

## دوس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همه ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش‌های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.

ب) عدد  $2^n + 1$  به ازای همه عددهای طبیعی  $n$ ، عددی اول است.

حل: گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم:

$$5 + 6 + 7 = 18$$

$$10 + 11 + 12 = 33$$

$$25 + 26 + 27 = 78$$

$$31 + 32 + 33 = 96$$

در همه موارد حاصل جمع‌های به‌دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای

$n=1, n=2, n=3, n=4$  حاصل  $2^n + 1$  به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است

که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می‌کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد

گزاره ب، اگر  $n=5$  آن‌گاه:

$$2^5 + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزاره ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، اما درستی گزاره با ارائه مثال به دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با  $n$ ،  $n+1$  و  $n+2$  نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست<sup>۱</sup>. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

## کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$ :  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

پ) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ج) اگر برای هر سه مجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  داشته باشیم  $A \cup B = A \cup C$  آنگاه  $B = C$

چ) اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه  $4k + 1$  مربع کامل است.

## خواندنی

یافتن مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال‌ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم بوده است. به طور مثال عبارت  $991n^2 + 1$  را برای  $n$ ‌های طبیعی در نظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای  $n=1$ ،  $n=2$ ، ... و  $n=1000$  به دست آورید هیچ کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای  $n$ ‌های طبیعی عبارت  $991n^2 + 1$  هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.» پاسخ منفی است! سرینسکی ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن  $991n^2 + 1$  مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد! عدد  $12055735790331359447442538737$  مثال نقض مورد نظر است.

۱- طرح مسائل در ارزشیابی‌ها باید در سطح مطالب کتاب باشد. طرح مسائل پیچیده که نیاز به دانش محتوایی سطح بالا دارند مورد تأیید مؤلفین نیست.

حل کاردر کلاس صفحه ۳:

الف) اثبات

$$\begin{cases} x = 2k + 1 \\ y = 2k' + 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1) = 2k'' \quad \text{عددی زوج است}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in k''}$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \sqrt{9+16} &= \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{9} + \sqrt{16} &= 3 + 4 = 7 \end{aligned} \Rightarrow \sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

ب) مثال نقض

پ) آبت: میدیم ارسه عدد طبیعی متوالی لااقل یکی زوج است پس  $n(n+1)(n+2)$  عددی زوج است از طرفی: **مدیر گروه: استاد ایمانلو**

$$n = 3k \rightarrow n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2) = 3k'$$

$$n = 3k+1 \rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1) = 3k''$$

$$n = 3k+2 \rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3(3k+2)(k+1)(3k+4) = 3k'''$$

پس در حالات  $n(n+1)(n+2)$  مضرب از ۳ است در نتیجه  $n(n+1)(n+2)$  مضرب از ۶ است

ت) مثال نقض: ۱۵ عددی اول نیست  $n=4 \rightarrow 2^n - 1 = 2^4 - 1 = 15$

ث) اثبات:

$$\begin{array}{l} x = \frac{a}{b} \quad a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \\ y = \frac{c}{d} \quad c, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0 \end{array} \Rightarrow x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \xrightarrow[b, d \neq 0]{a, b, c, d \in \mathbb{Z}} \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{array}{l} A = \{1, 2, 3, 4\} \\ B = \{2, 3\} \\ C = \{1, 2, 4\} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \\ A \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \Rightarrow B \neq C$$

ج) مثال نقض:

$$k = n(n+1) \Rightarrow 4k + 1 = 4n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 \text{ مربع کامل است}$$

## اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است.

حل: دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد:

الف)  $n$  زوج است، به عبارت دیگر  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ): در این حالت داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

که حاصل یک عدد فرد است.

ب)  $n$  فرد است، یعنی  $n = 2k - 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ): در این حالت هم داریم:

$$\begin{aligned} n^2 - 5n + 7 &= (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 7 = 4k^2 - 4k + 1 - 10k + 5 + 7 \\ &= 4k^2 - 14k + 13 = 2(2k^2 - 7k + 6) + 1 \end{aligned}$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن  $n$ ، فرد بودن  $n^2 - 5n + 7$  را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن  $n$  را با  $p$  و فرد بودن  $n$  را با  $q$  و فرد بودن  $n^2 - 5n + 7$  را با  $r$  نمایش دهیم، حکم را می‌توان به صورت گزاره  $p \vee q \Rightarrow r$  نمایش داد. با توجه به هم ارزی  $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$  شیوه اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow r &\equiv r \vee \sim(p \vee q) \\ &\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

به طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزاره دلخواه داریم:

$$P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (P_n \Rightarrow r)$$

نوعی دیگری از در نظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال: ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $ab = 0$  آنگاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ .

