تابع

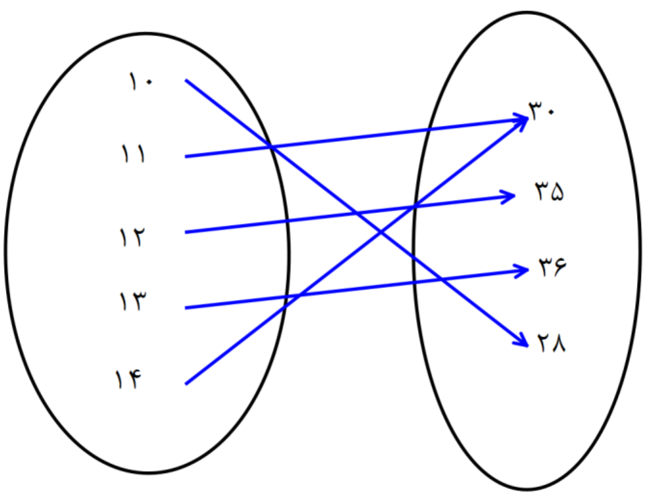
بسیاری از پدیده ها در اطراف ما هستند که به هم ربط دارند. مثلا دمای هوا در ساعات مختلف روز

①

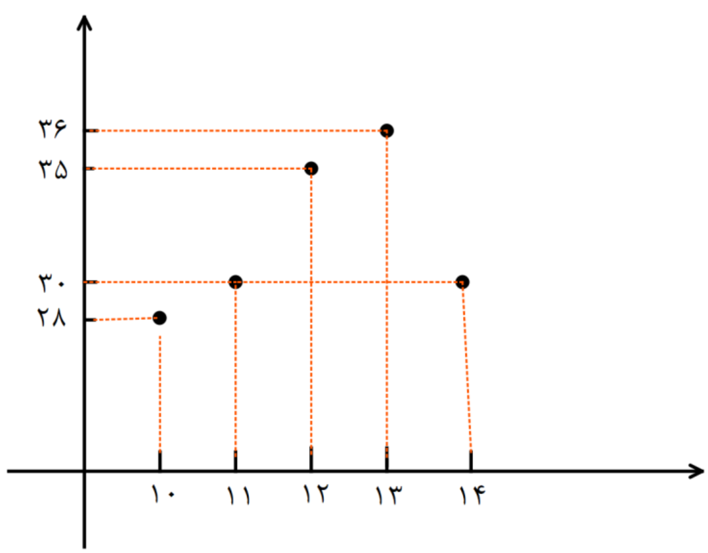
ساعت	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
دما	۲۸	۳۰	۳۵	۳۶	۳۰

این رابطه را میتوان به صورت روبرو هم نمایش داد. $\{(۱۰,۲۸),(۱۱,۳۰),(۱۲,۳۵),(۱۳,۳۶),(۱۴,۲۵)\}$ ②

و یا به این صورت: ③



و یا به این صورت: ④



در بالا حالت های مختلفی از یک تابع را نمایش داده ایم. یعنی به ازای یک x در **دامنه** به یک y در **همدامنه** وصل شده ایم. درباره این دو کلمه بعداً صحبت خواهیم کرد.

تعریف

دو تایی (x,y) که در آن ترتیب نوشتن اهمیت دارد، زوج مرتب نامیده میشود. در این زوج مرتب، x را مولفه اول و y را مولفه دوم گوییم. و با $\{x,y\}$ فرق دارد. یعنی $\{a,a\}=\{a\}$ ولی در زوج مرتب (a,a) این چنین نیست و نمیتوان یکی نوشت. هم چنین دو زوج مرتب (a,b) و (b,a) با هم برابر نیستند.

◆تساوی دو زوج مرتب

دو زوج مرتب $(a,b),(c,d)$ وقتی با هم برابرند که $a=c,b=d$

📖 **مثال :** اگر زوج مرتب های $(x-۲,x+۲y),(\frac{۲x+۳y}{۴},\frac{۱}{۲})$ با هم برابر باشند، مقادیر y,x را بیابید.

