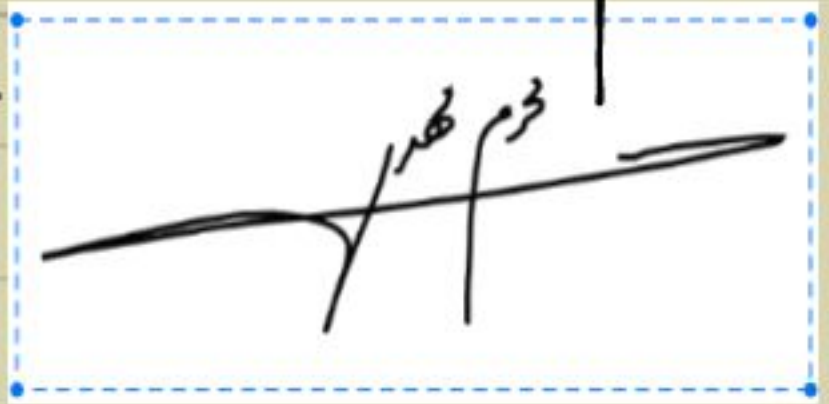


# به نام خدا

حل تمرینها، فعالیتها و کار در کلاسهای  
درس سوم از فصل دوم حسابان 1

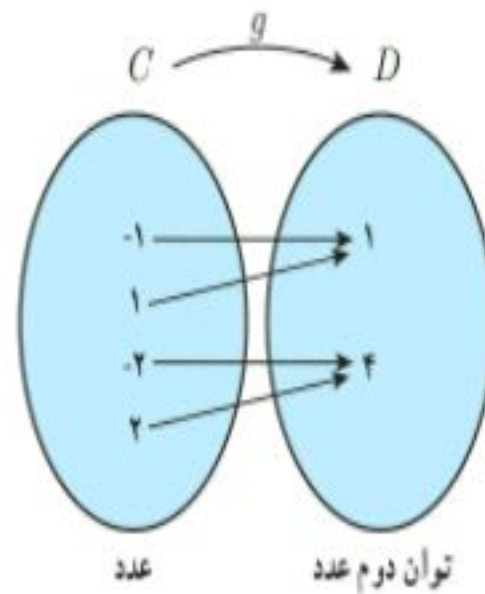
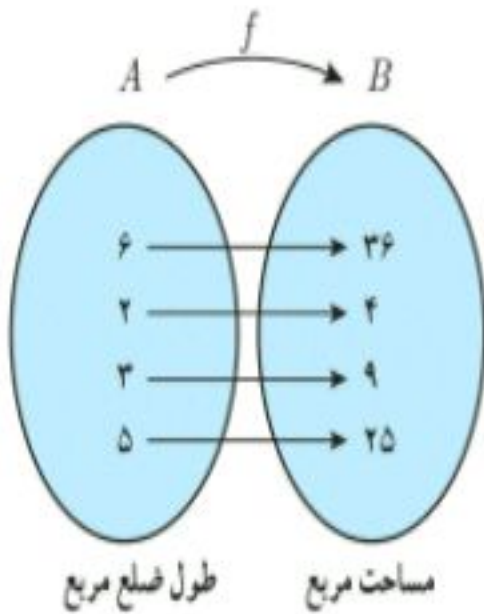


09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi

## صفحه ۵۴

### فعالیت

دو تابع  $f$  و  $g$  را در نظر بگیرید:



الف)  $f$  و  $g$  را به صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

$$f = \{(1, 36), (2, 4), (3, 9), (5, 25)\}$$

$$g = \{(-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4)\}$$

$$D_f = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$D_g = \{-1, 1, -2, 2\}$$

$$R_f = \{36, 4, 9, 25\}$$

$$R_g = \{1, 4\}$$

ب) اگر جای دو مؤلفه هر زوج مرتب در  $f$  و  $g$  را عوض کنیم، روابط جدیدی به دست می‌آید. آنها را به ترتیب

$h$  و  $k$  بنامید.  $h$  و  $k$  را وارون رابطه‌های  $f$  و  $g$  می‌نامیم.  $h$  و  $k$  را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

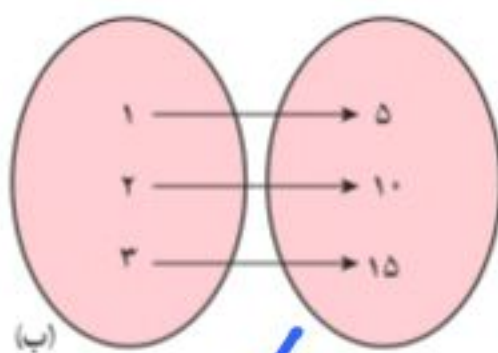
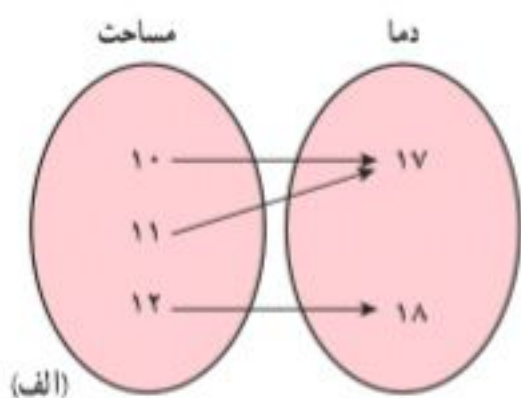
$$h = \{(36, 1), (4, 2), (9, 3), (25, 5)\}$$

$$k = \{(1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$$

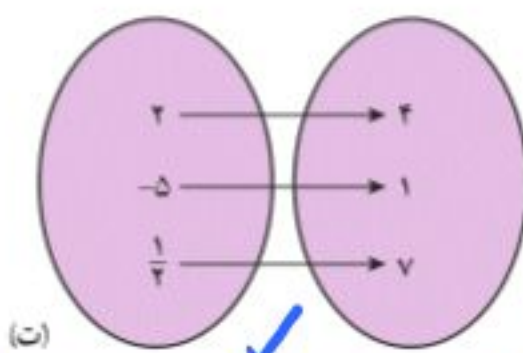
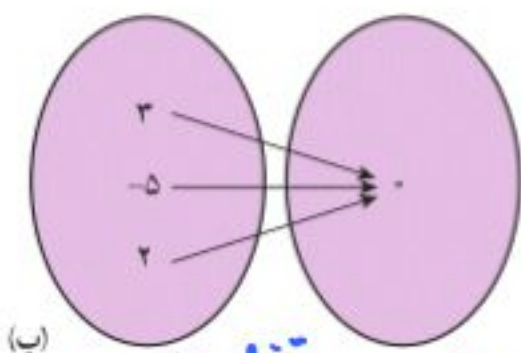
کدام یک از رابطه‌های  $h$  و  $k$  تابع است؟ دلیل بیاورید.  $h$  تابع است

چون در  $k$  مؤلفه‌های اول مساوی داریم مؤلفه‌های دوم آنها مساوی نیست

توابع زیر را در نظر بگیرید:



الف) کدام یک از آنها وارون پذیرند؟



ب) ویژگی مشترک توابع وارون پذیر چیست؟

یک به یک بودن

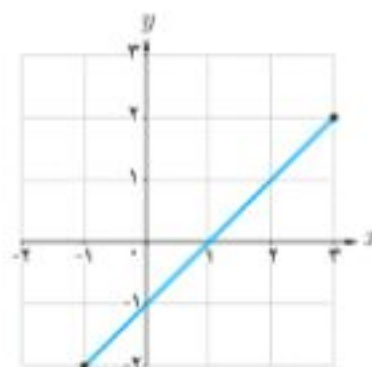
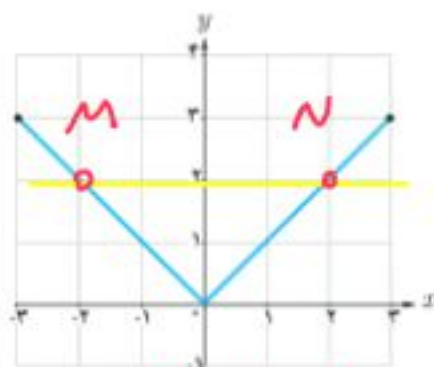
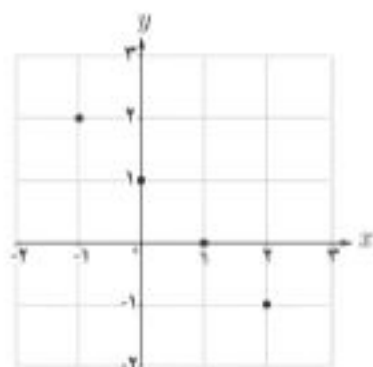
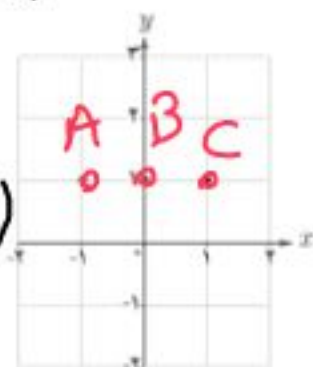
یعنی: هر دو عضو متمم نیز از دامنه یا در عضو متمم نیز از برد نظر شوند

توابع داده شده در (الف) و (ب) یک به یک هستند ولی توابع داده شده در (ب) و (ت) یک به یک نیستند. چرا؟ توضیح دهید.