حل: برای  $a$  دو حالت ممکن است رخ دهد:

الف) اگر  $a = 0$ ، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟)

ب) اگر  $a \neq 0$ ، در این حالت  $a^{-1}$  (معکوس  $a$ ) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه  $ab = 0$  در  $a^{-1}$  داریم:

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0$$

$$\Rightarrow b = 0$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

الف) اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند و  $ab$  عددی فرد باشد، ثابت کنید  $a^2 + b^2$  زوج است.

ب)  $A = \{3, 4\}$  یک زیرمجموعه از مجموعه  $\{1, 2, \dots, 6\}$  است و  $n \in S$ ، اگر  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$  یک عدد زوج باشد ثابت کنید  $n \in A$ .

## اثبات غیر مستقیم

### اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرض نادرست بودن حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه موردنظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال: ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم که  $r$  یک عدد گویا و  $x$  یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که  $r+x$  یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف)  $r+x$  گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل  $r+x$  و  $r$  باید عددی گویا باشد یعنی  $r+x-r \in Q$  و از آنجا  $x \in Q$  که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال: حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل: فرض کنیم  $r$  یک عدد گویای ناصفر باشد و  $x$  عددی گنگ باشد ولی  $rx$  عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین  $(\frac{1}{r})(rx) \in Q$  و از آنجا  $x \in Q$  که با فرض در تناقض است.

گفت اگر  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  تمام حالات در مورد مسئله باشد و نخواهیم  $r \Rightarrow (p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n)$  ثابت کنیم

کافیست ثابت کنیم که  $p_1 \Rightarrow r, p_2 \Rightarrow r, p_3 \Rightarrow r, \dots, p_n \Rightarrow r$  برقرار است زیرا:

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge (p_3 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$



الف) اگر  $ab$  عددی فرد باشد پس  $a, b$  هر دو فرد هستند

$$a = \nu k + 1 \quad b = \nu k' + 1$$

$$a^\nu + b^\nu = (\nu k + 1)^\nu + (\nu k' + 1)^\nu = \nu k^\nu + \nu k + 1 + \nu k'^\nu + \nu k' + 1$$

$$= \nu k^\nu + \nu k'^\nu + \nu k + \nu k' + \nu = \nu (\nu k^\nu + \nu k'^\nu + \nu k + \nu k' + 1) = \nu k''$$

ب) فرض کنید  $A = \{3, 4\}$  یک زیر مجموعه از مجموعه  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  باشد  $n \in S$  صد زوج باشد ثابت می کنیم

$$\frac{n^\nu (n+1)^\nu}{\nu} \text{ زوج است و } n^\nu, (n+1)^\nu \text{ بر ازای هر عدد طبیعی یکی زوج و یکی فرد است} \quad n \in A$$

$$\frac{n^\nu (n+1)^\nu}{\nu} = \nu k \Rightarrow n^\nu (n+1)^\nu = \nu k$$

$$\begin{cases} n^\nu = \nu k \Rightarrow n = \sqrt[\nu]{\nu k} \\ (n+1)^\nu = \nu k \Rightarrow n = \sqrt[\nu]{\nu k} - 1 \end{cases} \quad \text{چون } n^\nu, (n+1)^\nu \text{ یکی زوج و یکی فرد است پس باید یکی از آنها مضرب } \nu \text{ باشد}$$

$$k = \nu \rightarrow \begin{cases} n = \sqrt[1]{6} = 6 \\ n = \sqrt[1]{6} - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow n \in A \quad \text{چون } n \text{ طبیعی است پس } k = \nu, \nu + 1, \dots \text{ با توجه به اعضاء } S, k \text{ باید برابر } \nu \text{ باشد}$$

مثال:  $a_1, a_2, a_3$  و  $b_1, b_2, b_3$  هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته اند. ثابت کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  عددی زوج است.

