[۵^\circ , ۳۵^\circ)$

۲) $[۵^\circ , ۴۵^\circ)$

۳) $[۰^\circ , ۳۵^\circ)$

۴) $[۰^\circ , ۴۰^\circ)$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر $SO = SE$ باشد:

$$\alpha = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ}{۲} = ۳۵^\circ$$

حال اگر $SO > SE$ شود زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر بیش‌تر از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر می‌شود. در نتیجه $\hat{\alpha}$ کم‌تر از ۳۵° می‌شود. بنابراین $۰ < \alpha \leq ۳۵^\circ$

۱۹ - طول دو ضلع متوازی‌الاضلاع ABCD برابر ۵ و ۴ و طول یک قطر آن $\sqrt{۳}$ است. با این سه طول داده شده چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد؟

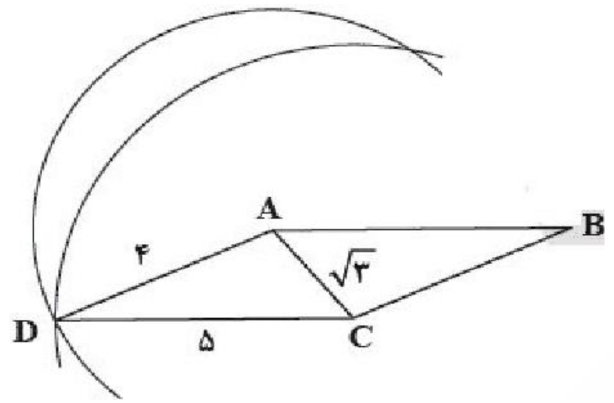
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

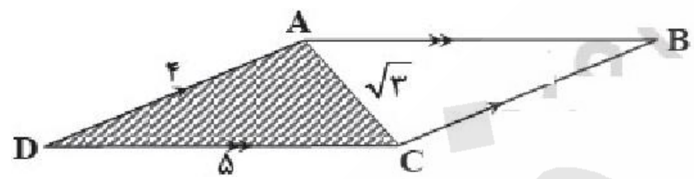
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

راه حل اول:

ابتدا قطر AC به طول $\sqrt{۳}$ را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و شعاع ۴ و به مرکز C و شعاع ۵ دو کمان رسم می‌کنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

یکی از این دو نقطه را D می‌نامیم و مثلث ADC را رسم می‌نماییم. سپس از رئوس A و C خطوطی موازی DC و AD رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در B قطع کنند. بنابراین با اطلاعات داده شده تنها یک متوازی‌الاضلاع قابل رسم است.





راه حل دوم:

نکته: اگر a، b و c سه ضلع یک مثلث باشند، آن‌گاه $|b - c| < a < b + c$ و برعکس.

$$AD = ۴ , DC = ۵ , AC = \sqrt{۳} \Rightarrow DC - AD < AC < AD + DC$$

بنابراین مثلث ACD به‌صورت یکتا قابل رسم است. حال از رئوس A و C خطوطی موازی DC و AD رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در B قطع کنند.

بنابراین با اطلاعات داده شده تنها یک متوازی الاضلاع قابل رسم است.

دقت کنید که با توجه به شکل امکان ندارد طول قطر BD برابر $\sqrt{۳}$ باشد، بنابراین تنها یک متوازی‌الاضلاع قابل رسم است.

۲۰ - سه پاره‌خط با طول‌های $۶x$ ، $x + ۷$ و $۴(x - ۱)$ داده شده‌اند. اگر مجموع طول‌های این سه پاره‌خط ۳۶ باشد، با این سه پاره‌خط چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) دقیق نمی‌توان تعیین کرد.

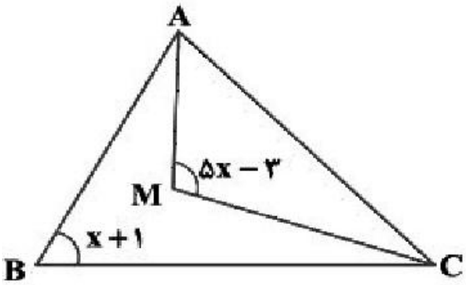
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته (نامساوی مثلث): در هر مثلث مجموع طول هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

$$۶x + x + ۷ + ۴(x - ۱) = ۳۶ \Rightarrow ۱۱x + ۳ = ۳۶ \Rightarrow x = ۳$$

پس طول این سه پاره‌خط به‌ترتیب ۱۸، ۱۰ و ۸ واحد می‌باشد.