$A = (-1, 1)$

$B = (0, 1)$

$C = (1, 1)$



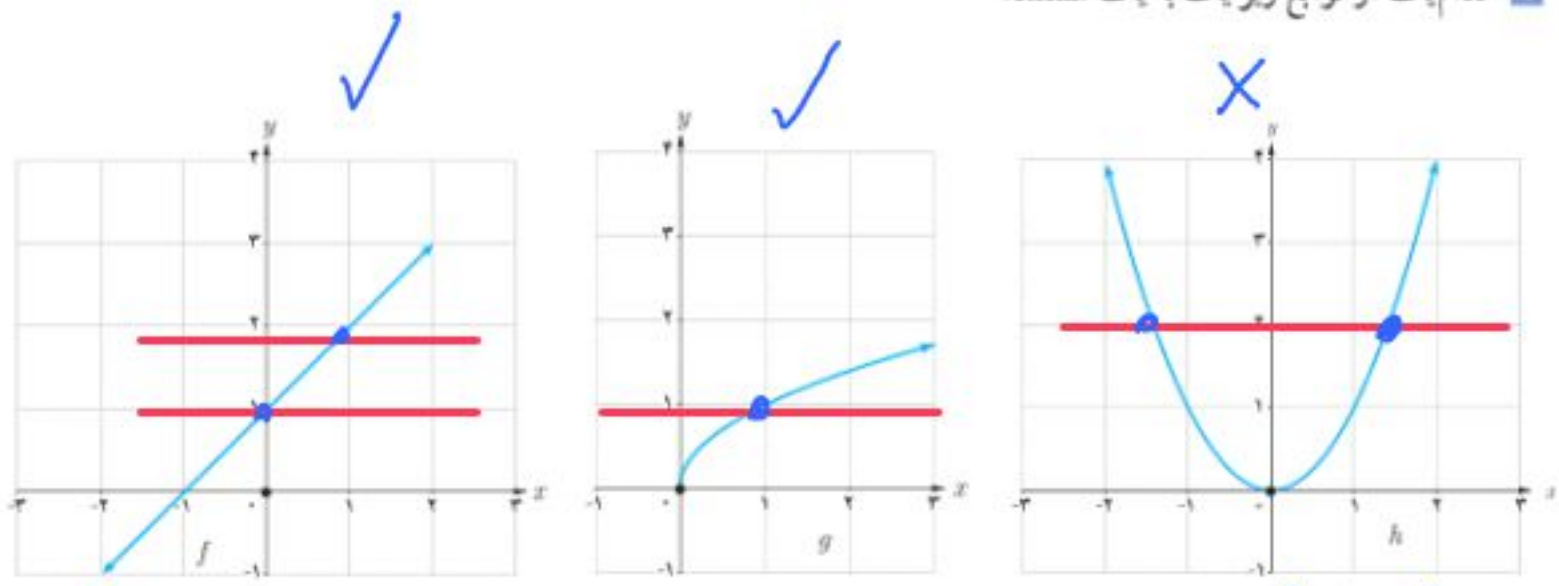
$M = (-2, 2)$   
 $N = (2, 2)$

به طور کلی می توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور  $x$  ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

در قسمت ب دو عضو متمم نیز از دامنه فقط باید عضو از برد منظر شده است  
در قسمت ت یک عضو متمم نیز از دامنه فقط باید عضو از برد منظر شده است



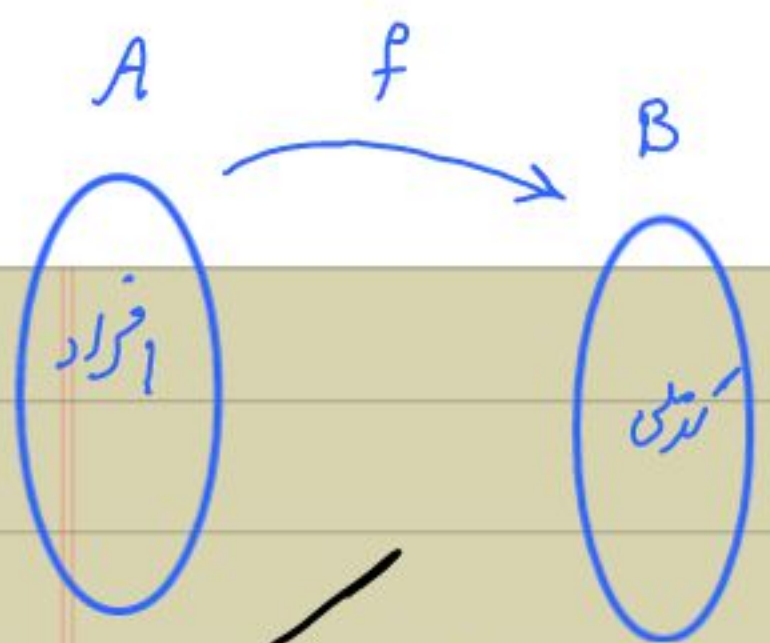
۱ کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



$k = \{(1,2), (3,4), (8,9)\}$   
 $D = \{1, 3, 8\}$   $R = \{2, 4, 9\}$  ✓

$l = \{(3,7), (2,5), (1,5)\}$   $D = \{2, 3\}$   
 $R = \{5, 7\}$

۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطه بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می کند.



چون کد ملی اعضای کلاس برادرانشان می باشد و

امکان ندارد یک کد ملی متعلق به دو نفر یا بیشتر باشد

یعنی هر کد ملی متعلق به یک عضو است و هر دو عضو منحصر نفر باز

داشته با دو عضو از برد مناظر هستند

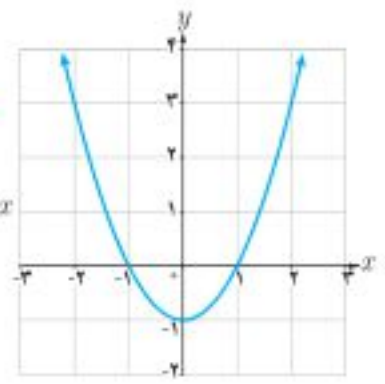
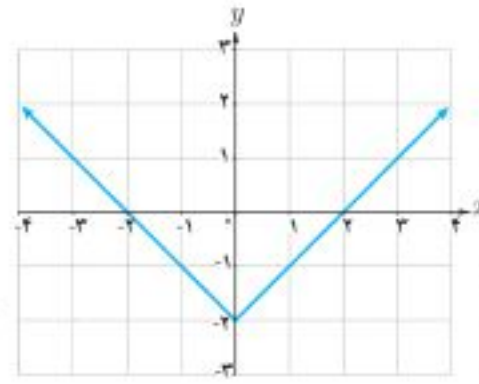
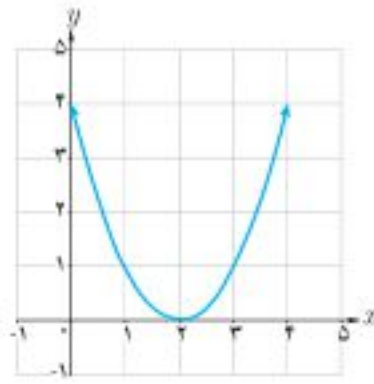
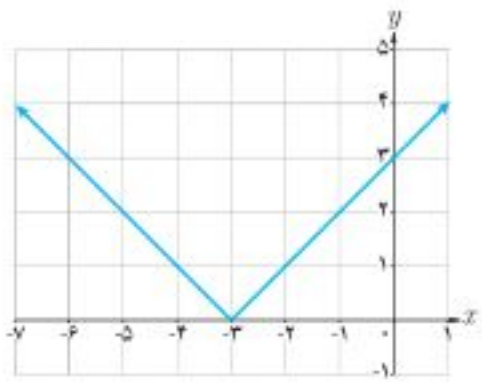
تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف)  $y = |x+3|$