📖 **مثال :** اگر دو زوج مرتب $(-۴x^{۲}+۳x,۱),(y,-۳y-۲)$ هر دو یک نقطه را نشان دهند، مقادیر ممکن برای y,x را بیابید.

تعریف

در حالت کلی یک **رابطه** از مجموعه A به مجموعه B مجموعه است شامل زوج مرتب هایی که مولفه اول از مجموعه A و مولفه های دوم از مجموعه B انتخاب شده است.

تعریف

رابطه ای که در آن هیچ دو وزج مرتب متفاوتی دارای مولفه های اول مساوی نباشند، یک **تابع** نامیده می شود.

در واقع از یک عضو مجموعه اول نباید به دو عضو مجموعه دوم برویم.

به طور مثال: $\{(۱,۲),(۴,۲)\}$ تابع است اما $\{(۴,۲),(۳,۶),(۴,۱)\}$ تابع نیست. زیرا **۴** به دو عضو نظیر شده است.

جدول :

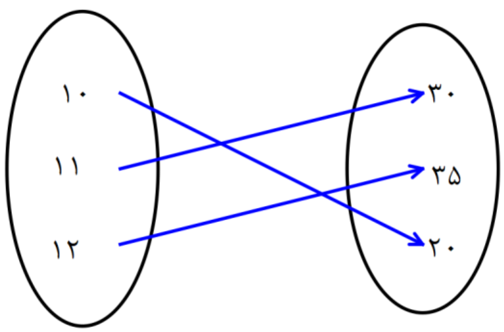
x	۲	۳	۵
y	۱	۴	۶

تابع است اما :

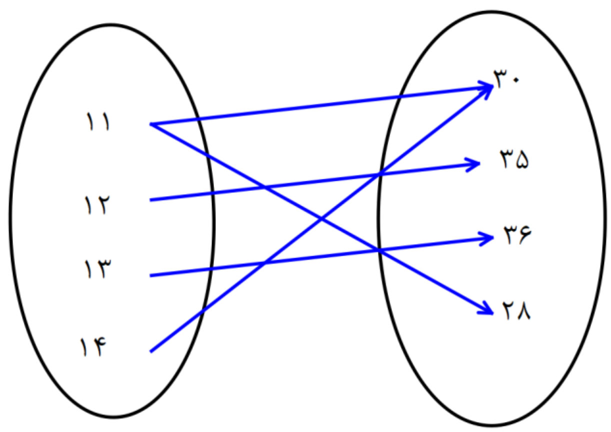
x	۱	۲	۱
y	۴	۵	۲

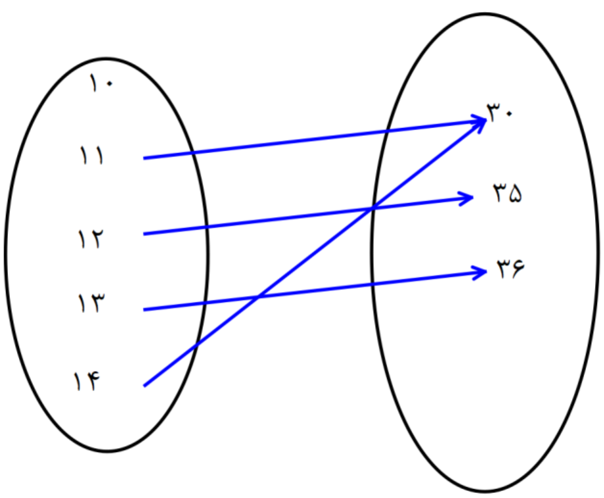
تابع نیست زیرا عضو **۱** به دو عضو نظیر شده است.

همچنین : این نمودار ون تابع است



اما دو نمودار زیر تابع نیستند.





تشخیص تابع بودن:

۱- در زوج مرتب ها نباید دو مولفه اول برابر داشته باشیم. اگر مولفه های اول برابر بودند، مولفه های دوم هم برابرند.

۲- در نمودار ون دو شرط باید برقرار باشد، الف) هیچ عضوی از مجموعه اول خالی نباشد. یعنی از تمام مولفه های اول پیکان خارج شده باشد. ب) از یک عضو مجموعه اول دو پیکان خارج نشده باشد.

۳- در جدول ها در خط اول دو عضو شبیه هم نداشته باشیم.

