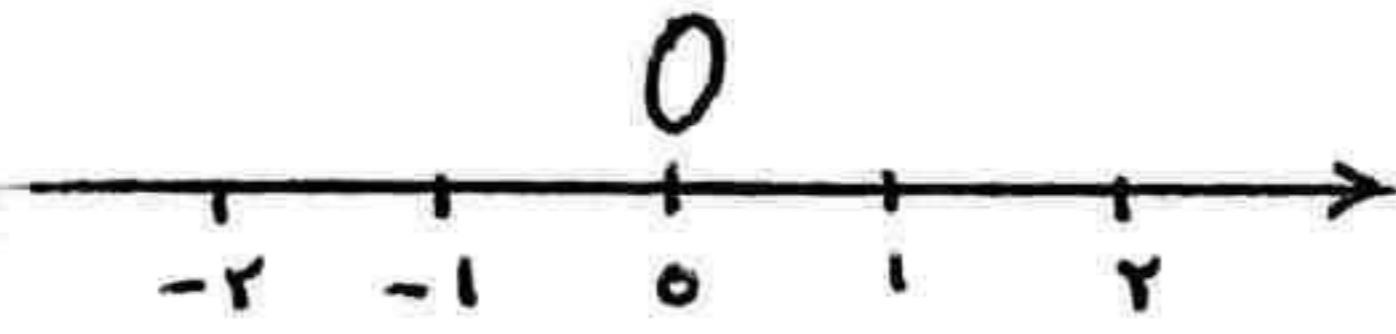
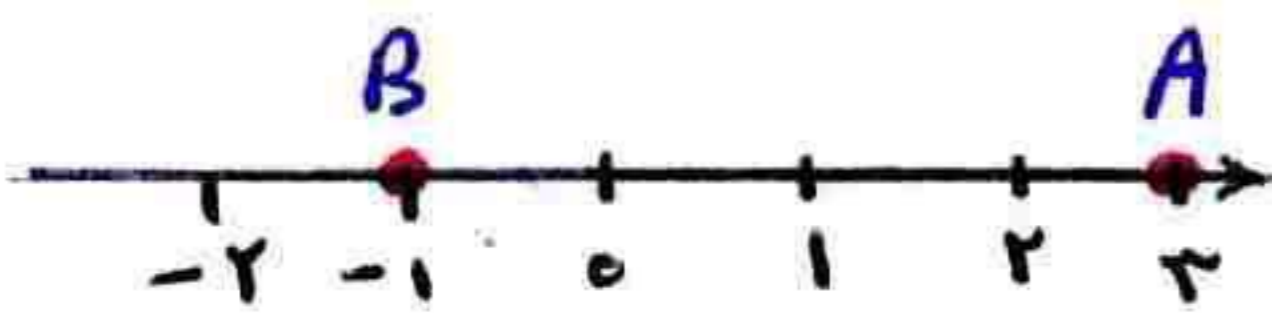


هندسه تحلیلی

نقطه در فضای یک بُعدی :



به عنوان نمونه نقاط A و B به ترتیب به طولهای ۲ و -۱ روی محور نمایش داده شده اند. $x_A = 2$ و $x_B = -1$



نکته ① فاصله دو نقطه A و B از یکدیگر (طول AB) : $AB = |x_A - x_B|$

نکته ② اگر نقطه M وسط پاره خط AB باشد، آنگاه : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$

مثال: در صورتی که $x_A = 2$ و $x_B = 10$ و $x_C = -1$ باشد، فاصله نقطه C وسط AB از نقطه C چقدر است؟

$$AB \text{ وسط } M \Rightarrow x_M = \frac{2+10}{2} = 6$$

$$MC = |-1 - 6| = 7$$

تست : فاصله نقطه A به طول $m+2$ تا نقطه B به طول $1-m$ ، سه برابر فاصله نقطه A تا مبدأ مختصات است. m کدام عدد می تواند باشد؟

$$\frac{1}{d} \quad \frac{-1}{d} \quad \frac{-1}{d} \quad \frac{1}{d}$$

$$x_A = m+2, \quad x_B = 1-m, \quad x_0 = 0$$

$$AB = 3 \quad AO \Rightarrow |(m+2) - (1-m)| = 3 |m+2 - 0| \Rightarrow |2m+1| = |2m+6|$$