ب)  $y = (x-2)^2$

پ)  $y = |x|-2$

ت)  $y = x^2 - 1$



$$D = (-\infty, -3]$$

$$D = [-3, +\infty)$$

$$D = (-\infty, 2]$$

$$D = [2, +\infty)$$

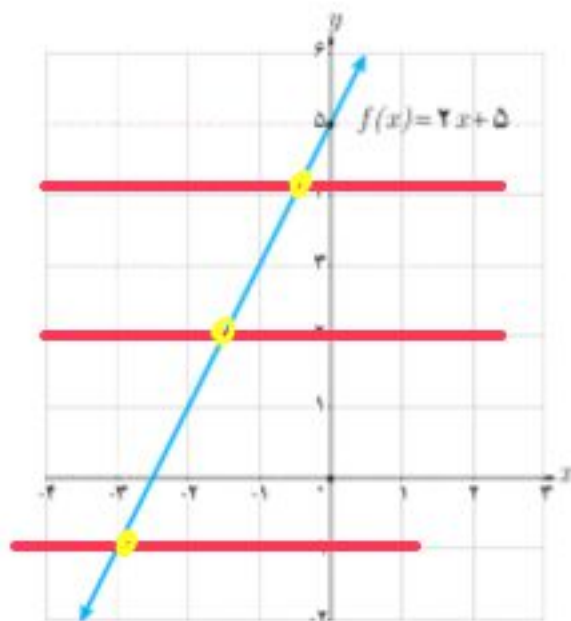
$$D = (-\infty, 0]$$

$$D = [0, +\infty)$$

$$D = (-\infty, 0]$$

$$D = [0, +\infty)$$

دامنه‌های محدود



تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم.

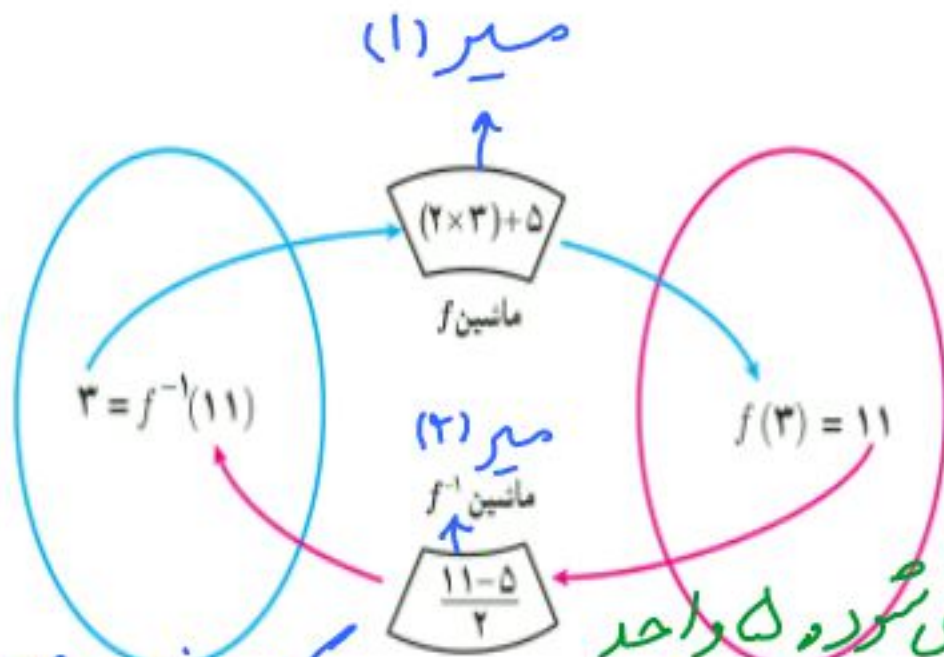
$$f(x) = 2x + 5$$

الف) به کمک نمودار  $f$  توضیح دهید که چرا  $f$  یک به یک است.

هر خط موازی محور طول نمودار تابع

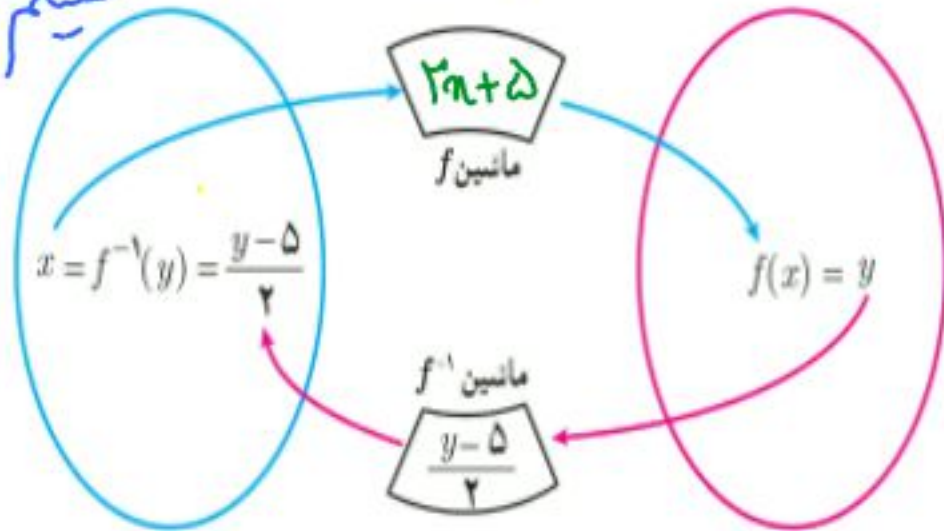
را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند





ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید:  
 $(3, 11) \in f$  و  $(11, 3) \in f^{-1}$   
 به عبارت دیگر  $f(3) = 11$  و  $f^{-1}(11) = 3$

در نمودار آبی رنگ هر ورودی ۲ برابر می‌شود و ۵ واحد به آن اضافه می‌شود صیر ۱  
 در نمودار قرمز رنگ ابتدا ۵ واحد کم می‌شود و حال بر ۲ تقسیم می‌شود صیر ۲



ب) در حالت کلی برای هر عنصر  $x \in D_f$  نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.

ت) بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x) = 2x + 5 \quad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2} \quad (y \in R_f)$$

$f^{-1}$  را به صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید:

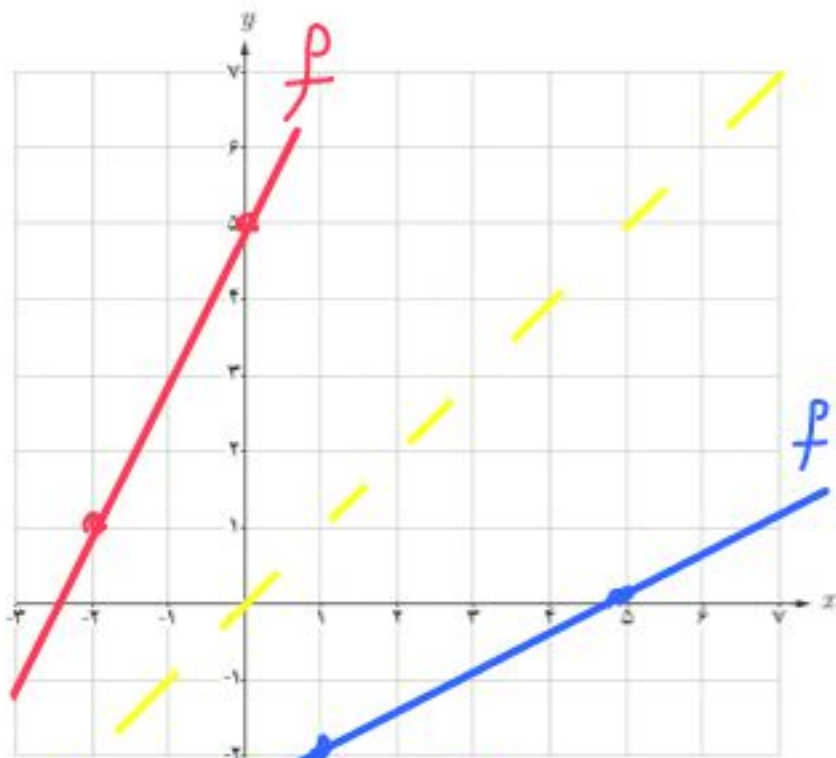
$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(t) = \frac{t-5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(z) = \frac{z-5}{2} \end{cases}$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه  $f^{-1}$  همان برد  $f$  است. بنابراین یک نمایش مناسب برای  $f^{-1}$  به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2} \end{cases}$$