۴- در نمودار رسم شده در محورهای مختصاتی نباید دو نقطه با x برابر داشته باشیم. اصطلاحاً میگوییم اگر خطی موازی محور y ها رسم شود نباید نمودار منحنی را در بیشتر از یک نقطه قطع کند.

۵- در ضابطه تابع نباید وقتی به x عددی نسبت می دهیم بیشتر از یک مقدار برای y به دست بیاید. مثلا عبارت $y^۲ = x$ نمیتواند تابع باشد زیر اگر به x مقدار بدهیم :

$$y^۲ = x \xrightarrow{x=۱} y = \pm ۱$$
$$(۱,۱)\ ,\ (۱,-۱)$$

مثال : به ازای چه مقادیری از a و b زوج مرتب‌های $(a+b,۱۳)$ و $\left(a^۲, b^۲\right)$ یکسان هستند.

مثال : تابع بودن یا نبودن روابط زیر را بررسی کنید :

الف) $f = \{(x,y) | x,y; x+y = ۵\}$ ب) $|x| - |y| = ۳$

📖 **مثال :** مقدار a و b را چنان بیابید که رابطه داده شده تابع باشد.

$$R=\{(5,a^2-2a),(6,b^3-1),(7,-2),(5,3),(6,26)\}$$

📖 **مثال :** مقدار m را چنان بیابید که رابطه $f=\{(m^2-4,5),(m^2-4,m^2-11),(8+m,2)\}$ یک تابع باشد.

📖 **مثال :** مقدار m را چنان بیابید که مجموعه زیر نمایش دهنده یک تابع باشد.

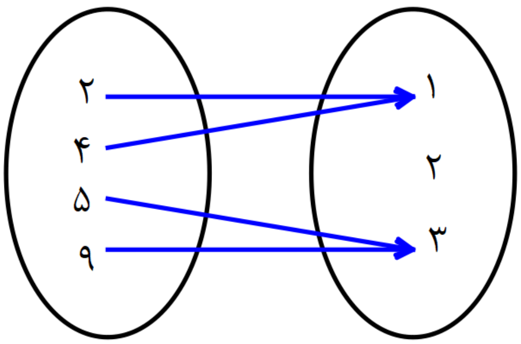
$$\left\{\left(3,m^2\right)\left(2,1\right),\left(-3,m\right),\left(-2,m\right),\left(3,m+2\right),\left(m,4\right)\right\}$$

📖 **مثال :** اگر رابطه $f=\left\{\left(1,-2\right),\left(m,5\right),\left(1,m^2-3m\right)\right\}$ تابع باشد، مقدار $f\left(2\right)$ چقدر است؟

نکته: مجموعه مولفه های اول هر تابع را **دامنه** و مجموعه مولفه های دوم آن را برد آن را **تابع** می نامیم.

مثال : تابعی مثال بزنید که دامنه آن ۴ عضو و برد آن ۲ عضو داشته باشد، ولی همدامنه آن ۳ عضو داشته باشد.

مثال : در نمودار تابع زیر دامنه و برد تابع را بنویسید.



$D_f =$

$R_f =$

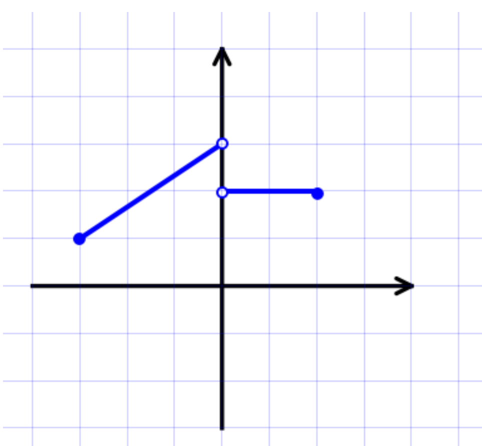
مثال : در تابع زیر دامنه وبرد تابع را بیابید.

$f=\{(۱,۴),(۲,۴),(۳,۷),(۴,۴)\}$

$D_f =$

$R_f =$

مثال : نمودار تابع f رسم شده است. دامنه و برد را بیابید.



