# برای مطالعه

به‌نام آن که، هستی‌نام از او یافت      فَلک جُنبش، زمین آرام از او یافت

سلام بر همه خوبان ، ایام به شادی و لحظه لحظه ی عمرتان مَملُو از انتظار ، به اُمید آنکه طلوع صورت گرفته و زنگار از دل ما بَردارد .

مطالبی که در این مرقومه تقدیم می کنم مخصوص همکاران عزیز و علاقه مندان می باشد ، لذا مطرح کردن آنها در آزمون ها شایسته نیست .

۱- ثابت کنید برای محاسبه واریانس داده های $x_1$ و . . . و $x_n$ می توان از رابطه $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$ استفاده کرد .

پاسخ : فرمول محاسبه واریانس در کتاب به صورت $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ می باشد ، که با استفاده از اتحاد مربع جمله ای و خواص سیگما ، عبارت $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ را ساده می کنیم :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\bar{x}.x_i + (\bar{x})^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x})^2$$

$$\xrightarrow[\sum_{i=1}^{n} k = n.k]{\sum_{i=1}^{n} x_i = n.\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\times(n.\bar{x}) + n.(\bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.(\bar{x})^2$$

حال با جایگذاری ساده شده ی عبارت در رابطه واریانس ، فرمول ادعا شده ثابت خواهد شد :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.(\bar{x})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

توجه : این رابطه در جزوه ی دست نویس بنده به صورت $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$ ارائه شده است .

۲- ثابت کنید اگر هر یک از داده های آماری با مقدار ثابتی جمع شود ، واریانس آنها تغییر نمی کند .

اثبات : داده های اولیه: $x_1 , \dots , x_n \Rightarrow$ میانگین $= \bar{x} \Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

داده های جدید: $x_1+b, \dots, x_n+b \Rightarrow$ میانگین $= \overline{x+b} = \bar{x}+b$

$$\Rightarrow \sigma^2_{x+b} = \frac{\left[(x_1+b)-(\bar{x}+b)\right]^2+\cdots+\left[(x_n+b)-(\bar{x}+b)\right]^2}{n} = \frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \sigma^2_x$$

با توجه به حقیقی بودنِ عدد $b$ می توان گفت :

در محاسبه ی واریانس می توان مقدار ثابت دلخواهی از تمام داده ها کم کرده یا به آنها اضافه نمود .

۳- ثابت کنید اگر هر یک از داده های آماری در مقدار ثابتی ضرب شوند ، واریانس آنها در مجذور آن مقدار ثابت ضرب خواهد شد .

اثبات : داده های اولیه: $x_1, \dots, x_n \Rightarrow$ میانگین $= \bar{x} \Rightarrow \sigma^2_x = \frac{(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$

داده های جدید: $ax_1, \dots, ax_n \Rightarrow$ میانگین $= \overline{ax} = a\bar{x}$

$$\Rightarrow \sigma^2_{ax} = \frac{\left[(ax_1)-(a\bar{x})\right]^2+\cdots+\left[(ax_n)-(a\bar{x})\right]^2}{n} = \frac{a^2\left[(x_1-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\right]}{n} = a^2\sigma^2_x$$

توجه : برای سهولت در محاسبه ، می توان تمام داده ها را بر عدد ثابت تقسیم (ضرب)کرده و واریانس را محاسبه نمود سپس مقدار به دست آمده را در مربع آن عدد ثابت ضرب (تقسیم) کرد .

۴- ثابت کنید اگر $n$ داده با هم تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت $d$ بدهند آنگاه واریانس برابر است با $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}d^2$ .

اثبات : با توجه به شرایط سوال ، فرض کنید $n$ داده به صورت $a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$ باشند .

با توجه به اینکه کم کردن مقدار یکسان از داده ها ، تاثیری بر واریانس ندارد ، از هر کدام مقدار ثابت $a$ را کم می کنیم ، داده ها به صورت $0, d, 2d, \dots, (n-1)d$ خواهند شد .

حال کافیست واریانس داده های $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ را حساب کرده و در $d^2$ ضرب کنیم :

$$\bar{x} = \frac{0+1+2+\cdots+(n-1)}{n} = \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{0^2+1^2+\cdots+(n-1)^2}{n} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}}{n} - \frac{(n-1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

بنابراین با ضرب کردن واریانس به دست آمده در $d^2$ ، واریانس داده های اولیه محاسبه خواهد شد : $\sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} d^2$

# محاسبه واریانس در جدول فراوانی

اگر هر کدام از داده های $x_i$ دارای فراوانی $w_i$ باشند ، واریانس آنها طبق روابط زیر محاسبه می شود :

$$\sigma^2 = \frac{w_1(x_1-\overline{x}_w)^2+\cdots+w_n(x_n-\overline{x}_w)^2}{w_1+\cdots+w_n}$$

$$\sigma^2 = \frac{w_1 \times x_1^2+\cdots+w_n \times x_n^2}{w_1+\cdots+w_n} - (\overline{x}_w)^2$$

مثال : در صورتیکه میانگین داده های مقابل برابر ۱۶ باشد ، انحراف معیار آنها را محاسبه نمایید .

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| داده | ۱۲ | ۱۴ | ۱۶ | ۱۸ | ۲۰ |
| فراوانی | ۵ | ۷ | ۱۰ | $a$ | ۳ |

پاسخ : برای سهولت کار ابتدا از همه داده ها ۱۶ واحد کم می کنیم . در نتیجه باید میانگین برابر $16-16=0$ شود :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| داده | ۴- | ۲- | ۰ | ۲ | ۴ |
| فراوانی | ۵ | ۷ | ۱۰ | $a$ | ۳ |

$$\Rightarrow \overline{x}_w = \frac{(-4)\times 5+(-2)\times 7+0+2a+4\times 3}{5+7+10+a+3} = 0 \Rightarrow a = 11$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{5(-4)^2+7(-2)^2+0+11(2)^2+3(4)^2}{5+7+10+11+3} - 0^2 = \frac{50}{9} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{50}}{3}$$

۲- اگر فراوانی نسبی داده های $x_i$ برابر $F_i$ باشند ، واریانس آنها طبق رابطه ی زیر محاسبه می شود :

$$\sigma^2 = F_1(x_1-\overline{x}_w)^2+\cdots+F_n(x_n-\overline{x}_w)^2$$

تست (ریاضی خارج کشور۹۳) : در جدول فراوانی نسبی داده های مقابل ، با تعیین $\alpha$ ، مقدار واریانس کدام است ؟

۱) ۱۶/۵    ۲) ۱۶/۸    ۳) ۱۷/۲    ۴) ۱۷/۶

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| داده | ۸ | ۱۲ | ۱۶ | ۲۰ |
| فراوانی نسبی | ۰/۱ | ۰/۲۵ | ۰/۲ | $\alpha$ |

پاسخ : مجموع فراوانی های نسبی برابر یک است : $0/1+0/25+0/2+\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0/45$

$$\Rightarrow \overline{x}_w = 0/1\times 8+0/25\times 12+0/2\times 16+0/45\times 20 = 16$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 0/1(-8)^2+0/25(-4)^2+0/2(0)^2+0/45(4)^2 = 17/6 \Rightarrow$$ گزینه ۴ صحیح است .

نویسنده و تنظیم کننده : افشین ملاسعیدی — آبادان

آیدی : @sinxcosx

سایت : sinxcosx.ir