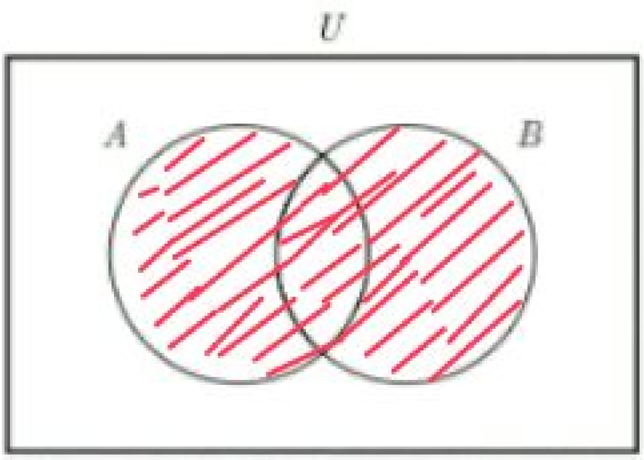
درس ۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

صفحه ۲۶و۲۷ کتاب

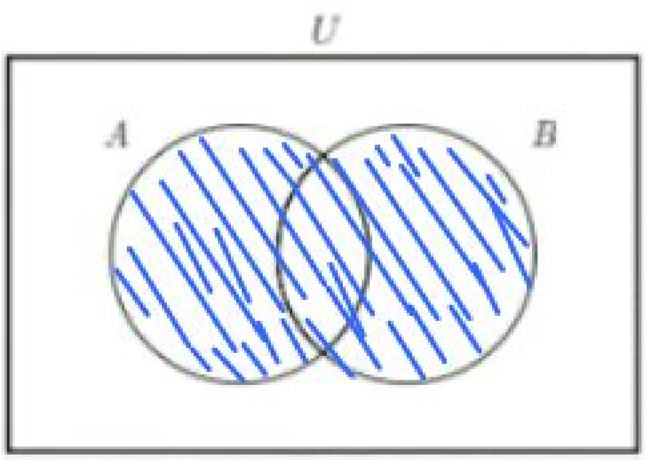
فعالیت

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (ت) از دو رنگ استفاده کنید).

الف)



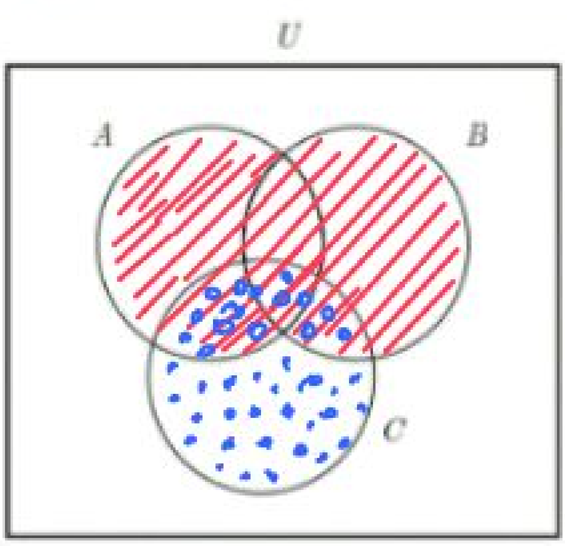
$A \cup B$



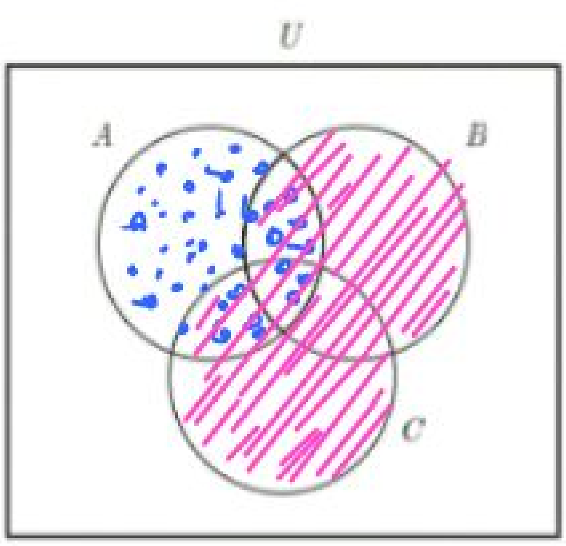
$B \cup A$

خاصیت جابجایی : $(A \cup B) = (B \cup A)$

ب)



$(A \cup B) \cup C$

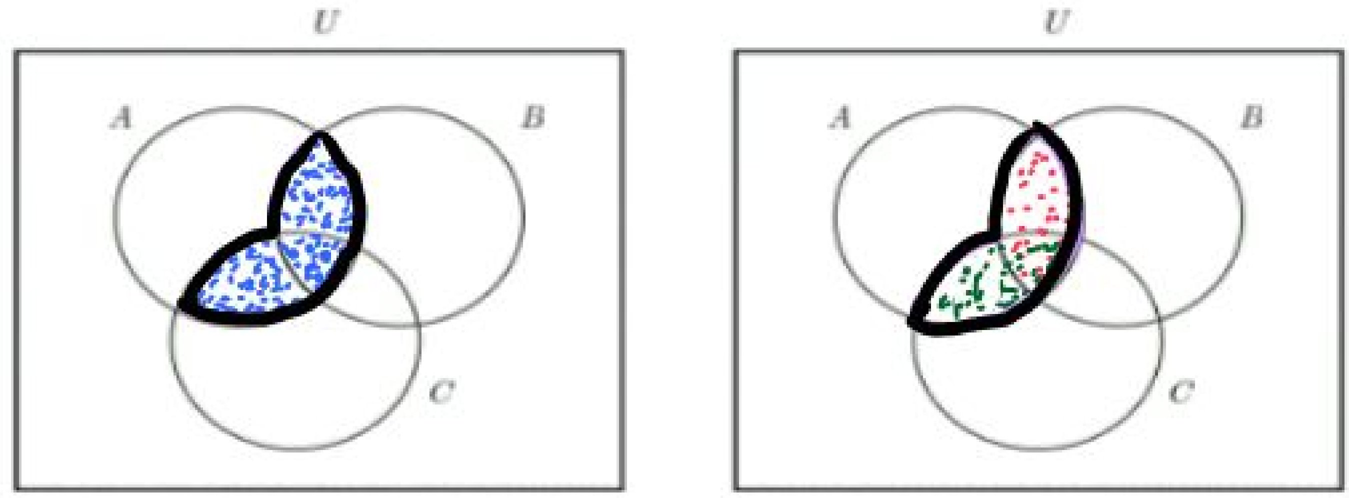


$A \cup (B \cup C)$

خاصیت شرکت پذیری : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

صفحه ۴۷

پ)



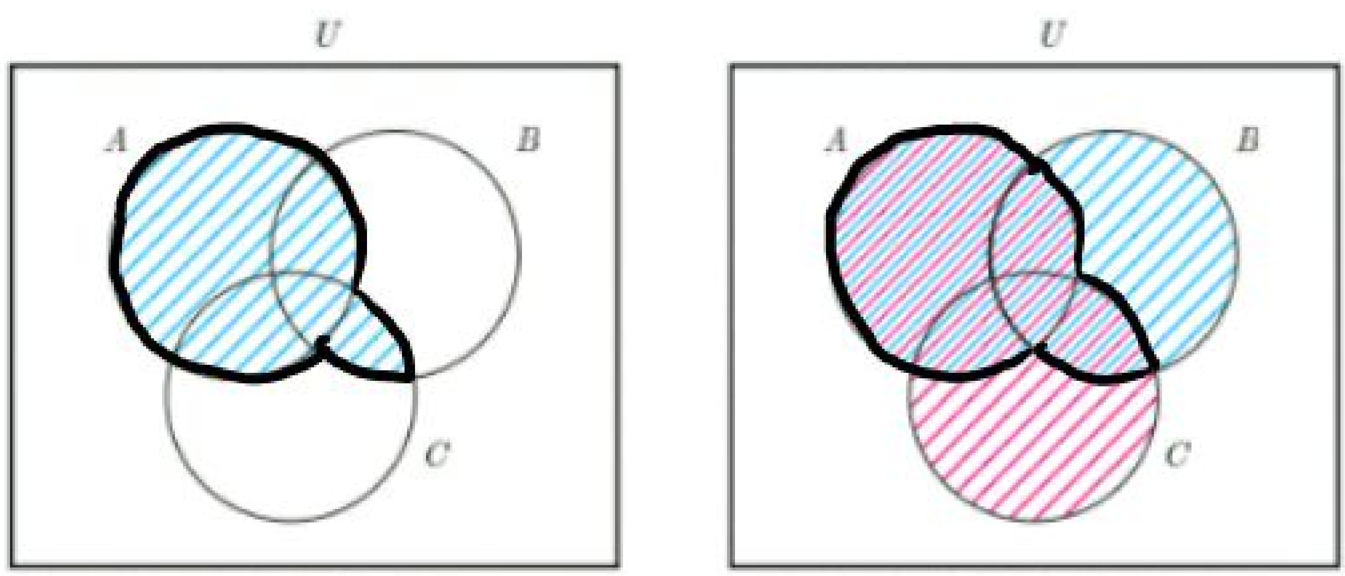
$A\cap(B\cup C)$ $\qquad$ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

قرمز $\qquad$ سبز

توزیع پذیری

خاصیت پخش اشتراک روی اجتماع $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

ت)



$A\cup(B\cap C)$ $\qquad$ $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

خاصیت پخش اجتماع روی اشتراک

توزیع پذیری

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi - @Riazi101112forall2

۲ با فرض اینکه $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶\}$ در این صورت، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

الف) $A\cap B=\{۳\}$

$B\cap A=\{۳\} \longrightarrow A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=\{۱,۲,۳\}\cap\{۵\}=\{\ \}$

$(A\cap B)\cap C=\{۳\}\cap\{۱,۲,۵,۶\}=\{\ \}$ $\Longrightarrow$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=\{۱,۲,۳\}\cap\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\{۱,۲,۳\}$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{۳\}\cup\{۱,۲\}=\{۱,۲,۳\}$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

صفحه ۴۹

کار در کلاس ص ۲۸

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای «$\cup$» و «$\cap$» اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید:

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم: $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$ — تعریف اجتماع

$=\{x\in U \mid x\in B \vee x\in B\}$ — جابه‌جایی «$\vee$»

$=B\cup A$ — تعریف اجتماع

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B، C از مجموعهٔ مرجع U، داریم:

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C)=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in(B\cup C)\}$ — تعریف اجتماع

$=\{x\in U \mid x\in A \vee (x\in B \vee x\in C)\}$ — تعریف اجتماع

$=\{x\in U \mid (x\in A \vee x\in B) \vee x\in C\}$ — شرکت‌پذیری «$\vee$»

$=\{x\in U \mid x\in (A\cup B) \vee x\in C\}$ — تعریف اجتماع

$=(A\cup B)\cup C$ — تعریف اجتماع

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع‌پذیری «$\cup$» نسبت به «$\cap$» را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\forall x:$ [فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$]

$\Rightarrow [x\in A \vee (x\in B\cap C)]$ — تعریف اجتماع

$\Rightarrow [x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)]$ — تعریف اشتراک

$\Rightarrow [(x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\in C)]$ — توزیع‌پذیری «$\vee$» نسبت به «$\wedge$»

$\Rightarrow [x\in A\cup B \wedge x\in A\cup C]$ — تعریف «$\cup$»

$\Rightarrow x\in[(A\cup B)\cap (A\cup C)]$ — تعریف اشتراک

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq (A\cup B)\cap(A\cup C)$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $A\cup(B\cap C) \subseteq (A\cup B)\cap(B\cup C)$ بنابراین، دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است؛ یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنای فاکتورگیری از «$A\cup$» است.)

