

فصل ۲

اللّوهای خطی

ضراوند همه چیز میشود همه کس را.

به شرط اعتقاد؛ به شرط پاکرد دل؛ به شرط طهارت روح؛

به شرط پرهیز از معامله با ابلیس.

بشوید قلب‌هایتان را از هر اجسام ناروا!

و مغزهایتان را از هر اندیشه خلاف،

و زبان‌هایتان را از هر گفتار ناپاک،

و دست‌هایتان را از هر آلودگی در بازار...

و پرهیز از

ناجوانندگانه‌ها، ناراستی‌ها، نامردی‌ها!

چنین کنید تا ببینید که ضراوند،

چگونه بر سفره شما، با کاس پر خوراک و نیکوکاران می‌نشیند

مدل سازی

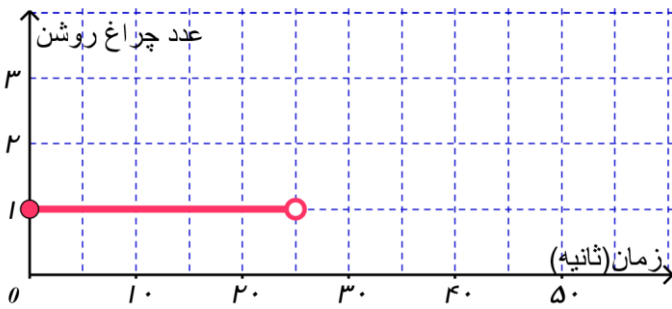
در کتاب یازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبه قبض برق یک خانه یا مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم. (رسم نمودار توابع متناظر با مفهوم مطرح شده)



تمرین ۱: یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

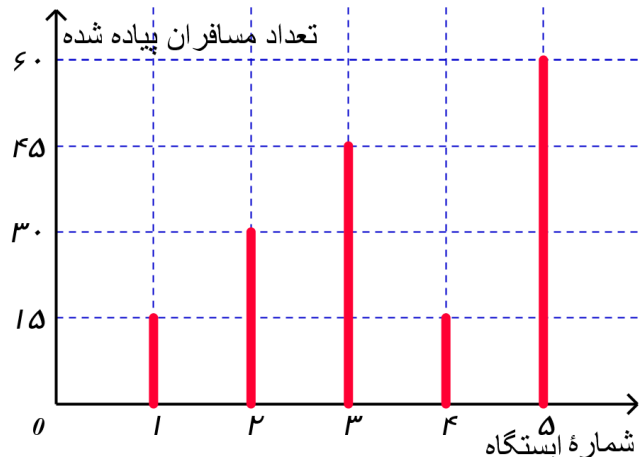
حل: اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیه t ، با توجه به فرض:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ \dots\dots\dots & 25 \leq t < 30 \\ 3 & \dots\dots\dots \leq t < \dots\dots\dots \end{cases} \quad D_f = \{t \in \square \mid \dots\dots \leq t < \dots\dots\} , \quad R_f = \{\dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots\}$$



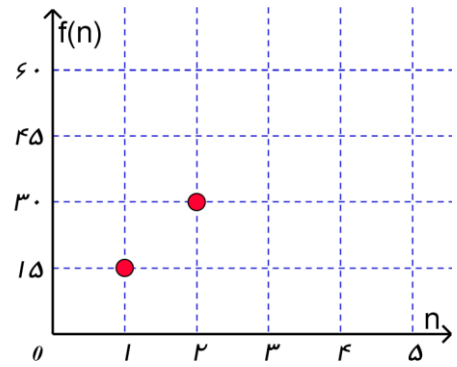
تمرین ۲: نمودار میله ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می دهد. اگر n ،

شماره ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



n	۱	۲	۳	۴	۵
$f(n)$	۱۵	۳۰			

$$f(n) = \begin{cases} \dots\dots\dots & 1 \leq n \leq 3 \quad n \in \mathbb{N} \\ 15 + 45(n-4) & 4 \leq n \leq 5 \end{cases}$$



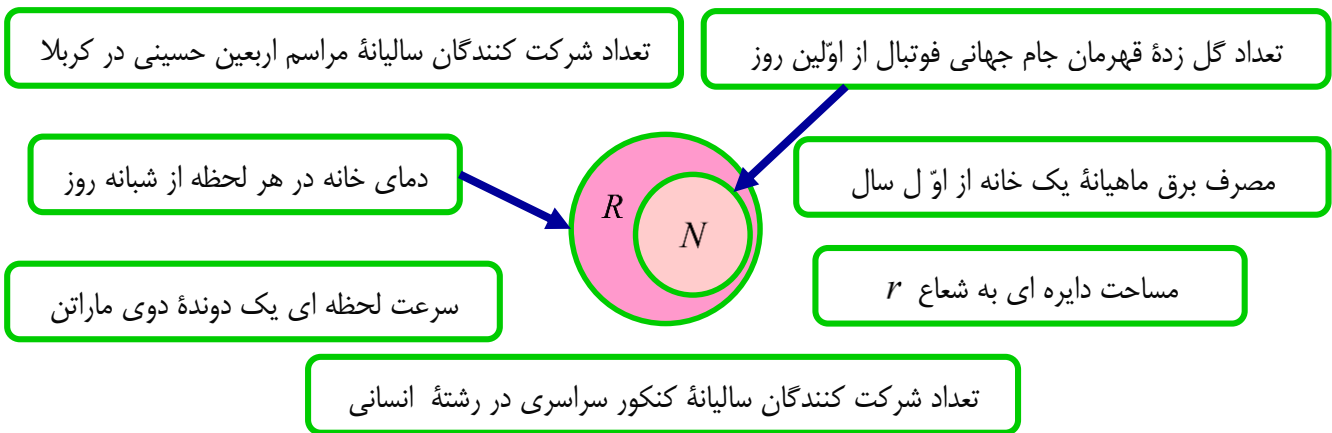
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} \mid \dots \leq n < \dots\}, \quad R_f = \{\dots, \dots, \dots, \dots\}$$



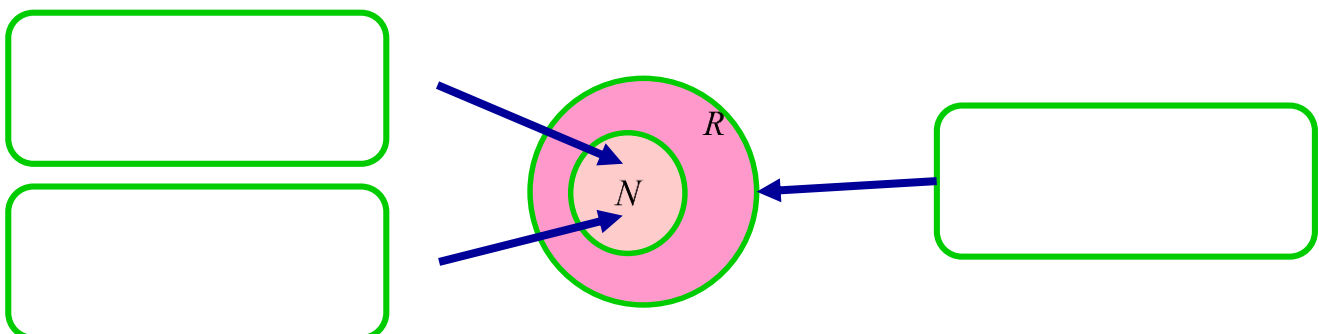
یکی از تفاوت های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنها است. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع زمان شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ثانیه ۴۵ ام است و تابع در تمامی این زمان، قابل تعریف است، پس دامنه تابع زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و ... است. پس دامنه تابع زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی است.