با توجه به اینکه این اعداد در نامساوی مثلث صدق نمی‌کنند ($۱۸ \not< ۱۰ + ۸$)، پس مثلثی با این اضلاع وجود ندارد.

۱ - در مثلث شکل مقابل، محدودهٔ x کدام است؟



۱) $x > ۲$
۲) $x < ۲$
۳) $x > ۱$
۴) $x < ۱$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: هر زاویهٔ خارجی مثلث، از زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگتر است.
AM را ادامه می‌دهیم تا مطابق شکل BC را در N قطع کند.

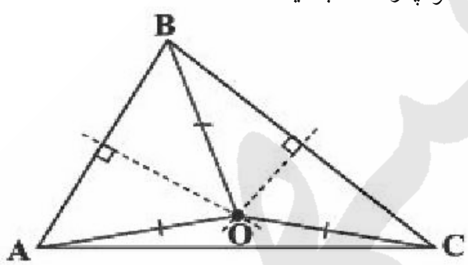
$$\begin{cases} M\overset{\triangle}{N}C: \text{خارجی}\ \widehat{M}_۱ > \widehat{N}_۱ \\ A\overset{\triangle}{B}N: \text{خارجی}\ \widehat{N}_۱ > \widehat{B} \end{cases} \Rightarrow \widehat{M}_۱ > \widehat{B}$$

$$\Rightarrow ۵x - ۳ > x + ۱ \Rightarrow ۴x > ۴ \Rightarrow x > ۱$$

۲ - مثلث ABC مفروض است. عمودمنصف دو ضلع AB و BC یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. اگر فاصلهٔ O تا نقاط B و C به‌ترتیب $۲x - ۱$ و $x + ۲$ باشد، اندازهٔ OA چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: نقاط روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند.



طبق فرض O روی عمودمنصف BC قرار دارد، پس:

$$OB = OC \Rightarrow ۲x - ۱ = x + ۲ \Rightarrow x = ۳$$

با جایگذاری $x = ۳$ داریم:

$$OB = OC = ۵$$

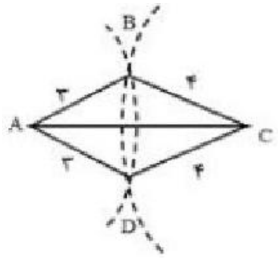
طبق فرض نقطهٔ O روی عمودمنصف AB نیز قرار دارد، پس اندازهٔ OA نیز باید برابر ۵ باشد.

$$OA = OB = ۵$$

۳ - دو نقطه‌ی A و C از یک‌دیگر ۵ واحد فاصله دارند. از رأس A کمانی به شعاع ۳ واحد و از رأس C کمانی به شعاع ۴ واحد رسم می‌کنیم. این دو کمان یک‌دیگر را در دو نقطه‌ی B و D قطع می‌کنند. چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) هیچ‌کدام

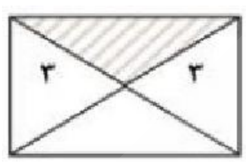
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقاط B و D از رأس A به فاصله‌ی ۳ واحد و از رأس C به فاصله‌ی ۴ واحد قرار دارند، پس چهارضلعی ABCD مطابق شکل دارای دو ضلع به طول ۳ و دو ضلع به طول ۴ است. این چهار ضلعی شبیه به بادبادک (کایت) است و هیچ‌کدام از شکل‌های سه گزینه جواب نیست.



۴ - چند مستطیل به قطر ۶ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

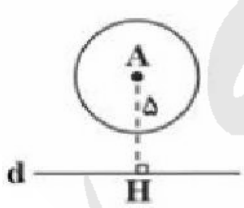
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای رسم مستطیل موردنظر ابتدا باید مثلث هاشورخورده را رسم کنیم. از این مثلث دو ضلع مشخص است، اما زاویه‌ی بین دو ضلع و یا ضلع سوم مشخص نشده است پس اندازه‌ی ضلع سوم یا زاویه‌ی بین دو قطر می‌تواند مقادیر مختلفی داشته باشد، بنابراین بی‌شمار مستطیل قابل رسم است.



۵ - نقطه‌ی A از خط d به فاصله‌ی ۱ - ۲x قرار دارد. اگر هیچ نقطه‌ای روی خط d تا نقطه‌ی A فاصله‌ی ۵ نداشته باشد، x کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقاطی که از A به فاصله‌ی ۵ قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ را تشکیل می‌دهند، با توجه به صورت مسئله، نتیجه می‌شود که این دایره خط d را قطع نمی‌کند:



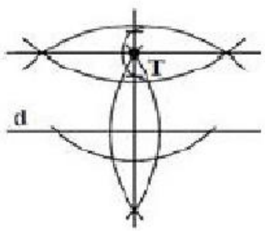
$AH > R \Rightarrow ۲x - ۱ > ۵ \Rightarrow ۲x > ۶ \Rightarrow x > ۳$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی ۴ پاسخ است.