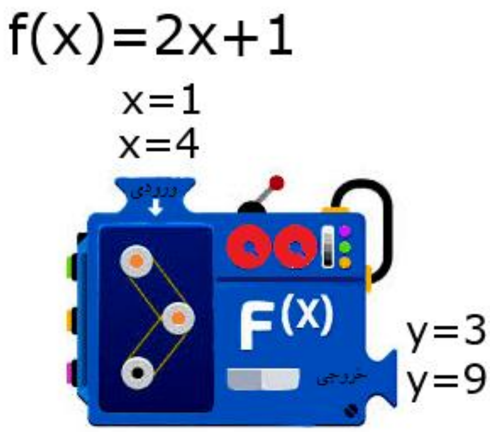
$D_f =$

$R_f =$

ضابطه یک تابع

رابطه ای بین مقادیر ورودی یک تابع (x) و خروجی یک تابع $(f(x))$ را ضابطه تابع میگوییم. تابع در واقع یک ماشین است که کارهای خواسته شده را روی اعضای دامنه انجام می دهد.

مثلاً در تابع $f(x)=۲x+۱$ یعنی اگر به تابع مقداری را بدهیم باید آن عدد را در **۲** ضرب کرده و با **۱** جمع کنیم.



گاهی این دستگاه برای ورودی های خود شرط تعیین میگند که به آنها تابع چند ضابطه ای میگوییم.

مثلاً $f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x<۲ \\ ۵x^{۲} & x\geq ۲ \end{cases}$ در این تابع اگر ورودی تابع عددی کوچکتر از **۲** باشند، دستگاه بالایی کار میکند و اگر عدد ورودی بزرگ تر مساوی **۲** باشد، دستگاه پایینی کار میکند.

منظور از $f(a)$ این است که به تابع عدد a را داده ایم و باید بعد از محاسبات خروجی را حساب کند.

در زوج مرتب ها منظور این است که مولفه اول a است، در همان زوج مرتب مولفه دوم را بیابید.

مثال : اگر $f=\{(۵,۱),(۳,-۲)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,-۲),(-۲,۱),(۲,۵)\}$ باشد مقادیر زیر را بیابید.

الف) $f(g(g(۱)))$

ب) $\dfrac{g(۵)+۲g(۱)}{۳-g(۳)}$

مثال : اگر $f(x)=x^{۳}-۲ax^{۲}+b+۳$ و $f(۰)=۱$ و $f(-۱)=۴$ باشد مقادیر a و b را بیابید.

تابع همانی : اگر دامنه و برد یک تابع با هم برابر باشند و هر عضو دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی میگوییم. ◆نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم است.

مثال : تابع $f(x)=-۳$ را در نظر بگیرید.

الف) مقادیر $f(۲)$ ، $f(-۵)$ ، $f(\sqrt{۵})$ ،$f(\frac{۳}{۴})$ را به‌دست آورید.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید.

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنهٔ آن بازه $[-۲,۵]$ باشد نیز رسم کنید.

مثال : اگر تابع $f=\{(۴,۳m-۲),(n-۱,۳)\}$ همانی باشد، حاصل $\frac{m}{n}$ را بیابید.

مثال : تابعی مثال بزنید که :

الف) دامنه آن نامتناهی ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ب) دامنه وبرد آن نامتناهی باشند.

پ) بردآن فقط شامل یک عضو باشد.

ت) دامنه آن اعداد طبیعی فرد و برد آن اعداد اول باشد.

مثال : اگر $f(x)=(a-b)x+a+b$ یک تابع همانی باشد، $۳a+۲b$ کدام است؟

مثال : اگر f تابع همانی و $f(۳-a)+f(۲)=۶$ باشد، مقدار $f(۱-a)$ کدام است؟

📖 **مثال :** دامنه ی تابع $g(x)=\frac{x-۱}{x^{۲}-۹}$ را تعیین کرده وسپس حاصل عبارت $\frac{f(x)+g(۲)}{f(۳)}$ را بدست آورید.

📖 **مثال :** علی در هر دقیقه پیاده روی مسافت $۰/۵$ کیلومتر را طی میکند. اگر مسافتی که علی در t دقیقه طی میکند با $f(t)$ نمایش دهی نمایش جبری این تابع را بنویسید.