تمرین ۳: اگر f تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، مانند نمونه، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



تمرین ۴: داخل هر کدام از مستطیل های زیر مسئله ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد:



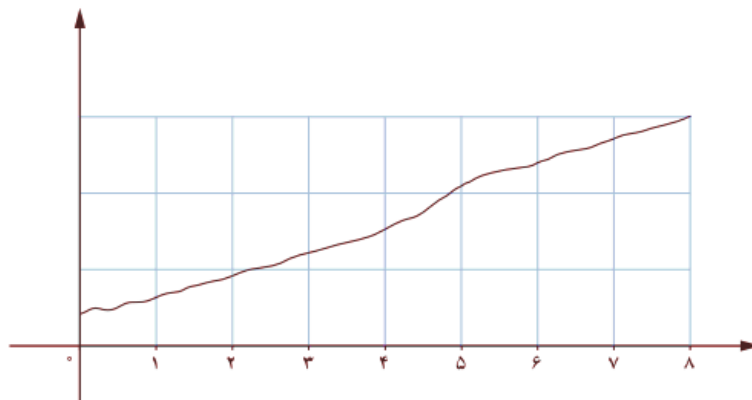
در تعیین دامنه تعریف تابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

کاربرد دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر علمی امکان پذیر نباشد. در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به طور تقریبی بررسی می‌کنیم. برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می‌تواند میزان دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شبانه روز اندازه گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می‌کند.

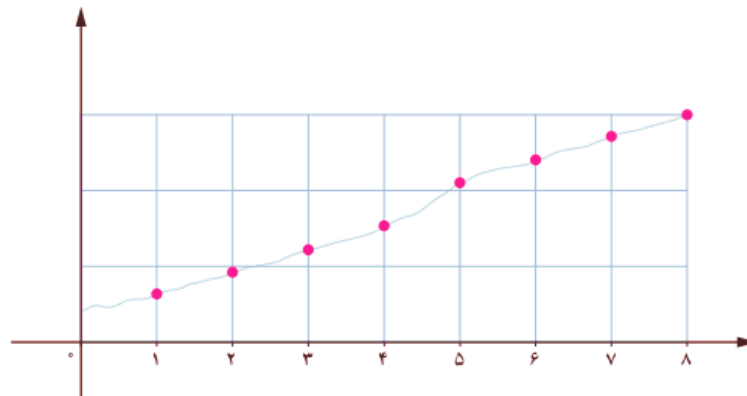
به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می‌کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و ...)

میزان دارو در بدن بیمار (میلی‌گرم)



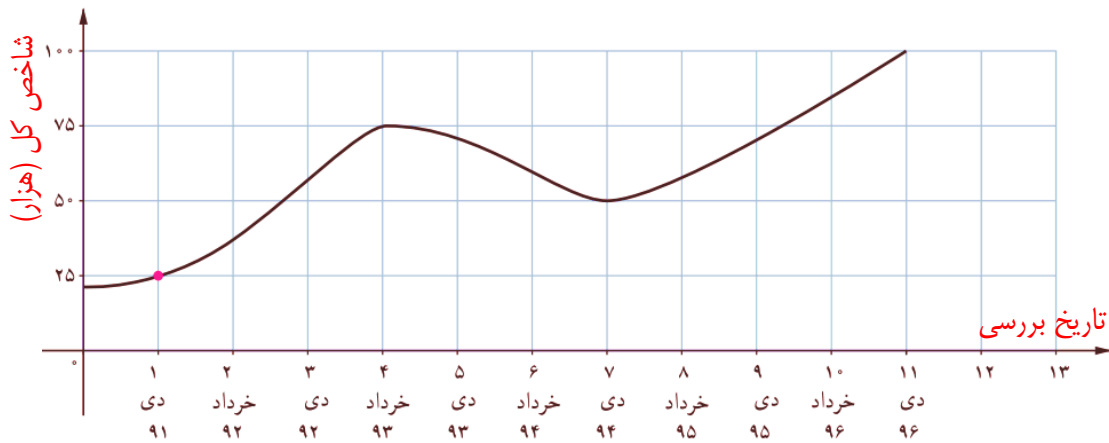
نمودار واقعی میزان دارو در بدن بیمار در هشت ساعت اول از زمان بستری شدن
مدت زمان بستری شدن (ساعت)

میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی‌گرم)



نمودار میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش
مدت زمان بستری شدن (ساعت)

تمرین ۵: نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می دهد:



الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ های نوشته شده معلوم کند، در سری زمانی بالا، شاخص کل در چه فاصله ای روند کاهشی و در چه فاصله ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟

ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و ... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

n امین تاریخ بررسی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$f(n)$											
مقدار شاخص کل (هزار)	۲۵										

پ) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تألیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(13)$ است؟ چرا؟

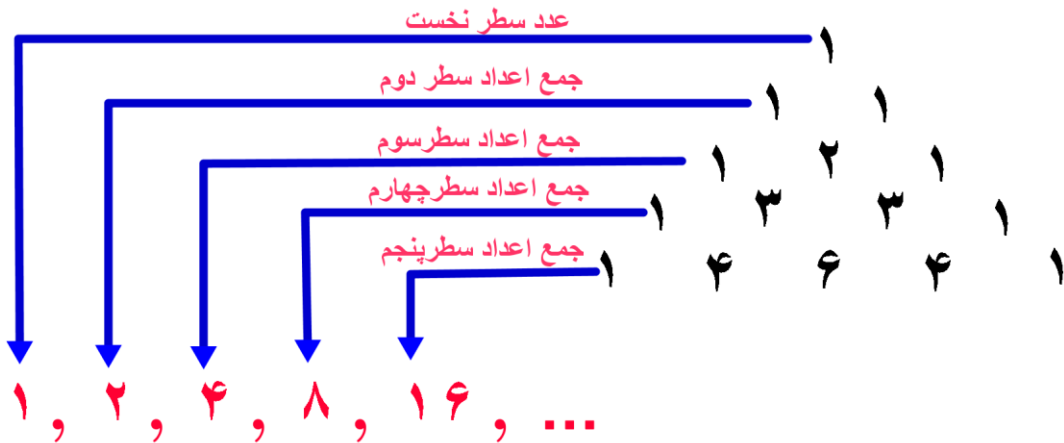
- ۸۵۰۰۰ (۱) ۱۰۵۰۰۰ (۲) ۱۱۲۵۰۰ (۳) ۱۰۰۰۰۰ (۴) ۱۲۵۰۰۰ (۵)

ت) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

در سال های پیش با مفهوم الگو و یافتن جمله n ام یک الگو آشنا شدیم. عموماً این الگوها را نیز می توانیم به کمک تابعی با دامنه اعداد طبیعی مدل سازی کنیم.