۶ - برای رسم خطی به موازات خط d از نقطه‌ی T خارج از خط و فقط به کمک پرگار و خط کش، چند بار از پرگار استفاده می‌شود؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به طریقه‌ی رسم، شش بار از پرگار استفاده می‌شود.



۷ - عکس کدام‌یک از احکام زیر درست <u>نیست</u>؟

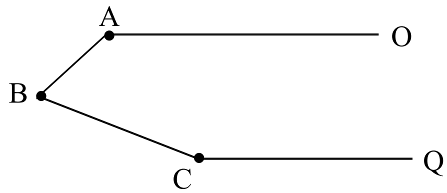
۱) محل برخورد نیمسازهای یک مثلث، مرکز دایره محاطی آن مثلث است.
۲) محل برخورد ارتفاع‌های یک مثلث با زاویه‌ای باز، خارج مثلث قرار دارد.
۳) در مثلث متساوی‌الاضلاع، محل برخورد ارتفاع‌ها بر محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث منطبق است.
۴) مساحت‌های هر دو مثلث هم‌نهشت با هم برابرند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عکس قضیه عبارت است از: «اگر مساحت‌های دو مثلث با هم برابر باشند. آن‌گاه دو مثلث هم‌نهشتند» که درست نیست.

۸ - در آغاز اثبات درستی گزاره‌ی «اگر در مثلثی دو زاویه‌ی نابرابر باشند، آنگاه ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.» از کدام روش استدلال استفاده می‌کنیم؟

۱) استقرایی ۲) مثال نقض ۳) استنتاجی ۴) برهان خلف

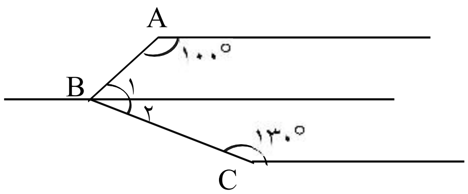
گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
برای اثبات درستی گزاره‌ی «اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگ‌تر، از زاویه‌ی مقابل به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است»، از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم.
برای اثبات درستی گزاره‌ی «اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، آن‌گاه ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است» از برهان خلف استفاده می‌کنیم.
بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ است.



۲۹ - در شکل مقابل $AO \parallel CQ$ است. اگر $\widehat{A} = ۱۰۰^\circ$ و $\widehat{C} = ۱۳۰^\circ$ باشد، زاویه $\widehat{B}$ چند درجه است؟

۱) ۲۲۰°
۲) ۱۳۰°
۳) ۱۱۵°
۴) ۶۵°

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



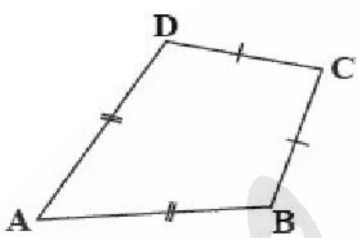
$$\widehat{A} + \widehat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$
$$\widehat{C} + \widehat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ$$

در نتیجه:

$$\widehat{B} + \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ = ۸۰^\circ + ۵۰^\circ = ۱۳۰^\circ$$

۳۰ - در چهارضلعی $ABCD$ داریم: $AB = AD\ ,\ BC = CD$، در مورد این چهارضلعی کدام گزاره قطعاً درست است؟

۱) قطر AC روی عمودمنصف BD است.
۲) قطر BD نیمساز $\widehat{B}$ است.
۳) قطر BD روی عمود منصف AC است.
۴) قطرهای AC و BD برابرند.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: نقاط روی عمود منصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله هستند و بر عکس.

با توجه به فرض مسئله داریم:

$BC = DC \Rightarrow$ نقطه C روی عمود منصف BD است

$AB = AD \Rightarrow$ نقطه A روی عمود منصف BD است

$\Rightarrow$ قطر AC روی عمود منصف BD است

۳۱ - در یک n ضلعی منتظم، حاصل‌جمع تعداد قطرهای رسم شده از دو رأس غیرمجاور برابر ۲۹ است. اندازه هر زاویه خارجی این n ضلعی، چند درجه است؟

۱) ۲۰° ۲) ۲۴° ۳) ۳۲° ۴) ۳۶°

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از هر رأس $n - ۳$ قطر می‌توان رسم کرد.

