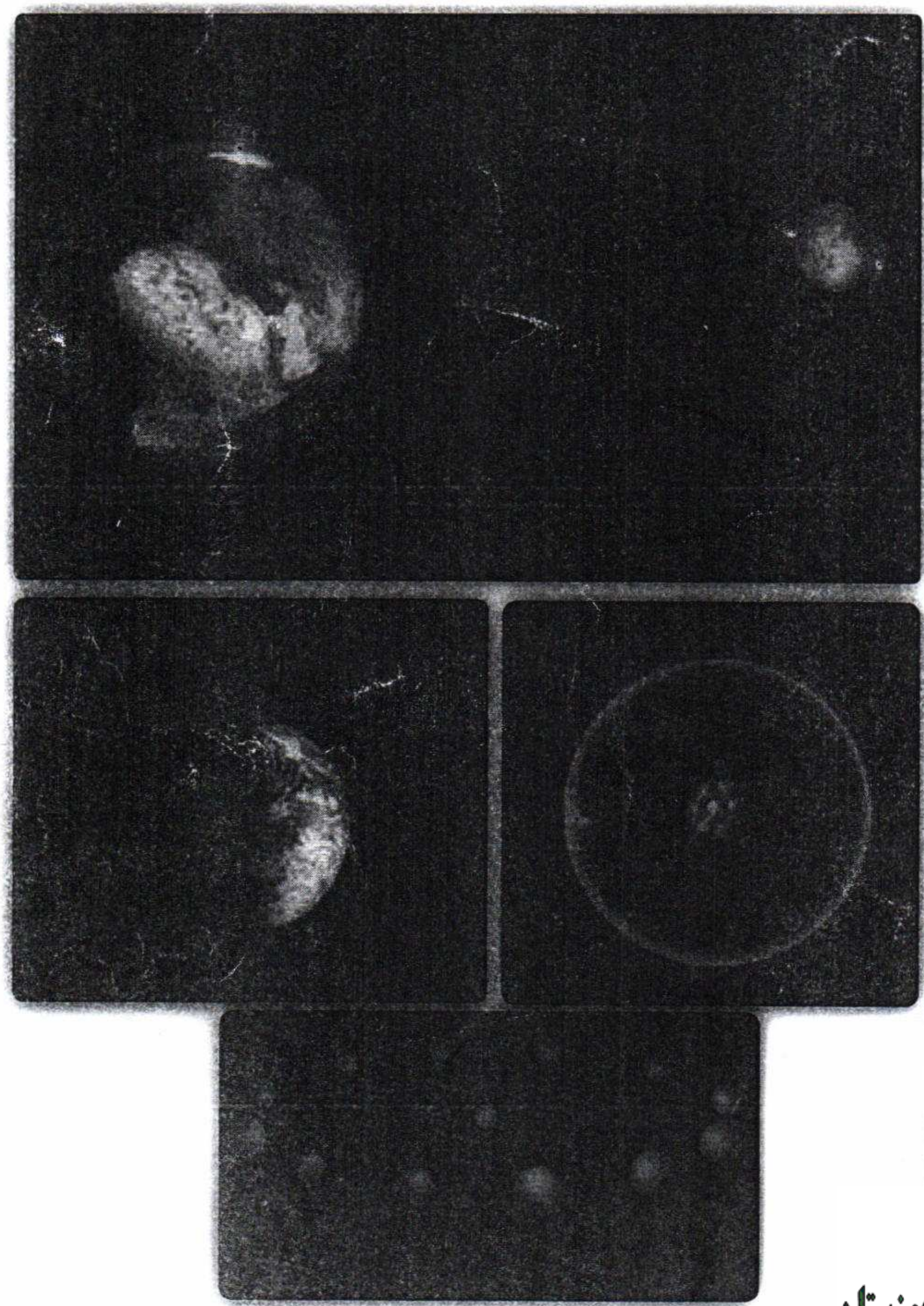
فصل ۲

مثلثات

السَّمْسُ وَالْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ (رحمان : ۵)

خورشید و ماه برابر حساب (منظمی در چرخش و گردش) هستند.



زمین هم به‌دور خودش و هم به‌دور خورشید می‌چرخد. مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی شکل است که حاصل آن پیدایش فصل‌های مختلف است. روز و شب نیز حاصل چرخش زمین به دور خودش است. این چرخش را حرکت وضعی زمین می‌نامیم که در آن چرخش زمین به سمت شرق است. ستارهٔ قطبی، ستاره‌ای است که موقعیت محلش نسبت به ناظر ساکن روی زمین تغییر نمی‌کند. اگر از سمت ستارهٔ قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه‌های ساعت به دور خود، دوران می‌کند.

درس اول نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم دایرهٔ مثلثاتی

درس سوم روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

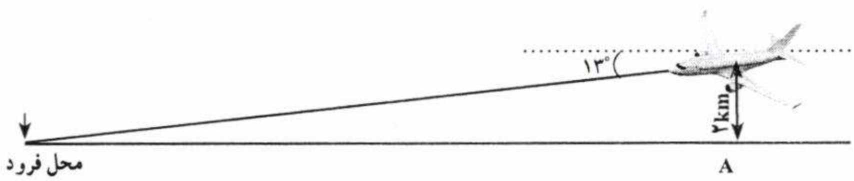
اندازه‌گیری فاصله‌هایی که به‌راحتی با وسایل اندازه‌گیری امکان‌پذیر نیست

@Faragiri10
ghadam.com

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

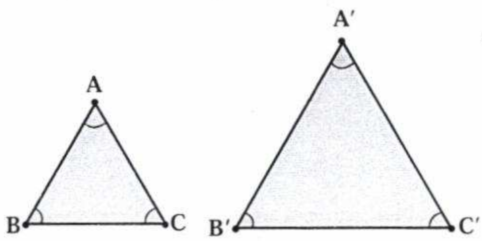
مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به‌صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.

به‌عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



اگر زاویهٔ هواپیما با افق °۱۳ باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایهٔ نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ ، آنگاه داریم : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $\hat{A} = \hat{A}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{B} = \hat{B}'$.