صفحه ۵۰

کار در کلاس ص ۳۰

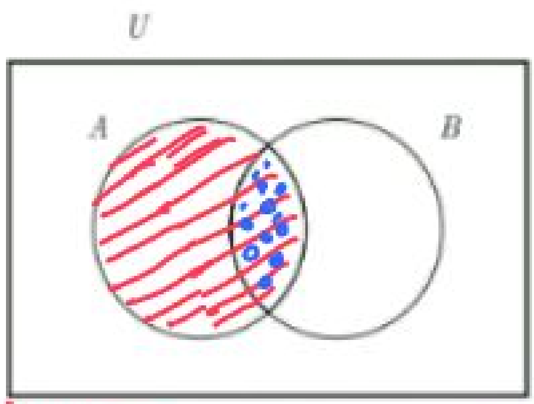
(قوانین جذب یا همپوشانی) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند، می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند، با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

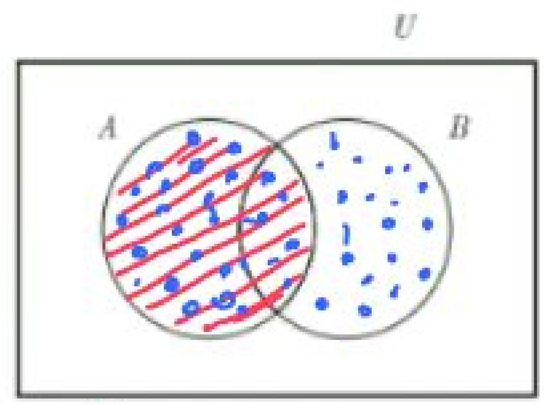
الف) $A\cup(A\cap B)=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=A$

جذب

ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:





هاشور ← $A\cup(A\cap B)$ → نقطه‌چین

هاشور ← $A\cap(A\cup B)$ → نقطه‌چین

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C\subseteq D$ در این صورت $(C\cup D)=D$ و $(C\cap D)=C$ است.

(اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\cap B)\subseteq A \xRightarrow{\text{قضیه}} A\cup(A\cap B)=A$

(اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq(A\cup B) \xRightarrow{\text{قضیه}} A\cap(A\cup B)=A$

ص ۳۱

روش دیگری برای اثبات قوانین جذب نیز وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(U\cup B)$ توزیع‌پذیری

$=A\cap U=A$

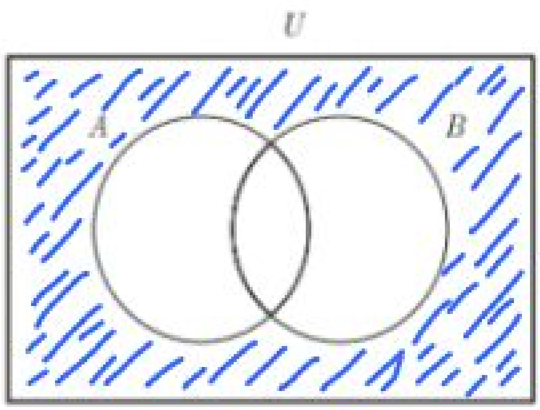
ب) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\varnothing\cap B)$ توزیع‌پذیری

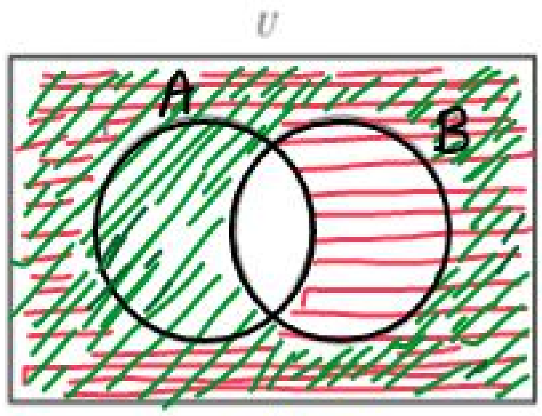
$=A\cup\varnothing=A$

فعالیت ص ۳۲

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، روی شکل سمت چپ، $(A\cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



$(A\cup B)'$



هاشور سبز $A'\cap B'$ ← هاشور قرمز

۲ اگر فرض کنیم: $U=\{1, 2, \ldots, 10\}$ و $A=\{2, 3, 5, 8\}$ و $B=\{3, 4, 6, 8\}$ هر یک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\cup B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تساوی‌های زیر را که به **قوانین دمورگان** معروف‌اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند:

الف) $(A\cup B)'=(A'\cap B')$

ب) $(A\cap B)'=(A'\cup B')$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه و تعریف تساوی بین دو مجموعه، تساوی $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ را اثبات کنید.

(باید ثابت کنید، $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ و $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$)

$\forall x:[x\in(A\cup B)'\Rightarrow x\notin(A\cup B)\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Rightarrow x\in(A'\cap B')]\Rightarrow\boxed{(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')}$ ۱

ادامه در صفحه بعد

۲) $A\cap B=\{3, 8\}\longrightarrow(A\cap B)'=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$

$A'=\{1, 4, 6, 7, 9, 10\}\qquad B'=\{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$

$A'\cup B'=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$

صفحه ۵۲

$$\forall x: [x \in (A' \cap B')] \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B'$$

$$\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$\Rightarrow x \notin (A \cup B)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$$

یعنی $\boxed{(A' \cap B') \subseteq (A \cup B)'}$ ۲

$$①, ② \Longrightarrow (A \cup B)' = (A' \cap B')$$

کار در کلاس صفحه ۳۳

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(A-B)'=(A' \cup B)$

ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$

پ) $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$

الف) $(A-B)' = (A \cap B')' \underset{\text{دمرگان}}{=} A' \cup B$

لم تبدیل تفاضل به اشتراک

ب) $(A-B)-C = (A \cap B')-C = (A \cap B') \cap C'$

$= (A \cap C') \cap B' = (A-C) \cap B' = (A-C)-B$

جابه‌جایی

تبدیل تفاضل به اشتراک

ج) طرف دوم $(A-B) \cup (A-C) = (A \cap B') \cup (A \cap C') = A \cap (B' \cup C')$

فاکتور

$= A \cap (B \cap C)' = A-(B \cap C)$

دمرگان

صفحه ۵۳

کار در کلاس ص ۳۴،۳۵

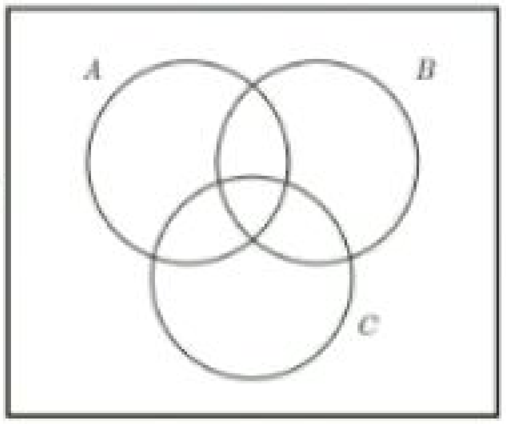
۱ اگر $U=\{۱, ۲, \dots, ۲۰\}$ و $B=\{۵, ۶, \dots, ۱۵\}$ و $A=\{۱, ۲, \dots, ۱۰\}$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)$

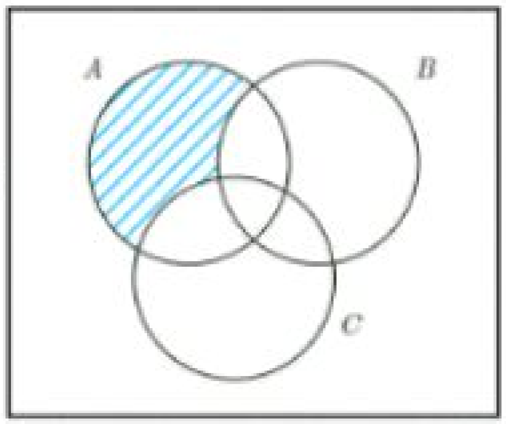
ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])$

(راهنمایی : ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است، مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.



الف) اعضایی که فقط در A باشند.