۱ با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم  $f(x) = 2x + 5$  نمودار  $f$  و  $f^{-1}$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

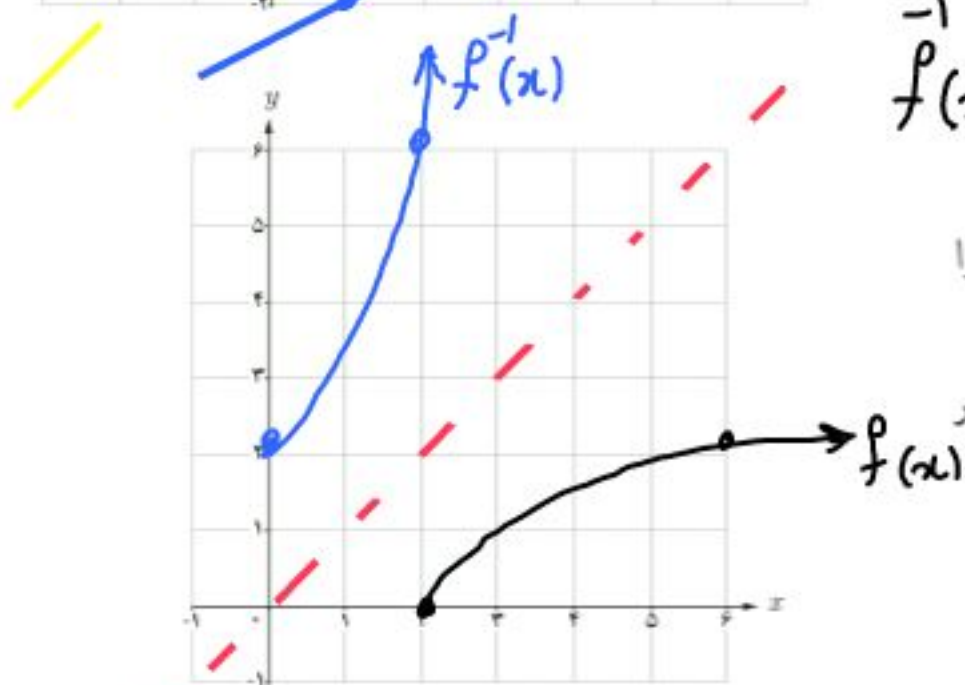
$$f(x) = 2x + 5 \quad \begin{array}{c|cc} x & -2 & 0 \\ \hline f(x) & 1 & 5 \end{array}$$

$$y = 2x + 5$$

$$2x = y - 5$$

$$x = \frac{y - 5}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2} \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 5 \\ \hline f^{-1}(x) & -2 & 0 \end{array}$$



۲ اگر داشته باشیم  $f(x) = \sqrt{x-2}$  دامنه و برد  $f$  را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

در معادله  $y = \sqrt{x-2}$  ضابطه  $f^{-1}$  را بنویسید. نمودار  $f^{-1}$  را رسم و دامنه و برد  $f^{-1}$  را معلوم کنید.

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

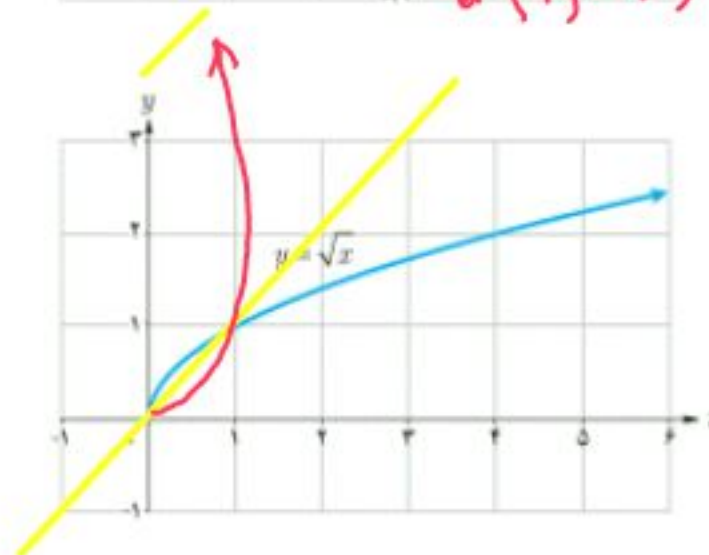
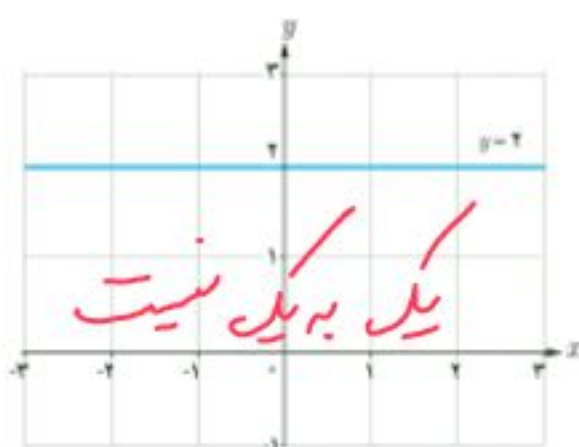
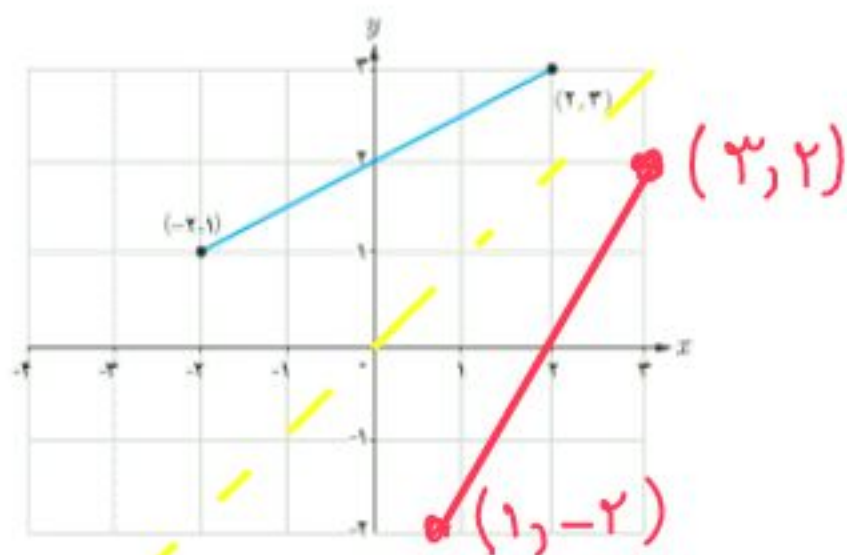
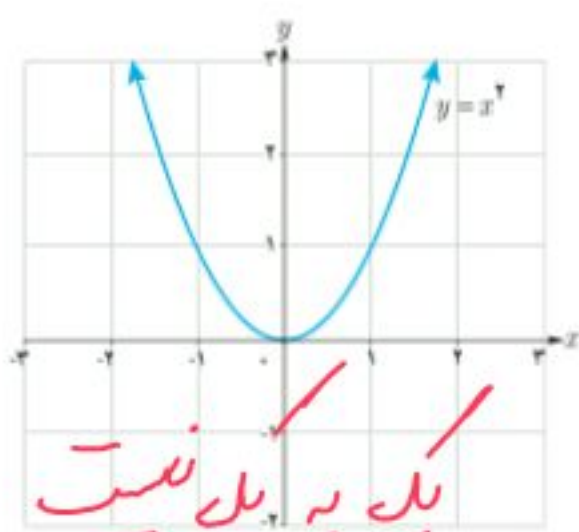
$$\begin{array}{c|cc} x & 2 & 4 \\ \hline f(x) & 0 & 2 \end{array} \Rightarrow R_f = [0, +\infty)$$

$$y = \sqrt{x-2} \Rightarrow y^2 = x-2 \Rightarrow x = y^2 + 2 \Rightarrow$$

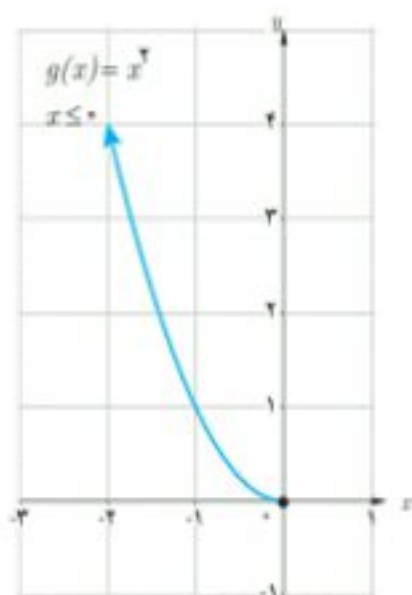
$$f^{-1}(x) = x^2 + 2 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline f^{-1}(x) & 2 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} D = [0, +\infty) \\ R = [2, +\infty) \end{array}$$



نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

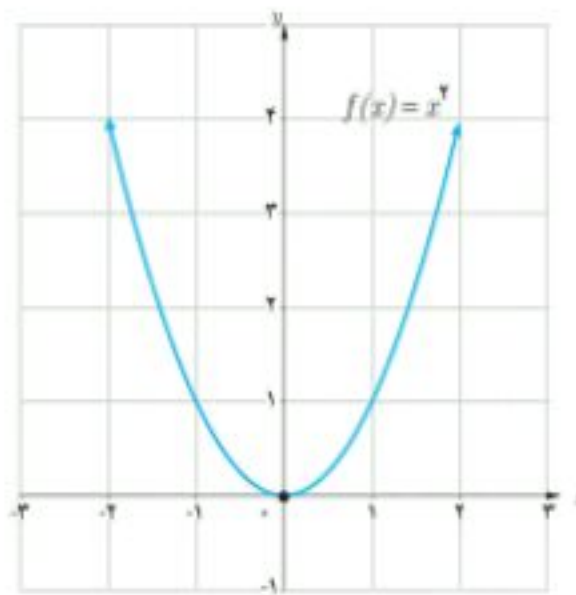


اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می‌توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع  $f(x) = x^2$  یک به یک نیست، ولی با محدود کردن تابع به بازه  $[0, \infty)$  و یا  $(-\infty, 0]$  تابعی یک به یک به دست می‌آید.

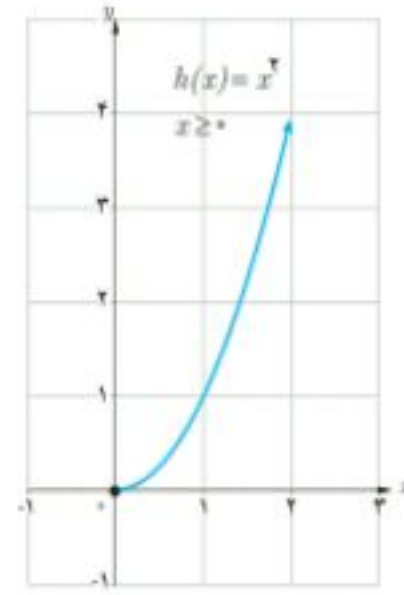


$g$  یک به یک و وارون پذیر است.

$$D = (-\infty, 0]$$



$f$  یک به یک نیست، وارون پذیر هم نیست.



$h$  یک به یک و وارون پذیر است.

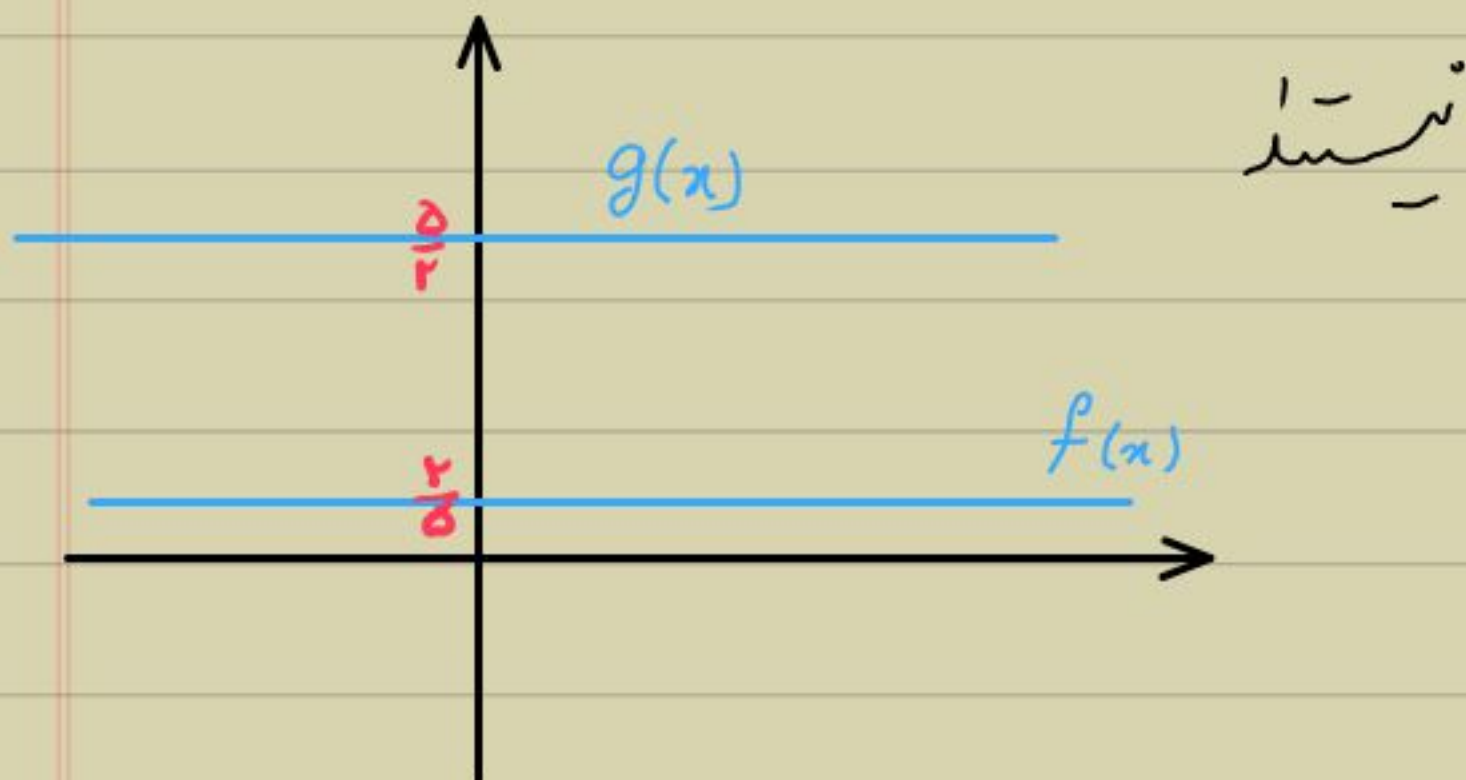
$$D = [0, +\infty)$$

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

۲ آیا تابع  $f(x) = \frac{2}{5}$  وارون تابع  $g(x) = \frac{5}{2}$  است؟

① تابعی که دانش آموزان بدیدند را به معلم ریاضی نشان بدهند

② منبر. اودا نمودار هر تابع خطی موازی محور است و وارون پذیر



نابند؛ هر دو تابع ثابت هستند. بنابراین

$$f(2) = \frac{2}{5}$$

$$g(4) = \frac{5}{2}$$

$$g\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{5}{2} \neq 2$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2}{5} \neq 4$$



۳ به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست

آورید:

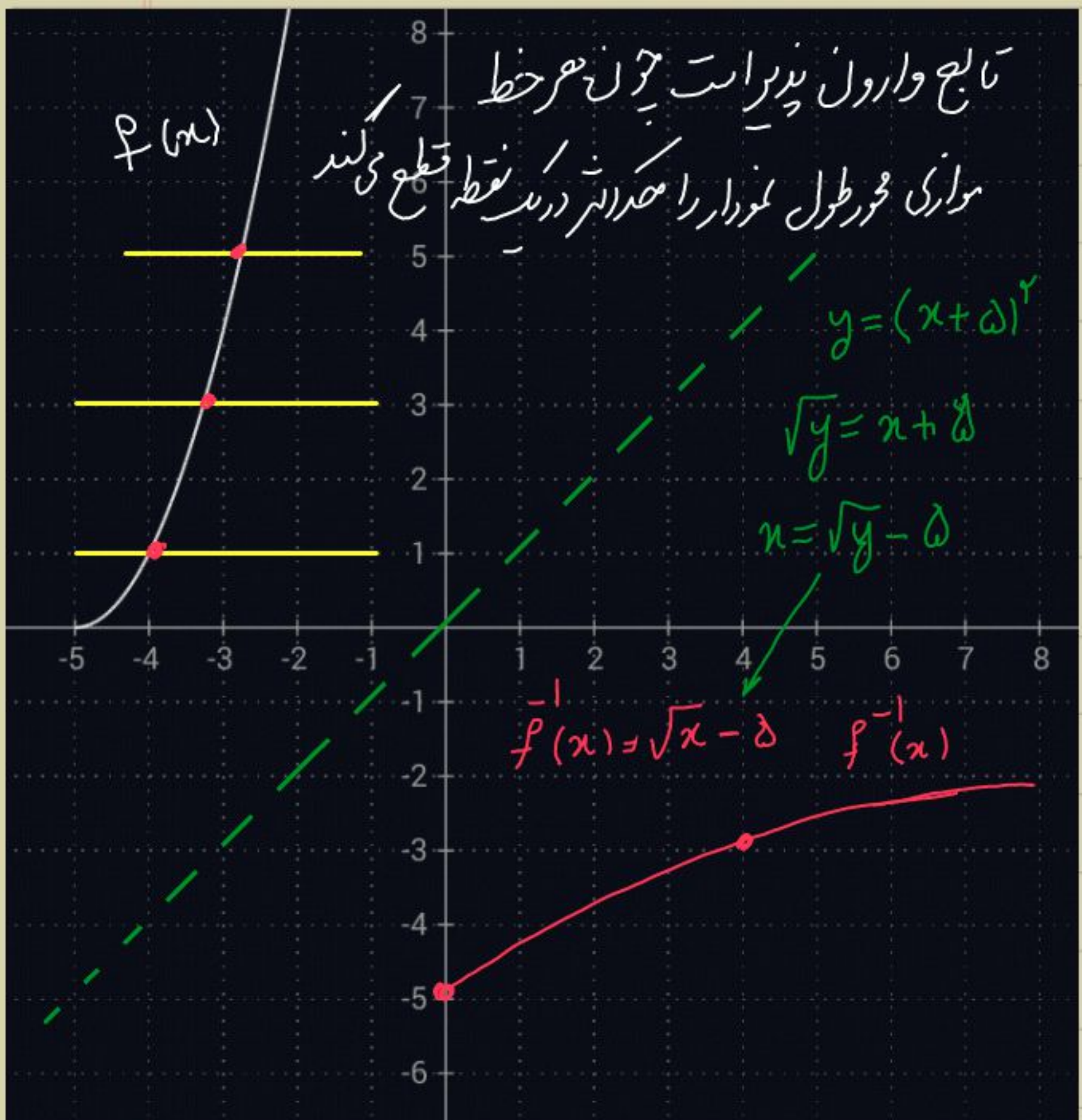
الف)  $f(x) = (x + 5)^2$  ,  $x \geq -5$