📖 **مثال :** اگر دامنه تابع $f(x)=۳x-۲$ بازه ی $[۴,+\infty)$ باشد، برد آن را بیابید.

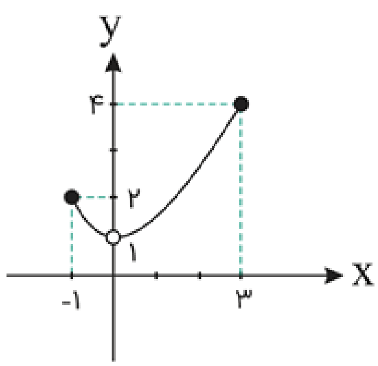
📖 **مثال :** دامنه تابع $f(x)=\frac{-۱}{۳}x+۲$ به صورت $(۲,۵)$ باشد، برد آن را بیابید.

📖 **مثال :** اگر برد تابع $f(x)=۲x+۱$ به صورت $[۷,۱۳)$ باشد، دامنه آن را بیابید.

مثال : با توجه به جدول روبرو مجموعه های B, A را بیابید.

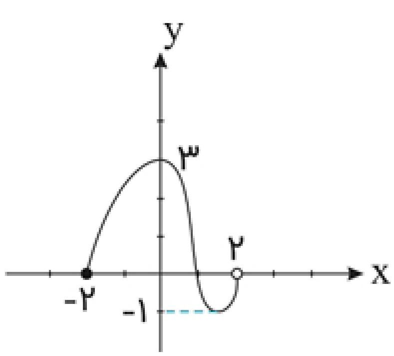
تابع	$f(x)=-۳x-۱$	$g(x)=-۳x+۱$
دامنه	A	$x \geq \frac{-۱}{۳}$
برد	$\{۰,۱,۲\}$	B

مثال : اگر $f=\{(-۱,۲m+۱),(۲,۳-m),(-۶,۲),(-m,m-۱)\}$ **و** $f(۲)-f(-۶)+۲f(-۱)=۹$ باشد، برد تابع f را بیابید.



مثال : برد تابع روبرو را بنویسید.

مثال : نمودار تابع f به صورت مقابل است. چند عدد صحیح هم در دامنه و هم در برد تابع قرار دارند؟



تابع ثابت : تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، معادله تابع ثابت $f(x)=k$ میشود. یعنی تمام خروجی ها با هم برابرند.

◆نمودار تابع ثابت خطی موازی محور طولهاست.

📖 **مثال** : اگر تابع $f=\{(۱,۴),(۳,b-۱),(۴,a-۲)\}$ تابع ثابت باشد، مقدار $۲a-b$ را بیابید.

📖 **مثال** :اگر جدول روبرو مربوط به یک تابع ثابت باشد، مقادیر d,c,b را بیابید.

x	۳	a	۵	۹
$f(x)$	۲	$\sqrt{b}$	c	$\sqrt[۳]{d}$

📖 **مثال** :اگر f همانی و g ثابت باشد، و داشته باشیم $g(۱)=۲$ مقدار $f(g(۲))+۲g(f(-۵))$ را بیابید.

تابع چند ضابطه ای: قبلا مفهوم تابع چند ضابطه ای را شرح دادیم و گفتیم تابعهایی هستند که برای ورودی های خود شرط تعیین می کنند و باید بررسی کرد عدد داده شده را در کدام ضابطه قرار دهیم.

نکته مهم در رابطه های دو ضابطه ای این است که بین شرط ها نباید اشتراک وجود داشته باشد. و در صورتی که در عددی نشترک باشند این عدد مشترک باید در هر دو ضابطه جواب یکسانی بدهد.

مثال : اگر ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x+a, x\geq 1 \\ -x-2, x\leq 1 \end{cases}$ یک تابع باشد a را بیابید .