حل سوال (۱)

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)$

$$A\cap(B'\cup B) = A\cap U = A = \{1, 2, \dots, 10\}$$

ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])$

جذب $(B\cap A')\cup A' = A'$

$$(A\cap B')\cap A' = \underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cap B' = \varnothing$$

صفحه ۵۴

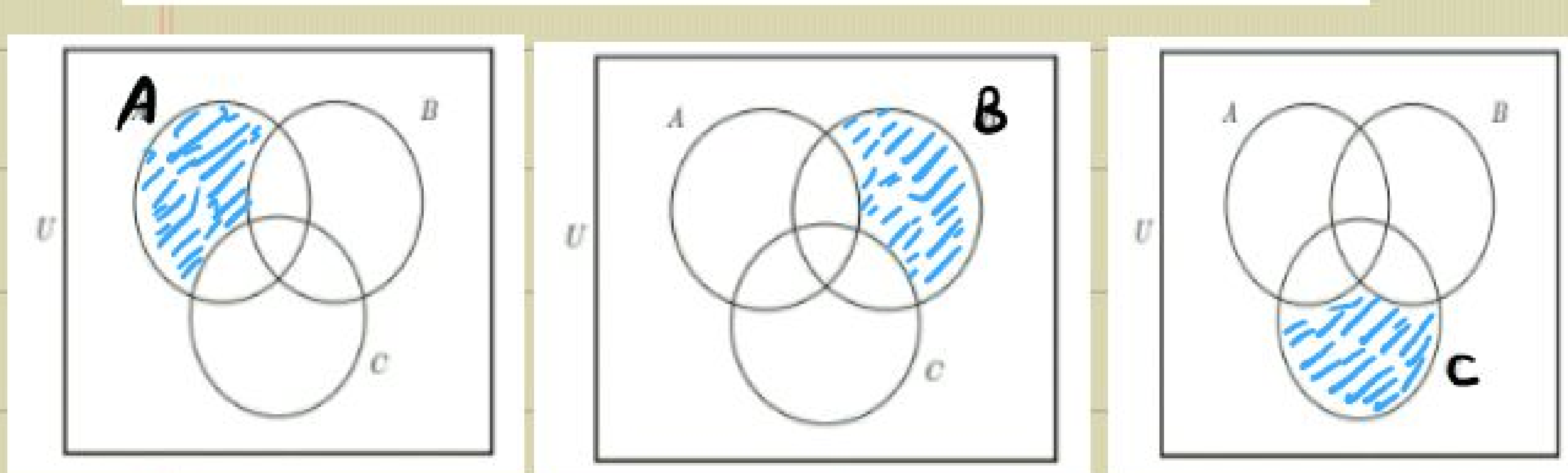
حاصل

$$(A-B)\cup\varnothing = A-B$$
$\{1, 2, 3, 4\}$

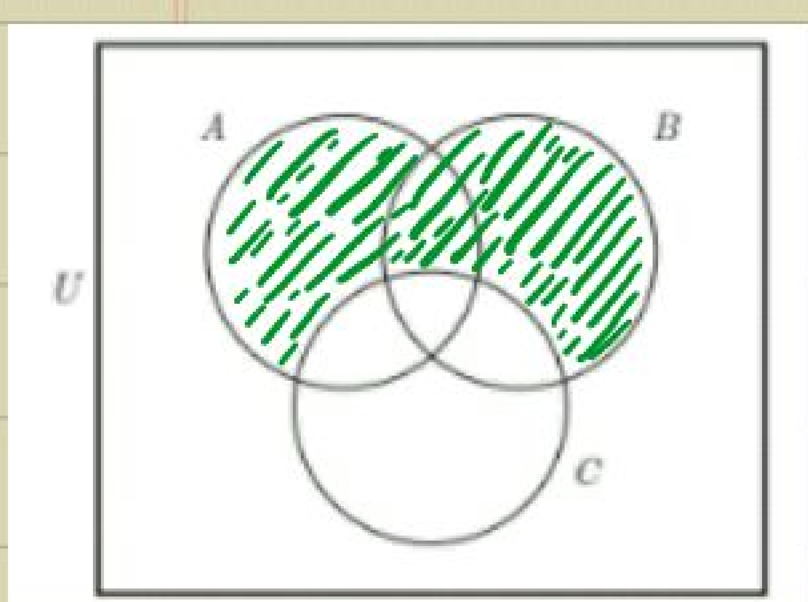
ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه‌اند.

پ) اعضایی که در A و B باشند، ولی در C نباشند.

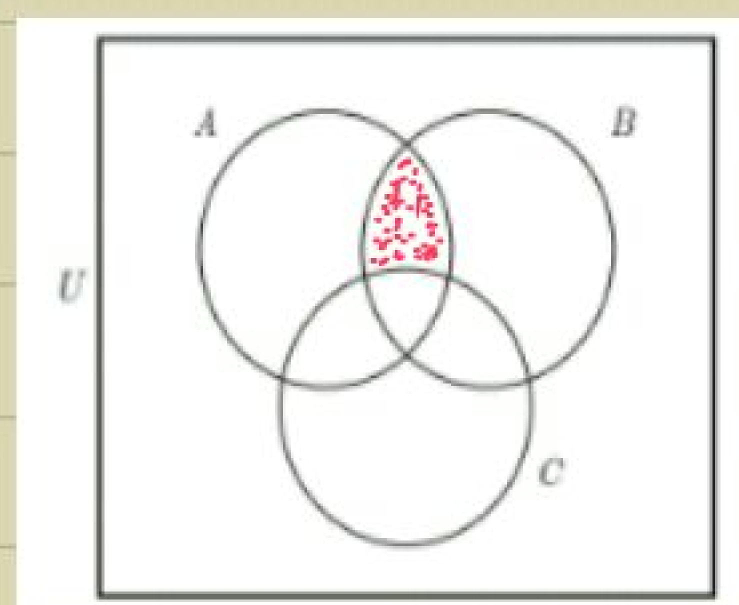
ت) اعضایی که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.



(ب)



(ت)



(پ)

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi - @Riazi101112forall2

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه : اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $A\times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x,y) متعلق به $A\times B$، همواره مؤلفه یا مختص اول، یعنی x باید از مجموعهٔ A و متناظراً مؤلفهٔ دوم، یعنی y باید از مجموعهٔ B باشد.

کار در کلاس صفحه ۳۵

در مثال قبل دیدید که در مجموعهٔ $A\times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل شش زوج مرتب به‌وجود آمد، حال اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید. $n(A\times B)=mk$

مجموعهٔ A دارای m عضو است $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots a_m\}$

مجموعه B هم دارای k عضو است $B=\{b_1,b_2,b_3,\ldots b_k\}$

$A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$

در $A\times B$ هر عضو از A را انتخاب کنیم با اعضای مجموعه B به تعداد k زوج مرتب تشکیل می‌دهد مثلاً : $(a_1,b_1)\ (a_1,b_2),\ldots (a_1,b_k)$

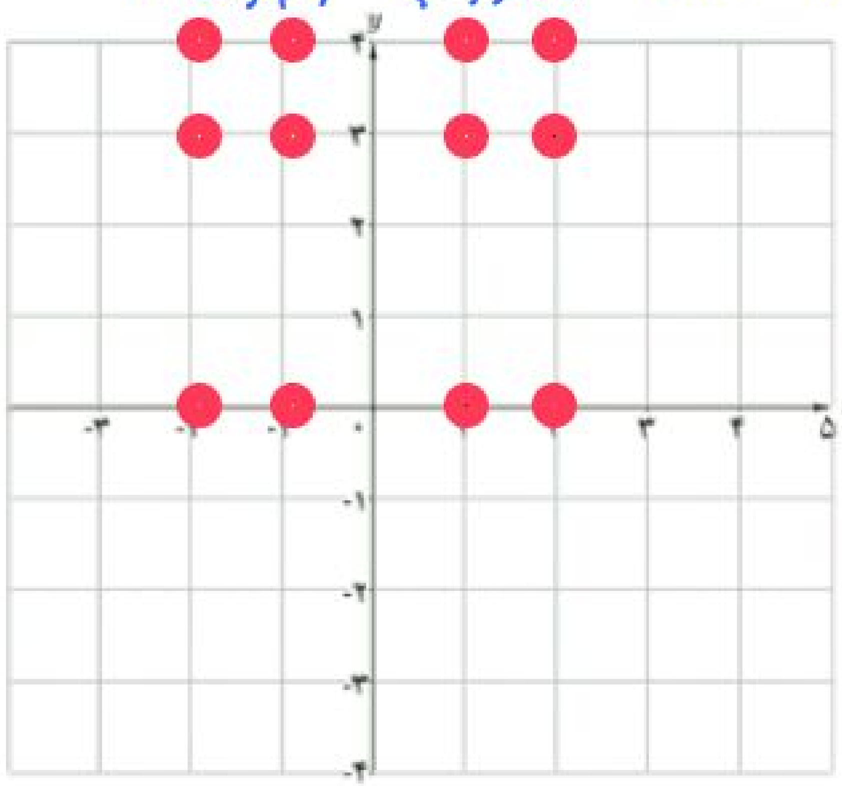
طبق اصل ضرب تعداد زوج‌های مرتب $A\times B$ به صورت $m\times k$ خواهد بود یعنی : $n(A\times B)=mk$

فعالیت

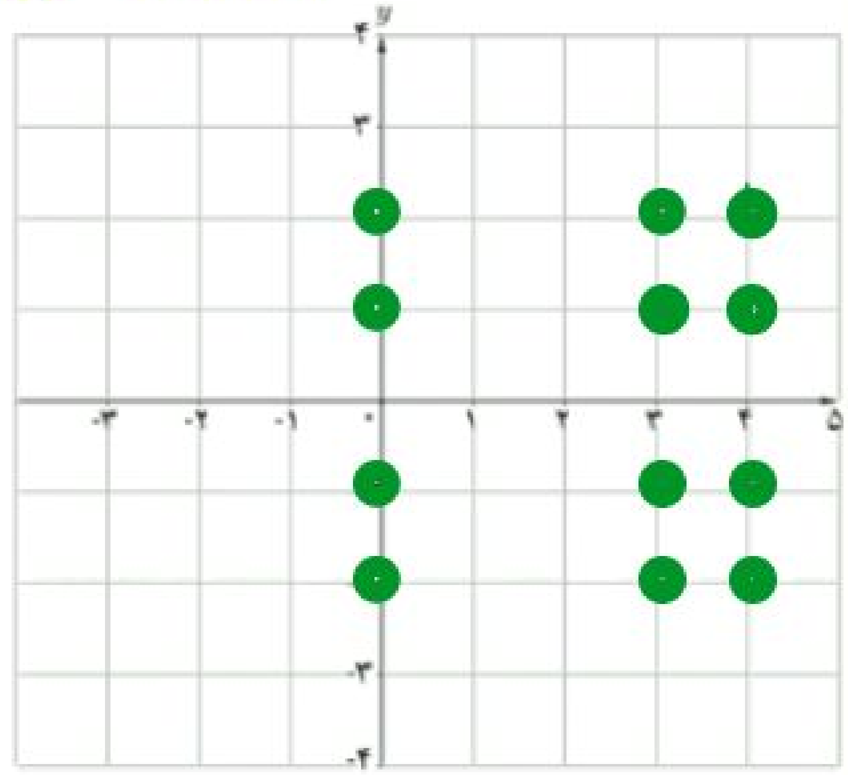
ص ۳۶ کتاب

۱ اگر $A=\{1,-1,2,-2\}$ و $B=\{0,3,4\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$$A\times B=\left\{\begin{array}{lllll}(1,0) & (-1,0) & & & \\ (1,3) & (-1,3) & (2,0) & (2,4) & (-2,3) \\ (1,4) & (-1,4) & (2,3) & (-2,0) & (-2,4)\end{array}\right\}$$



نمودار مختصاتی $A\times B$



نمودار مختصاتی $B\times A$

$$B\times A=\left\{\begin{array}{llll}(0,1), & (0,-1), & (0,2), & (0,-2) \\ (3,1), & (3,-1), & (3,2), & (3,-2) \\ (4,1), & (4,-1), & (4,2), & (4,-2)\end{array}\right\}$$

