فصل ۳

استدلال و اثبات در هندسه

ادْعُ إلَىٰ سَبیلِ رَبِّکَ بِالحِکمَةِ وَ المَوعِظَةِ الحَسَنَةِ وَ جادِلهُم بِالَّتی هِیَ أحسَنُ ...

با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و مناظره کن! (سورهٔ نحل، آیهٔ ۱۲۵)

ریزش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می‌آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای برفی که شش‌ضلعی هستند، علی‌رغم اینکه میلیاردها دانه‌اند، اما هر کدام شکل منحصر به فرد را دارند و هیچ دو تایی از آنها شبیه هم نیستند.

فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌های داده شده پاسخ دهید.

۱ـ امیر و محسن برای دیدن یک مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت: «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقهٔ من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید: «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که: «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام تیم مورد علاقه من باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است درست (~~معتبر~~) است؟ چرا؟ نه‌خیر - چون احتمال دارد نبازد.

۲ـ عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

مساحت $۴ \times ۸ = ۳۲$

مساحت $۶ \times ۶ = ۳۶$

$۳۶ > ۳۲$

۳ـ دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به‌نظر شما کدام معتبرتر و قابل اطمینان‌تر هستند. دلیل فعالیت ۲

«استدلال» دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته‌های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

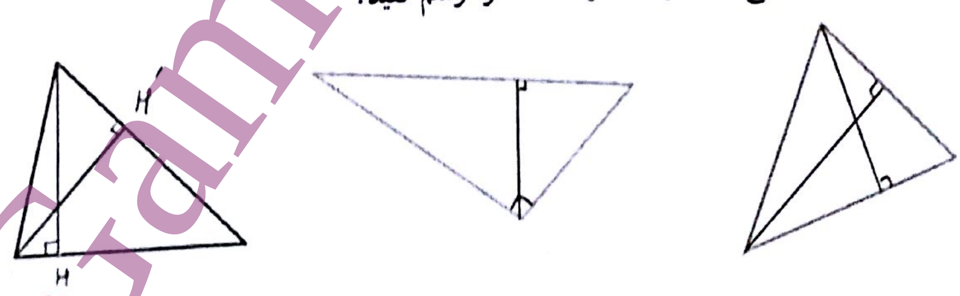
همان‌گونه که در موارد بالا مشاهده کردید حتی در بسیاری کارهای روزمره نیز نیاز به استدلال کردن پیدا می‌کنیم. برای استدلال کردن راه‌های متفاوتی وجود دارد که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به‌درستی نتیجه بدهد اثبات می‌گوییم.

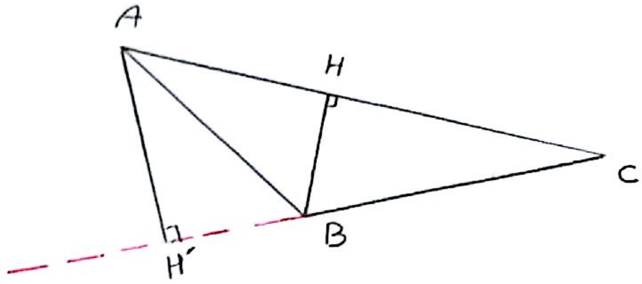
کار در کلاس

۱ـ مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به آنچه قبلاً اتفاق افتاده نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نمی‌باشد.

- من هر وقت درس می‌خونم معلم از من درس نمی‌پرسه

۲ـ دو تا از ارتفاع‌های هر یک از مثلث‌ها را رسم کنید.



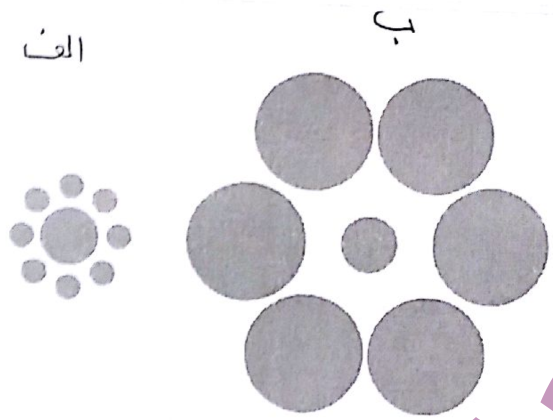


آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث می‌باشد؟ نه خیر

یک مثال بزنید که نتیجهٔ بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است. استدلالی که او استفاده کرده است مشابه استدلال کدام یک از دو قسمت فعالیت قبل است؟ قسمت ۱

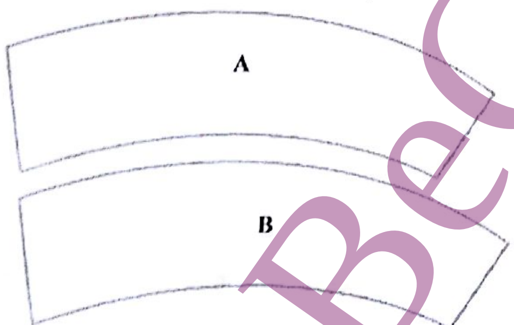
فعالیت



۱ــ کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته‌اند، بزرگ‌ترند؟ الف

الف) با مشاهده تشخیص دهید. الف

ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر اندازهٔ آنها را با هم مقایسه کنید. باهم برابرند



۲ــ قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از یک شیرینی موردعلاقه شما هستند. کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعهٔ بزرگ‌تر کدام است؟) B

با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟ نه خیر

۳ــ آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟ نه خیر - چون احتمال خطا وجود دارد.

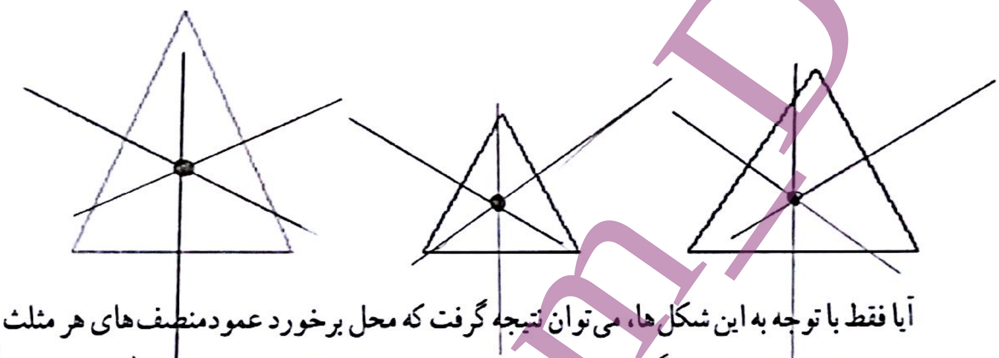
هرچند معمولاً در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه به‌کار بردن شکل‌ها و ترسیم آنها و استفاده از شهود کمک زیادی به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائهٔ حدس‌های درست می‌کند اما باید توجه داشته باشیم که هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان بگوییم که تشخیص ما حتماً درست بوده است.

کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید با یکدیگر بحث کنید. *

تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟ نه خیر . با رسم مثلث منفرجه الزاویه

۲ــ نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری قصد بلند کردن وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

نیما : زیرا هفتهٔ پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این‌حال نتوانست وزنهٔ ۹۰کیلویی را بلند کند.

پژمان : امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال‌ها بحث کنید. نیما

۳ــ چون من تا به‌حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد. * بحث شود

این استدلال مشابه کدام‌یک از استدلال‌های زیر است؟

الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

ب) همهٔ فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،

پس فیلم جنگی بوده است.

ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچهٔ خالهٔ کوچکم هم دختر خواهد بود.

د) چون همهٔ قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

۴ــ دو نفر دربارهٔ چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که : علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

اولی : در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

دومی : چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید. دومی ـ چون استدلالش قابل اعتماد است.

حسین < علی

علی > باقر > حسن

حسین > حسن

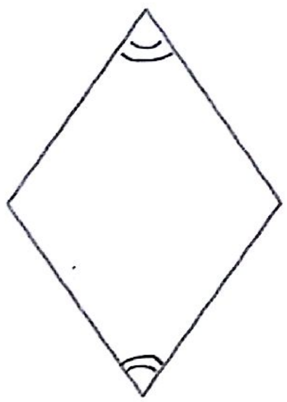
اطلاعات داده شدن مسئله را فرض و خواسته مسئله را حکم می‌نامند.

درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

فعالیت

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا بیان مثال‌های متعدد و همچنین اندازه گرفتن برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و درست کمک گرفت و با استدلال کردن درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعات داده شده مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواستهٔ مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱ــ به گفت‌وگوی زیر توجه کنید.

مهرداد : آیا زاویه‌های روبه‌رو به‌هم، در هر لوزی با هم برابرند؟

سعید : بله، چون ما از قبل می‌دانستیم که در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی هستند. لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را به شکل زیر کامل کنید.