تمرین ۶: برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می کنیم:



اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

ب) بر اساس رابطه میان a_1 و a_2 ، رابطه میان a_2 و a_3 و a_3 و a_4 و نیز a_4 و a_5 می توان مقادیر a_5 و a_6 را مشخص کرد؟ چگونه؟

پ) آیا به کمک قسمت ب، می توانیم رابطه میان هر دو جمله متوالی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به دست می آید؟ چرا؟

ت) رابطه ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطه بازگشتی می نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه ای بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.

ث) رابطه ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

ج) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «ت» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «پ» دارد؟



الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحه قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت سرهم قرار دارند دنباله اعداد حقیقی می نامند. جملات دنباله عموماً به صورت $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ نشان داده می شوند. a_n را جمله n ام دنباله می نامند که می تواند به دو صورت زیر بیان شود:

الف) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشتی)

ب) رابطه ای بر حسب n که $n \in \mathbb{N}$ (ضابطه تابعی دنباله).

$$4, 7, 10, 13, 16, \dots$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$$

برای مثال دنباله

رابطه بازگشتی

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = 7 = 4 + 3 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = 10 = 7 + 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3$$

$$a_4 = 13 = 10 + 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3$$

$$a_5 = 16 = 13 + 3 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad (n \geq 2, a_1 = 4)$$

رابطه ای بر حسب n

$$a_1 = (3 \times 1) + 1 = 4$$

$$a_2 = (3 \times 2) + 1 = 7$$

$$a_3 = (3 \times 3) + 1 = 10$$

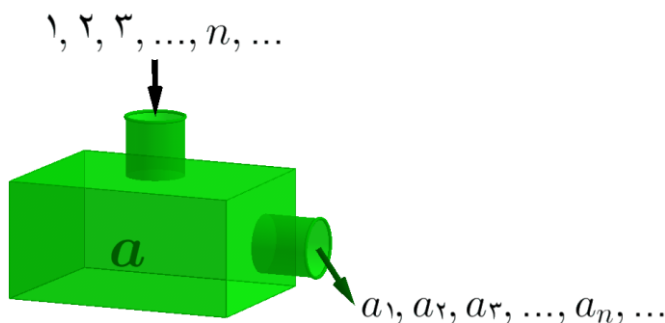
$$a_4 = (3 \times 4) + 1 = 13$$

$$a_5 = (3 \times 5) + 1 = 16$$

$$\vdots$$

$$a_n = 3n + 1$$

اگر تابعی از باشد اعضای بُرد این تابع می تواند دنباله ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله اول آن را $a(1)$ ، جمله دوم را $a(2)$ ، جمله سوم را $a(3)$ ، ... و جمله n ام را $a(n)$ در نظر می گیریم. معمولاً جملات دنباله را به جای $a(n)$ با a_n نشان می دهند که آن را جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می نامند.



تمرین ۷: با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

جمله n ام	پنج جمله اول دنباله
$a_n = 3n - 2$	۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳
$b_n = n^2 - 1$	۰, ۳, ۸,, ۲۴
$c_n = \frac{1}{n}$, $\frac{1}{2}$,,,
$d_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3},,$

تمرین ۸: برای جملات دنباله روبرو: ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳, ...

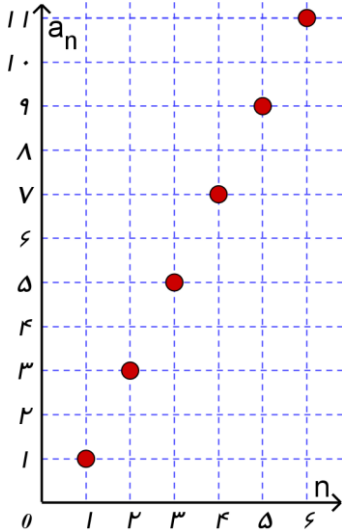
(الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

(ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

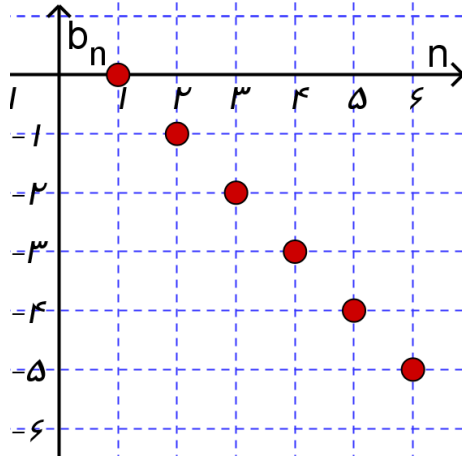
رسم دنباله

تمرین ۹: با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار دنباله های زیر را رسم کنید.

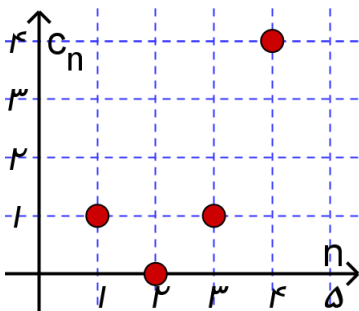
الف) $a_n = 2n - 1$ ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ...



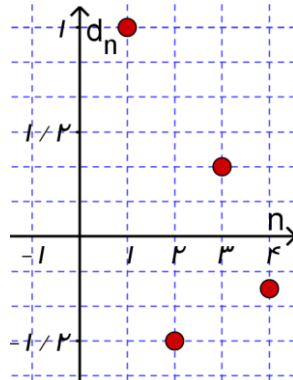
ب) $b_n = 1 - n$ ۰, -۱, -۲, -۳, -۴, ...



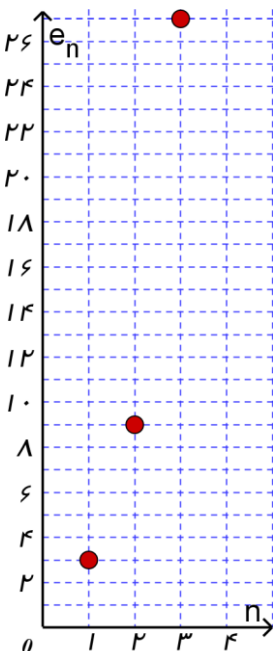
پ) $c_n = (n - 2)^2$ ۱, ۰, ۱, ۴, ...



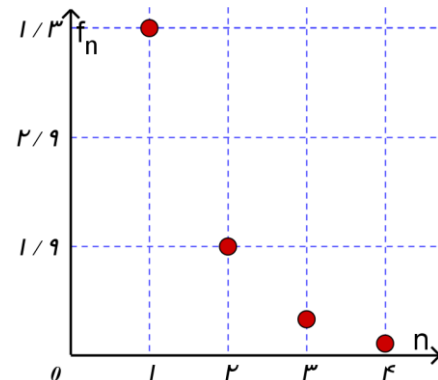
ت) $d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ۱, -1/2, 1/3, -1/4, ...



ث) $e_n = 3^n$ ۳, ۹, ۲۷, ...