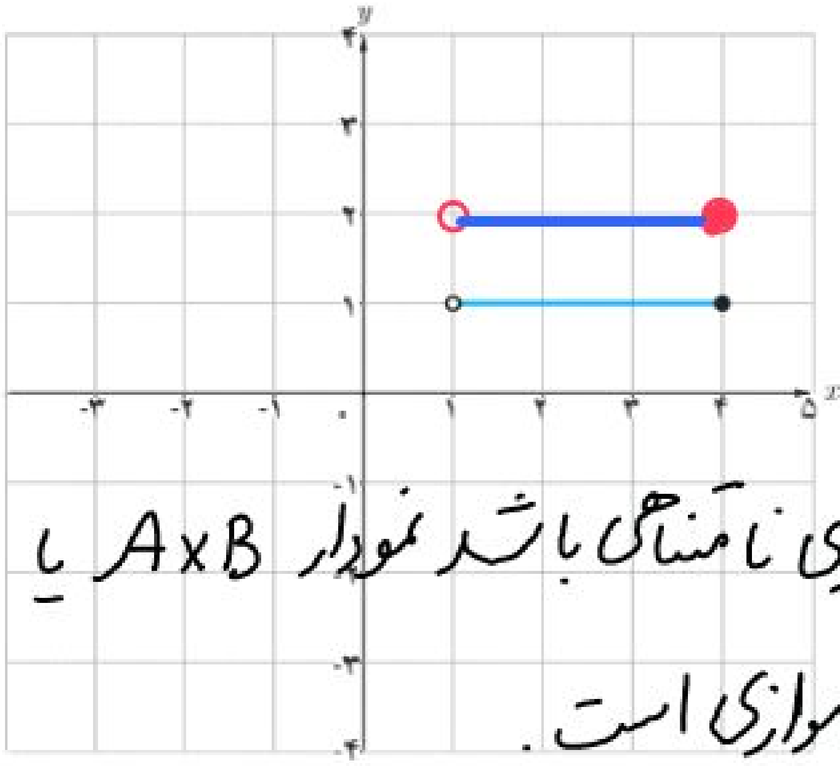
توجه: اگر هر ۲ مجموعهٔ A و B متناهی باشند نمودار $A\times B$ و $B\times A$ تعدادی نقطه در صفحه است.

صفحه ۵۷

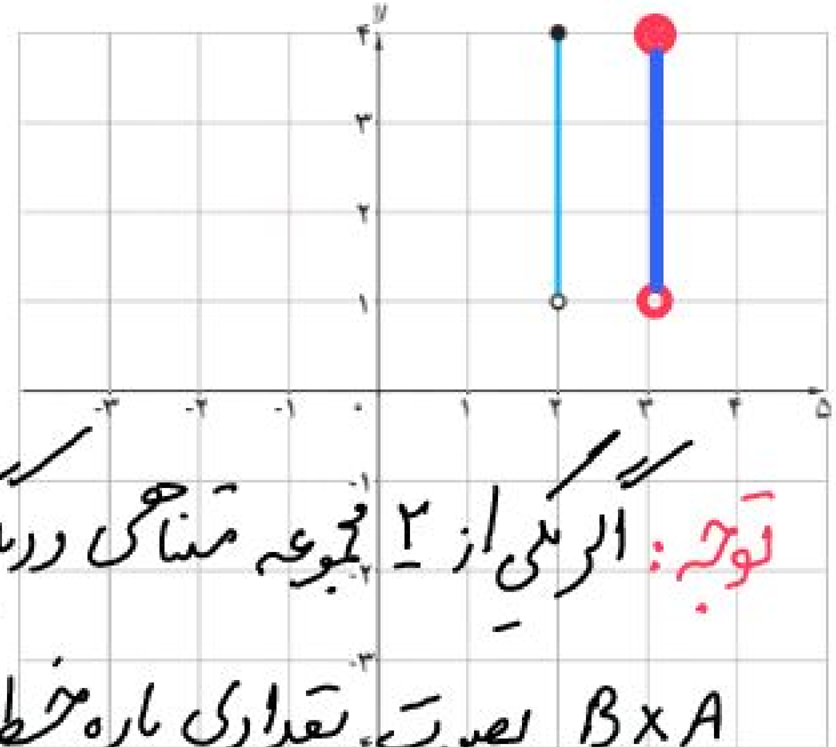
۲ اگر فرض کنیم : $A=(۱,۴]$ و $B=\{۱,۲\}$ در این صورت، نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$A\times B=\{(x,y)|x\in(۱,۴]\wedge y\in B\}$

$B\times A=\{(x,y)|(x=۱\vee x=۲)\wedge ۱<y\leq ۴\}$



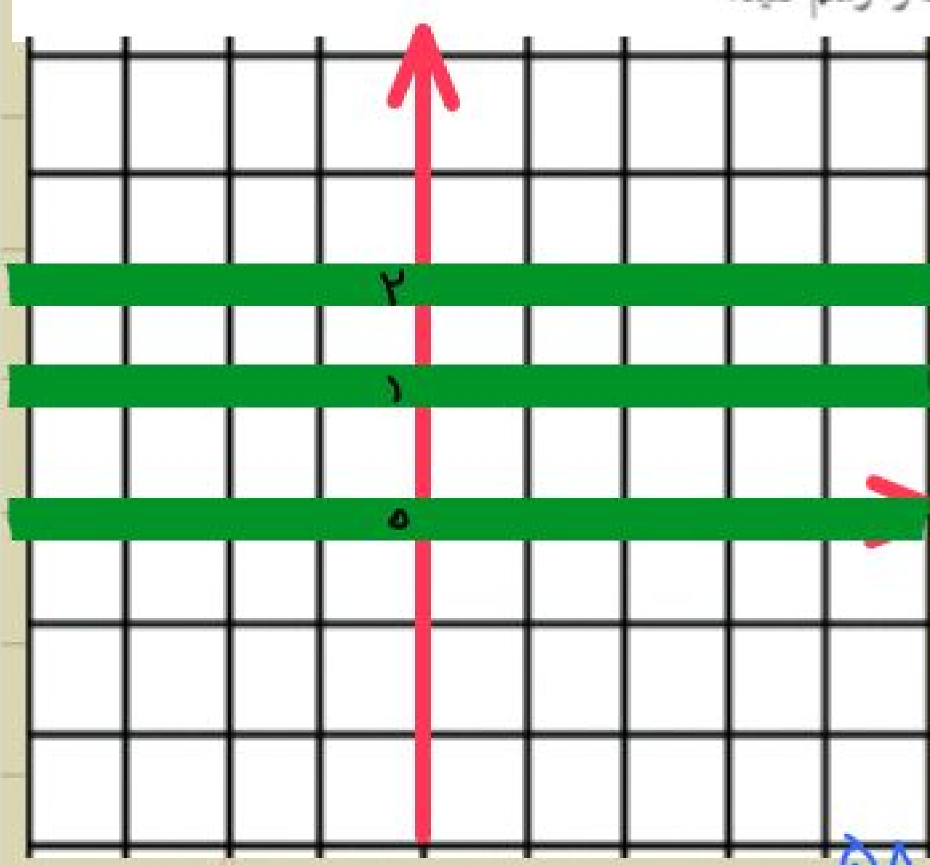
نمودار $A\times B$



نمودار $B\times A$

توجه: اگر یکی از ۲ مجموعه متناهی و دیگری نامتناهی باشد نمودار $A\times B$ یا $B\times A$ بصورت تعدادی پاره خط موازی است.

۳ اگر فرض کنیم: $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۰,۱,۲\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.

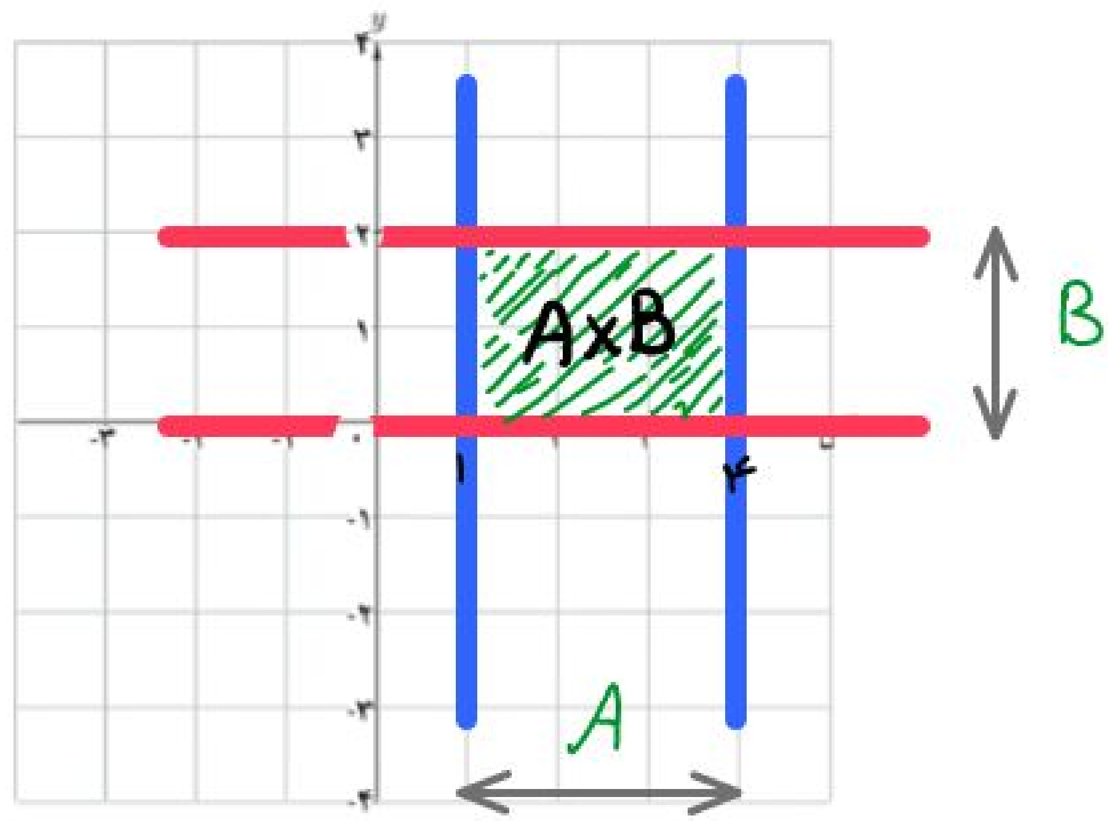


۳ خط موازی که محور y ها را در نقاط ۰ و ۱ و ۲ قطع می‌کنند

صفحه ۵۸

۴ در صورتی که $A=[۱,۴]$ و $B=[۰,۲]$ در این صورت، نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$A\times B=\{(x,y)|۱\le x\le ۴ \wedge ۰\le y\le ۲\}$