ب)  $f(x) = -|x - 1| + 1$  ,  $x \geq 2$

پ)  $f(x) = (x - 3)^2$

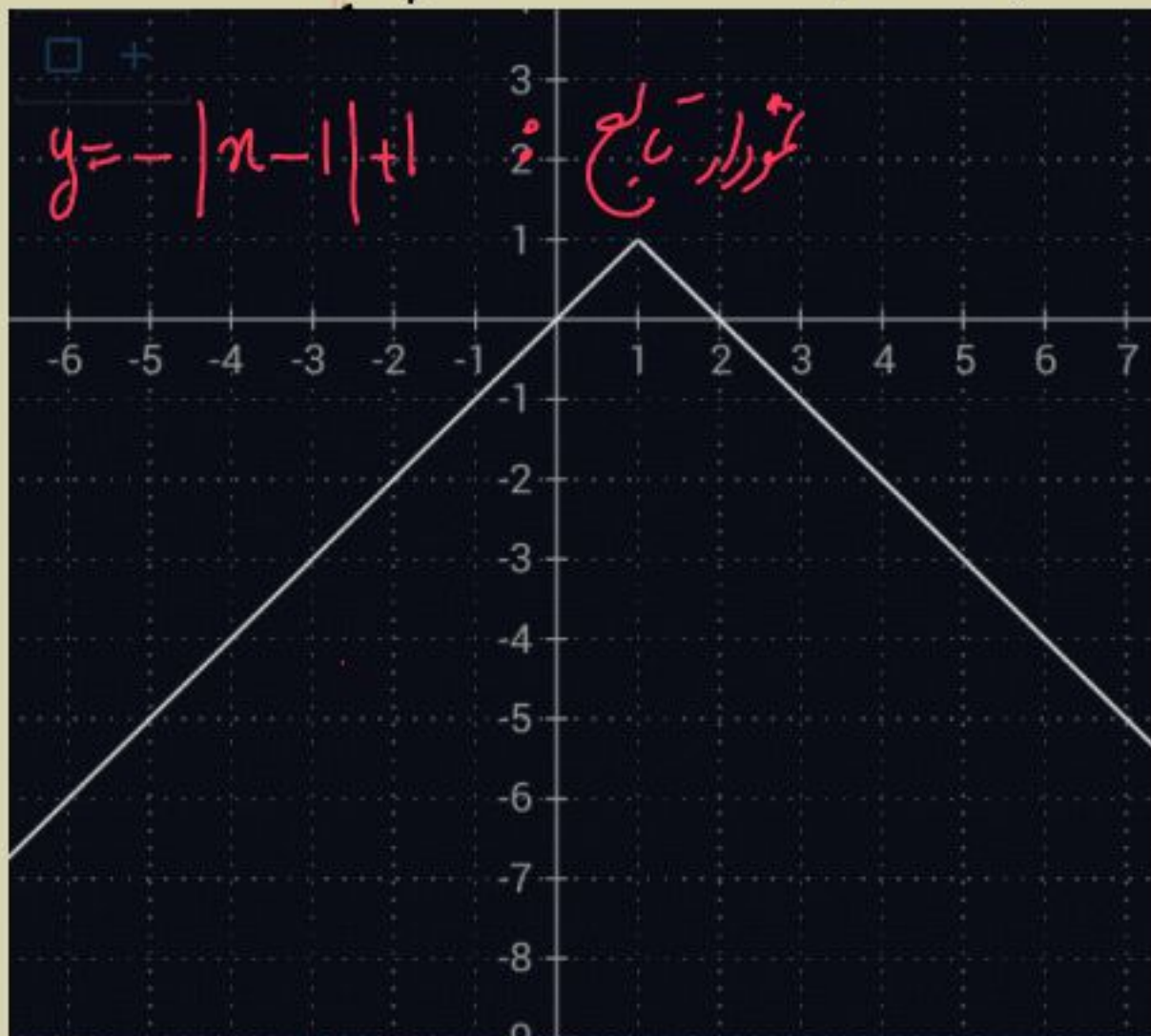
ت)  $f(x) = \sqrt{x + 2} - 3$

الف)  $f(x) = (x + 5)^2$  ,  $x \geq -5$





ب)  $f(x) = -|x-1| + 1$  ،  $x \geq 2$



$x \geq 2$  \*

$y = -|x-1| + 1$

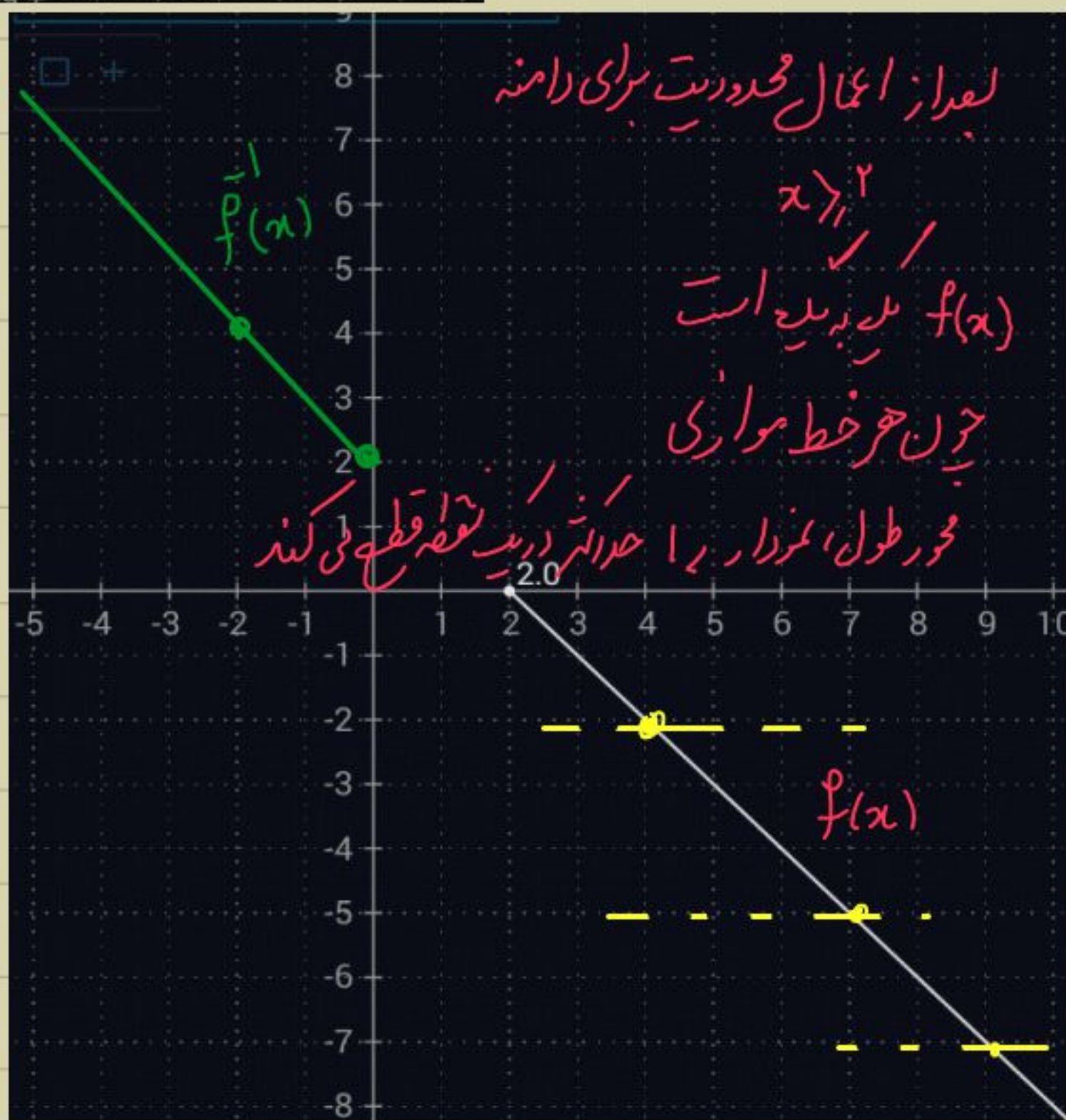
$|x-1| = 1-y$

$x-1 = 1-y$

$x = 2-y$



$f(x) = 2-x$



بعد از اعمال محدودیت برای دامنه

$x \geq 2$

$f(x)$  یک تابع است

چون هر خط صوابی

محور طول، نمودار را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند

$f(x)$



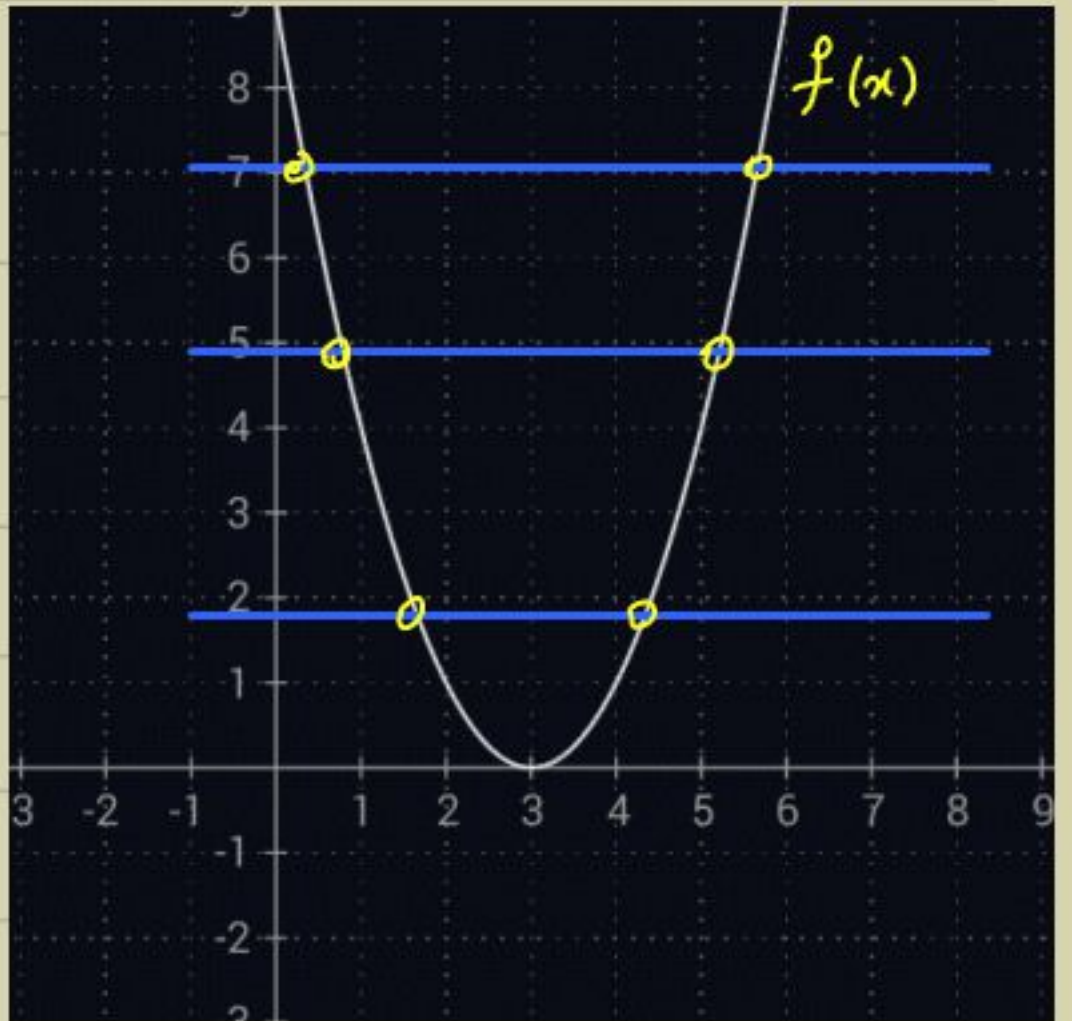
ب)  $f(x) = (x-3)^2$

تابع یک به یک نیست

هر خط موازی محور طول

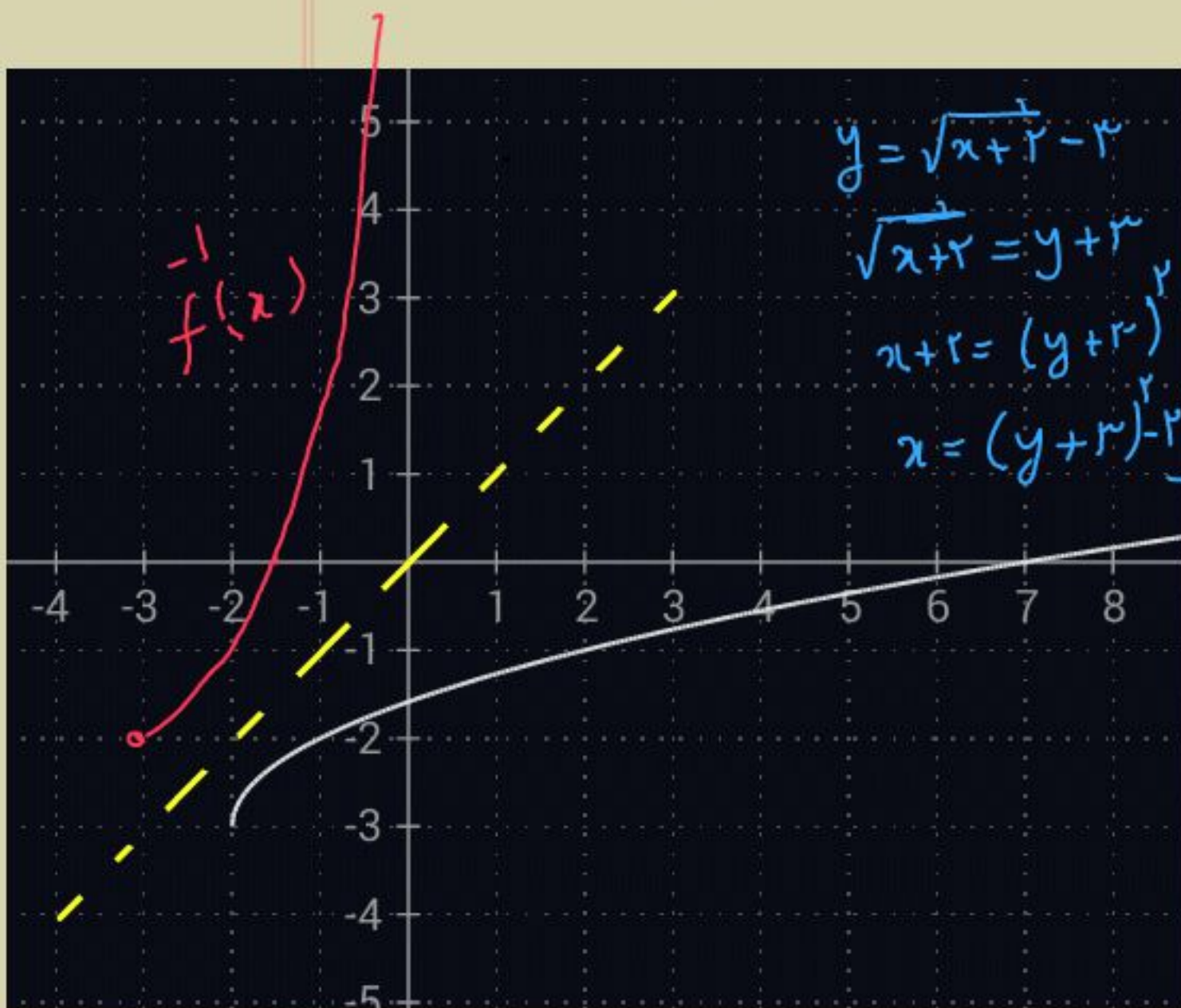
مؤداراً تابع را در بیشتر از

یک نقطه قطع می کند



ج)  $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

تابع یک به یک است



$f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 2$

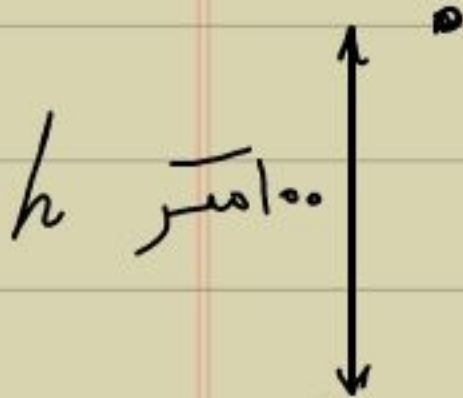
۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن ( $h$ ) بر حسب متر) بعد از  $t$  ثانیه از رابطه  $h(t) = 100 - 5t^2$  به دست می آید.

الف) دامنه و برد  $h$  را به دست آورید.