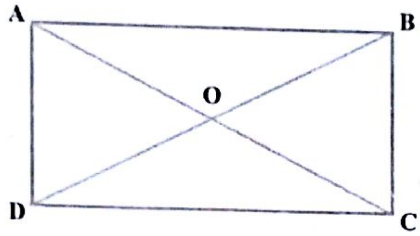
فرض	شکل لوزی است
حکم	زاویه‌های روبه‌رو برابرند

استدلال :

لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است
در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو برابرند
$\Rightarrow$ در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابرند

۲ــ اولین اقدامی که برای اثبات یک مسئله انجام می‌دهیم، تشخیص فرض و حکم و حقایق مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئلهٔ زیر فرض، حکم و حقایق از قبل ثابت

شده یا دانسته را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید.



فرض	ABCD مستطیل است
حکم	قطرهای مستطیل، مساوی هستند

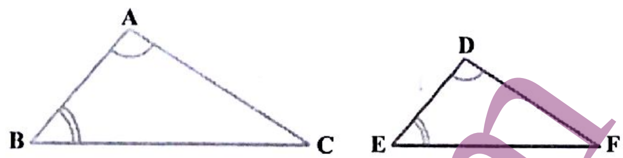
فرض: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB = CD \quad\quad AD = BC \\ AB \parallel CD \quad\quad AD \parallel BC \end{cases}$

حکم: $AC = BD$

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید.

الف) در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده‌اند. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابرند.



فرض: $\hat{A} = \hat{D}$ ، $\hat{B} = \hat{E}$

حکم: $\hat{C} = \hat{F}$

ب) اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است.

ج) اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH برابر باشد ثابت کنید مجموع دو زاویهٔ دیگر ABCD با مجموع دو زاویهٔ دیگر EFGH برابرند.

فرض | $\hat{A} + \hat{B} = \hat{E} + \hat{F}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H} = 360^\circ$

حکم: $\hat{C} + \hat{D} = \hat{G} + \hat{H}$

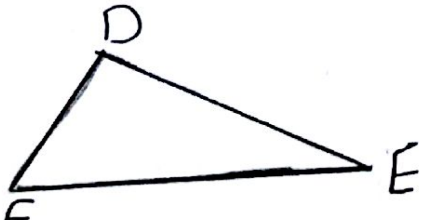
فعالیت

۱ـ در مسئله زیر توضیح دهید چرا استدلال نوشته شده درست نیست.

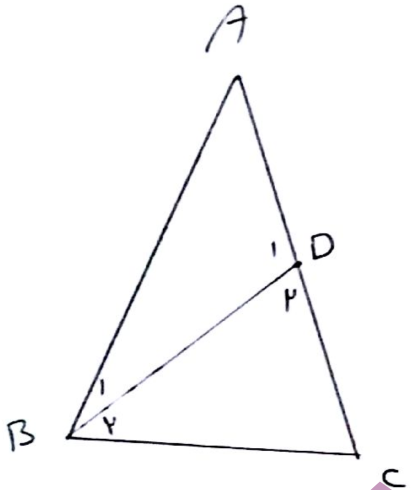
ب

فرض $\{ \hat{D} > \hat{E}$

حکم: $FE > FD$



جواب سؤال ۱ صفحه ۳۹



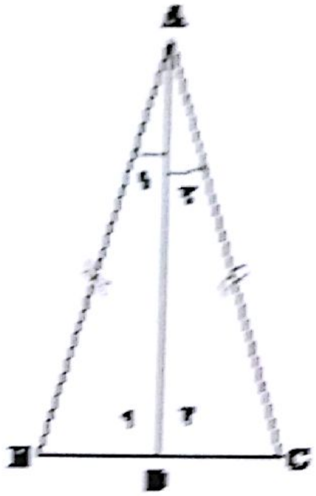
فرض $\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ AB = AC \end{cases}$

حکم: $AD = DC$

دو مثلث AB_1D_1 و CB_2D_2 همنهشت نمی‌باشند چراکه تنها دو جزء آنها $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ و BD ضلع مشترک می‌باشد درحالیکه برای همنهشتی به یکی از سه حالت نیاز داریم.

(ض ض ض)، (ض ز ض)، (ز ض ز)

تذکر: در مثلث متساوی‌الساقین تنها نیمساز زاویه بین دو ساق می‌تواند میانه، ارتفاع، عمود منصف باشد.



۱ــ در مسئلهٔ زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید:

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و AD نیمساز زاویهٔ A است.

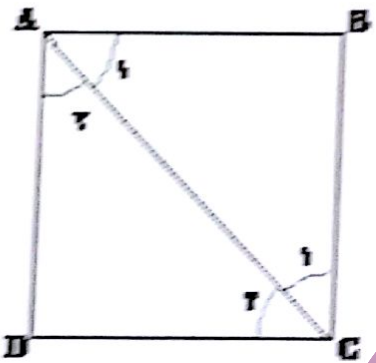
ثابت کنید AD میانه نیز هست:

فرض: AB ... و $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

حکم: BD=DC

استدلال: چون AD نیمساز زاویه A است، پس: $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{D}_1=\hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث‌های ADB و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) با هم برابر است، پس اجزای متناظر آنها برابر است. در نتیجه: BD=DC

استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز وارد بر قاعده، میانه هم هست. آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانهٔ ضلع مقابل آن است؟ خیر به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد. نه خیر



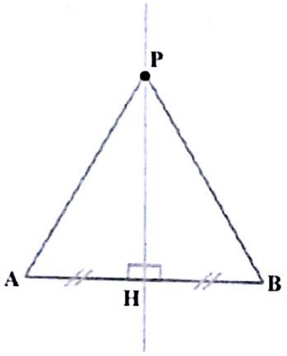
۲ــ با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع هم‌نهشت است، زوایای متناظر با هم برابر است؛ بنابراین $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است.

آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟ بله

۳ــ به‌نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به‌کار برده‌ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می‌توان درستی نتیجه را به همهٔ عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

۴-



P در شکل مقابل، روی عمودمنصف پاره‌خط در نظر گرفتیم و به دو سر پاره‌خط وصل کردیم و چون دو مثلث $\overset{\Delta}{AHP}$ و $\overset{\Delta}{BHP}$ به حالت (ض ز ض) همنهشت هستند نتیجه گرفتیم پاره‌خط‌های PA و PB با هم برابرند.

لذا فاصلهٔ نقطهٔ P که روی عمودمنصف پاره‌خط AB است از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجهٔ بالا برای «هر» نقطهٔ روی عمودمنصف برقرار است، کافی است؟ بله - برای اینکه مکان نقطهٔ P را می‌توانیم تعمیم دهیم و همین ویژگی را اثبات کنیم.

در واقع عمودمنصف مکان هندسی نقاطی است که از دو سر پاره‌خط به یک اندازه هستند.

کار در کلاس

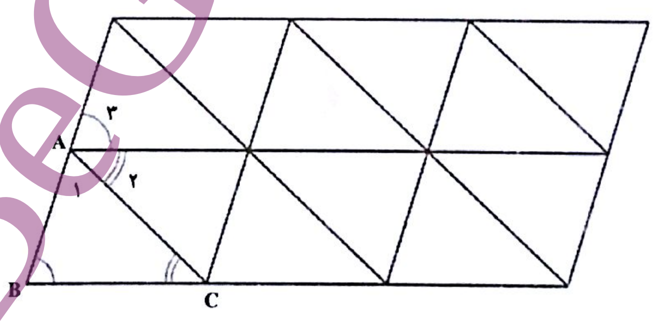
به استدلال‌هایی که چهار دانش آموز برای مسئله زیر آورده‌اند دقت کنید.

مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث $180°$ است.

استدلال حامد : یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درنظر می‌گیریم. چون سه زاویه دارد و هر زاویه $60°$ است پس مجموع زاویه‌های مثلث $180°$ است.

استدلال حسین : حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همهٔ آنها مجموع زوایای داخلی برابر $180°$ است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث $180°$ است.

استدلال مهدی : مهدی گفت با این مسئله در سال گذشته آشنا شدیم و شکلی شبیه آنچه در کتاب سال قبل آمده بود کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به‌صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به‌صورت زیر آورد.



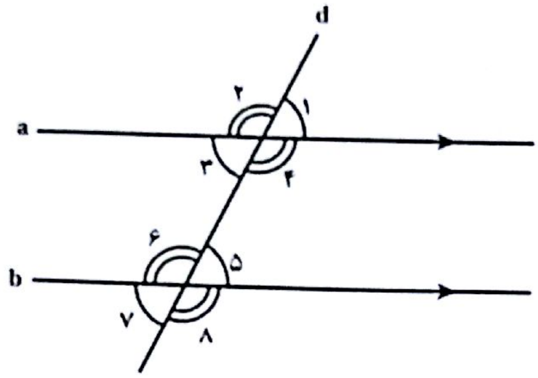
$$\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_1+\hat{A}_3+\hat{A}_2=180°$$

۱- استدلال حامد استقرایی است پس نمی‌توان تعمیم به کل داد.

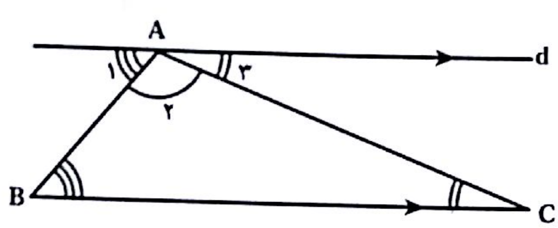
۲- استدلال حسین استقرایی است " " "

۳- استدلال مهدی " " " " " " " "

۴- استدلال رضا استنتاجی است و قابل تعمیم می‌باشد.