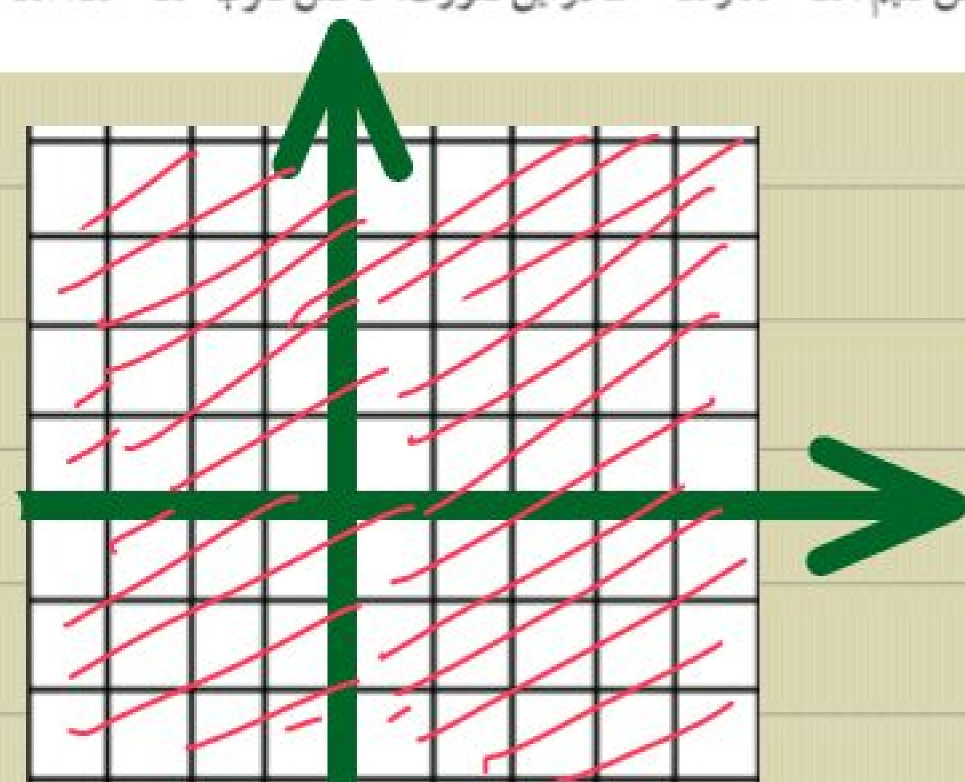


۵ در صورتی که فرض کنیم: $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{R}$ در این صورت، حاصل‌ضرب $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^۲$ را چگونه تعبیر می‌کنید؟

$A\times B=\mathbb{R}^۲$

کل نقاط داخل

صفحه‌ی مختصات



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi - @Riazi101112forall2

کار در کلاس .... صفحه ۳۷ و ۳۸ ....

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت :

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم :

فرض کنیم : $A\times\varnothing\neq\varnothing$ (فرض خلف) در این صورت، حداقل یک عضو مانند (x,y) در $A\times\varnothing$ باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in A\times\varnothing \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in A \wedge \underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف، باطل شده است و حکم برقرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

$\underbrace{\text{فرض کنید : } \varnothing\times A\neq\varnothing}_{\text{فرض خلف}} \to \exists (x,y)\in(\varnothing\times A)\to$

$\underbrace{x\in\varnothing}_{\text{تناقض}},\ y\in A \Rightarrow$ فرض خلف باطل و حکم درست است

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم : $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت، به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرضِ $A\times B=B\times A$، ثابت می‌کنیم $A=B$.

$$\forall x\in A,\ \forall y\in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x,y)\in A\times B$$

$$\xrightarrow{A\times B=B\times A} (x,y)\in B\times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B \wedge y\in A \Rightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$$

$$\Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)

صفحه ۶

تمرین ص ۳۸ کتاب

۱ با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

الف)
$$A\cap B=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B\}$$
$$\{x\in U \mid x\in B \wedge x\in A\}=B\cap A$$

ب)
$$A\cap(B\cap C)=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\in(B\cap C)\}$$
$$=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B \wedge x\in C\}$$
$$=\{(x\in U \mid (x\in A \wedge x\in B) \wedge x\in C\}$$
$$=\{x\in U \mid x\in(A\cap B) \wedge x\in C\}=(A\cap B)\cap C$$

پ)
$$A\cap(B\cup C)=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\in(B\cup C)\}$$
$$=\{x\in U \mid x\in A \wedge (x\in B \vee x\in C)\}$$
$$=\{x\in U \mid (x\in A \wedge x\in B) \vee (x\in A \wedge x\in C)\}$$
$$=\{x\in U \mid x\in(A\cap B) \vee x\in(A\cap C)\}$$
$$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

با روش مشابه از طرف دوم به طرف اول هم میتوان رسید صفحه ۶۱

۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)$ طرف اول

$$(A\cap B)\cup(A\cap B') = A\cap(B\cup B') = A\cap U = A$$

جابجایی

ب) $(A'\cap B')\cap A = (A'\cap A)\cap B' = \varnothing\cap B' = \varnothing$

شرکت پذیری

پ) $A\cap(B\cap C) = (A\cap A)\cap(B\cap C)$

$$= A\cap\big(A\cap(B\cap C)\big)$$

$$= A\cap(A\cap B)\cap C$$ خاصیت جابجائی

$$= (A\cap B)\cap(A\cap C)$$

ت) $A\cup(B\cup C) = (A\cup A)\cup(B\cup C)$

$$= A\cup\big(A\cup(B\cup C)\big)$$

$$= A\cup(A\cup B)\cup C$$ خاصیت جابجائی

$$= (A\cup B)\cup(A\cup C)$$

صفحه ۶۲

۲ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A'\cap B)\cup([(B\cap A)-B']\cap(B\cup A))$
ب) $(A\cup B)-B$
پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

الف) $(A'\cap B)\cup([(B\cap A)-B']\cap(B\cup A))$

جابجائی

تبدیل تفاضل به اشتراک

$(B\cap A)\cap(B')'$

$B\cap A'$

$(B\cap A)\cap B$

$B\cap A$

حاصل: $(B\cap A')\cup(B\cap A)=B\cap(A'\cup A)=B\cap U=B$

حاصل کل عبارت : $B\cap(B\cup A)\xrightarrow{\text{جذب}}=B$

ب) $(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=(B'\cap A)\cup(B'\cap B)$
$=(B'\cap A)\cup\varnothing=A\cap B'=A-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

$(A\cup B)\cap A'=(A'\cap A)\cup(A'\cap B)=\varnothing\cup(A'\cap B)=A'\cap B$

حاصل: $(A'\cap B)\cup(A\cap B)=B\cap(A'\cup A)=B\cap U=B$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow X=U$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)]\Rightarrow B=C$

الف) $(A\subseteq x)\wedge(A'\subseteq x)\rightarrow(A\cup A')\subseteq x\rightarrow U\subseteq x$

از طرفی میدانیم $x\subseteq U \longrightarrow x=U$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)$

$(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A$

پ) طرف دوم: $(A-C)\cap(B-C)$

$(A\cap C')\cap(B\cap C')$

$(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$ طرف اول

ت) طرف دوم: $(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$

$=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$

$=[\underbrace{(A'\cap A)}_{\varnothing}\cup\underbrace{(A'\cap B)}_{B-A}]\cup[\underbrace{(B'\cap A)}_{A-B}\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}]$

$=(A-B)\cup(B-A)$

صفحه ۴۴

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')$ 　 فرض: $A\cup B=k$

$$(A\cup B)\cap \underbrace{(A\cup B)'}_{\text{دمرگان}} = k\cap k' = \varnothing$$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)] \Rightarrow B=C$

$$B=\overset{\text{جذب}}{B\cap(A\cup B)} \xrightarrow{A\cup B=A\cup C} = B\cap(A\cup C) =$$

$$=(B\cap A)\cup(B\cap C) \xrightarrow{A\cap B=A\cap C}$$

$$=(A\cap C)\cup(B\cap C) = C\cap(A\cup B) \xrightarrow{A\cup B=A\cup C}$$

$$=\underbrace{C\cap(A\cup C)}_{\text{جذب}} = C$$

۵ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ در این صورت، با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

$A\times B=B\times A \longrightarrow A=B$

$x+۱=۵ \longrightarrow x=۴$

$\begin{cases} z=-۲ \\ y+۲=۴ \longrightarrow y=۲ \end{cases}$ یا $\begin{cases} y+۲=-۲ \longrightarrow y=-۴ \\ z=۴ \end{cases}$

$x=۴, y=۲, z=-۲ \longrightarrow x+y+z=۴+۲-۲=۴$

$x=۴, y=-۴, z=۴ \longrightarrow x+y+z=۴-۴+۴=۴$

$Max=۴$

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{۲,۳\}, B=\{۲,۳,۴\}$

ب) $A=\{۳,۴\}, B=(۱,۵]$

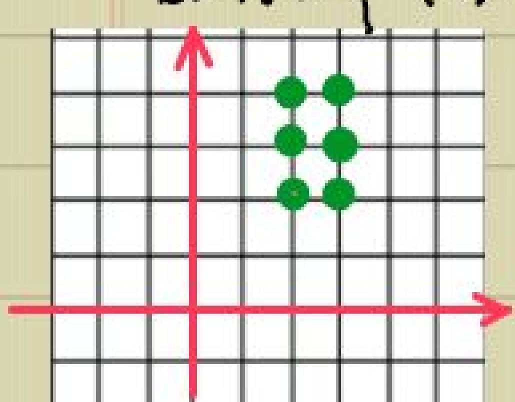
پ) $A=[۲,۶], B=[۳,۸]$

ت) $A=\mathbb{N}, B=[۱,۴]$

ث) $A=\mathbb{R}, B=\{۲,۳\}$

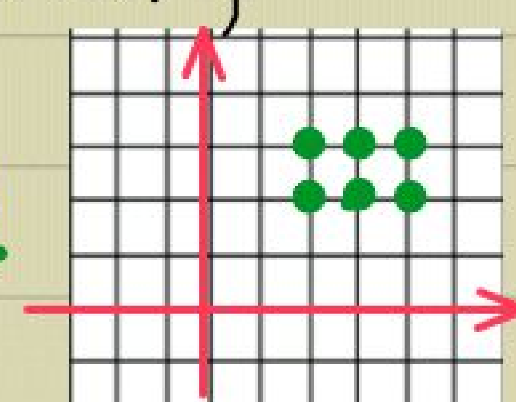
الف) $A\times B=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴)\}$