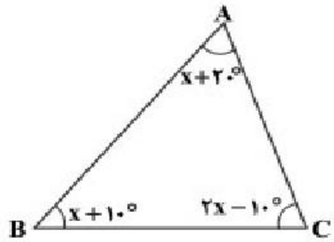
هر رأس غیرمجاور با رأس موردنظر دارای یک قطر مشترک است. بنابراین از هر رأس غیرمجاور $n - ۴$ قطر می‌توان رسم کرد.

درنتیجه:

$$n - ۳ + n - ۴ = ۲n - ۷ = ۲۹ \Rightarrow ۲n = ۳۶ \Rightarrow n = ۱۸$$

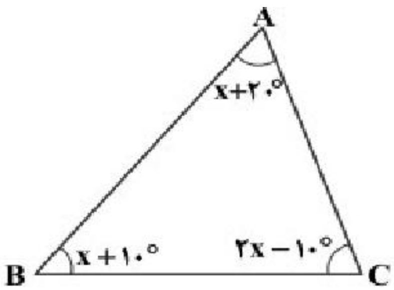
$$\text{اندازه زاویه خارجی} = \frac{۳۶۰}{n} = \frac{۳۶۰}{۱۸} = ۲۰^\circ$$

- در مثلث ABC، بزرگ‌ترین ضلع مثلث کدام است؟ ۲



۱) AC
۲) AB
۳) BC
۴) هر سه ضلع برابرند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
نکته: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر، بزرگ‌تر است. ابتدا اندازه‌ی زاویه‌ها را به‌دست می‌آوریم:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow x + ۲۰^\circ + x + ۱۰^\circ + ۲x - ۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۴x = ۱۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ \ ; \ \hat{B} = ۵۰^\circ \ ; \ \hat{C} = ۷۰^\circ$$

چون بزرگ‌ترین زاویه، $\hat{C} = ۷۰^\circ$ است، پس بزرگ‌ترین ضلع مثلث AB است.

- اگر در n ضلعی محدب، نسبت تعداد قطرها به تعداد اضلاع برابر یک عدد صحیح مانند K باشد، n کداد عدد نمی‌تواند باشد؟ ۳

۱) ۷   ۲) ۸   ۳) ۹   ۴) ۱۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\frac{n(n-۳)}{۲}}{n} = k \Rightarrow \frac{n-۳}{۲} = k \Rightarrow n = ۲k + ۳ \quad \text{فرد است}$$

بنابراین اگر حاصل عددی زوج باشد غیرقابل قبول است.

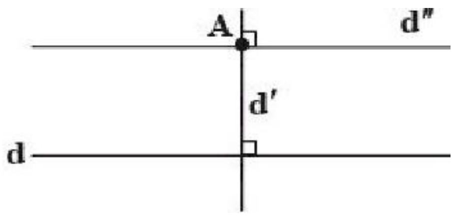
- ۴ نقطهٔ متمایز A، B، C و D در صفحه مفروضند. تعداد نقاطی که از A و B به فاصلهٔ یکسان و از C و D نیز به فاصلهٔ یکسان قرار دارند، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟ ۴

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) صفر   ۴) بی‌شمار

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
نکته: مجموعه نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت در صفحه به فاصلهٔ یکسان قرار دارند، روی عمودمنصف پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه واقع‌اند.
نقاط روی عمودمنصف AB از A و B به یک فاصله‌اند (خط d) و نقاط روی عمودمنصف CD از C و D به یک فاصله‌اند. (خط d')
d و d' می‌تواند موازی، متقاطع یا منطبق باشند، پس تعداد نقاط تلاقی آن‌ها می‌تواند صفر، یک یا بی‌شمار باشد.
بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲۵ - نقطهٔ A خارج خط d مفروض است. از A عمود d' را بر d رسم کرده و سپس در A عمود d'' را بر d' رسم می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟

۱) $d \perp d''$ ۲) $d \parallel d''$ ۳) d و d'' متقاطعند. ۴) d ، d' و d'' همرسند



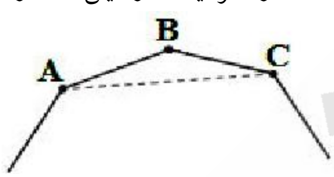
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
نکته: دو خط عمود بر یک خط در صفحه، موازی‌اند.
دقیقاً به روش رسم یک خط به موازات خطی مفروض از نقطه‌ای خارج آن اشاره شده است.

$$\begin{cases} d' \perp d \\ d' \perp d'' \end{cases} \Rightarrow d \parallel d''$$

۲۶ - از سه رأس متوالی یک ۲۰ ضلعی، چند قطر متمایز می‌گذرد؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۰ ۳) ۵۱ ۴) ۲۵