استدلال رضا : رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»



حال مثلثی دلخواه مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ را درنظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویهٔ تشکیل شده در رأس A را با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویهٔ $A_۲$ همان زاویهٔ A در مثلث است و با درنظر گرفتن AB به‌عنوان مورب داریم $\hat{B} = \hat{A}_۱$ و با درنظر گرفتن AC به‌عنوان مورب داریم $\hat{C} = \hat{A}_۳$ پس با جای‌گذاری $\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۳$ به‌ترتیب به جای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خواهیم داشت : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳ = ۱۸۰^\circ$

استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به‌صورت مرتب و خلاصه بدین‌صورت نوشت :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AB \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۱ \\ \left.\begin{array}{r} d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳ = ۱۸۰^\circ$$

دربارهٔ معتبربودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید. استدلال رضا

فعالیت

مسئله : حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به‌نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

در یک تساوی می‌توان مقادیر مساوی را از دو طرف ساده کرد.

پول حمید + پول بهرام = ۵۰۰۰

پول سعید + پول بهرام = ۵۰۰۰

پول حمید + ~~پول بهرام~~ = پول سعید + ~~پول بهرام~~ ⇐ پول حمید = پول سعید

سعید $=A$
بهرام $=B$
حمید $=C$

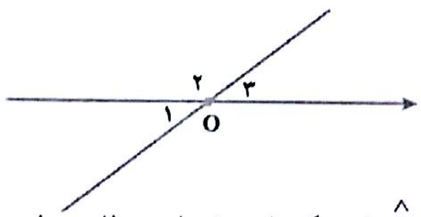
$$\begin{cases} A+C=5000 \\ B+C=5000 \end{cases} \Rightarrow A+C=B+C \Rightarrow A=B$$

پس پول سعید و حمید برابر است.

بین استدلالی که برای مسئله بالا و مسئلهٔ بعدی هست چه شباهتی می‌بینید؟

مسئله : زوایای متقابل به رأس با هم برابرند.

فرض کنیم O_1 و O_3 مانند شکل زیر متقابل به رأس باشند. داریم :



$$\left.\begin{aligned} \hat{O}_1+\hat{O}_2 &= 180^\circ \\ \hat{O}_3+\hat{O}_2 &= 180^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1+\hat{O}_2=\hat{O}_3+\hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_3$$

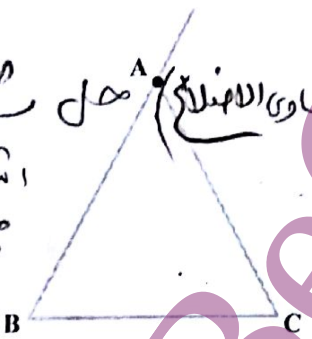
اگر بخواهید هر کدام از اندازه زاویه‌های $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ و $\hat{O}_3$ را به یکی از پول‌های عطا و عنایت و هدایت متناظر کنید، چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

$\hat{O}_2 =$ پول بهرام

$\hat{O}_1 =$ پول حمید و $\hat{O}_3 =$ پول سعید

تمرین

۱ــ آیا اثبات ارائه شده برای مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. نه خیر مسئله در شرایط خاص (مثلث متساوی‌الاضلاع) حل شده است.



مسئله : در هر مثلث، اندازهٔ زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن.

اثبات : مثلث متساوی‌الاضلاع $\overset{\triangle}{ABC}$ را درنظر می‌گیریم.

می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر کدام 60° هستند. بنابراین

اثبات

فرض | $\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

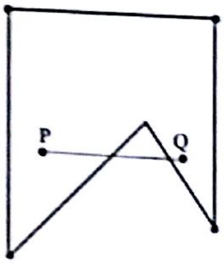
حکم : $\hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$

$$\begin{cases} \hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \\ \hat{A}_2+\hat{A}_1=180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_1+\hat{A}_2 \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$

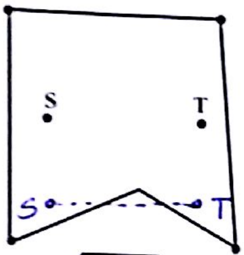
$$\hat{A}_1+\hat{A}_2=180 \rightarrow \hat{A}_2=180-\hat{A}_1=180-60=120$$

$$\hat{B}+\hat{C}=60+60=120 \qquad \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$

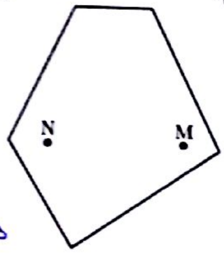
۲ــ در سال گذشته با تعریف چند ضلعی‌های محدب آشنا شده‌اید. تعریف چندضلعی محدب را می‌توان بدین صورت آورد. «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواهِ درون آن چندضلعی را به‌هم وصل می‌کند، تماماً درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» و چند ضلعی که محدب نباشد مقعر است. آیا تشخیص‌های داده شده توسط دو دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند با توجه به تعریف بالا درست می‌باشند؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد؛ اما پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد. درست است



مهدیه : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد. درست نیست. چون اگر دو نقطه T و S را در قسمت پایین شکل قرار دهیم پاره‌خط ST در آن قرار نمی‌گیرد.



مریم : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد. درست است.

۳ـ آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{ \begin{array}{l} \text{هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.} \\ \text{چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.} \end{array} \right.$ ⇐ ABCD مستطیل است. ✗ همه متوازی الاضلاع‌ها مستطیل نیستند اما همه‌ی مستطیل‌ها متوازی الاضلاع هستند

ب) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{ABCD مربع نیست.} \end{array} \right.$ ⇐ همهٔ ضلع‌های ABCD، با هم برابر نیستند. ✗ امکان دارد لوزی شد.

ج) $\left\{ \begin{array}{l} \text{در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.} \\ \text{در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند.} \end{array} \right.$ ⇐ ABCD مربع نیست. ✓

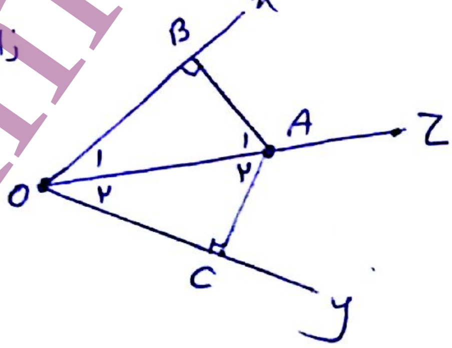
۴ـ ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری : فاصلهٔ یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود.

راهنمایی : یک زاویهٔ دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصلهٔ این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این نتیجه برای همهٔ نقاط روی نیمساز درست است را بیان کنید.

فرض | $x\hat{O}y$ زاویه دلخواه، OZ نیمساز

حکم: $AB = AC$



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OA \\ \hat{B} = \hat{C} = 90 \end{array} \right. \xrightarrow[\text{زاویه}]{\text{وتر و یک}} O\hat{A}B \cong O\hat{A}C$$

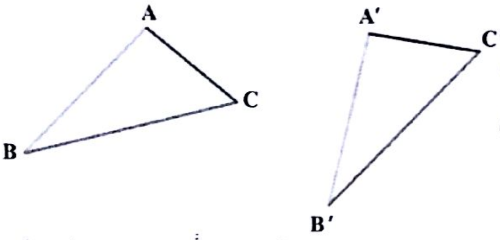
بنا به تساوی اجزای متناظر $AC = AB$ است

چون این استدلال برای هر نقطه روی نیمساز قابل تعمیم است.

درس سوم: همنهشتی مثلث‌ها

یادآوری

با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم. مثلاً حالت همنهشتی(ض ز ض) را، این گونه نمایش می‌دهیم :



$AC = A'C'$
$AB = A'B'$
$\hat{A} = \hat{A'}$
$\Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

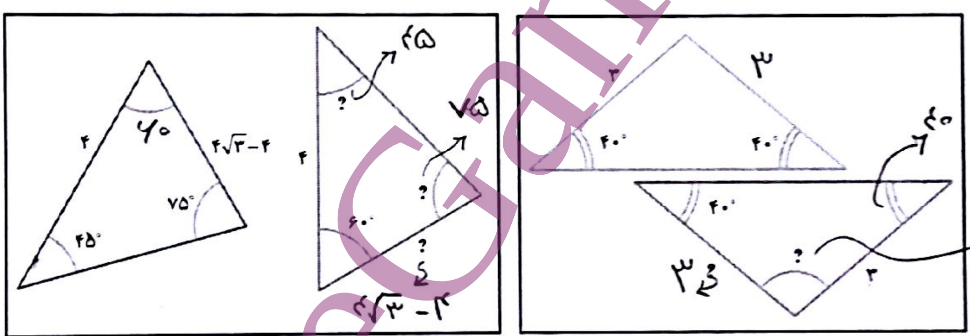
برای یادآوری بیشتر دو حالت دیگر همنهشتی مثلث‌ها و دو حالت همنهشتی ویژهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

فعالیت

۱ــ در شکل‌های زیر، جفت مثلث‌های ترسیم شده در یک کادر، با یکدیگر همنهشتند. اندازهٔ پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید.