در هندسه ثابت می‌شود :

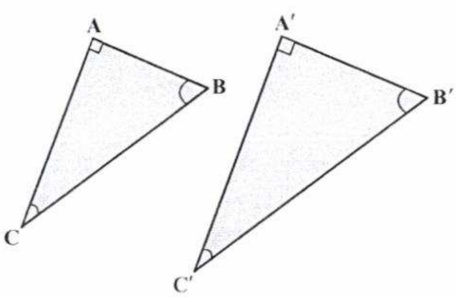
تمرین هم نیاز دارد

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

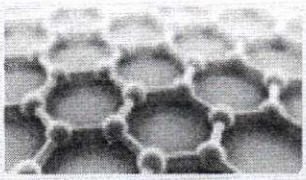
به‌عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید :

اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ در شکل مقابل قائم‌الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C}'$، آنگاه

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$



برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع‌تر باشد.

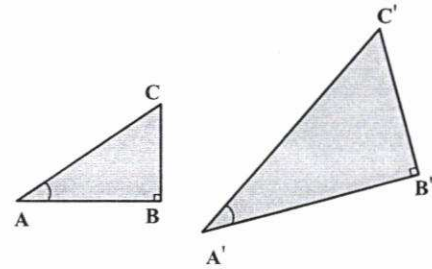


در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها ۱۲۰ درجه است. در آینده‌ای نه‌چندان دور، بهترین میکروفن‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفن‌ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنهٔ شدت شنوایی انسان را دارند.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

کار در کلاس



۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و A'B'C'، $\hat{A} = \hat{A'}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

خواص تناسب

۲ از تساوی $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

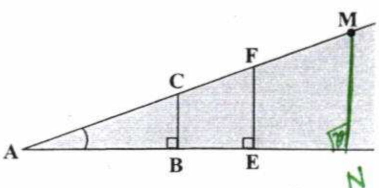
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad و \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

نتیجه: اگر زاویهٔ A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه 'A از مثلث قائم‌الزاویه A'B'C' (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \quad و \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad و \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$$

فعالیت



۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.

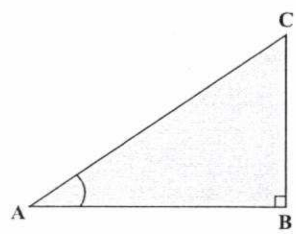
$$\overset{\Delta}{ACB} \sim \overset{\Delta}{AFE} \longrightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} \xrightarrow[\text{تناسب}]{\text{خواص}} \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$$

۲ نقطهٔ دیگری مثل M را در امتداد AC درنظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگرِ زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$

$$\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

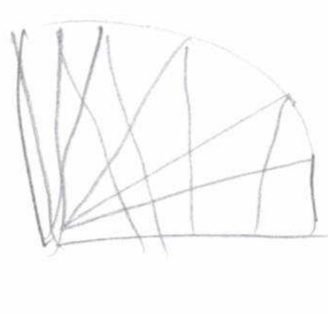
همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A، به‌طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می‌نامیم و آن را با tanA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، داریم:



$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$

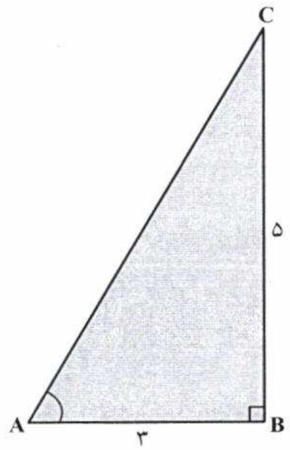
عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با cotA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

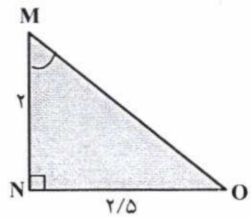
$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

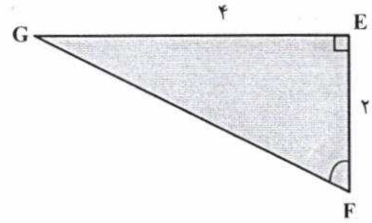


فعالیت

۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



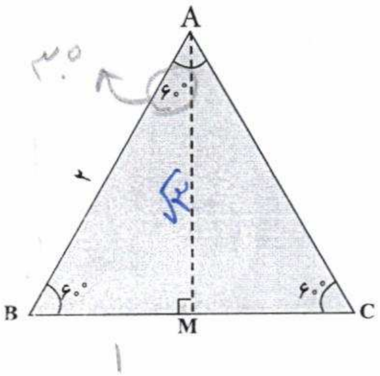




$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$ $\qquad \cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲/۵}$ $\qquad \tan F = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$

$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$ $\qquad \tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲٫۵}{۲}$ $\qquad \cot F = \frac{GE}{EF} = \frac{۴}{۲}$

۲ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به‌طول ۲ واحد را درنظر بگیرید.



الف) محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM .... ضلع BC است. بنابراین
میانه، ارتفاع

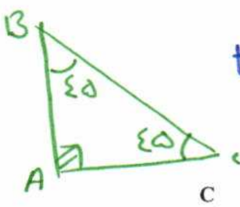
BM = MC = $\frac{۱}{۲}$ BC = $\frac{۱}{۲}$ AB = ۱

ب) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

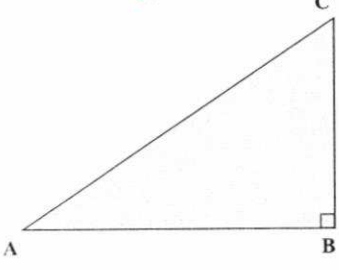
$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱}$.

$۲^۲ = ۱^۲ + AM^۲ \rightarrow \sqrt{۳} = AM$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ ۴۵° را پیدا کنید.



$\tan ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = ۱$ $\qquad \cot ۴۵ = \frac{AC}{AB} = ۱$



در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن‌را سینوس زاویهٔ A می‌نامیم و با sinA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC} .$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم و آن‌را با cosA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر $\cos A = \frac{AB}{AB}$.

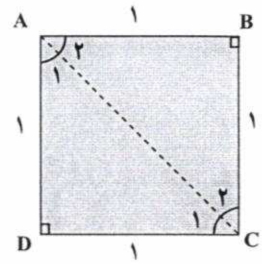
به سادگی می‌توان دید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ و از این‌رو $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$. به‌طور مشابه، می‌توان دید $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

مثال



خانم جلالی از دانش‌آموزان خواست تا نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن‌را حساب کنند.

فریبا : با توجه به اینکه مثلث ADC قائم‌الزاویه است، داریم $(AD)^۲+(DC)^۲=(AC)^۲$. در نتیجه $(AC)^۲=۱^۲+۱^۲$ و از این‌رو $(AC)^۲=۲$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC=\sqrt{۲}$.