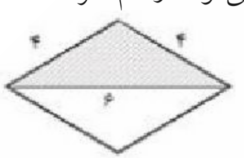
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکتهٔ ۱: در هر nضلعی محدب، هر پاره‌خط که دو انتهای آن، دو رأس غیر مجاور باشد، قطر می‌نامند.
نکتهٔ ۲: از هر رأس یک nضلعی محدب، $n - 3$ قطر می‌گذرد.
فرض کنید، A، B و C سه رأس متوالیِ مورد بحث در مسئله هستند. با توجه به نکتهٔ ۲، از هر یک از این سه رأس $20 - 3 = 17$ قطر می‌گذرد، بنابراین از این سه رأس $3 \times 17 = 51$ قطر می‌گذرد،
اما با کمی دقت مشاهده می‌کنید که قطر AC دو بار محاسبه شده است (یک بار برای A و یک بار برای C)؛ پس تعداد قطرهای متمایز $51 - 1 = 50$ است.



۲۷ - چند لوزی به طول ضلع ۴ که یک قطر آن ۶ باشد، می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

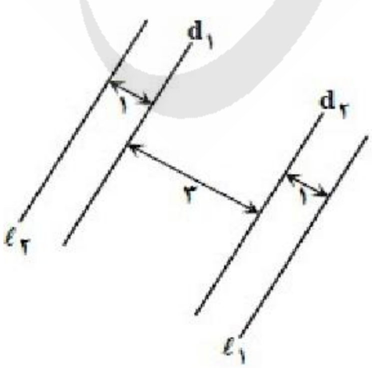
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، با داشتن ۳ ضلع به طول‌های ۴، ۴ و ۶ فقط یک مثلث می‌توان رسم کرد.



با تکرار این مثلث به صورت قرینه لوزی کامل می‌شود، لذا فقط یک لوزی با این مشخصات قابل رسم است.

۲۸ - دو خط موازی d_1 و d_2 به فاصلهٔ ۳ از یکدیگر قرار دارند. دو خط دیگر به نام ℓ_1 و ℓ_2 چنان قرار دارند که مجموع فاصلهٔ هر نقطه روی آن‌ها از دو خط d_1 و d_2، برابر ۵ است. ℓ_1 و ℓ_2 چقدر از هم فاصله دارند؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
نکته: مجموع نقاطی که از خط d به فاصلهٔ r هستند، دو خطِ موازی به فاصلهٔ r در دو طرف خط d هستند.
دو خط ℓ_1 و ℓ_2 با d_1 و d_2 موازی‌اند. با توجه به شکل مقابل ℓ_1 و ℓ_2 از هر طرف یک واحد تا دو خط d_1 و d_2 فاصله دارند. پس فاصلهٔ ℓ_1 و ℓ_2 برابر ۵ است.

۲۹ - اختلاف مجموع زوایای داخلی دو چند ضلعی منتظم، کدام می‌تواند باشد؟

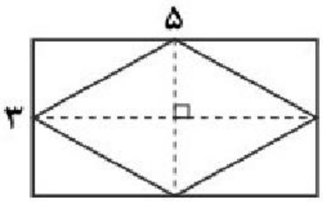
۱) ۲۷۰° ۲) ۵۴۰° ۳) ۹۰° ۴) ۳۰۰°

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب همواره مضربی از ۱۸۰° است. بنابراین اختلاف مجموع زوایای داخلی دو چند ضلعی محدب متفاوت نیز مضربی از ۱۸۰° است.

۳۰ - وسط اضلاع یک مستطیل را به‌طور متوالی به هم‌وصل می‌کنیم. اگر طول و عرض مستطیل به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، مساحت چهارضلعی حاصل کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول:



نکته: شکل حاصل از به هم وصل کردن وسط اضلاع هر مستطیل، یک لوزی است.

نکته: مساحت لوزی برابر است با: $\dfrac{\text{حاصل ضرب اندازه دو قطر}}{۲}$

با توجه به شکل و نکته، قطرهای لوزی حاصل ۳ و ۵ هستند. بنابراین:

$$S_{\text{لوزی}} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۳ = ۷/۵$$

راه حل دوم:

نکته: مساحت شکل حاصل از به هم وصل کردن وسط اضلاع یک چهارضلعی، نصف مساحت شکل اولیه است.

با توجه به نکتهٔ بالا، کافی است مساحت مستطیل را نصف کنیم.

$$S_{\text{شکل حاصل}} = \frac{۱}{۲} \times S_{\text{مستطیل}} = \frac{۳ \times ۵}{۲} = ۷/۵$$