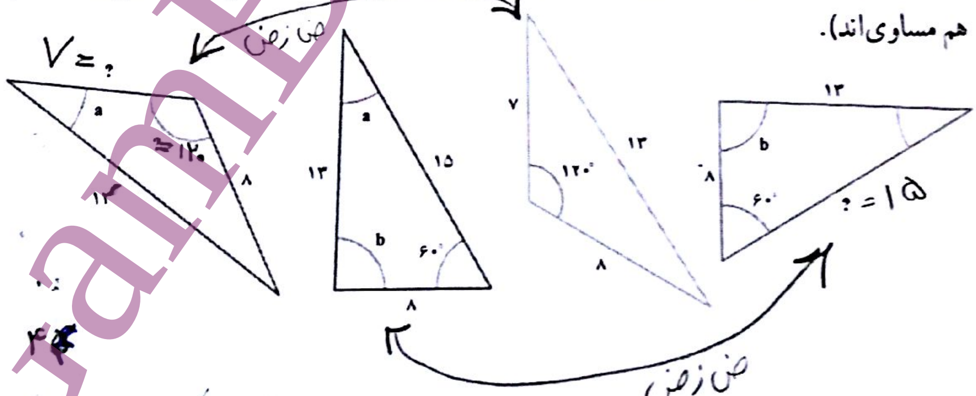
$۷۵° + ۴۵° = ۱۲۰°$
$۱۸۰° - ۱۲۰° = ۶۰°$

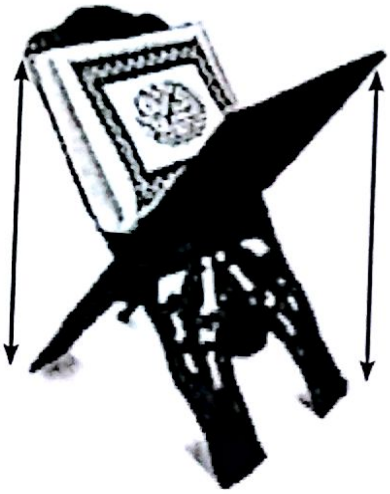
$۴۰° + ۴۰° = ۸۰°$
$۱۸۰° - ۸۰° = ۱۰۰°$



۲ــ در شکل زیر چهار مثلث رسم شده‌اند که دو به دو با یکدیگر همنهشتند.

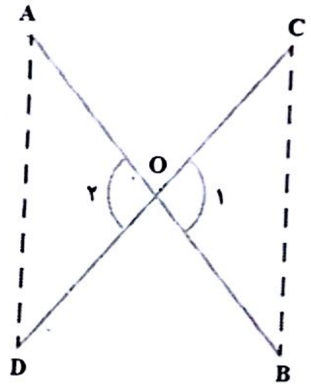
اندازه‌های مجهول را روی آنها تعیین نمایید. (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده‌اند، با هم مساوی‌اند).





مثال : با رحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایهٔ چوبی آن از وسط هم گذشته‌اند. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصلهٔ دو لبهٔ کناری آن، در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که : OA=OB و OC=OD و حکم این است که : AD=BC. روشن است که زوایای $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_2$ برابرند (چرا؟) پس مثلث‌های OAD و OBC همنهشتند و از آنجا درستی حکم بدست می‌آید :

چون متقابل به رأس هستند

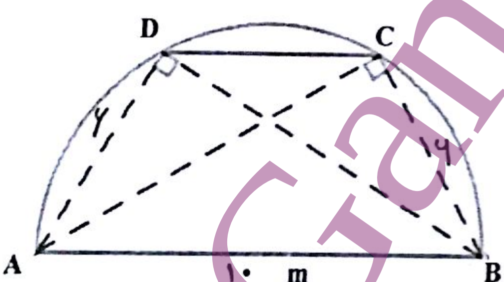


$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ OC=OD \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta OBC \cong \Delta OAD \Rightarrow AD=BC$$

(متقابل به رأس)

فعالیت

در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره هست که بچه‌ها برای بازی از روی پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصلهٔ ابتدای پل (نقطهٔ A) از انتهای آن (نقطهٔ B) ده متر است و اکنون ترانه روی پلهٔ C که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد نشسته است (BC=۶) و شهرزاد روی پلهٔ D که از ابتدای پل همین قدر فاصله دارد، نشسته است و آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل نیز برابر باشد، یعنی AC=BD.



$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \rightarrow AC = \sqrt{64} = 8$$
$$BD = 8$$

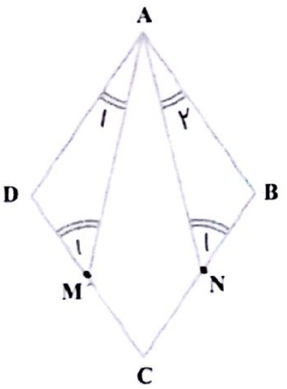
چون زاویه محاطی روبه‌رو به قطر ۹۰ درجه است

۱ــ چرا زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ در شکل، قائمه‌اند؟ طول‌های AC و BD را به کمک قضیهٔ فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید : AC=BD

۲ــ به کمک همنهشتی مثلث‌های ACB و ADB همین نتیجه را ثابت کنید.

$$\begin{cases} BC = AD \\ AB = AB \end{cases} \xrightarrow{\text{وض}} A\overset{\triangle}{B}C \cong A\overset{\triangle}{B}D \xrightarrow[\text{اجزای متناظر}]{\text{بنابه تساوی}} AC = BD$$

فعالیت



در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند.

۱ــ با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید :

AD=AB= ..DC.. = ..BC..... $\hat{A}+\hat{B}$ = ..180°..

$\hat{A}$ = ..$\hat{C}$........ , $\hat{B}$ = ..$\hat{D}$....... $\hat{C}+\hat{B}$ = ..180°..

آیا می‌توانید تساوی‌های دیگری هم بنویسید؟

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} \Rightarrow \\ \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB} \\ \overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow \\ \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC} \end{cases}$$

۲ــ با کامل کردن تساوی‌های زیر نشان دهید : BN=DM

DC=BC ⟹ $\frac{1}{2}$DC = ..$\frac{1}{2}$BC.. ⟹ ..DM.. = ..BN..

۳ــ با توجه به نتیجهٔ قسمت دوم و تساوی‌های قسمت اول ثابت کنید مثلث‌های ABN و ADM همنهشتند. از آنجا چگونه می‌توانید تساوی پاره‌خط‌های AM و AN را نتیجه بگیرید؟ زاویه‌های برابر در دو مثلث ABN و ADM را نیز مشخص کنید.

$$\begin{cases} AD = AB \\ \hat{D} = \hat{B} \\ DM = BN \end{cases} \xrightarrow{\text{ض زض}} \overset{\triangle}{ADM} \cong \overset{\triangle}{ABN}$$

$$\begin{cases} \hat{N}_1 = \hat{M}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases}$$

کار در کلاس

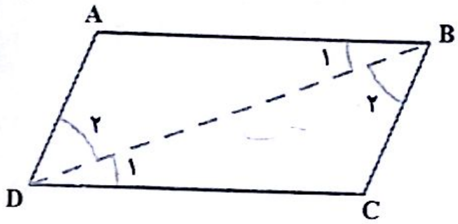
می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابرند.
مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید. حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله نظرات چند دانش‌آموز را ببینید و با توجه به آنها به سؤالات پاسخ دهید.

شهرزاد : معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی‌اند! با چشم هم می‌توان دید!

آفرین : در تعریف متوازی‌الاضلاع برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

- آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟ نه خیر چون احتمال خطا هست
- به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید، آیا برابری اضلاع مقابل، در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟ نه خیر چون در اندازه‌گیری هم احتمال خطا وجود دارد. بله

ترانه : به نظر من باید دو مثلث همنهشت بیابیم و با اثبات همنهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم. امّا در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطرها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.



در این دو مثلث، ضلع‌های روبه‌روی AD و BC، روبه‌رو به کدام زاویه‌ها هستند؟ چرا این دو زاویه برابرند؟

اثبات را به‌صورت زیر کامل کنید :

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD, \quad \text{مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AD \parallel BC \quad \text{و} \quad \text{مورب } BD \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ BD = BD\ (\text{ضلع مشترک}) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta A\hat{B}D \cong \Delta BC\hat{D} \quad (\text{ز ض ز})$$

$$\Rightarrow AD = BC, AB = CD$$

- چرا برای اثبات همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانستیم روی حالت‌های (ض ز ض) و (ض ض ض) حساب کنیم؟ چون هدف اثبات حکم است و در فرض دو ضلع برابر نداریم.
- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم، همین نتیجه را با رسم قطر AC به‌دست آوریم؟ بله
- از همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع، به‌جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجهٔ دیگری هم در مورد زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. این نتیجه را بنویسید :
- در هر متوازی‌الاضلاع زوایای روبه‌رو، مساوی‌اند.