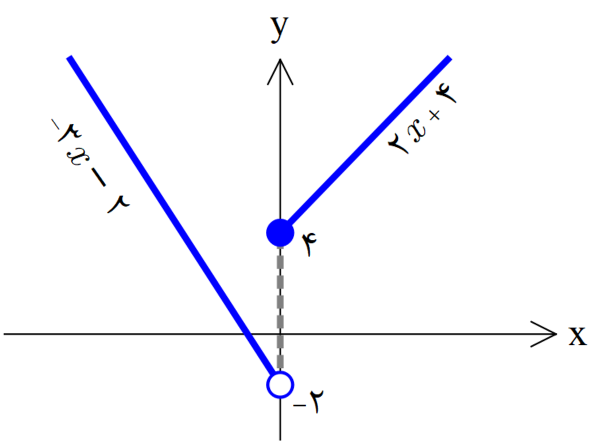
مثال : اگر $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\geq 0 \\ 3x-2a & x\leq 0 \end{cases}$ تابع باشد، مقدار $f(f(-1))$ را بیابید.

مثال : اگر $f(x)=\begin{cases} 2ax+b & x\geq 3 \\ ax^2+bx+1 & 0\leq x\leq 3 \\ -x+b+2a & x\leq 0 \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار b,a را بیابید.

📖 **مثال :** اگر $f(x)=\begin{cases} ۳x+۲b & x\geq -۱ \\ x^{۲}+a & x\leq -۱ \end{cases}$ یک تابع باشد، مقدار b,a را بیابید.

رسم تابع های چند ضابطه ای

برای رسم تابع های چند ضابطه ای هر قسمت را جداگانه رسم کرده و با توجه به شرط داده شده قسمت های اضافی را پاک می کنیم. یعنی برای هر ضابطه فقط شرط داده شده باقی بماند.



به عنوان مثال تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x\geq ۰ \\ -۳x-۲ & x< ۰ \end{cases}$ را رسم کرده ایم.

📖 **مثال :** نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x> ۲ \\ ۳x-۱ & x\leq ۰ \end{cases}$ را رسم کنید.

مثال : نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-5 & x>2 \\ 1 & -3<x\leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x\leq -3 \end{cases}$ را رسم کرده ودامنه و برد آن را مشخص کنید .

مثال : دامنه و برد تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\geq -1 \\ x^2+2x & x<-1 \end{cases}$$

مثال : نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} 1-x & x<-2 \\ x^2 & x\geq -2 \end{cases}$ را رسم کنید.

مثال : نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ x-۱ & x<۰ \end{cases}$$

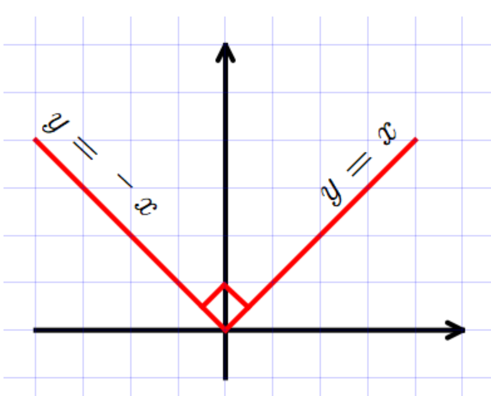
ب) به کمک ضابطه ی تابع بالا($f(x)$) مقادیر زیر را بیابید.

$f\left(۱-\sqrt{۲}\right)$ $\qquad\qquad$ $f\left(f(۱۳۹۹)\right)$

تابع قدر مطلق

تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن مقدار نظیر کند، تابع قدرمطلق نام دارد.

تابع قدر مطلق را به صورت $f(x)=|x|$ نمایش میدهیم و برد آن تمام مقادیر نامنفی است. زیرا جواب قدر مطلق هیچگاه منفی نیست. تابع قدر مطلق با دامنه R رسم شده است.



برای رسم توابع قدرمطلق از قوانین رسم به کمک انتقال استفاده میکنیم.