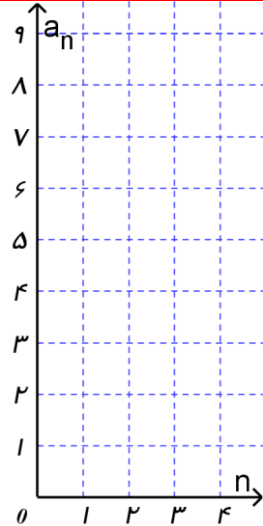
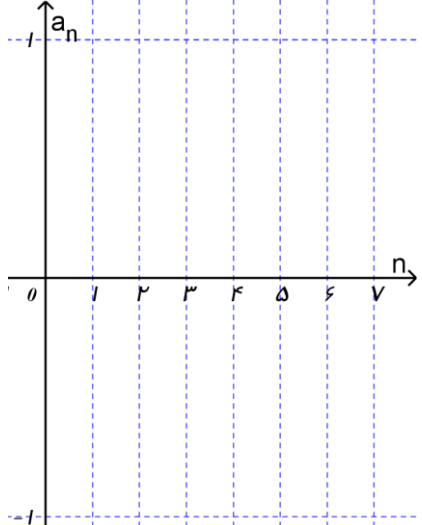
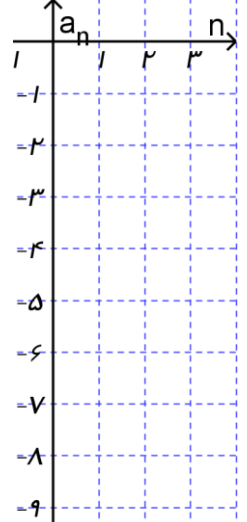


ج) $f_n = (\frac{1}{3})^n$ 1/3, 1/9, 1/27, ...



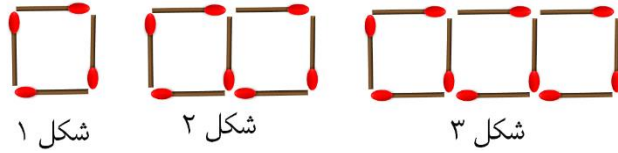
جملات دنباله	فرمول بازگشتی	ضابطه دنباله	نمودار دنباله
$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 9$	$a_n = 3^{3-n}$	
	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$		
		$a_n = 2n + 1$	



جملات دنباله	فرمول بازگشتی	ضابطه دنباله	نمودار دنباله
	$a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$	X	
$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$	X	X	
$-1, -4, -9, -16, \dots$	X	X	
	$a_{n+r} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_r = 1$	X	X



تمرین ۱۱: با استفاده از چوب کبریت شکل های زیر ساخته شده است.



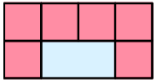
شکل ۱

شکل ۲

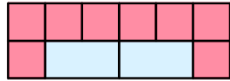
شکل ۳

الف) تعیین کنید که برای ساختن هر شکل چند چوب کبریت استفاده شده است؟

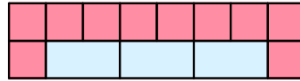
ب) جمله n ام (جمله عمومی) دنباله مربوط به چوب کبریت ها را بنویسید.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

تمرین ۱۲: به الگوی هندسی روبرو دقت کنید.

الف) شکل بعدی الگو را رسم کنید.

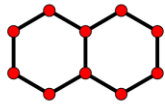
ب) تعداد کاشی های سفید و تیره را برای هر شکل بنویسید.

پ) جمله عمومی مربوط به الگوهای کاشی های تیره را بنویسید.

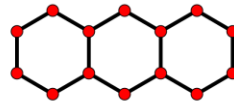
تمرین ۱۳: شکل های زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

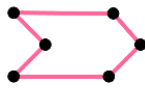
الف) جدول زیر را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد ضلع ها						

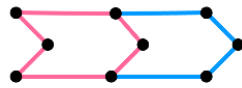
ب) آیا می توانید حاصل a_n را برحسب n به دست آورید؟



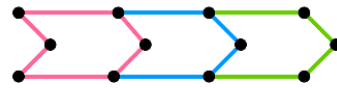
تمرین ۱۴: شکل های زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۱



شکل ۲



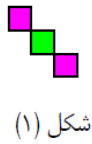
شکل ۳

الف) جدول زیر را کامل کنید.

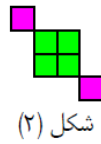
شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد ضلع ها						

ب) آیا می توانید حاصل a_n را برحسب n به دست آورید؟

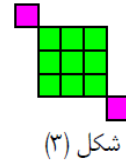
تمرین ۱۵: شکل های زیر را در نظر بگیرید:



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

(الف) جدول زیر را کامل کنید

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد مربع ها						

(ب) آیا می توانید حاصل a_n را برحسب n به دست آورید؟

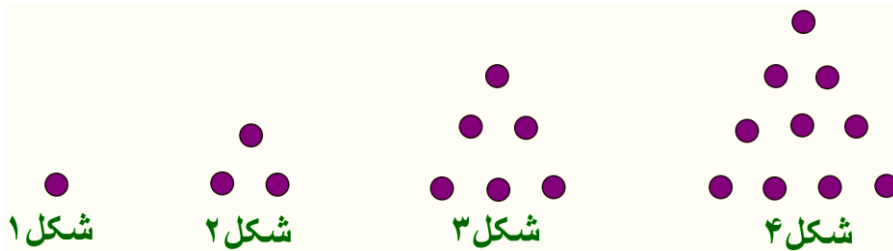
حل:

$$n=1 \rightarrow a_1 = (1)^2 + 2 = 3, \quad n=2 \rightarrow a_2 = (2)^2 + 2 = 6$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = (3)^2 + 2 = 11, \quad n=4 \rightarrow a_4 = (4)^2 + 2 = 18$$

$$a_n = n^2 + 2$$

تمرین ۱۶: الگوی هندسی زیر را در نظر بگیرید.



(الف) شکل بعدی الگو را رسم کنید.

(ب) تعداد دایره های هر شکل را بنویسید.