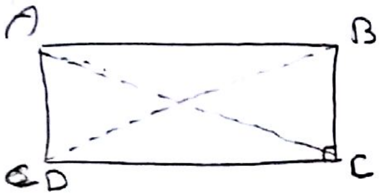
پاسخ تمرینات صفحه ۴۹

۱-

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} A\overset{\triangle}{O}B \cong C\overset{\triangle}{O}D$$

بنا به تساوی اجزای متناظر $OB = OD$ و $OA = OC$

۲-



$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \hat{D} = \hat{C} \\ \overline{DC} = \overline{DC} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} B\overset{\triangle}{C}D \cong A\overset{\triangle}{D}C$$

بنا به تساوی اجزای متناظر $\overline{AC} = \overline{BD}$

۳-

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \overline{AM} = \overline{AM} \\ \overline{BM} = \overline{MC} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A\overset{\triangle}{B}M \cong A\overset{\triangle}{M}C$$

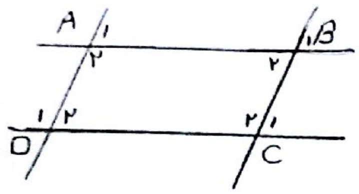
بنا به تساوی اجزای متناظر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Longrightarrow$ AM نیمساز است

$\begin{cases} \overline{BM} = \overline{MC} \\ \overline{AB} = \overline{AC} \end{cases} \Longrightarrow$ پس A روی عمود منصف واقع است $\Longrightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$

۴-

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{OM} = \overline{OM} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\overset{\triangle}{A}M \cong O\overset{\triangle}{B}M \Longrightarrow \overline{AM} = \overline{MB}$$



$AB \parallel CD$ و مورب $AD \Longrightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{D}_2 \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180 \end{cases} \Longrightarrow \{ \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 180^\circ$ I

$AB \parallel CD$ و مورب $BC \Longrightarrow \begin{cases} \hat{B}_2 = \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180 \end{cases} \Longrightarrow \{ \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 180^\circ$ II

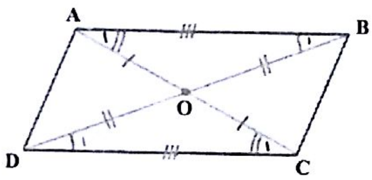
$AD \parallel BC$ و مورب $AB \Longrightarrow \begin{cases} \hat{B}_2 = \hat{A}_1 \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \end{cases} \Longrightarrow \{ \hat{A}_2 + \hat{B}_2 = 180$ III

۳ـ نتیجهٔ قسمت دوم را بدون استفاده از همنهشتی مثلث‌ها، و با امتداد دادن اضلاع متوازی‌الاضلاع، به کمک خطوط موازی و مورب به‌طور مستقیم ثابت کنید.

از رابطه‌های I و III $\Longrightarrow \begin{cases} \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{B}_2 = 180^\circ \end{cases} \Longrightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2$

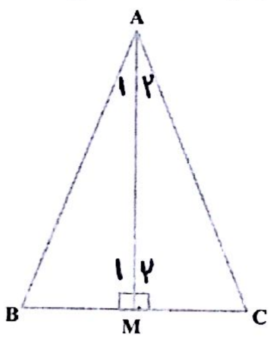
به همین ترتیب $\hat{A}_2 = \hat{C}$ خواهد بود.

تمرین

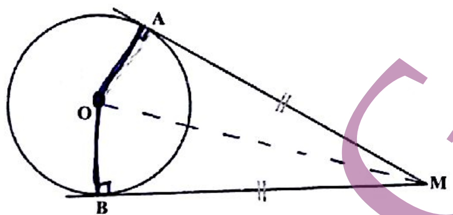


۱ـ به کمک نتایج به‌دست آمده در مورد اضلاع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع، ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید : OA=OC و OB=OD.

۲ـ ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!)



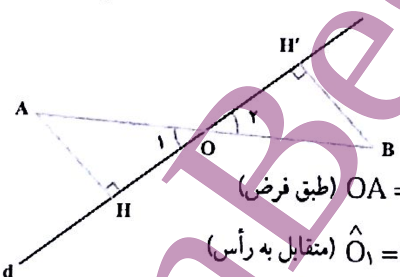
۳ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهشت هستند؟
چرا AM نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است؟ چرا AM بر BC عمود است؟



۴ـ سجاد به تجربه دیده که هر بار که از بیرون دایره‌ای، دو مماس بر آن رسم کرده، مماس‌ها به ظاهر با هم برابرند. امّا دلیل درستی این موضوع را نمی‌داند. باوصل کردن نقطهٔ O (مرکز دایره) به سه نقطهٔ A و B و M در شکل، و با توجه به ویژگی شعاع و مماس که در سال گذشته دیدید و اثبات همنهشتی دو مثلث مناسب به او کمک کنید تا علت درستی این حکم را بداند.

حکم: $\overline{AM} = \overline{MB}$

۵ـ



در شکل مقابل خط d از وسط پاره‌خط AB گذشته و A و B از d به یک فاصله‌اند (AH=BH′) ثابت کنید OH=OH′. او استدلال زیر را برای اثبات حکم ارائه کرد :

فرض $\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{AH} = \overline{BH'} \end{cases}$

حکم: $\overline{OH} = \overline{OH'}$

$$\left.\begin{aligned} &OA = OB \ \text{(طبق فرض)} \\ &\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ \text{(متقابل به رأس)} \\ &AH = BH' \ \text{(فرض)} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta OAH \cong \Delta OBH' \Rightarrow OH = OH'$$

آیا استدلال را می‌پذیرید؟ در غیراین‌صورت آن را طوری اصلاح کنید که درست شود.

نه خیر - حالت تساوی دو مثلث اشتباه می‌باشد. بنابر حالت وتر و یک ضلع یا وتر و یک زاویه تند درست می‌باشد.

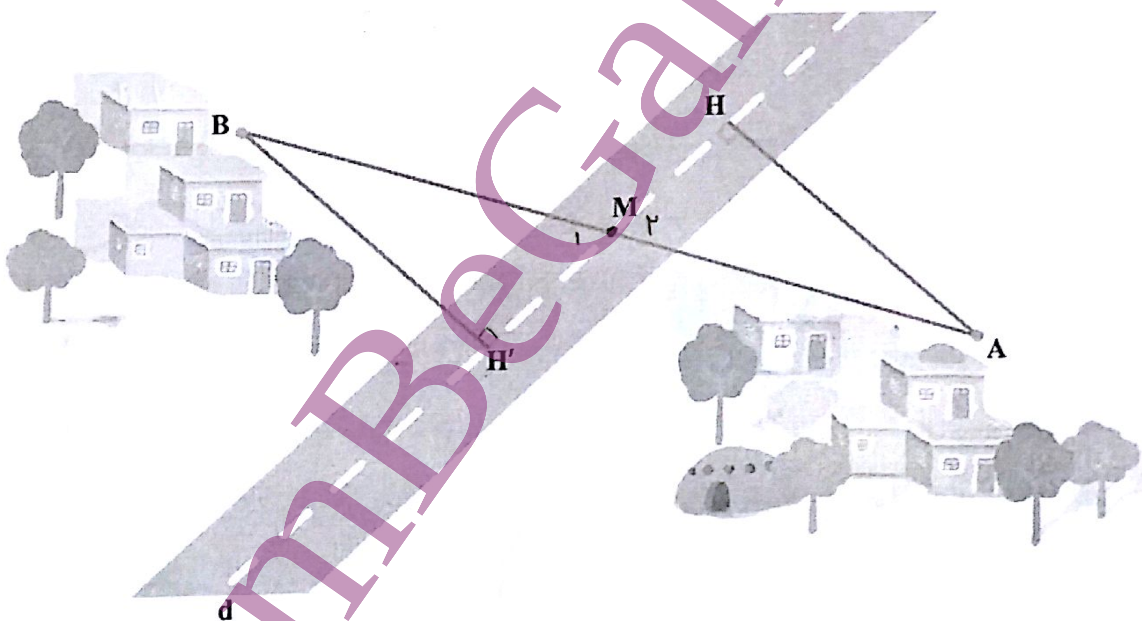
$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و زاویه}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H' \Longrightarrow \overline{OH} = \overline{OH'}$

یا

$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{AH} = \overline{BH'} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\hat{A}H \cong \overline{OBH'} \Longrightarrow \overline{OH} = \overline{OH'}$

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلّی وجود ندارد، امّا مراحلی را می‌توان مشخص کرد که برای هر مسئلهٔ هندسه، آنها را توصیه می‌کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می‌کنیم.

مثال : دو روستای A و B از سال‌ها قبل با یک جادّهٔ خاکی مستقیم به هم وصل بوده‌اند. چند سال قبل در آن منطقه یک جادّهٔ آسفالته مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شدند و جادّهٔ آسفالته درست از وسط جادّهٔ خاکی عبور می‌کرد و راه ارتباط دو روستا به جادّهٔ آسفالته از طریق همان جاده خاکی انجام می‌شود. اکنون برای کوتاه کردن این راه، ادارهٔ راهسازی تصمیم گرفته که از هر روستا، یک جادّهٔ آسفالته با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن، تا جادّهٔ اصلی ایجاد کند. بنابراین از روستای A یک جادّهٔ مستقیم، عمود بر این جادّهٔ اصلی و به طول ۴ کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ایجاد جادّهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است. یعنی در شکل مقابل خطّ d جادّهٔ اصلی است که از M وسط AB عبور کرده و AH فاصلهٔ روستای A تا جاده (۴km) و BH′ فاصلهٔ روستای B تا جادّهٔ اصلی است و می‌خواهیم نشان دهیم که AH=BH′.