حل: برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم.  $a_1, a_2, a_3$  را به ترتیب ۵، ۸ و ۱ در نظر می‌گیریم و  $b_1, b_2, b_3$  را ۸، ۱ و ۵ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3) = (5 - 8)(8 - 1)(1 - 5) = (-3)(7)(-4) = 84$$

اگر  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل  $a_1 - b_1, a_2 - b_2$  و  $a_3 - b_3$  هم باید فرد باشند (چرا؟) و در نتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی  $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)$  باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عبارت صفر است!

## کاور کلاسی

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر  $x$  یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید  $\frac{1}{x}$  نیز گنگ است.

ب) اگر تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته ولی  $g$  در  $x = a$  ناپیوسته باشد، ثابت کنید  $f+g$  در  $x = a$  ناپیوسته است.

## اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر  $P$  و  $Q$  دو گزاره هم‌ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آنگاه گزاره‌های  $P \Rightarrow Q$  و  $Q \Rightarrow P$

هر دو درست هستند و در نتیجه  $P \Leftrightarrow Q$  یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی  $P \Leftrightarrow Q$  درست باشد، آنگاه  $P$  و  $Q$  دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر  $P, Q$  و  $R$  سه گزاره باشند و  $Q \Leftrightarrow R$  و  $P \Leftrightarrow Q$  یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال: ترکیب دو شرطی  $(a, b \in \mathbb{R}), a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$  درست است ولی ترکیب دو شرطی  $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$  درست

نیست (چرا؟)

کار در کلاس صفحه ۶: الف)

\* می دانیم اگر عدد به غیر از صفری کو یا باشد معکوس آن نیز کو یا است

برهان خلف: فرض می کنیم  $\frac{1}{x}$  گنگ نباشد پس  $\frac{1}{x}$  کو یا است  $\left(\frac{1}{x} = \frac{a}{b}\right)$  چون  $\frac{1}{x}$  کو یا است پس معکوس آن یعنی  $x$  نیز کو یا است.  
 $\left(\frac{1}{x} = \frac{a}{b} \rightarrow x = \frac{b}{a}\right)$  که تناقض با گنگ بودن  $x$  در فرض میا است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

ب) برهان خلف: فرض می کنیم  $f + g$  در  $x = a$  ناپویسته نباشد پس پیوسته است

$$\underbrace{(f+g)(x)}_{\text{پیوسته در } x=a} = \underbrace{f(x)}_{\text{پیوسته در } x=a} + \underbrace{g(x)}_{\text{پیوسته در } x=a} \Rightarrow \underbrace{(f+g)(x) - f(x)}_{\text{پیوسته در } x=a} = \underbrace{g(x)}_{\text{پیوسته در } x=a}$$

و این خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

اگر  $a, b \in \mathbb{R}$  کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف)  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

ب)  $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

مثال: اگر  $a > 0$  ثابت کنید  $a + \frac{1}{a} \geq 2$

اگر  $a > 0$ ، داریم:  $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم‌ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم‌ارز هستند؟ اثبات کدام یک ساده‌تر است؟

همچنین  $a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$

و در نهایت:

$a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$

آخرین گزاره یعنی  $(a-1)^2 \geq 0$  همواره برقرار است، به عبارت دیگر حکم هم‌ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط  $a > 0$ ) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$

$\Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$ . همواره برقرار است.

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر: آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که ...، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال: ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل: اگر  $a$  و  $b$  دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ . گزاره همیشه درست.

$a^2 + ab + b^2 \geq 0$

مثال: اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید:

حل:  $a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

$$p: a < b, q: a^2 < b^2$$

$$\begin{cases} a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \times \rightarrow p = \text{نادرست است} \\ -3 < 2 \Rightarrow 9 < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 < b^2 \Rightarrow a < b \times \rightarrow q = \text{نادرست است} \\ 2^2 < (-3)^2 \Rightarrow 2 < -3 \end{cases}$$

پس  $p \Leftrightarrow q$  نادرست است

(ب)

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

$$p: a < b, q: a^3 < b^3$$

$$a < b \Rightarrow a^3 < b^3 \quad \checkmark \rightarrow p \Rightarrow q \quad \text{درست است}$$

$$a^3 < b^3 \Rightarrow a < b \quad \checkmark \rightarrow q \Rightarrow p \quad \text{درست است}$$

چون  $p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$  هر دو درست هستند پس  $p \Leftrightarrow q$  درست است

راه دوم:  $a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$ . گزاره همیشه درست.