$B\times A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۴,۲),(۴,۳)\}$



$A\times B \longleftarrow$

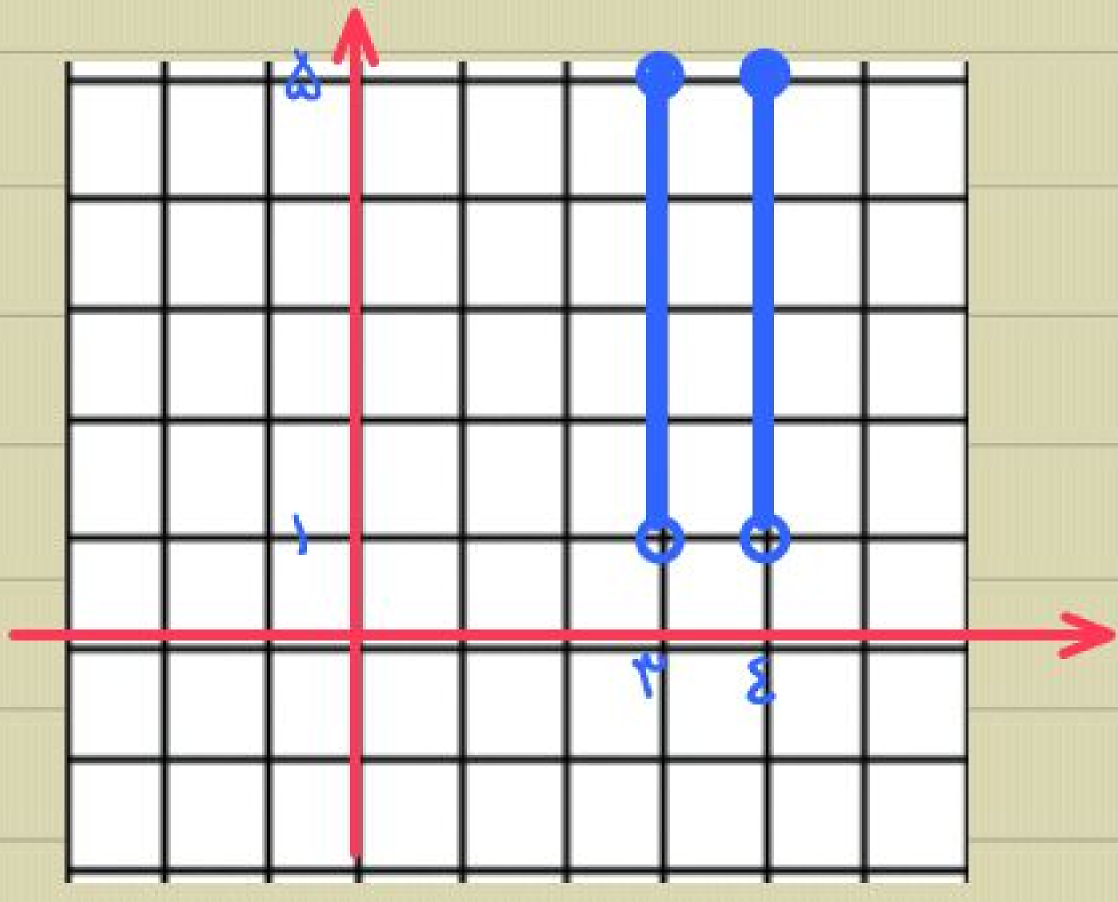
$\longrightarrow B\times A$



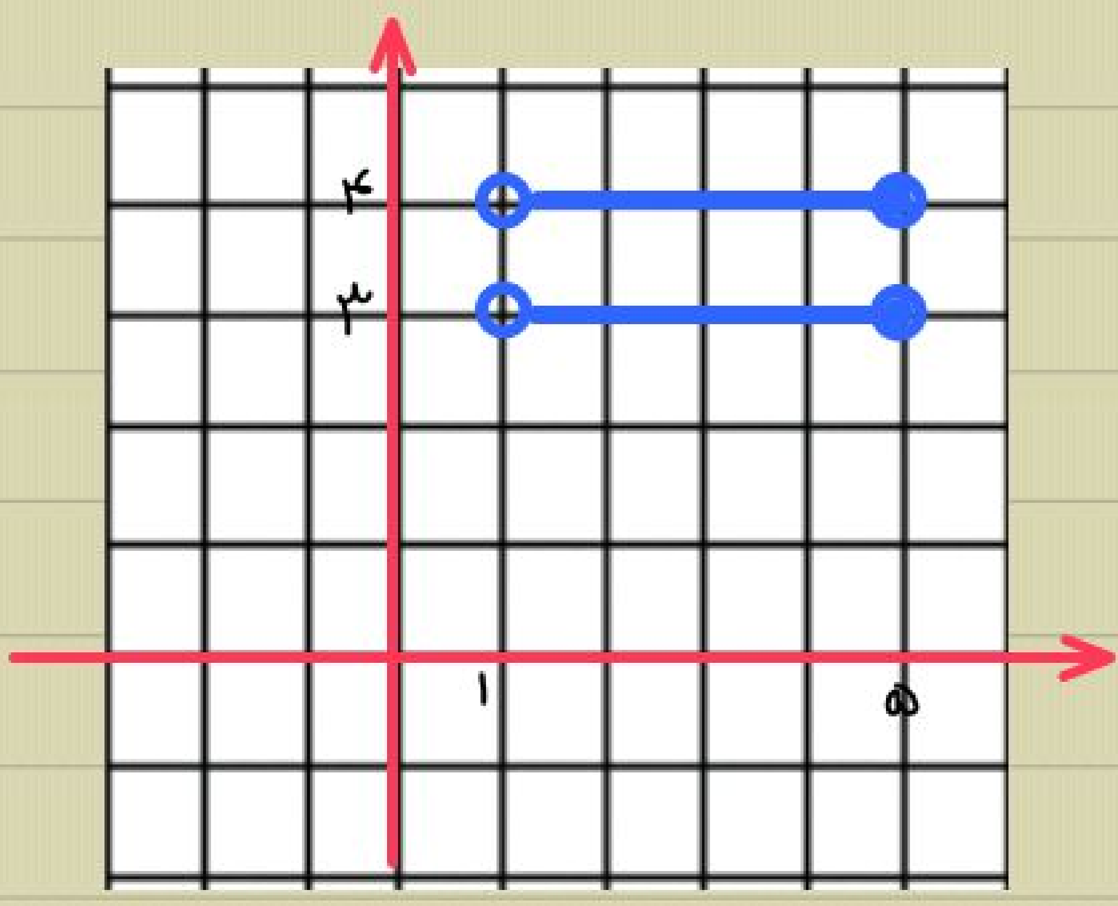
صفحه ۴۴

ب) $A=\{۳,۴\}$ $B=(۱,۵]$

$A \times B$

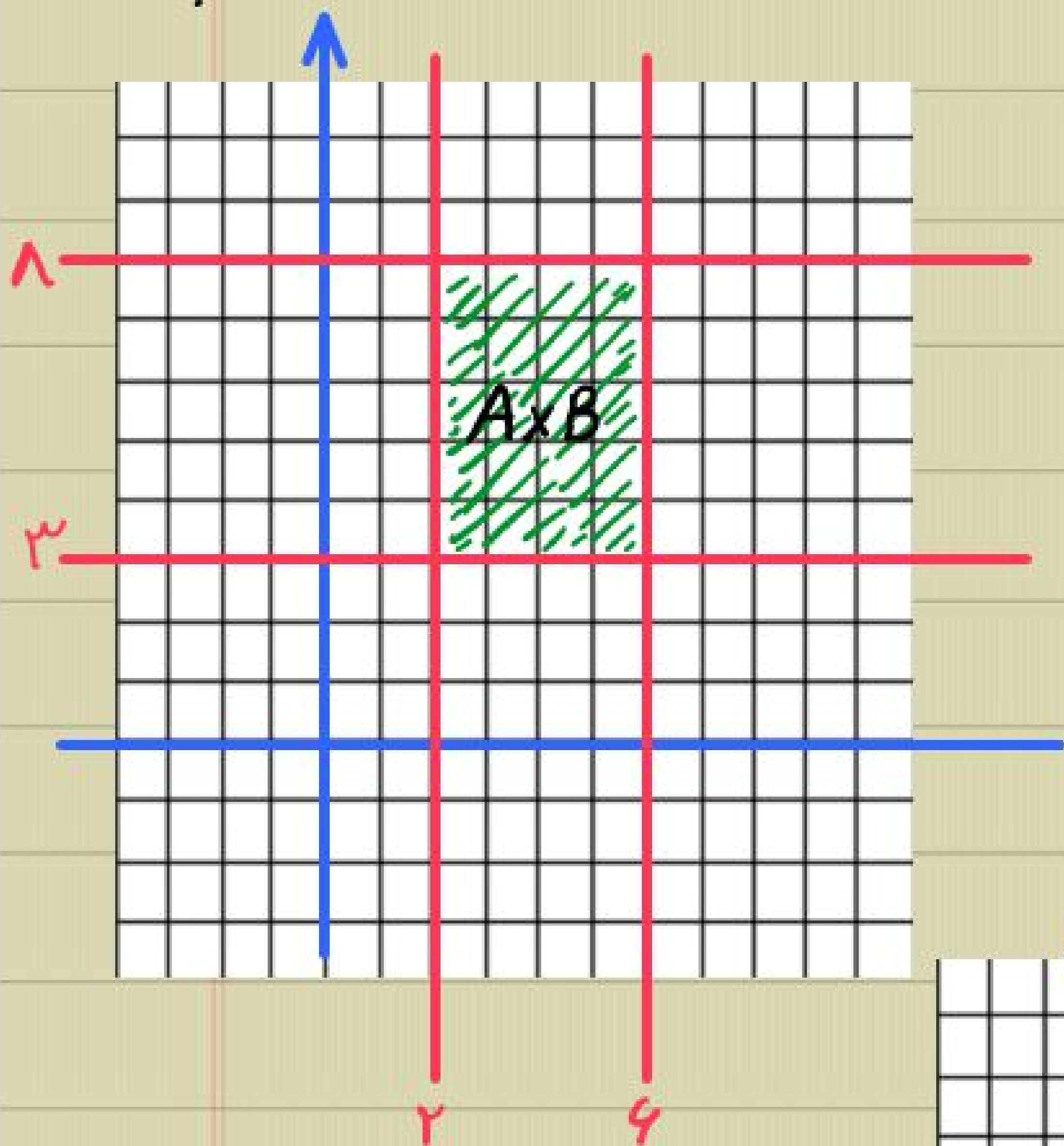