قدم‌های حل مسئله

۱ــ صورت مسئله را به‌دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟

۲ــ اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به‌صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.

در این‌جا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم نمایید.

۳ـ داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی MA=MB و AH و BH' بر d عمود و حکم این است که: AH=BH'

فرض	$MA=MB$ ، $\hat{H}=\hat{H'}=۹۰^\circ$
حکم	$AH=BH'$

۴ـ برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره‌خط، استفاده از مثلث‌های همنهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث برای این منظور مناسب است؟

با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

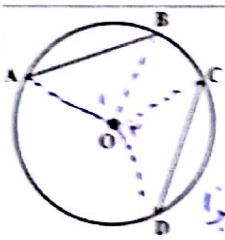
$MA = MB$ (طبق فرض)

$\hat{H} = \hat{H'} = ۹۰^\circ$

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (متقابل به رأس)

$\xRightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\triangle}{AMH} \cong \overset{\triangle}{MBH'} \Rightarrow AH = BH'$

فعالیت

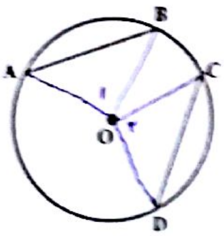


$OB=OC$، $OA=OD$، $AB=CD$ $\xrightarrow{\text{ض ض ض}}$ $\overset{\triangle}{ABO} \cong \overset{\triangle}{OCD}$

در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی است.

۱ـ نشان دهید کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی است.

تناظر اجزا $\longrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow[\text{مرکزی}]{\text{زاویه‌های}} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

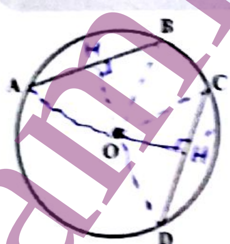


۲ـ در شکل مقابل کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ مساوی است. نشان دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

$OA=OD$، $\hat{O}_1=\hat{O}_2$، $OB=OC$ $\xrightarrow{\text{ض ز ض}}$ $\overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$

تساوی اجزای متناظر $AB = CD$

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.

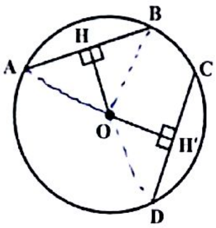


۳ـ از سال گذشته می‌دانید خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره از دو وتر مساوی به یک فاصله است.

می‌دانیم $AB=CD \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \longrightarrow AH = HB = CH' = DH'$

$OB=OC$، $CH'=BH$ $\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}}$ $\overset{\triangle}{OHB} \cong \overset{\triangle}{OH'C} \Rightarrow OH = OH'$

۴ــ در شکل مقابل می‌دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است (OH=OH′). مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید که طول‌های دو وتر AB و CD با هم برابر است :

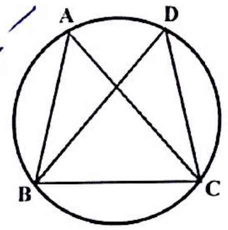


$$\left.\begin{array}{l} OA = OD = R \quad \text{شعاع} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \text{بنا به فرض} \; (\text{——}) OH = OH' \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{D}H' \Rightarrow AH = DH' \Rightarrow$$

(وتر و یک ضلع)

$$۲AH = ۲DH' \Rightarrow AB = CD$$

کار در کلاس



در شکل مقابل می‌دانیم AB=CD،

۱ــ چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$؟ چون در یک دایره اگر دو وتر برابر باشند کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند

۲ــ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید :

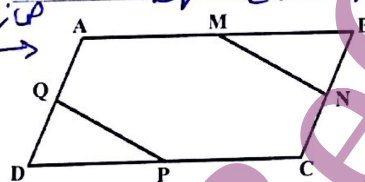
$$\begin{cases} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{BC} = \widehat{BC} \end{cases}$$
$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

۳ــ چرا AC=BD؟ چون در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند وترهای نظیر آنها نیز با هم برابرند

تمرین

$$D\overset{\Delta}{\hat{P}}Q \cong M\hat{N}B$$

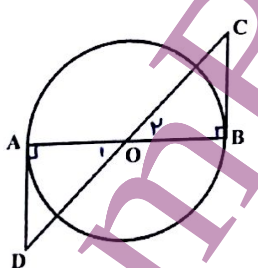
$$\begin{cases} MB = DP \quad \text{فرض} \\ BN = DQ \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$$



۱ــ در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع است، ثابت کنید : MN=PQ

بنا به تساوی اجزای متناظر $MN = PQ$

می‌دانیم
$$\begin{cases} AB = CD \Rightarrow \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD \\ \text{و} \\ AD = BC \Rightarrow \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC \end{cases}$$

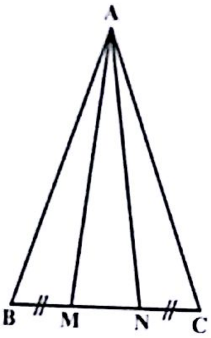


۲ــ در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس است، نشان دهید که AD و BC برابرند.

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = 90 \\ OA = OB \quad \text{شعاع} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{زض ز}} O\overset{\Delta}{A}D \cong O\overset{\Delta}{B}C$$

بنا به تساوی اجزای متناظر

$$AD = BC$$



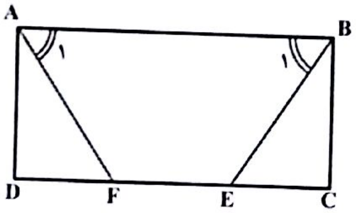
۳ـ در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M و N روی قاعدهٔ BC طوری قرار دارد که BM=NC.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی‌الساقین است.

$$\begin{cases} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \quad \text{متساوی‌الساقین} \\ BM = CN \quad \text{بنابه فرض} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{ACN} \longrightarrow AM = AN$$

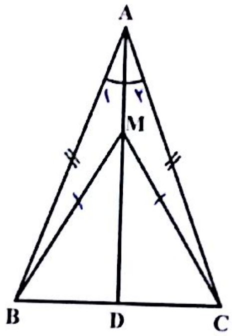
پس مثلث AMN متساوی‌الساقین است

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{A}_2 \end{cases}$$



۴ـ در مستطیل ABCD، پاره‌خط‌های BE و AF طوری رسم شده که دو زاویهٔ A_1 و B_1 برابرند، ثابت کنید BE و AF مساوی‌اند.

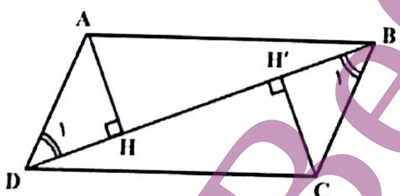
$$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{B}_2 \\ AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{ADF} \cong \overset{\triangle}{BEC} \Longrightarrow AF = BE$$



۵ـ نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخواه روی نیمساز زاویهٔ رأس از دو سر قاعده، برابر است: MB=MC.

$$\begin{cases} AB = AC \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AM = AM \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{AMC} \longrightarrow MB = MC$$

وهمچنین مثلث MBC نیز متساوی الساقین است.



۶ـ در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع است و AH و CH′ فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD است. دلیل برابری دو زاویهٔ B_1 و D_1 را توضیح دهید.

نشان دهید مثلث‌های ADH و BCH′ همنهشتند و از آنجا برابری AH و CH′ را نتیجه بگیرید، سپس جمله زیر را کامل کنید:

در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو رأس مقابل، از قطر بین آنها به یک فاصله است

$$AD \parallel BC \text{ و } DB \text{ مورب} \Longrightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$$

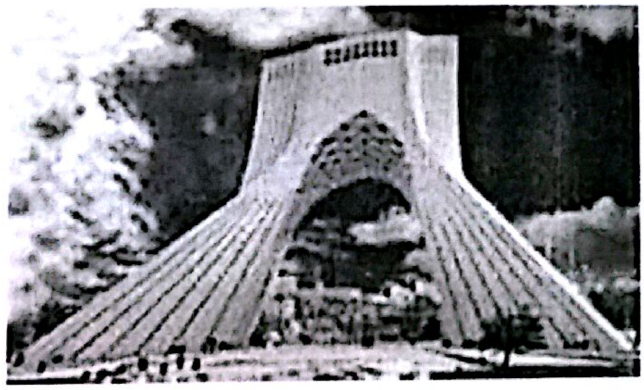
$$\begin{cases} AD = BC \\ \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه}} \overset{\triangle}{AHD} \cong \overset{\triangle}{CBH'} \xrightarrow[\text{بنابه تساوی اجزای متناظر}]{} AH = CH'$$

ــ در تصویرهای زیر دو گل شبیه به هم را می‌بینید. آیا هر گل به‌طور کامل مثل هم هستند؟ نه خیر

ــ در تصویرهای زیر دو عکس از یک شخص را می‌بینید. تفاوت این دو تصویر در چیست؟

در سایزش

ــ تصویرهای زیر عکس‌هایی از میدان آزادی تهران می‌باشند. کدام‌یک مشابه میدان آزادی است و کدام‌یک نیست؟ الف هست ولی ب نیست.