البته ممکن است شما هم راه حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به کار برد.

### کار در کلاس

الف) اگر  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن  $n$  و زوج بودن  $n^2$  هم‌ارزند؟

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

۱ نقطه  $C$  روی عمود منصف پاره خط  $AB$  قرار دارد.

۲ فاصله نقطه  $C$  از دو سر پاره خط  $AB$  یکسان است.

### تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

الف) اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم:

ب) برای هر سه عدد حقیقی  $x$  و  $y$  و  $z$  داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

۲ عددی حقیقی مانند  $x$  ارائه کنید به طوری که  $x^2 < x$ .

۳ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha - \beta$  و  $\alpha + 2\beta$  گنگ هستند.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند  $x$  و  $y$  وجود دارند که  $x^2 + y^2 = (x + y)^2$

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر  $a$  و  $b$  چنان وجود دارند که:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$$

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

$$\begin{cases} p: & \text{زوج } n \\ q: & \text{زوج } n^2 \end{cases} \quad n \Rightarrow \text{زوج است} \quad n^2$$

اگر  $n$  زوج باشد پس  $n = 2k$  پس  $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$  پس  $n^2$  زوج است پس  $q \Rightarrow p$  درست است

$$n \text{ زوج است} \Rightarrow n^2 \text{ زوج است}$$

برهان خلف: فرض می‌کنیم  $n$  زوج نباشد پس  $n$  فرد است

$$n = 2k+1 \rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k'+1$$

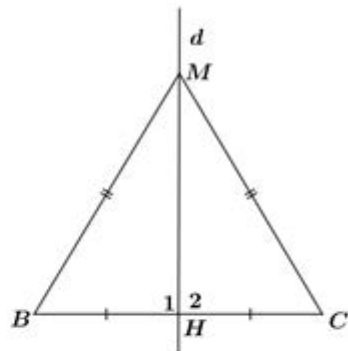
بافرض تناقض وارد پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است. پس  $q \Rightarrow p$  درست است. چون  $p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$  هر دو درست هستند پس  $p \Leftrightarrow q$  درست است

است و  $p, q$  هم ارز هستند.

ب) نقطه ای روی خطی باشد که منصف پاره خط است و از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد آن خط بر پاره خط عمود است.

فرض:  $\left\{ \begin{array}{l} M \in d \\ MB = MC \end{array} \right.$  حکم:  $d \perp BC$

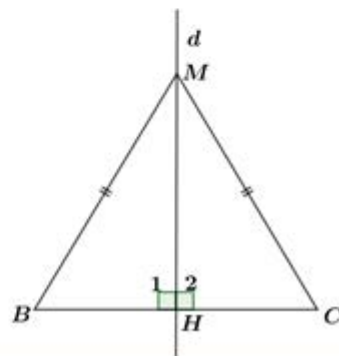
$\left. \begin{array}{l} BH = HC \\ MH = MH \\ MB = MC \\ BH = HC \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}HC \cong \hat{B}HC \Rightarrow \angle H_1 = \angle H_2$



نقطه ای روی خطی باشد که عمود بر پاره خطی است و از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد آن خط عمود منصف پاره خط است.

فرض:  $\left\{ \begin{array}{l} M \in d \\ MB = MC \\ d \perp BC \end{array} \right.$  حکم:  $BH = HC$

$\left. \begin{array}{l} MH = MH \\ MB = MC \\ \angle H_1 = \angle H_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M}HC \cong \hat{M}HC \Rightarrow BH = HC$





## حل تمرینات صفحه ۸

$$xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

تمرین ۱: الف) روش اول:

روش دوم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

ب) روش اول:

$$\left. \begin{aligned} (x - y)^r &\geq 0 \Leftrightarrow x^r + y^r - rxy \geq 0 \Leftrightarrow x^r + y^r \geq rxy \\ (y - z)^r &\geq 0 \Leftrightarrow y^r + z^r - ryz \geq 0 \Leftrightarrow y^r + z^r \geq ryz \\ (z - x)^r &\geq 0 \Leftrightarrow z^r + x^r - rxz \geq 0 \Leftrightarrow z^r + x^r \geq rxz \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} rx^r + ry^r + rz^r &\geq rxy + ryz + rxz \quad r(x^r + y^r + z^r) \geq r(xy + yz + xz) \\ \Leftrightarrow x^r + y^r + z^r &\geq xy + yz + xz \quad \blacksquare \end{aligned}$$