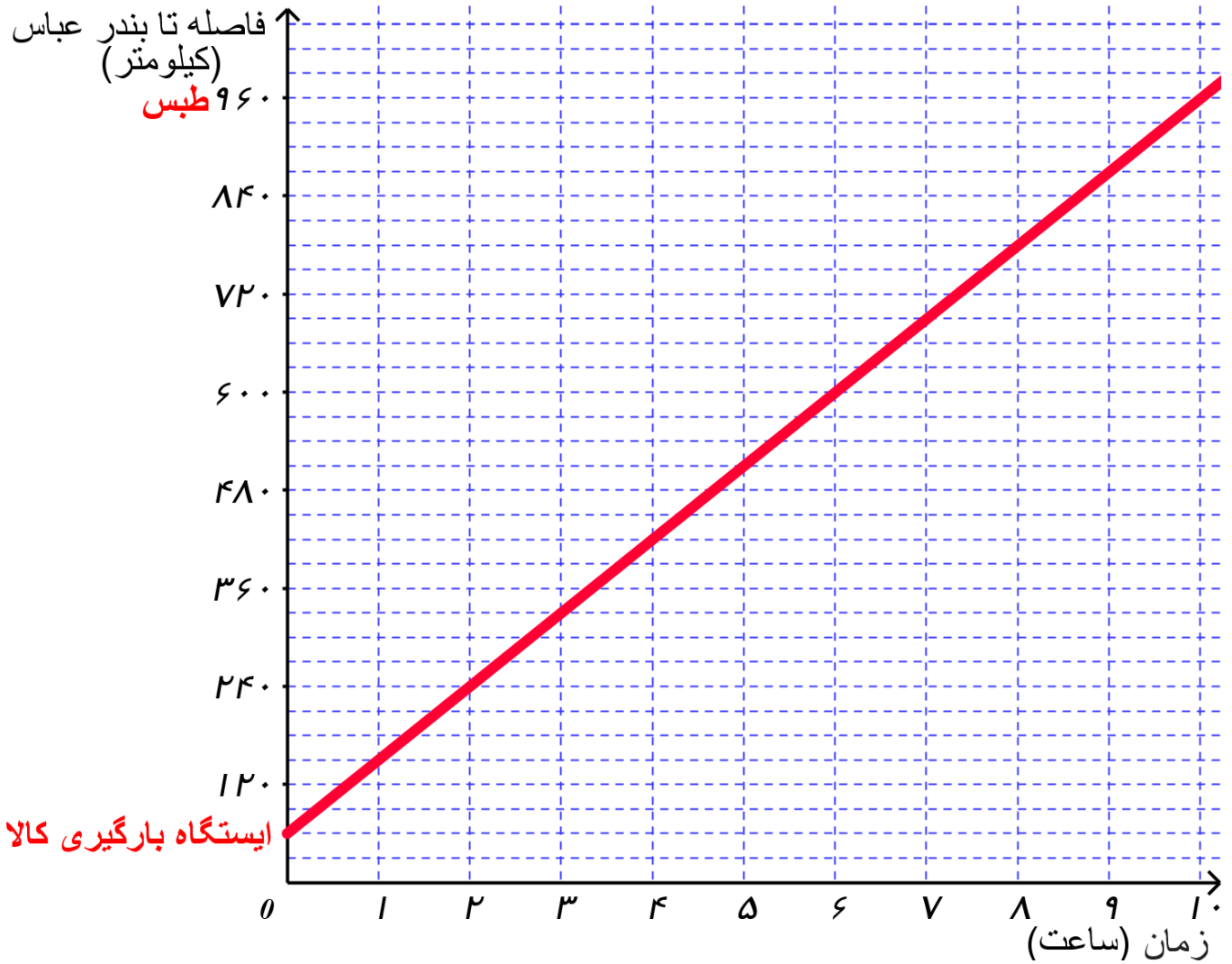
(پ) جمله عمومی این الگو را بنویسید.

حل:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴
تعداد دایره ها	$\frac{(1)(2)}{2} = 1$	$\frac{(2)(3)}{2} = 3$	$\frac{(3)(4)}{2} = 6$	$\frac{(4)(5)}{2} = 10$

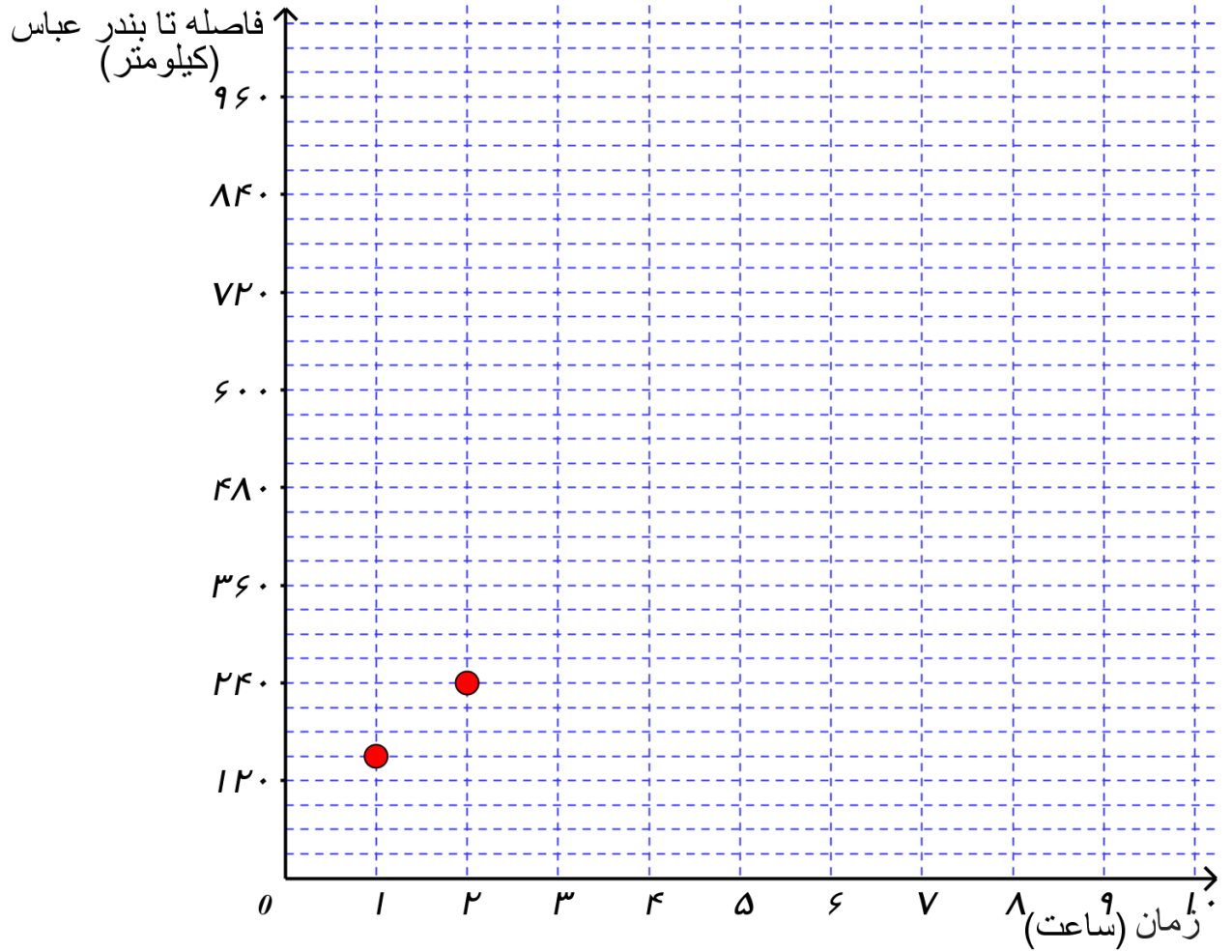
لذا تعداد واقعی دایره های هر الگو به صورت $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

تمرین ۱۷: یک قطار باری در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان - زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می کند.



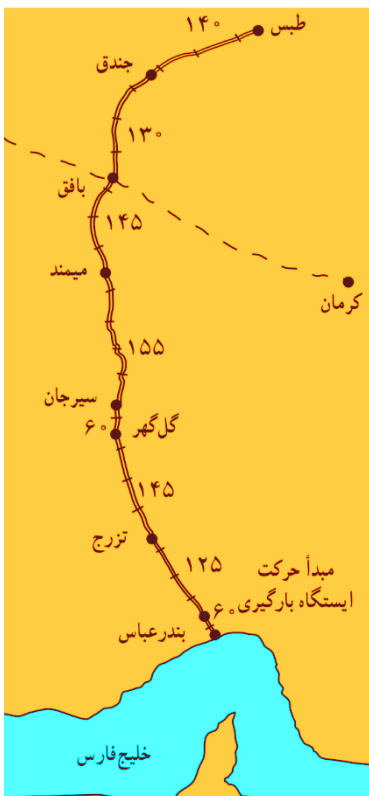
الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را بدست آورید.

ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندر عباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.



پ) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

ت) جدول زیر را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.



نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندر عباس
ایستگاه بارگیری - تزرچ	۱۲۵	$۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$
تزرچ - گل گهر	۱۴۵	
گل گهر - سیرجان		
سیرجان - میمند		
میمند - بافق		
بافق - جندق		
جندق - طبس		

ث) با فرض اینکه a_n مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد جدول زیر را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

$n=1$	$a_1 = 60 + 90 = 150$	$n=2$	$a_2 = a_1 + 90 = 150 + 90 = 240$
$n=3$	$a_3 = a_2 + 90 =$	$n=4$	
$n=5$		$n=6$	
$n=7$		$n=8$	
$n=9$		$n=10$	

ج) با مقایسه جدول های بالا کدام ایستگاه ها محل تناس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + \\ a_3 = a_1 + \dots \times 90 \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 = a_3 + \\ a_4 = a_1 + \dots \times 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = a_4 + \\ a_5 = a_1 + \dots \times 90 \end{cases} \quad \begin{cases} a_6 = a_5 + \dots \times 90 \\ a_6 = a_1 + \dots \times 90 \end{cases}$$

$$a_7 = a_6 + \dots \times 90 \quad a_8 = a_7 + \dots \times 90 \quad a_{10} = a_9 + \dots \times 90$$

از روابط بالا می توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (\dots) \times 90 \quad (1)$$

$$a_n - a_{n-1} = \dots \quad \text{رابطه بازگشتی}$$

$$a_n - a_m = (\dots) \times 90$$

ج) کدام ویژگی دنباله باعث برقراری روابط بالا شده است؟

ج) رابطه (۱) در قسمت «ج» چه ارتباطی با ضابطه تابع بدست آمده در قسمت «الف» دارد؟

دنباله حسابی

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در تمرین قبل این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می شود.

چنین دنباله هایی که هر جمله آن به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت (مثبت یا منفی) به جمله قبلی به دست می آید، «دنباله حسابی» نامیده می شود.

یک دنباله حسابی، دنباله ای به صورت :

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d « اختلاف مشترک » جملات دنباله است.

جمله n ام این دنباله را به صورت معرفی می شود: $a_n = a + (n-1)d$

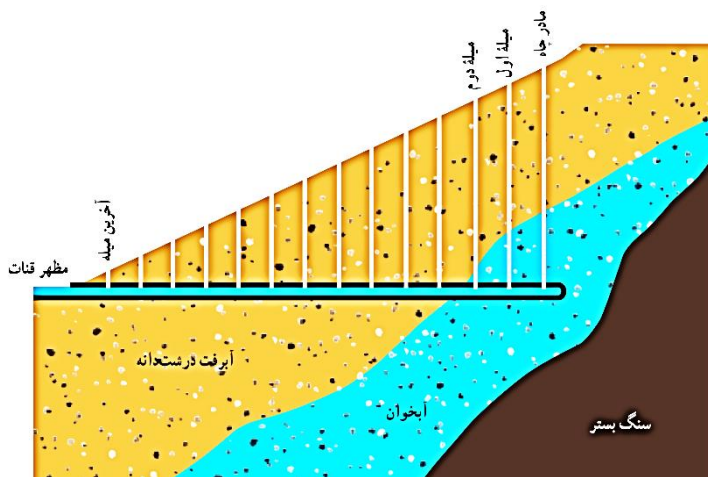
« d » را اختلاف مشترک دنباله حسابی می نامند؛ زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار ثابت d است.

تمرین ۱۸: جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	اختلاف مشترک	پنج جمله اول	a_n
a	d		
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴	$a_n = 2 + 3(n-1)$
		۴, ۱, -۲, -۵, -۸	
۴	$-\frac{1}{2}$		
			$a_n = -3 + 5(n-1)$

تمرین ۱۹: ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

تمرین ۲۰: مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک d » چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟

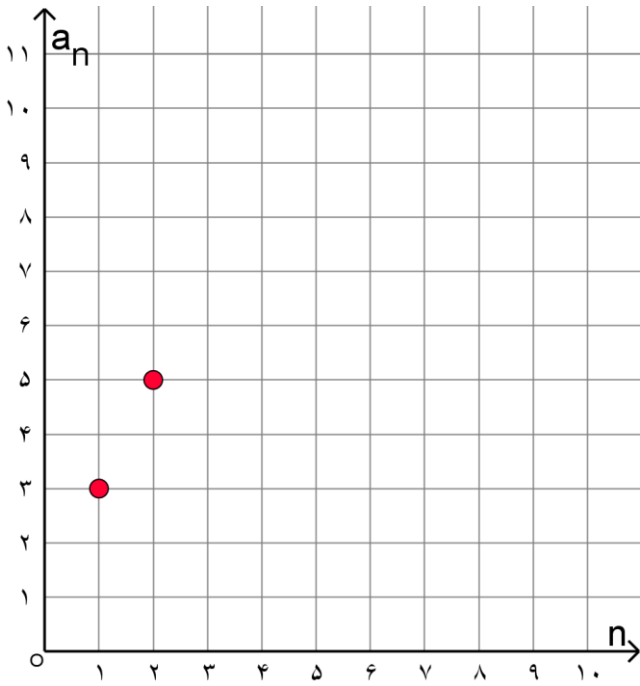


قنات یا کاریز، راه آب یا کانالی است که در ریز زمین کنده شده است تا آبی را که از حفره چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادرچاه» به دست آمده است، به منطقه ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل، از چاه های کلمکی به نام «میله» استفاده می کنند. میله ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقنی در خارج کردن خاک های حاصل از حفر کانال و بعد ها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می شوند.