ب) چرا  $h$  تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون  $h$  را به دست آورید.

(الف)



$$R_h = [0, 100]$$

$$100 - 5t^2 = 0 \rightarrow 5t^2 = 100 \rightarrow t^2 = 20 \rightarrow t = \sqrt{20}$$

$$D_h = [0, \sqrt{20}]$$

(ب) چون بهر ارتفاعی از  $h$  زمان منحصر بفردی از  $t$  تطبیق می شود

$$h(t) = 100 - 5t^2$$

(ب)

$$y = 100 - 5t^2$$

$$\Rightarrow h^{-1}(t) = \sqrt{\frac{100 - t}{5}}$$

$$5t^2 = 100 - y$$

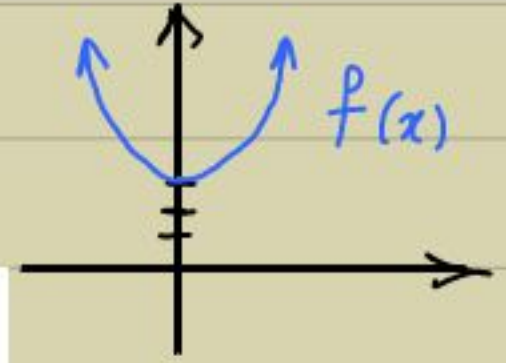
$$t^2 = \frac{100 - y}{5}$$

$$t = \sqrt{\frac{100 - y}{5}}$$



۵ نمودار تابعی مانند  $f$  را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی  $x$ ،  $x < f(x)$ .

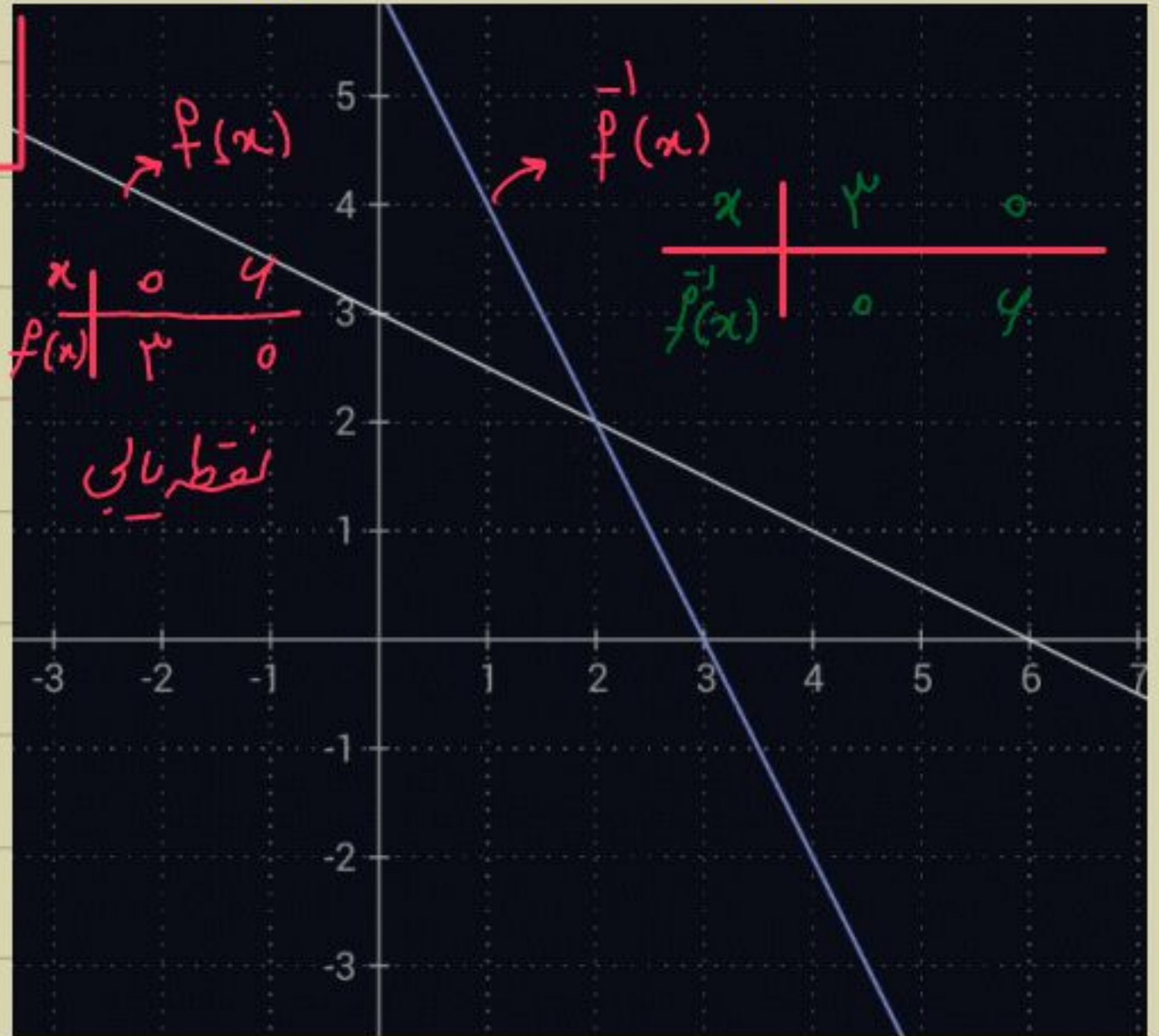
$$f(x) = x^2 + 3$$



۶ وارون تابع  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$  را بیابید و نمودار  $f$  و وارون آن را رسم کنید.

$$y = -\frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 2y = -x + 6 \rightarrow x = -2y + 6$$

$$f^{-1}(x) = -2x + 6$$



محمد مهدی

پسر روز و سر بلند باشد

09213102271-09125102271-@moharrammahdi

تهران

دوم آذرماه سال 1399