معلم : با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی‌الساقین است، از این‌رو $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱=$ ۴۵° .

مبینا : طبق تعریف سینوس، $\sin A_۱=\sin ۴۵^\circ=\frac{DC}{\text{وتر}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

سبا : من هم می‌توانم با توجه به روابط بالا کسینوس ۴۵° را پیدا کنم.

$$\cos A_۱=\cos ۴۵^\circ=\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}.$$

مریم : اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، طبق تعریف داریم

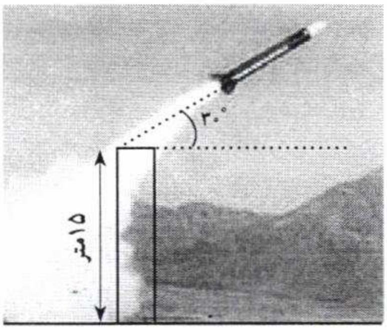
$$\tan A_۱=\tan ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱ \quad \text{و} \quad \cot A_۱=\cot ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱.$$

کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰°، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sinA	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cosA	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱
tanA	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cotA	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

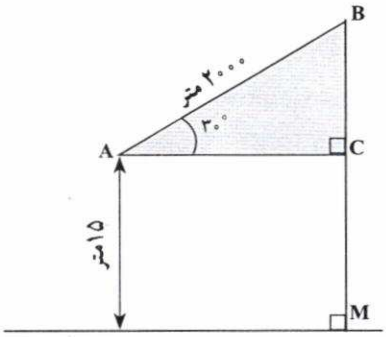
مثال



یک موشک در ارتفاع ۱۵متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

حل : ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به‌سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با :

$BC + MC = BC + ...۱۵.$



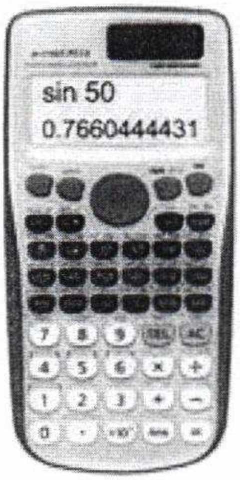
بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$. پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۲۰۰۰} \Rightarrow BC = ۱۰۰۰$$

و از این‌رو

ارتفاع موشک = ۱۰۰۰ + ۱۵ = ۱۰۱۵

فعالیت

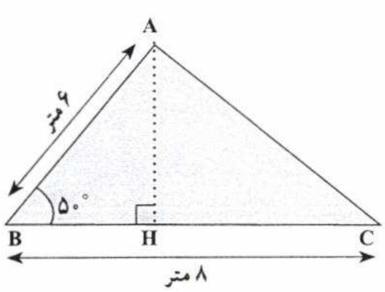


۱ یک زاویهٔ ۵۰° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۵۰° را به‌صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به‌دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم :

مساحت مثلث ABC = $\frac{۱}{۲}$ × قاعده × ارتفاع

الف) با توجه به اینکه $\sin ۵۰^\circ \simeq ۰/۷۶$، داریم :



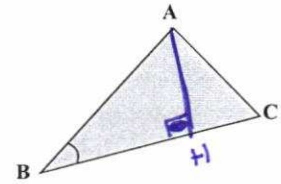
$$\sin ۵۰^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{۶} \Rightarrow AH \simeq ۰/۷۶ \times ۶ = ۴/۵۶$$

ب) با توجه به قسمت (الف) داریم :

مساحت مثلث ABC = $\frac{۱}{۲} AH \times BC \simeq \frac{۱}{۲} \times$ ۴/۵۶ × ۸ ≃ ۱۸/۲۴

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

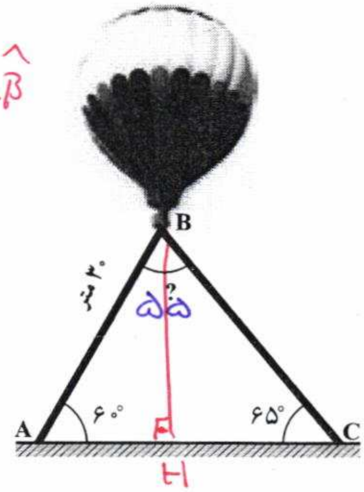


کار در کلاس

۱ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین آنها نشان دهید :

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin B.$$

$S = \frac{1}{2} AH \times BC \xrightarrow[\overset{\Delta}{ABH}]{\sin\hat{B} = \frac{AH}{AB}} S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin\hat{B}$



۲ در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن‌را BH بنامید.

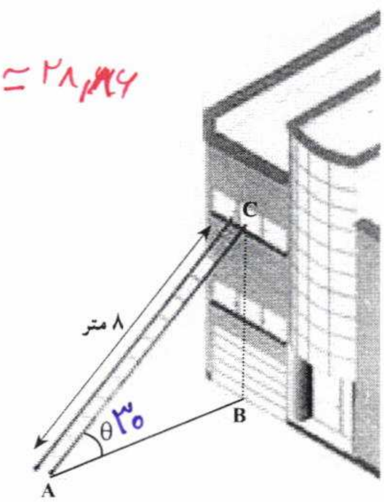
$\hat{B} = ۱۸۰° - ۱۲۵° = ۵۵°$

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به‌دست آورید.

$\sin ۶۰° = \frac{BH}{AB} \to BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۳۰ = ۱۵\sqrt{۳}$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ $۶۵°$، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$\overset{\Delta}{BHC} \to \sin ۶۵° = \frac{BH}{BC} \to BC = \frac{BH}{\sin ۶۵} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۰/۹} \simeq ۲۸/۸۶$

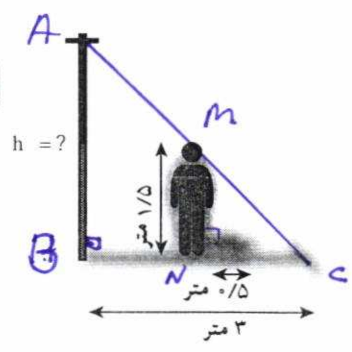


۳ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = ۳۰°$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$\sin\underset{۳۰}{\theta} = \frac{BC}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Rightarrow ۲BC = ۸ \Rightarrow BC = ۴$

اکنون به‌کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم :

$AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = ۸^۲ - ۴^۲ = ۴۸ \Rightarrow AB = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$



تمرین

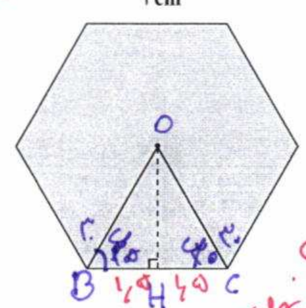
۱ نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

$\begin{cases} \hat{B} = \hat{N} = ۹۰° \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \to \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNC} \Rightarrow$

$\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{AC} = \frac{MN}{AB}$

$\frac{۰/۵}{۳} = \frac{۱/۵}{h} \to h = \frac{۴/۵}{۰/۵} = ۹m$

۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به‌دست آورید.