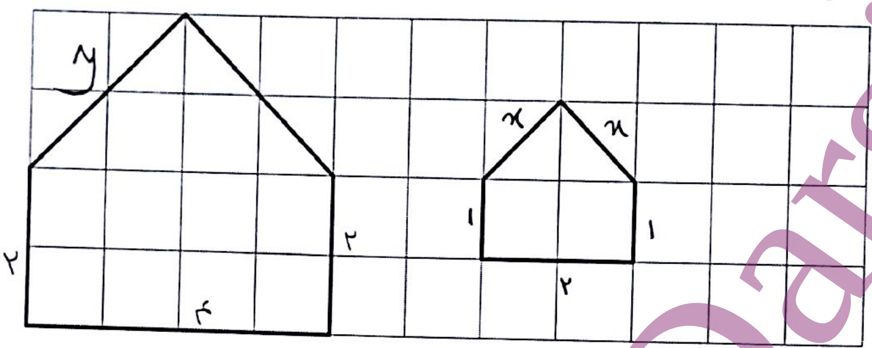
ب　　　　الف

فعالیت

۱ــ مربع‌های صفحهٔ شطرنجی زیر به ضلع یک سانتی‌متر هستند.

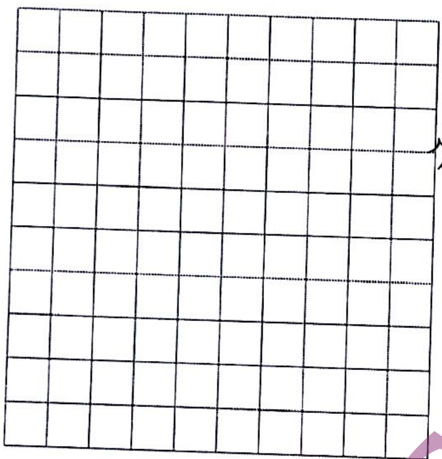
$2^2+2^2=y^2$

$y=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$



$1^2+1^2=x^2$

$x=\sqrt{2}$



اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را بنویسید.

چه رابطه‌ای بین ضلع‌های دو شکل وجود دارد؟ اضلاع دو برابر

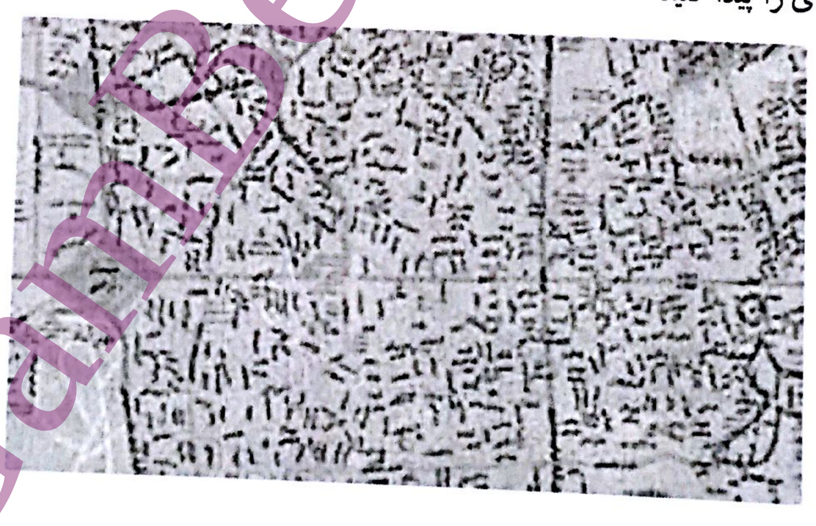
چه رابطه‌ای بین زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟ برابرند

اندازه ضلع‌های شکل (۱) چند برابر اندازه ضلع‌های شکل (۲) است؟ نصف

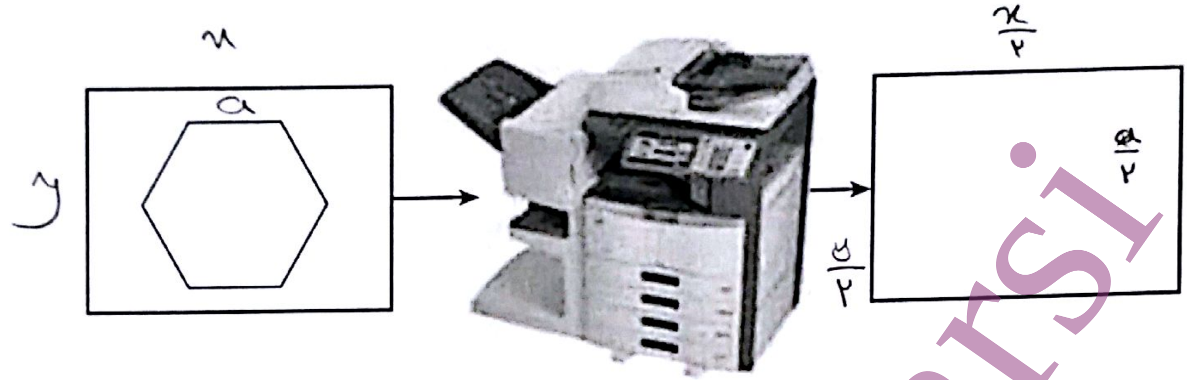
در صفحه شطرنجی مقابل یک شکل رسم کنید و یک شکل مثل آن بکشید که اندازه ضلع‌هایش ۲ برابر شکل اول باشد.

۲ــ در تصویر زیر نقشه قسمتی از شهر تهران را می‌بینید مقیاس نقشه ۱ به ۱۰۰,۰۰۰ است. یعنی هر یک سانتی‌متر روی نقشه برابر با ۱۰۰,۰۰۰ سانتی‌متر مقدار واقعی است. فاصله دو میدان انقلاب و آزادی را پیدا کنید.

cm	واقعی cm
1	100000
x	فاصله دو میدان برحسب cm



۳ــ شکل زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ۵۰٪ را نشان می‌داد. تصویر خروجی را شما رسم کنید.

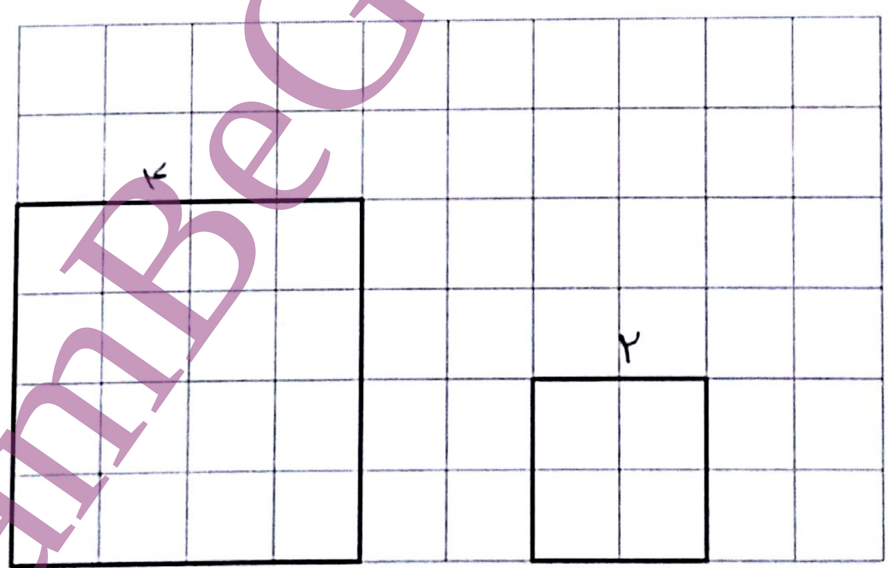


هرگاه در دو شکل همهٔ ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده یا بدون تغییر باشند) و اندازه زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، به آن دو شکل متشابه می‌گوییم.