تمرین ۲۱: در یک منطقه، مقنی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیر زمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه های کلمکی در فاصله های یکسان از هم، عمق میله اول $29/5$ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق آخرین میله ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله $1/5$ متر باشد، این مقنی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

تمرین ۲۲ : دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

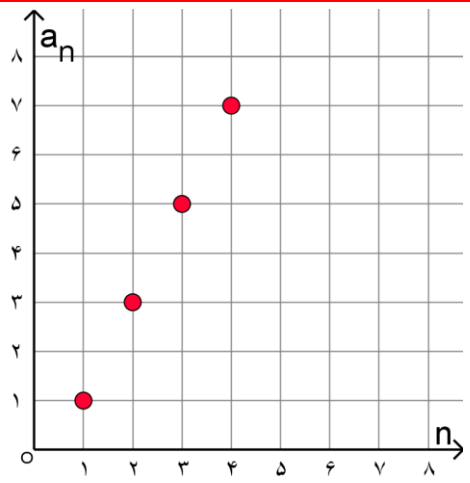
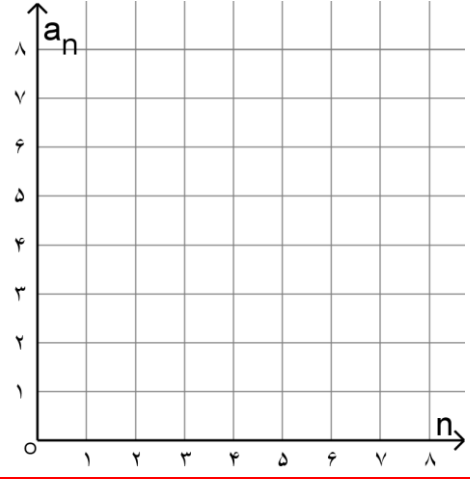
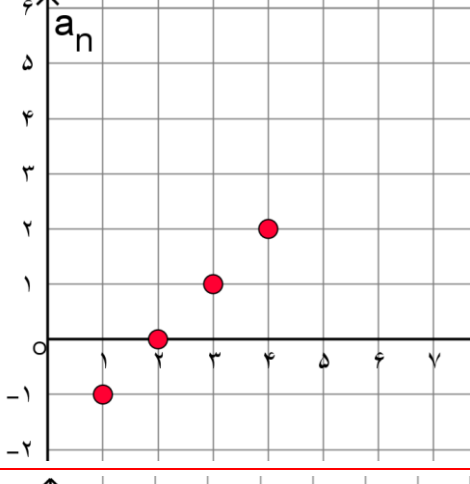
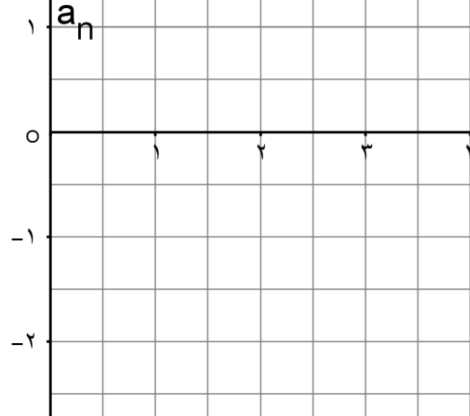


ب) معادله خط گذرنده از دو نقطه اول و دوم را به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق می کنند؟

پ) شیب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟



اگر جمله یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می کند.

ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	۱, ۳, ۵, ۷	
$y = -x - 4$			
			
		$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$	

تمرین ۲۴: شخصی برای ثبت نام در باشگاه والیبال ۱۲۵۰۰ تومان می دهد. و برای هر دفعه بازی نیز ۶۰۰۰ هزار تومان می پردازد. دنباله مبلغ پرداختی توسط او برای n بازی را تشکیل دهید.



تمرین ۲۵: از دریچه سدی با گنجایش ۱۲ میلیون لیتر هر ساعت ۴۸ هزار لیتر آب خارج می شود. اگر این دریچه باز باشد، برای حجم پشت سد پس از n ساعت یک دنباله تشکیل دهید.



تمرین ۲۶: کارگری برای انجام کار ۱۵۰۰۰ تومان پیش پرداخت و به ازای هر ساعت کار هم ۸۰۰۰ تومان می گیرد.
(الف) دنباله میزان دستمزد او به ازای n ساعت کار را تشکیل دهید.

(ب) پس از ساعت ۸ میزان دستمزد این کارگر چند تومان می شود؟

(پ) پس از چند ساعت میزان دستمزد این کارگر ۱۷۵۰۰۰ تومان می شود؟

تمرین ۲۷: جمله عمومی و جمله هشتم دنباله حسابی $9, 1, 5, 3, \dots$ را بیابید.



تمرین ۲۸: جمله چندم دنباله حسابی $8, 15, 22, \dots$ برابر ۱۱۳ است؟



تمرین ۲۹: جمله بیستم یک دنباله حسابی $67 -$ و اختلاف مشترک آن $3 -$ است. جمله عمومی این دنباله را بنویسید.



تمرین ۳۰: جمله یازدهم یک دنباله حسابی 105 و اختلاف مشترک آن 17 است. جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

تمرین ۳۱: در یک دنباله حسابی جمله n برابر a_n و جمله m برابر a_m است. اختلاف مشترک این دنباله را محاسبه کنید.

$$a_n = a + (n-1)d, \quad a_m = a + (m-1)d$$

حل: طبق جمله عمومی

$$\begin{aligned} a_m - a_n &= (a + (m-1)d) - (a + (n-1)d) \\ &= (a + md - d) - (a + nd - d) \\ &= a + md - d - a - nd + d \\ &= md - nd = d(m-n) \end{aligned}$$

$$d(m-n) = a_m - a_n \Rightarrow \boxed{d = \frac{a_m - a_n}{m-n}}$$

تمرین ۳۲: در یک دنباله حسابی جمله اول ۲ و جمله چهاردهم ۶۷ است. اختلاف مشترک این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین ۳۳: در یک دنباله حسابی جمله هجدهم ۱۱۴ و جمله سی ام ۶۶ است. اختلاف مشترک و جمله اول این دنباله را محاسبه کنید.

تمرین ۳۴: در یک دنباله حسابی جمله هشتم ۱۵۳ و جمله بیست و یکم ۸۸ است. صدمین جمله این دنباله را حساب کنید.



تمرین ۳۵: پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعت ثابت صفر می شود. اگر شخصی که سابقه سکته قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی گرم دارو در سطح خورش کاهش یابد:

فصل ۲

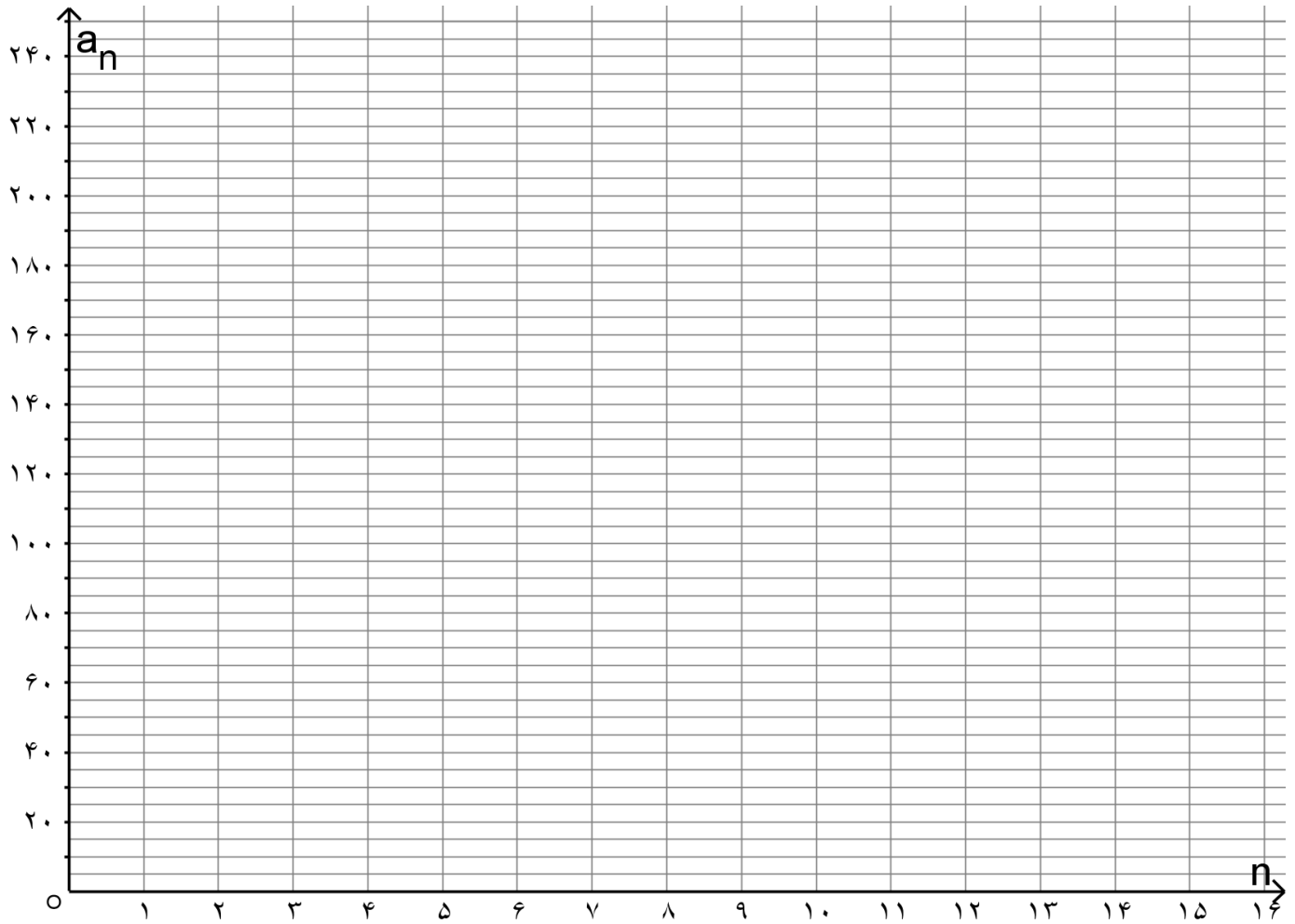
(الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳۰ میلی گرم می شود؟

(ب) پس از پنج ساعت از مصرف دارو سطح دارو در بدن او چند میلی گرم می شود؟

(پ) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی گرم می شود؟



ت) نمودار «سطح دارو در بدن - زمان» مسئله بالا را رسم کنید.



تمرین ۳۶: درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی ۲۶۰۰۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به عنوان مالیات کسر می شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانه او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید)

حل: میزان حقوق دریافتی شخص بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات

$$2600000 - (2600000) \times \frac{1}{10} = 2600000 - 260000 = 2340000$$

طبق تعریف مسئله دنباله حسابی تشکیل می شود با جمله ثابت ۲۳۴۰۰۰۰ تومان و افتلاف مشترک ۱۱۰۰۰ تومان که جمله عمومی آن به صورت زیر است: $a_n = 2340000 + 11000n$ لذا برای به دست آوردن تعداد ساعت اضافه کاری تا دریافت خالص ماهیانه ۳ میلیون تومان باید n را بدست آوریم:

$$2340000 + 11000n = 3000000 \Rightarrow 11000n = 3000000 - 2340000 \Rightarrow$$

$$11000n = 660000 \Rightarrow n = \frac{660000}{11000} \Rightarrow n = 60$$

و چون هر ماه ۳۰ روز است بنابراین: $60 \div 30 = 2$ بنابراین روزی ۲ ساعت باید اضافه کاری داشته باشد.

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

تمرین ۳۷: در فعالیت «محاسبه تعداد چاه های قنات» مشخص شد که قنات مورد نظر ۵۸ چاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $1/5, \dots, 29, 29/5, 30$ را تشکیل می دهد. فرض کنید یک مقنی در هر روز بتواند ۲ متر چاه حفر کند. می خواهیم بدانیم این مقنی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع چاه های گفته شده را حفر کند؟

حل: ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ چاه حفر شده چند متر است.

برای این کار، مجموع عمق چاه ها را یک بار از عمیق ترین تا کم عمق ترین چاه و بار دیگر از کم عمق ترین تا عمیق ترین چاه با یکدیگر جمع می کنیم:

$$S_{58} = 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5$$

$$+ S_{58} = 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30$$

$$2S_{58} = 31/5 + 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5 + 31/5 \Rightarrow$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 m$$

با توجه به اینکه مقنی روزانه ۲ متر چاه حفر می کند.

$$\text{تعداد روز برای پایان کار} = \frac{913/5 m}{2} = 456/25 \text{ روز}$$

بنابراین، مقنی بدون حتی یک روز کار تقریباً به ۱۵ ماه نیاز دارد تا قنات مورد نظر را تمویل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1 تا a_n و محاسبه مجموع a_n تا a_1 برای تعیین، روش جالبی است که می توانیم به کمک آن مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را بدست آوریم:

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $a_n = a + (n-1)d$ ، از یکی از دو رابطه زیر بدست می آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

مثلاً: برای تمرین حفر چاه: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$

تمرین ۳۸: مجموع دنباله حسابی $1, 4, 9, \dots, 199$ را به دست آورید.



تمرین ۳۹: مجموع دنباله حسابی زیر را به دست آورید.

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.) $S_1 = ?$ $a_{n+1} = 5 + a_n$, $a_1 = -2$

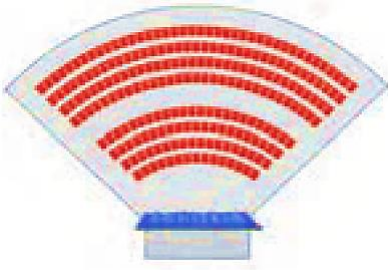


تمرین ۴۰: مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.



تکلیف خانه ۱: مجموع ۱۳ جمله اول دنباله حسابی $4, 24, 44, 64, \dots$ را به دست آورید.





تمرین ۴۱: یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷۰ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟



تمرین ۴۲: مجموع چند جمله از دنباله زیر برابر صفر است؟

۱۲, ۱۰, ۸, ...

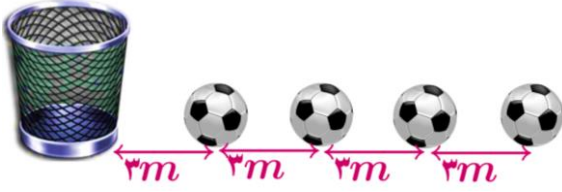
فصل ۲



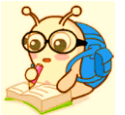
تکلیف خانه ۲: مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی $9, 9, 9, 9, \dots$ را به دست آورید.



تمرین ۴۳: در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است. (شکل زیر). دوندۀ ای باید از کنار سبد شروع کرده و توپ اول را بردارد و آن را به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دوندۀ در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



تکلیف خانه ۳: مجموع دنباله حسابی ۵۸, ..., ۲, ۶, ۱۰ را به دست آورید.



تکلیف خانه ۴: اگر در دنباله حسابی $a_1 = 210$ و $a_7 = 450$ باشد، مجموع هفت جمله اول آن را بدست آورید.