$\overset{\triangle}{OBC} \longrightarrow \begin{cases} \hat{B}=60 \\ \hat{C}=60 \end{cases} \longrightarrow \hat{O}=60$

پس $\overset{\triangle}{OBC}$ متساوی‌الاضلاع است.

$\overset{\triangle}{OBH} \rightarrow \sin 60^\circ = \frac{OH}{OB}$

$OH = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.5 \times \sqrt{3}$

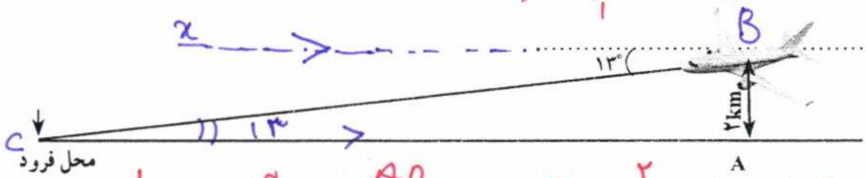
$S_{OBC} = \frac{3 \times 1.5 \times \sqrt{3}}{2} = 2.25\sqrt{3}$

$S_{\text{شش ضلعی}} = 6 \times 2.25\sqrt{3} = 13.5\sqrt{3}$

۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرودآمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید.

$\tan 13^\circ \simeq ۰/۲۳$

$Bx \parallel AC \xrightarrow{\text{مورب } CB} \hat{B}_1 = \hat{C} = 13^\circ$

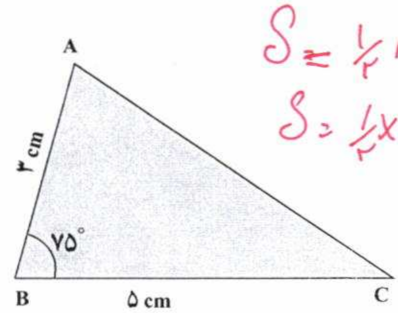


$\tan 13^\circ = \frac{AB}{AC} \rightarrow AC = \frac{2}{0.23} \rightarrow AC \simeq 8.69$ Km

۴ فرض کنید $\sin 75^\circ = ۰/۹۶$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.

$S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin 75^\circ$

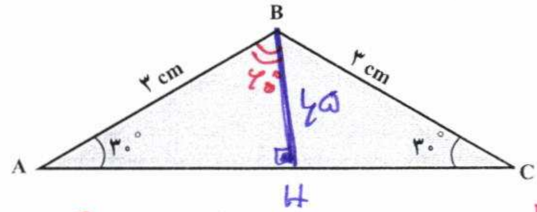
$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times 0.96 = 7.2$



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



$\overset{\triangle}{ABH} \longrightarrow \sin A = \frac{BH}{3} \longrightarrow BH = 1.5$

$S_{ABH} = \frac{1}{2} \times 3 \times 1.5 \times \sin 60^\circ = 2.25 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.125\sqrt{3}$

$\overset{\triangle}{ABH} \cong \overset{\triangle}{AHC} \longrightarrow S_{ABH} = S_{ACH} \Rightarrow \boxed{S_{ABC} = 2 \times 1.125 \times \sqrt{3}}$

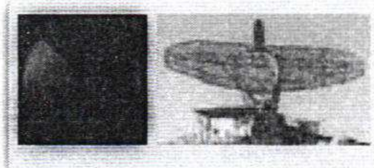
ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیرِ بسته، که آن را مَدار می‌نامند، درحال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا بیضوی باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند:

ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین‌ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً همزمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

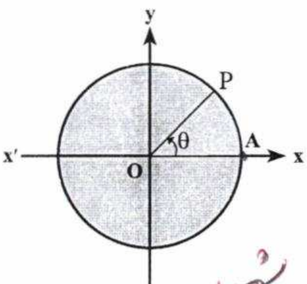
ماهواره مدار زمین‌ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بینند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آنتن نیست و آنتن هر ماهواره می‌تواند حداکثر ۴/۴۲ درصد سطح کره زمین را بپوشاند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.

تعداد ترکیب‌های ... شرایط ...

درس دوم: دایره مثلثاتی



می‌توان از دایرهٔ مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.



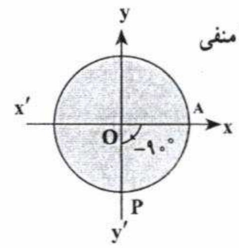
دایرهٔ روبه‌رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را درنظر بگیرید. نقطهٔ A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم.

شعاع دایره ... برابر ...

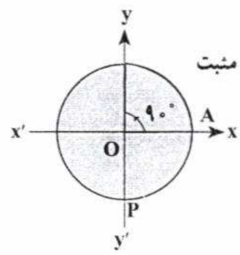
مثال

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های -90°، 90°، -210° و 225° داده شده‌اند.

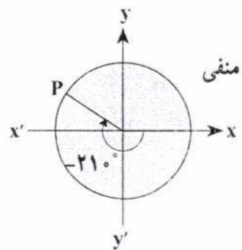
زاویهٔ منفی



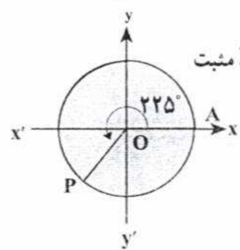
زاویهٔ مثبت



زاویهٔ منفی

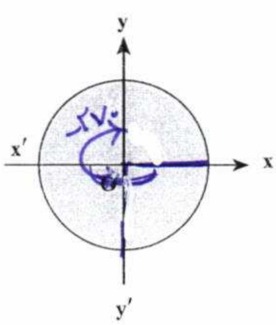


زاویهٔ مثبت

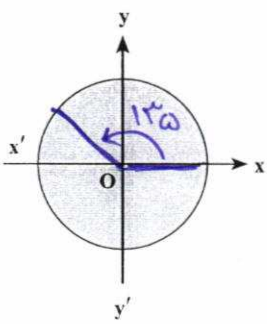


فعالیت

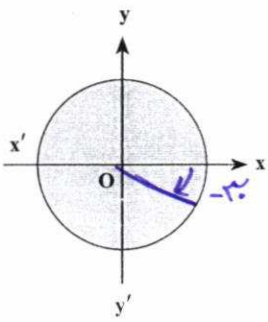
۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



-270°

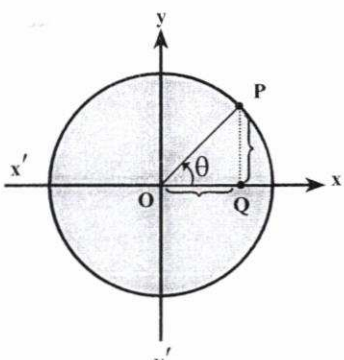


135°



-30°

۲ فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطهٔ P خطی بر محور $\overrightarrow{Ox}$ عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.