روش دوم:

$$x^r + y^r + z^r \geq xy + yz + xz \xrightarrow{\times r} rx^r + ry^r + rz^r \geq rxy + ryz + rxz$$

$$\Leftrightarrow x^r + y^r - rxy + x^r + z^r - rxz + y^r + z^r - rzy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^r + (x - z)^r + (y - z)^r \geq 0$$

این رابطه همواره درست است

مدیر گروه: استاد ایمانلو  
 $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$ 

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &> 2xy = 2yx \\ x^2 + 1 &> 2x \cdot 1 = 2x \\ y^2 + 1 &> 2y \cdot 1 = 2y \end{aligned} \right\}$$

$$x^2 + y^2 + x^2 + 1 + y^2 + 1 > 2xy + 2x + 2y$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2 > 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + 1) > 2(xy + x + y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 > xy + x + y \quad \blacksquare$$

ب) قسمت دوم روش دوم:

$$x^p + y^p + 1 \geq xy + y + x \xrightarrow{\times p} px^p + py^p + p \geq pxy + py + px$$

$$\Leftrightarrow x^p + y^p - pxy + x^p - px + 1 + y^p - py + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^p + (x-1)^p + (y-1)^p \geq 0$$

## تمرین ۲) روش اول:

**اثبات:** فرض کنیم  $x$  یک عدد حقیقی بین دو دو عدد  $0$  و  $1$  باشد به عبارت دیگر:  $0 < x < 1$

$$0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x^r < 1 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \xrightarrow{\times} x^r(x-1) < 0 \rightarrow x^r - x^r < 0 \rightarrow x^r < x^r$$

$$x^r < x^p \rightarrow x^r - x^p < 0 \rightarrow x^p(x-1) < 0 \rightarrow \begin{cases} x^p = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$x$	$0$	$1$
$x^r - x^p$	$-$	$+$

مجموعه جواب:  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

روش دوم:

$$\begin{cases} \alpha, \beta \in \mathbb{Q}' \\ \alpha + \beta = \frac{a}{b} \end{cases}$$

تمرین ۳ روش اول: الف)  $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}'$

فرض می کنیم  $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}'$  پس  $\alpha - \beta$  گویا است و  $\alpha - \beta = \frac{c}{d}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{a}{b} \\ \alpha - \beta = \frac{c}{d} \end{cases} \Rightarrow \mu\alpha = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \xrightarrow{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}} \mu\alpha = \frac{e}{f} \rightarrow \alpha = \frac{e}{\mu f} \in \mathbb{Q}$$

که خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

روش اول: (ب)  $\alpha + ۲\beta \in \mathbb{Q}'$

فرض می کنیم  $\alpha + ۲\beta \notin \mathbb{Q}'$  پس  $\alpha + ۲\beta$  گویا است و  $\alpha + ۲\beta = \frac{c}{d}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{a}{b} \\ \alpha + ۲\beta = \frac{c}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = -\frac{a}{b} \\ \alpha + ۲\beta = \frac{c}{d} \end{cases} \rightarrow \beta = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \xrightarrow{\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}} \beta = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$$

که خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

نکته: 1 مجموعه دو عدد گنگ و گویا، عددی گنگ است.

با توجه به نکته خواهیم داشت:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{b} \longrightarrow \alpha = \frac{a}{b} - \beta \in \mathbb{Q}'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\beta = \frac{a}{b} - \beta + 2\beta = \frac{a}{b} + \beta \longrightarrow \alpha + 2\beta = \frac{a}{b} + \beta \longrightarrow \alpha + 2\beta \in \mathbb{Q}' \\ \alpha - \beta = \frac{a}{b} - \beta - \beta = \frac{a}{b} - 2\beta \longrightarrow \alpha - \beta = \frac{a}{b} - 2\beta \longrightarrow \alpha - \beta \in \mathbb{Q}' \end{array} \right.$$

$$a^r + b^r = (a+b)^r \quad ? \Rightarrow a^r + b^r = a^r + b^r + r ab \Rightarrow r ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0, b \in \mathbb{Z} \\ b = 0, a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تمرین ۴:

تمرین ۵:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^p = ab \Rightarrow (a+b)^p - ab = 0 \xrightarrow{\times p} r a^p + r b^p - r ab = 0$$

$$\Rightarrow a^p + b^p + (a-b)^p = 0 \quad \text{و این تناقض است}$$



$x = ۲k + ۱$  فرض می‌کنیم فرد باشد

$x^۲ = (۲k + ۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲(۲k^۲ + ۲k) + ۱ = ۲k' + ۱$  فرد است

$x^۳ = (۲k + ۱)^۳ = ۸k^۳ + ۱۲k^۲ + ۶k + ۱ = ۲(۴k^۳ + ۶k^۲ + ۳k) + ۱ = ۲k'' + ۱$  فرد است

$n, n + ۱, n + ۲, n + ۳, n + ۴$

$$\bar{x} = \frac{n + n + ۱ + n + ۲ + n + ۳ + n + ۴}{۵} = \frac{۵n + ۱۰}{۵} = n + ۲$$

تمرین ۶: ب)

نمونه سوالات درس اول فصل اول (استدلال)

الف) با استفاده از اثباتهای بازگشتی - گزاره های هم ارزی

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a+b}}$$

۱- اگر  $a, b$  دو عدد حقیقی مثبت باشند ثابت کنید

$$a^r + b^r \geq (a+b)^r$$

۲- اگر  $a, b$  دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید

$$\frac{a}{b^r} + \frac{b}{a^r} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

۳- اگر  $a, b$  دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید

$$ra^r + b^r + c^r \geq rabc - rac - r$$

۴- برای هر عدد حقیقی  $a, b, c$  ثابت کنید

۵- برای  $a = 4 - \sqrt{3}$ ,  $b = 2 - \sqrt{3}$  نشان دهید  $\sqrt{1 - 6\sqrt{3}} \geq 3 - \sqrt{3}$  است

\*(با استفاده از واسطه حسابی و هندسی)

## ب) با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید:

مدیر گروه: استاد ایمانلو

۶- تفاوت مکعب دو عدد مضرب ۳، مضرب ۳ است.

۷- حاصل جمع سه برابر هر عدد زوج یا یک عدد فرد همواره عددی فرد است.

۸- حاصل ضرب هر دو عدد زوج عددی زوج است

۹- مجموع سه عدد زوج متوالی مضربی از ۶ است

۱۰- مجموع ۷ برابر یک عدد زوج یا یک عدد فرد، عددی فرد است.

۱۱- مربع هر عدد فرد مضرب ۸ بعلاوه ۱ است.

۱۲- حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی مضرب ۲۴ است.

۱۳- تفاضل مربعات دو عدد فرد مضرب ۸ است.

۱۴- برای هر عدد صحیح  $n$ ،  $(n^2 + 2n)(n^2 - 1)$  بر ۸ قابل تقسیم است.

۱۵- جذر  $n(n+1)$  به ازای هیچ عدد طبیعی  $n$ ، عدد صحیح نیست.

**(پ) با استفاده از برهان خلف نشان دهید:**

۱۶- سیدانیم  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{7}$  اعداد گنگ هستند نشان دهید  $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$  گنگ است.

۱۷- اگر  $\sqrt{3}$  گنگ باشد آنگاه  $\sqrt{\sqrt{3} + 2}$  نیز عددی گنگ است.

۱۸- تعداد اعداد اول نامتناهی هستند.

۱۹- اگر  $\sqrt{5}$  گنگ باشد آنگاه  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$  نیز عددی گنگ است.

۲۰- از یک نقطه خارج یک خط، فقط یک عمود می توان رسم کرد (در یک صفحه)

**(پ) با استفاده از مثال نقض نشان دهید که عبارتهای زیر نادرستند.**

۲۱- حاصل ضرب هر عدد گنگ در هر عدد گویا، عددی گنگ است.

۲۲- مجموع مربعات دو عدد گنگ، گویا است.

۲۳- رابطه پدری، رابطه ایی با خاصیت تعدی (تراپایی) نیست.

۲۴- مربع هر عدد حقیقی از مکعبش کوچکتر است.

۲۵- هیچ دو تابع نمایی و وارونش یکدیگر را قطع نمی کنند.

۲۶- هر عدد حقیقی غیر از صفر از وارونش بزرگتر است.

۲۷- مجموع مربعات هر دو عدد بین صفرو یک، بین صفرو یک است.

۲۸- برای هر زاویه در ناحیه اول دایره مثلثاتی، سینوس آن از کسینوسش بیشتر است.