$B \times A$

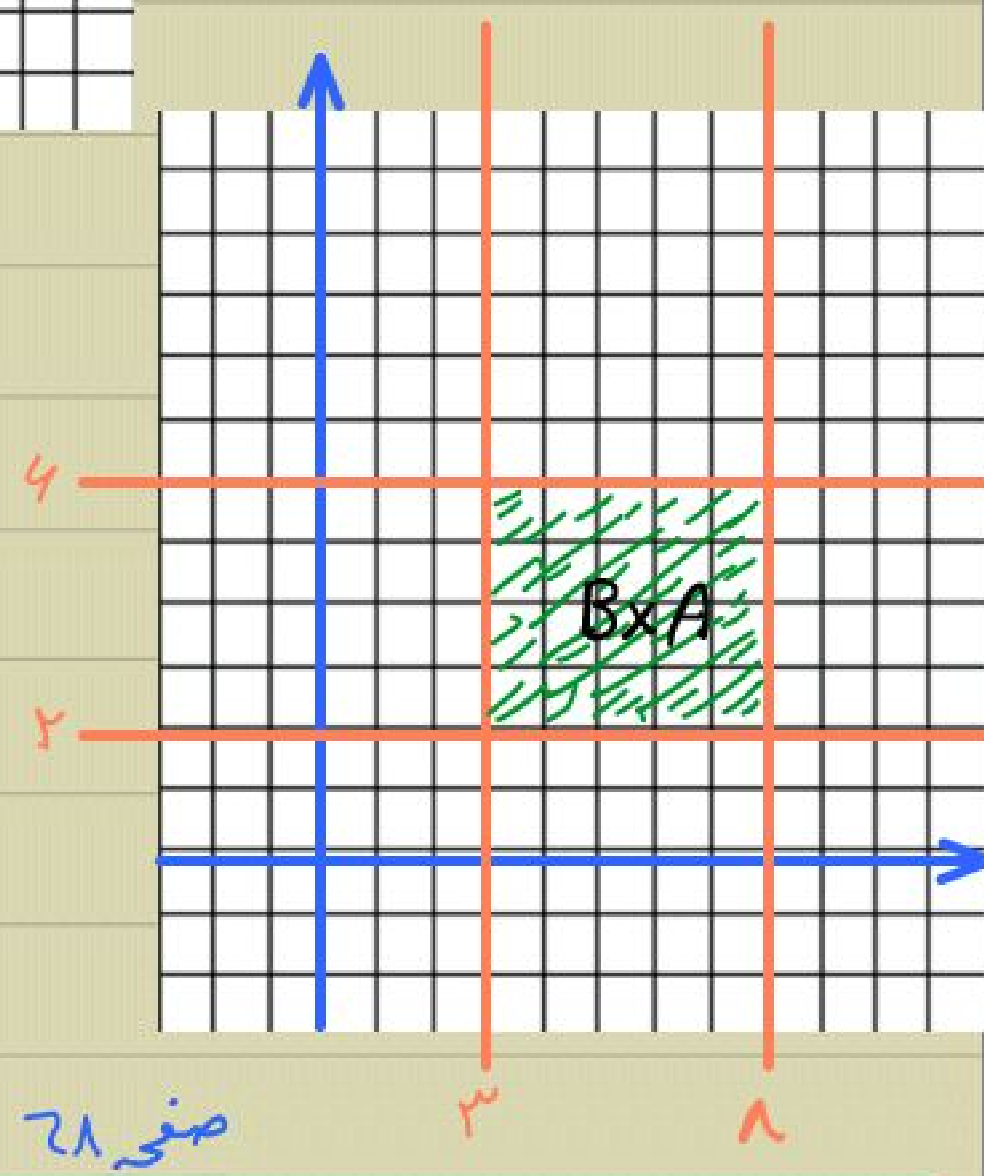


صفحه ٦٧

پ) $A=[۲,۶]$ $B=[۳,۸]$



$A\times B$

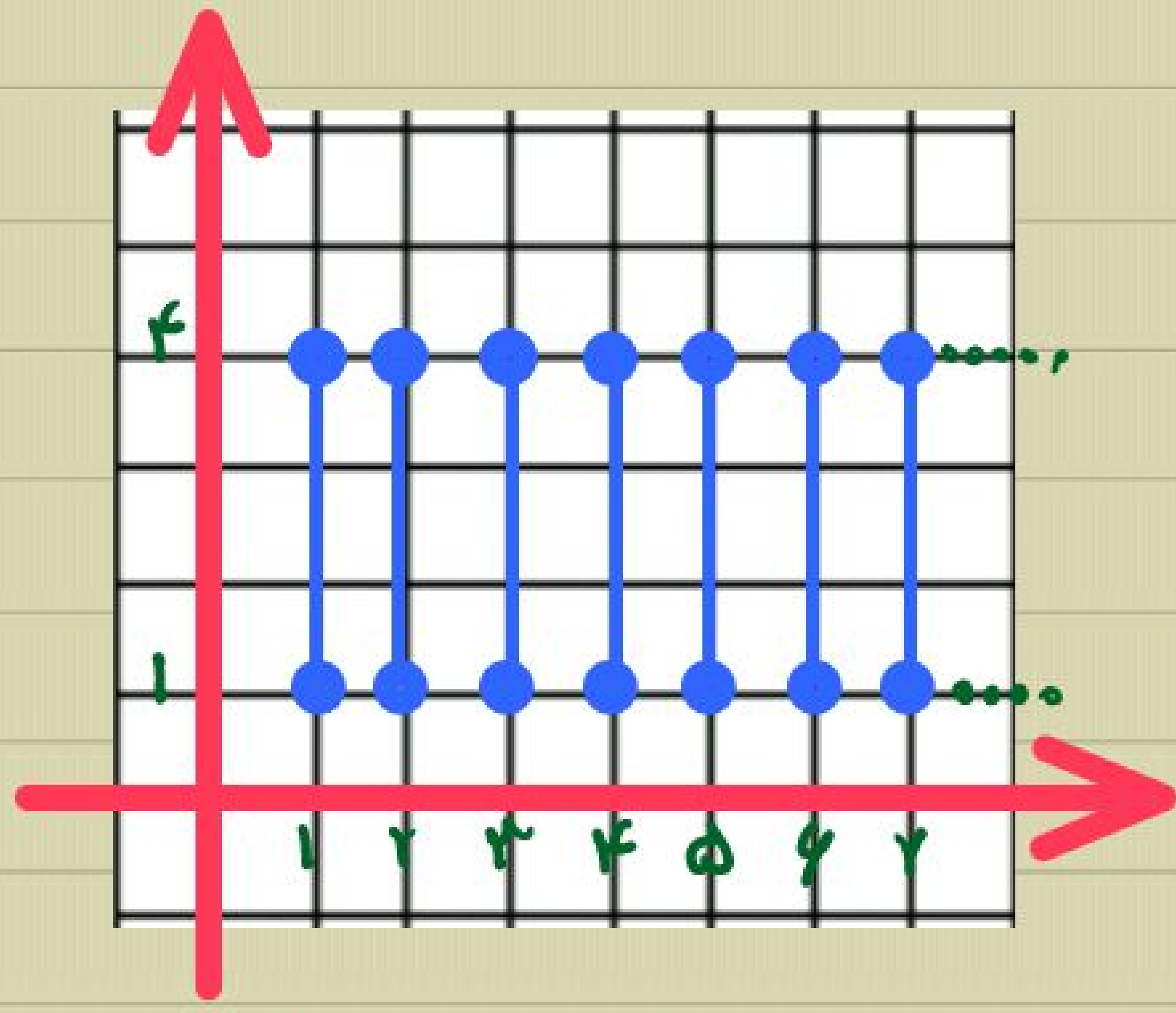


$B\times A$

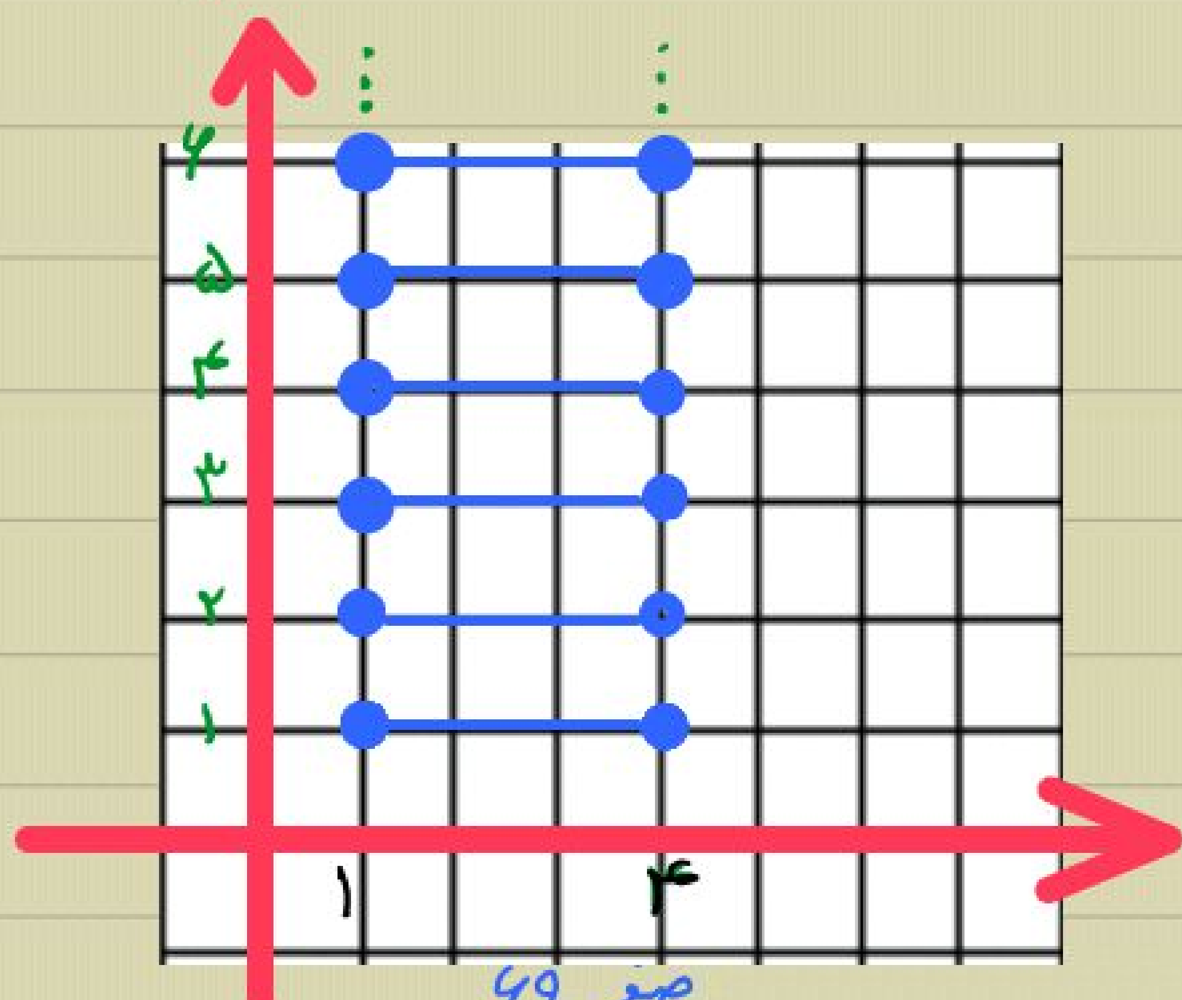
09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi - @Riazi101112forall2