کار در کلاس

۱ــ آیا دو مربع زیر متشابه هستند؟ اندازه ضلع‌ها و زاویه‌های هر کدام را بنویسید. چه رابطه‌ای بین ضلع‌ها و زاویه‌های دو شکل وجود دارد؟

آیا می‌توان گفت هر دو مربع دلخواه با هم متشابهند؟ چرا؟ الف زاویه‌ها با هم برابر - اضلاع متناسب



$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=\hat{A'}=\hat{B'}=\hat{C'}=\hat{D'}$

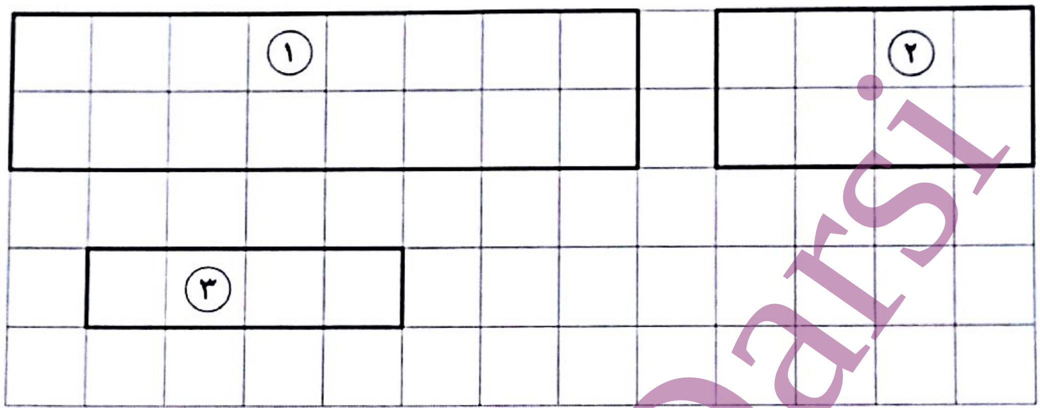
$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'}=۲$

۱- زوایای برابر با هم دارند

۲- نسبت اضلاع مقدار ثابتی است

۲ـ از مستطیل‌های زیر کدام با هم متشابهند؟ چرا؟ شماره ۱ و ۳ . چون اضلاع متناسب و زوایا برابر است

آیا هر دو مستطیل دلخواه با هم متشابه است؟ نه خیر چون امکان دارد اضلاع متناسب نباشند.

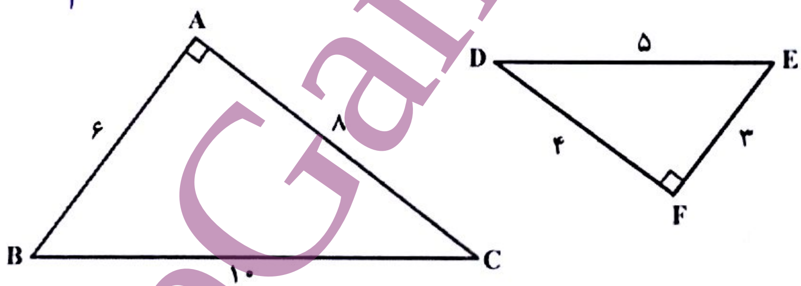


فعالیت

دو مثلث زیر با هم متشابه است. ضلع‌های متناظر و زاویه‌های متناظر را همرنگ کنید. نسبت ضلع‌های متناظر را بنویسید. آیا سه کسر برابر به‌دست آمد؟

$$\frac{EF}{AB}=\frac{FD}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$$

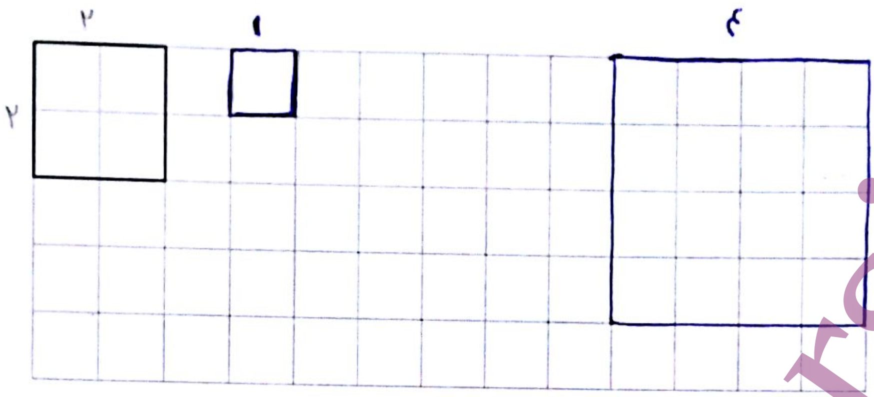
اضلاع متناسب است.



به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه می‌گویند.

کار در کلاس

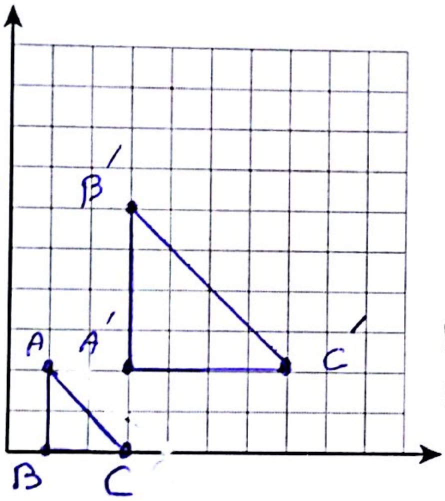
۱ـ با توجه به مربع صفحهٔ بعد، مربع دیگری رسم کنید به‌گونه‌ای که نسبت تشابه دو مربع $\frac{1}{2}$ باشد. این سؤال چند پاسخ دارد؟ چرا؟ ۲ جواب دارد. چون دو مربع به اضلاع ۱ و ۴ خواهیم داشت



$B'C'^{۲} = ۴^{۲} + ۴^{۲}$

$B'C'^{۲} = ۳۲$

$B'C' = \sqrt{۳۲} = ۲\sqrt{۸}$



$AC^{۲} = ۲^{۲} + ۲^{۲} = ۴ + ۴$

$AC^{۲} = ۸$

$AC = \sqrt{۸}$

۲ـ در صفحهٔ مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید :

مثلث ABC $\quad A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$

مثلث A'B'C' $\quad A' = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۶ \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \end{bmatrix}$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آنها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

$\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

$\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

$\frac{\sqrt{۸}}{۲\sqrt{۸}} = \frac{۱}{۲}$

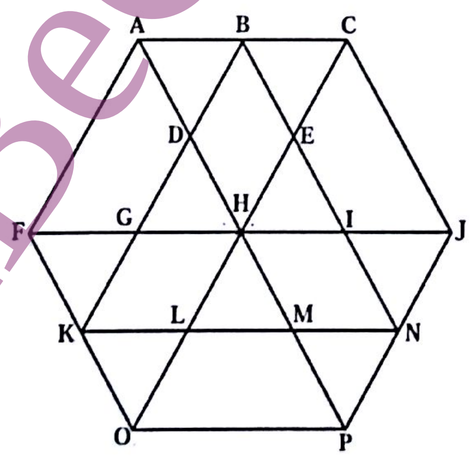
$AB = ۲$ و $A'B' = ۴$

$BC = ۲$ و $A'C' = ۴$

$AC = \sqrt{۸}$ و $B'C' = ۲\sqrt{۸}$

تمرین

۱ـ چندضلعی‌های متشابهی که در شکل زیر تشخیص می‌دهید، نام ببرید.



$GDAF \cong EIJC$

$D\hat{G}H \cong E\hat{H}I$

$AFOH \cong HCJP$

$H\hat{F}O \cong H\hat{J}P$

$A\hat{H}C \cong H\hat{O}P$

$HDKL \cong MHNE$

۲ــ آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟ بلی

در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟ ۱

۳ــ آیا هر دو لوزی متشابهند؟ چرا؟ نه خیر چون ممکن است زوایا برابر نباشند.

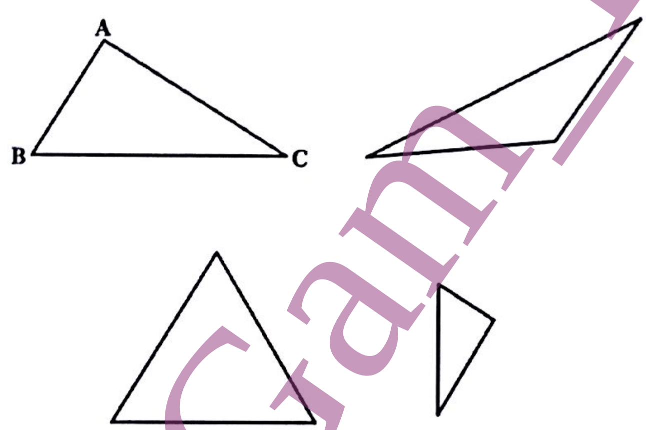
۴ــ در یک نقشه، مقیاس ۲۰۰ : ۱ است. فاصلهٔ دو نقطه روی نقشه ۳/۵ سانتیمتر است. فاصلهٔ این دو نقطه در اندازهٔ واقعی چقدر است؟ $\frac{۱}{۲۰۰} = \frac{۳/۵}{x} \longrightarrow x = ۷۰۰$

۵ــ آیا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند؟ چرا؟ بلی چون اضلاع متناسب و زوایا برابر است

۶ــ آیا هر دو مثلث متساوی‌الساقین متشابهند؟ چرا؟ نه خیر چون ممکن است زوایا برابر نباشد.

۷ــ مثلث ABC به ضلع‌های ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع x−۱ و ۱۰ و x+۷ با هم متشابه هستند (اندازهٔ ضلع‌های مثلث‌ها، از کوچک به بزرگ نوشته شده است) مقدار x را پیدا کنید.

۸ــ کدام مثلث با مثلث ABC متشابه است؟



سوال ۷-

$\frac{۴}{x-۱} = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۸}{x+۷} \longrightarrow x-۱ = ۸$ ، $x = ۹$ ، $x+۷ = ۱۶$

۴	x−۱
۵	۱۰
۸	x+۷