رسم با انتقال

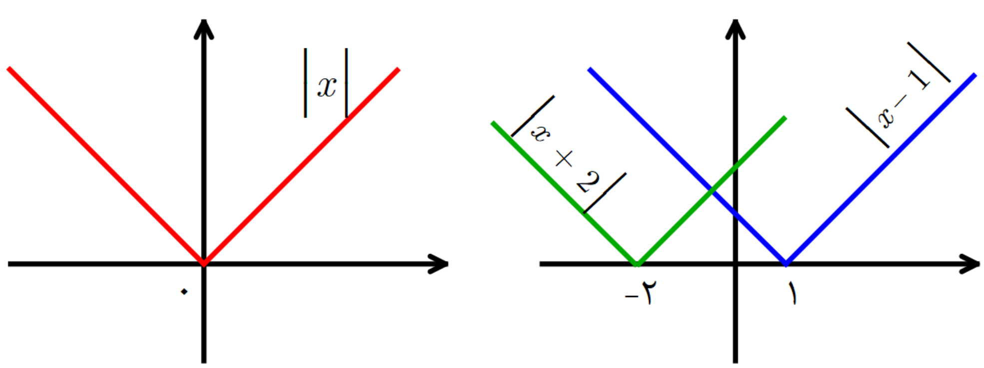
فرض کنید تابع $y=f(x)$ را داریم و k عددی مثبت است. برای رسم تابع $y=f(x)+k$ باید تابع $y=f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت بالا منتقل کنیم و برای رسم $y=f(x)-k$ باید تابع $y=f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت پایین بیاوریم.

پس تغییرات تابع جدید فقط روی عرض نقاط تابع قبلی است و این تغییرات موافق با چیزی است که سوال داده است. یعنی وقتی در سوالی گفته میشود $f(x)+2$ ما هم باید همان ۲+ را روی عرض ها اعمال کنیم.

فرض کنید تابع $y=f(x)$ را داریم و k عددی مثبت است. برای رسم تابع $y=f(x+k)$ باید تابع $y=f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت چپ منتقل کنیم و برای رسم $y=f(x-k)$ باید تابع $y=f(x)$ را به اندازه k واحد به سمت راست بیاوریم. در واقع همیشه با y موافق هستیم.

پس تغییرات تابع جدید فقط روی طول نقاط تابع قبلی است و این تغییرات مخالف با چیزی است که سوال داده است. یعنی وقتی در سوالی گفته میشود $f(x+2)$ ما باید ۲− را روی طول ها اعمال کنیم.در واقع همیشه با x لج میکنیم.

مثلا میخواهم تابع $g(x)=|x-1|$ را از روی تابع $f(x)=|x|$ رسم کنیم برای این کار باید تابع را یک واحد به سمت راست ببریم.



مثال : توابع خواسته شده را رسم کنید.

الف) $f(x)=|x+3|$ ب) $g(x)=|x|+2$

مثال : تابع دو ضابطه ای روبرو را رسم کنید.

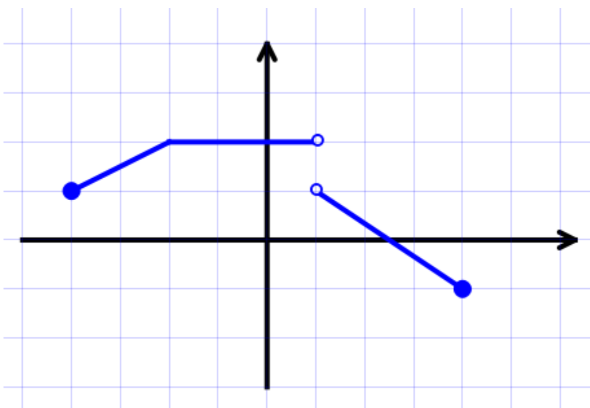
$$f(x)=\begin{cases}|x-2| & x>0\\ -x^2 & x\le 0\end{cases}$$

مثال : به وسیله تابع $y=x^2$ نمودار تابع $y=(x-2)^2+1$ را رسم کنید.

نوشتن ضابطه تابع از روی نمودار

در این مسائل باید هر قسمت را جداگانه در نظر بگیریم. مثلا اگر یه پاره خط یا خط راست داریم باید دو نقطه از آن را پیدا کرده . معادله خط مورد نظر را بنویسیم. سپس محدوده خط مورد نظر را به عنوان شرط جلوی معادله قرار دهیم.

مثال : در شکل روبرو تابع f رسم شده است. ضابطه تابع را بنویسید.



مثال : نمودار تابع f رسم شده است. مقادیر $f(-۲), f(۳), f(\frac{۱}{۲})$ را محاسبه کنید.