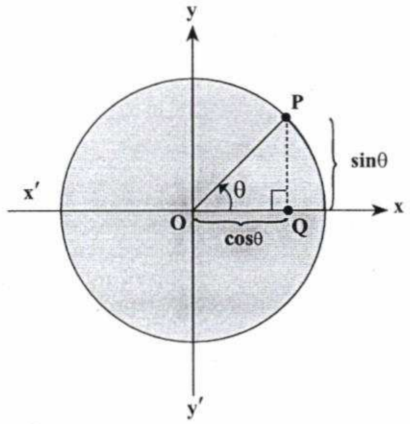


الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید.

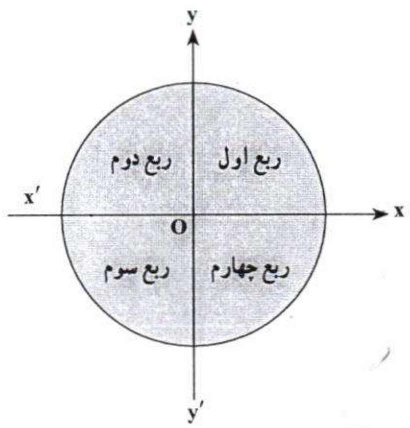
$\cos\theta = \dfrac{OQ}{\cancel{OP}}$ ۱ و $\sin\theta = \dfrac{PQ}{\cancel{OP}}$ ۱ و $\tan\theta = \dfrac{PQ}{OQ}$

$\cos\theta = OQ$ $\sin\theta = PQ$

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصلهٔ Q تا مبدأ با ..cosθ.. برابر است و فاصلهٔ نقطهٔ P تا پای عمود، یعنی نقطهٔ Q با ...sinθ... برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور x′ox یا محور xها را محور کسینوس‌ها و محور y′oy یا محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. به‌عبارت دیگر، اگر P نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی باشد که نیم‌خط OP با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x,y) است که در آن $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$.



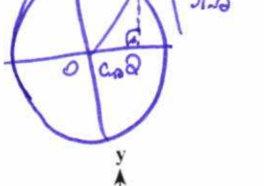
نکته : دو محور عمود بر هم x′ox و y′oy صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایرهٔ مثلثاتی، ناحیهٔ xoy را ربع اول، ناحیهٔ x′oy را ربع دوم، ناحیهٔ x′oy′ را ربع سوم و ناحیهٔ xoy′ را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

نکته : زاویه‌های ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

کار در کلاس

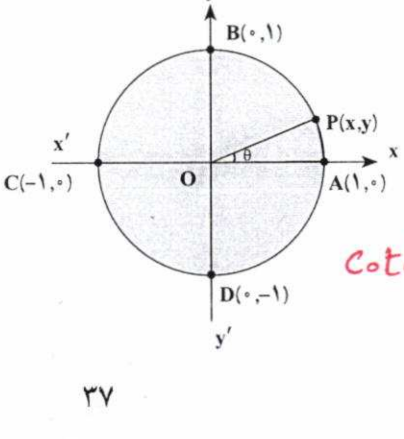
۱) مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

الف) -۳۰° چهارم ب) ۶۵° اول پ) ۱۸۲° سوم ت) -۹۵° سوم



۲) با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به‌دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟ در ناحیه اول

مثال

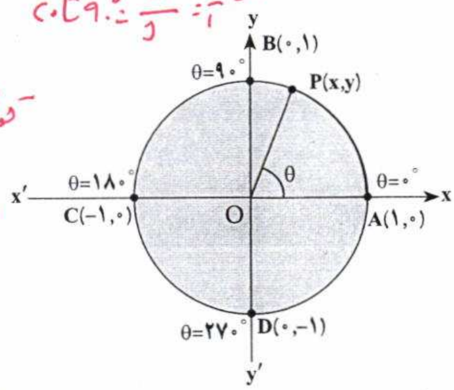


می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۰° را به‌دست آوریم. می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو، $\sin\theta=y$ و $\cos\theta=x$. اگر $\theta=۰^\circ$، آنگاه نقطه P روی نقطهٔ A قرار می‌گیرد و داریم $\sin ۰^\circ=۰$، همچنین $\cos ۰^\circ=۱$ و $\tan ۰^\circ=\frac{y}{x}=\frac{۰}{۱}=۰$ ، اما $\cot ۰^\circ$ تعریف نمی‌شود (چرا؟). زیرا $\cot 0^\circ=\frac{x}{y}=\frac{1}{0}$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

فعالیت



$\cot 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

۱ در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو اگر θ=۹۰°، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید. نقطه P روی B واقع است

$\sin 90° \to$ نقطه P روی B واقع است

$\sin 90° = 1 \quad \cos 90° = 0 \quad \tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} =$ تعریف نشده

۲ اگر θ=۱۸۰°، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید. در ۱۸۰° نقطه P روی C واقع است پس

$\sin 180° = y = 0 \quad \tan 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

$\cos 180° = x = -1 \quad \cot 180° = \frac{x}{y} =$ تعریف نشده

۳ اگر θ=۲۷۰°، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

$\sin 270° = y = -1 \quad \tan 270° = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} =$ تعریف نشده

$\cos 270° = x = 0 \quad \cot 270° = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$

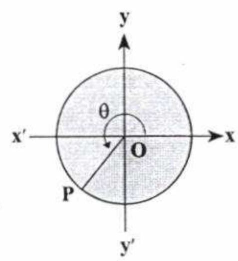
کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	۰°	۹۰°	۱۸۰	۲۷۰°	۳۶۰°
sinθ	۰	۱	۰	−۱	۰
cosθ	۱	۰	−۱	۰	۱
tanθ	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cotθ	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