ت) $A = \mathbb{N} \quad , B = [1,4]$

$A \times B$



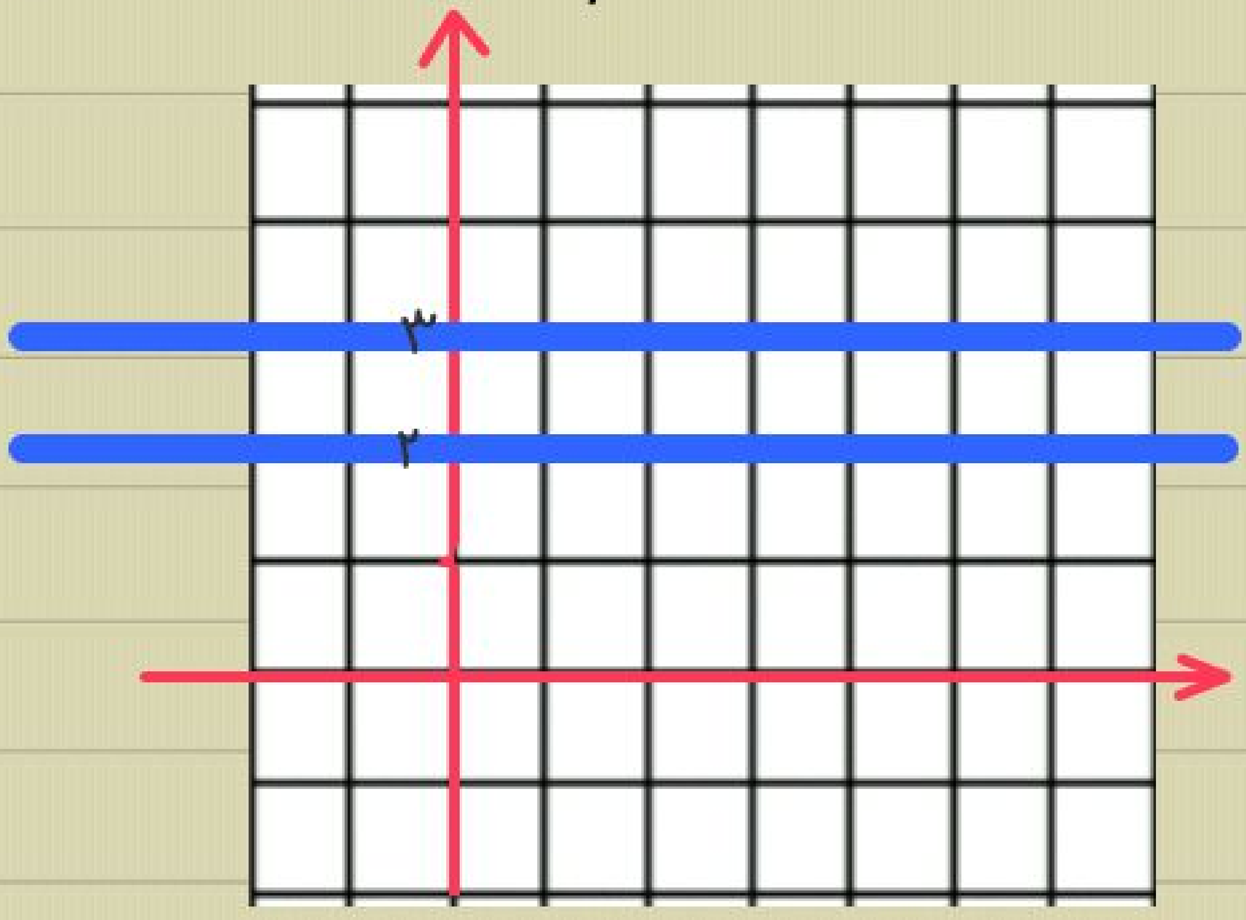
$B \times A$



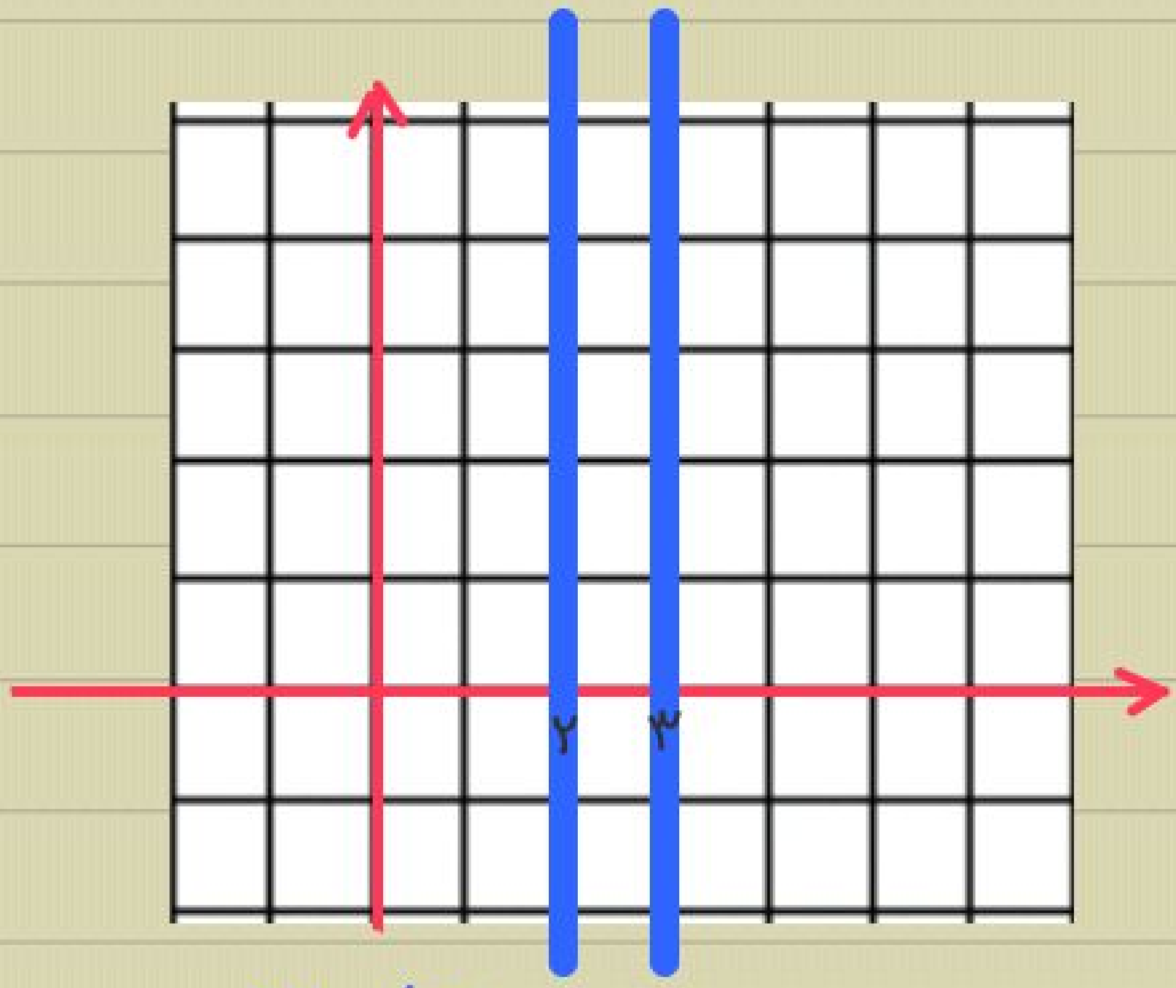
صفحه ۶۹

ث) $A = \mathbb{R}$ $B = \{۲, ۳\}$

$A \times B$

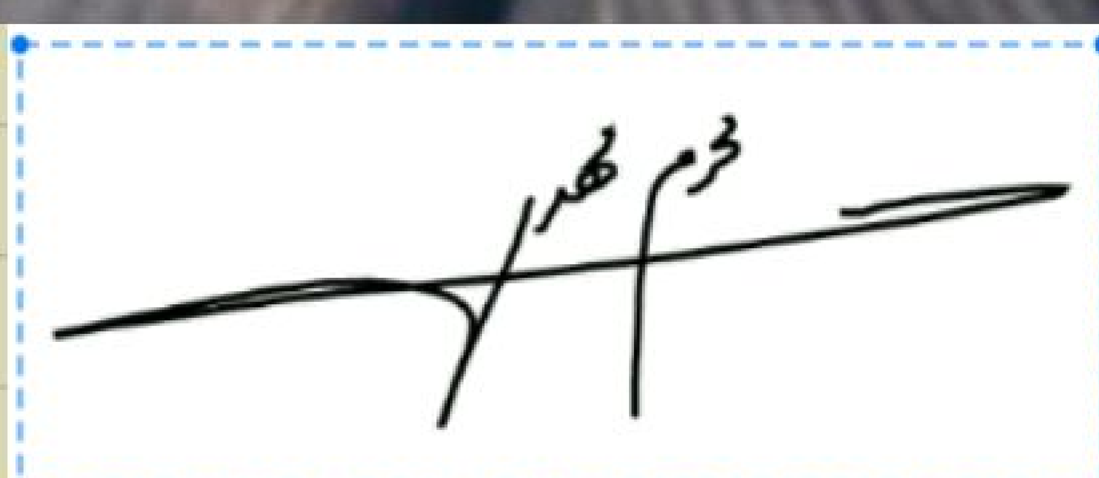


$B \times A$



صفحه ۷۰

پایان فصل اول



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi - @Riazi101112forall2