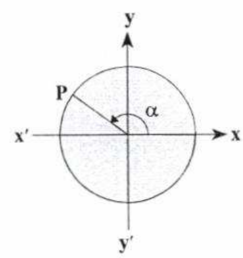
α در ربع اول است $\Rightarrow 0° < \alpha < 90°$
α در ربع دوم است $\Rightarrow 90° < \alpha < 180°$
α در ربع سوم است $\Rightarrow 180° < \alpha < 270°$
α در ربع چهارم است $\Rightarrow 270° < \alpha < 360°$

فعالیت



۱ فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه y=sinθ و x=cosθ و در ربع سوم، x, y<۰، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

$\sin\theta < 0 \quad \cos\theta < 0 \quad \tan\theta > 0 \quad \cot\theta > 0$



۲ فرض کنید α زاویه‌ای در دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

$\sin\theta > 0 \quad \cos\theta < 0 \quad \tan\theta < 0 \quad \cot\theta < 0$

۳ جدول زیر را کامل کنید:

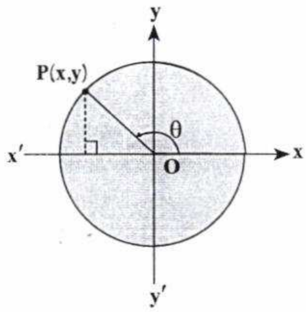
مقدار	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
	x,y>۰	x<۰, y>۰	x<۰, y<۰	x>۰, y<۰
sinθ	+	+	−	−
cosθ	+	−	−	+
tanθ	+	−	+	−
cotθ	+	−	+	−

نکته: برای هر زاویهٔ دلخواه θ،
$-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

مثال



آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید : اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{۵}{۷}$ ، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین : می‌دانیم $\sin\theta = y = \frac{۵}{۷}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض $\frac{۵}{۷}$ است.

معلم : درست است و حالا طول نقطه P چگونه به‌دست می‌آید؟

امیرعلی : طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم : $x^۲+y^۲=۱$. بنابراین $x^۲+\frac{۲۵}{۴۹}=۱$ و در نتیجه $x^۲ = \frac{۲۴}{۴۹}$. اکنون با توجه به اینکه نقطهٔ P در ناحیهٔ دوم واقع است، داریم $x = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$.

اشتباه تایپی

معلم : آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی : چون θ زاویه‌ای در ربع دوم است، پس طول نقطهٔ P منفی است و از این‌رو $x = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$ قابل قبول است.

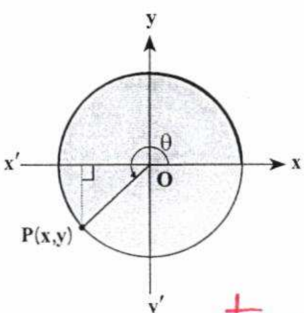
معلم : استدلال محمدمهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه P نقطه‌ای به مختصات $(-\frac{۲\sqrt{۶}}{۷} , \frac{۵}{۷})$ است. در نتیجه :

$$\cos\theta = x = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{۵}{-۲\sqrt{۶}} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-۲\sqrt{۶}}{۵}$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

فعالیت



۱ فرض کنید نقطه P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری که $\cos\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y = \sin\theta = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

$x^۲+y^۲=۱$

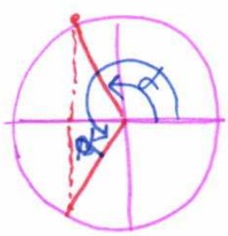
$\frac{۱}{۲}+y^۲=۱ \rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

الف) مختصات نقطهٔ P را به‌دست آورید. $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید.

$\tan\theta = \frac{y}{x} = ۱$ و $\cot\theta = \frac{x}{y} = ۱$

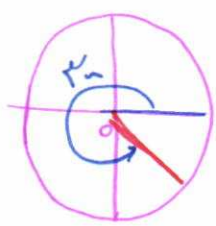
۲ اگر $\cos\alpha = \frac{-۲}{۵}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.



α می‌تواند در نواحی دوم یا سوم باشد

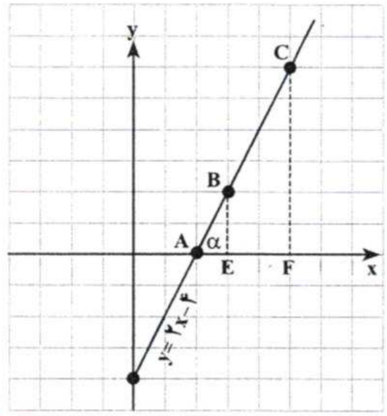
۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

برای آنکه سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد کافی است در ناحیه چهارم باشد مثلاً $\alpha = ۳۲۰^\circ$



رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت



نمودار خط $y=2x-4$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطهٔ B و C روی این خط را درنظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$\tan\alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF} = \frac{۲}{۱} = \frac{۴}{۲}$

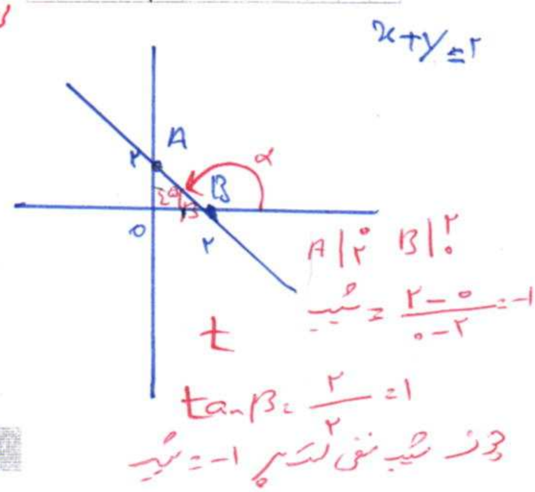
ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$A\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$ $B\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$

شیب خط = $\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$ = $\frac{۲-۰}{۳-۲} = ۲$

پ) از مقایسهٔ قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

می‌توان نتیجه گرفت تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی معادل شیب خط است.



> شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه :
>
> شیب خط $=\tan\alpha$

کار در کلاس

۱) فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

الف) $2y-3x=5$ ب) $x+y=2$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

۲) معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها 30° است و از نقطهٔ $(1,0)$ می‌گذرد.

$\tan\alpha = a \Rightarrow \tan 30^\circ = a \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

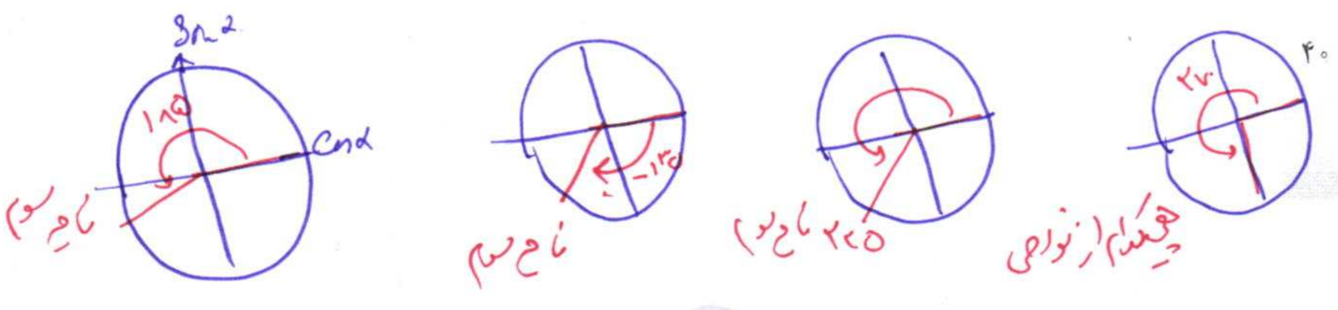
$y = ax+b \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{(1,0)} 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} + b \longrightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}}$

تمرین

۱) هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) $+270^\circ$ ب) 225° پ) -135° ت) 185°



احرار، بر گزینه‌ها کنید تست

در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیازمندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره بر حسب درجه است. می‌توان دید، سینوس یک کمان از لحاظ قدرمطلق برابر با نصف طول وتری به‌اندازهٔ دو برابر آن کمان است. همین تعریف ساده، اساس رابطه بین کمان‌ها و وترها را در دایره تشکیل می‌دهد و مثلثات هم از همین‌جا شروع شد. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیپارک، اخترشناس سدهٔ دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همهٔ کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً ۳۰ درجه به ۳۰ درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تانژانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به‌وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه‌نصیرالدین‌طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادلهٔ درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبهٔ سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سدهٔ پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

$\sin^2\alpha = 1-\frac{9}{49} = \frac{40}{49} \to \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{40}{49}} = -\frac{\sqrt{40}}{7}$

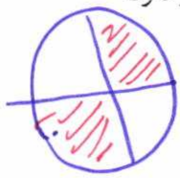
الف) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$ (α در ربع چهارم)

$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{40}}{3}$ $\quad \cot\alpha = -\frac{3}{\sqrt{40}}$

ب) $\sin\beta = \frac{-1}{2}$ (β در ربع سوم)

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \cot\alpha = \sqrt{3}$

۳ اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟



θ می‌تواند در نواحی اول یا سوم باشد.

۴ حدود زاویهٔ θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ $\quad 0<\theta<90$

ب) $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$ $\quad 270<\theta<360$

۵ اگر $\sin\alpha\times\cos\alpha<0$، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

$\cos\alpha$, $\sin\alpha$ مختلف العلامه هستند

پس α در نواحی دوم یا چهارم است

۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری که $\tan\alpha > \cot\alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به‌طوری که $\cot\beta > \tan\beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$\alpha = 60 \to \tan\alpha = \sqrt{3} \quad \cot\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \tan\alpha > \cot\alpha$

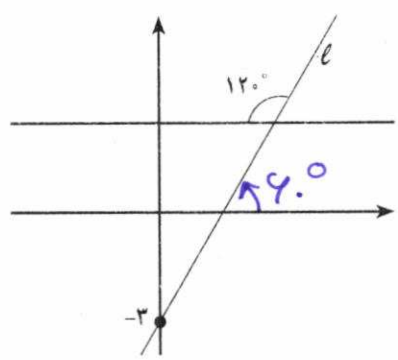
$\beta = 30 \to \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cot\beta = \sqrt{3} \to \tan\beta < \cot\beta$

۷ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها 45° است و نقطهٔ $(0,2)$ روی آن قرار دارد.

$\alpha = 45 \to \tan\alpha = \tan 45 = 1 \to$ شیب $= 1$

$y = ax+b \Rightarrow y = x+b \to 2 = 0+b \Rightarrow \boxed{y = x+2}$

۸ با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط ℓ را به‌دست آورید.



$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \to a =$ شیب $= \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}x + b \xrightarrow{(0,-3)} -3 = \sqrt{3}\times 0 + b$

$\boxed{y = \sqrt{3}x - 3}$

تهیه کننده :

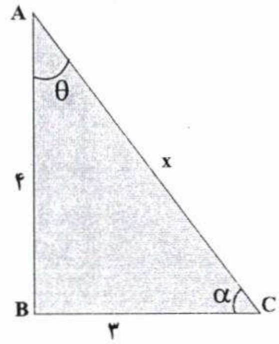
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل با نسبت‌های مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت‌ها و کاربردهایی از آنها را بیان می‌کنیم.

فعالیت

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظر بگیرید.



الف اندازهٔ وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.

$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$ $\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$

$\cos\theta = \frac{۴}{۵}$ $\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$

$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{۳}{۴}$ $\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳}$

$\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{۴}{۳}$ $\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$

ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta$ و $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha$ را به‌دست آورید.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^۲=\sin^۲\theta$

پ درستی رابطهٔ $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin\theta)^۲+(\cos\theta)^۲=\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=(\frac{BC}{AC})^۲+(\frac{AB}{AC})^۲=\frac{BC^۲+AB^۲}{AC^۲}=\frac{AC^2}{AC^2}=1$$

ت مشابه قسمت ~~(ج)~~ (ب) درستی رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ را بررسی کنید.

اشتباه چاپی

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\frac{AB}{AC})^2+(\frac{BC}{AC})^2=\frac{AB^2+BC^2}{AC^2}=\frac{AC^2}{AC^2}=1$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم :

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

کار در کلاس

با توجه به رابطهٔ بالا، یعنی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ جاهای خالی را پر کنید :

الف) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

ب) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

تذکر : در رابطه‌هایی که به‌دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویهٔ α ~~و~~ با توجه به ناحیه‌ای که زاویهٔ α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.
اشتباه چاپی

مثال

اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha=\frac{-4}{5}$، آنگاه مقدار $\tan\alpha$، $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ را به‌دست آورید.

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\ \xRightarrow{\alpha\ \text{در ناحیه سوم}}\ \cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=\frac{4}{3} \qquad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت برحسب کسینوس و کتانژانت برحسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به‌دست می‌آوریم :

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (\cos\alpha\neq 0)$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (\sin\alpha\neq 0)$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

۳ اگر $90° < \alpha < 180°$ و $\tan\alpha = \frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to 1+\frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \to \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow[\cos\alpha<0]{90<\alpha<180} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cot\alpha = \frac{-4}{3} \Rightarrow 1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 1+\frac{16}{9} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5} \xrightarrow[\sin\alpha>0]{90<\alpha<180} \sin\alpha = \frac{3}{5}$

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ ، $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\ (\cos\alpha \neq 0)$ و $1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ (\sin\alpha \neq 0)$ را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به‌طرف دیگر برسیم.

به مثال زیر توجه کنید :

ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شبانه‌روز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایهٔ میله هم روی صفحه جابه‌جا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.

مثال

درستیِ اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta)(1-\sin\theta) = \cos\theta$$

$$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) \xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}} 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

حل :

$$\text{طرف چپ} = (\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta)(1-\sin\theta) = (\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})(1-\sin\theta)$$

$$= (\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta})(1-\sin\theta) = \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta = \text{طرف راست}$$

کار در کلاس

۱ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $\sin^4\theta-\cos^4\theta = \sin^2\theta-\cos^2\theta$

$$\text{طرف چپ} = \sin^4\theta-\cos^4\theta \xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}} (\sin^2\theta-\cos^2\theta)\times(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = (\sin^2\theta-\cos^2\theta)\times 1$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

ب) $\dfrac{۱}{\cos\alpha} + \cot\alpha = \dfrac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

طرف راست $= \dfrac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\tan\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} + \cot\alpha$

۲ کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha$ اتحاد نیست:

$\alpha = ۳۰^\circ \Rightarrow (\frac{1}{2})^4 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^4 \neq 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{10}{16} \neq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

ب) $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$ اتحاد است زیرا:

$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

۳ با ضرب کردن طرفینِ اتحاد مثلثاتی $۱ + \tan^۲\alpha = \dfrac{۱}{\cos^۲\alpha}$ در $\cot\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \xrightarrow{\times\cot\alpha} \cot\alpha + \cot\alpha\tan^2\alpha = \frac{\cot\alpha}{\cos^2\alpha}$

$\cot\alpha + \tan\alpha = \dfrac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

زاویه که در ناحیه دوم مثبت!

تمرین

۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha = -\dfrac{۳}{۵}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \rightarrow \boxed{\sin\alpha = 4/5} \rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -4/3}$ $\boxed{\cot\alpha = -\frac{3}{4}}$

۲ اگر $\tan\alpha = \dfrac{-۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$\boxed{\cot\alpha = -3/4}$ $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \boxed{\cos\alpha = 3/5}$ $\boxed{\sin\alpha = -4/5}$

عالی

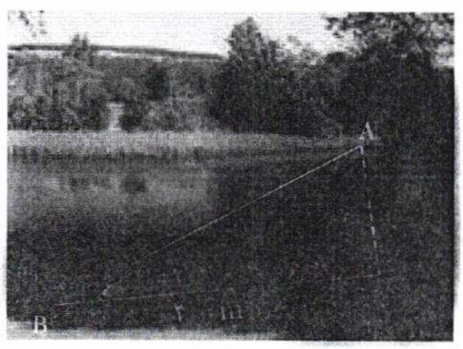
۳ اگر $\sin۱۳۵^\circ = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به‌دست آورید.

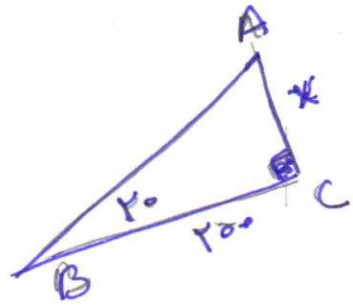
$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\sqrt{2}/2}$ $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1}$ $\boxed{\cot\alpha = -1}$

۴ اگر $\tan۲۴۰^\circ = \sqrt{۳}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ ۲۴۰° را به‌دست آورید.

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow 1 + 3 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{1}{2}}$ $\boxed{\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\boxed{\cot\alpha = \sqrt{3}/3}$

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازهٔ ۲۰۰ متر از C به‌صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطهٔ B برسد. اگر زاویهٔ دید این شخص (از نقطهٔ B به نقطهٔ A)، ۲۰° باشد و $\sin۲۰^\circ \simeq ۰/۳۴$، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.)





$\sin\hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{34}{100}$

$\rightarrow AB = \frac{100}{34} AC = \frac{50}{17} AC$

فیثاغورس $\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow (\frac{50}{17}AC)^2 = AC^2 + 200^2$

$\frac{2500}{289} AC^2 = AC^2 + 200^2 \rightarrow \frac{2211}{289} AC^2 = 40000 \rightarrow AC^2 = 5228/40$

$\boxed{AC = 72/30}$

عالی بود

۷۲/۳۰

الف) $\frac{1}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \boxed{\frac{1}{\cos\theta}}$

ب) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$

تقسیم طرفین بر $\cos\theta(1+\sin\theta)$

$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \boxed{\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}}$

۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{۱}{\cos\theta}$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta} = \frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha} = \tan\alpha$

ت) $۱ - \frac{\cos^۲ x}{۱+\sin x} = \sin x$

ث) $\frac{۱}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{۱+\sin x}$

ت) $\frac{1+\sin x - \cos^2 x}{1+\sin x} = \frac{\cancel{1}+\sin x - \cancel{1}+\sin^2 x}{1+\sin x} = \frac{\sin x(1+\sin x)}{(1+\sin x)} = \boxed{\sin x}$

اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (هـ.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (هـ.ق) در بغداد درگذشت.

پ) $\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha} = \frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{\cancel{\cos\alpha+\sin\alpha}}{\cos\alpha}}{\frac{\cancel{\sin\alpha+\cos\alpha}}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{\tan\alpha}$

ث) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{\cancel{1-\sin^2 x}^{\cos^2 x}}{\cos x(1+\sin x)}$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

$= \boxed{\frac{\cos x}{1+\sin x}}$