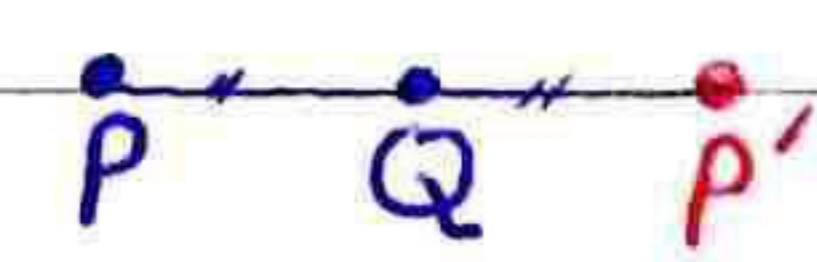
$$2m+1 = 2m+6 \Rightarrow m = -5$$

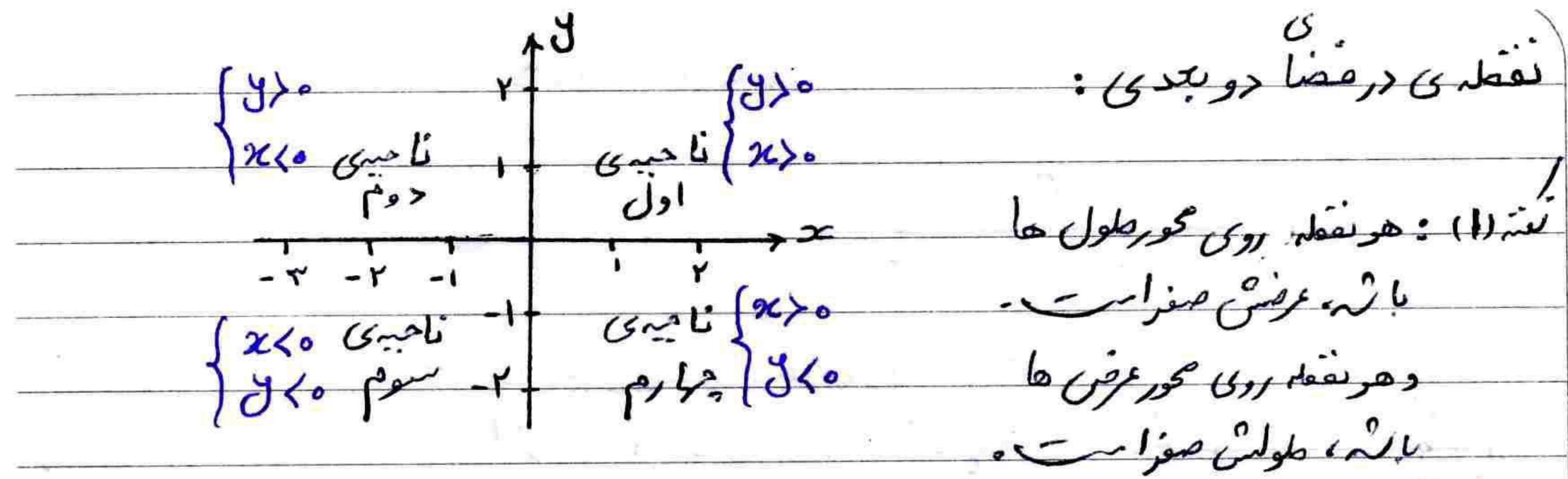
$$2m+1 = -(2m+6) \Rightarrow m = -\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{2}{2}$$

مثال: قرینیتی نقطه P ($x_P = -2$) نسبت به نقطه Q ($x_Q = 1$) روی محور اعداد

تعیین کنید. Q وسط PP' است. بنابراین:

$$x_Q = \frac{x_P + x_{P'}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{-2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 2 = -2 + x_{P'} \Rightarrow x_{P'} = 4$$





مثال: به ازای چند مقدار صحیح n ، نقطه‌ی $A \begin{bmatrix} 2n-7 \\ n+3 \end{bmatrix}$ در ناحیه‌ی دوم واقع است؟

$$\begin{cases} 2n-7 < 0 \Rightarrow 2n < 7 \Rightarrow n < \frac{7}{2} \\ n+3 > 0 \Rightarrow n > -3 \end{cases} \rightarrow n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

به ازای ۶ مقدار صحیح n .

مثال: به ازای چه مقدار از x ، نقطه‌ی $B(x^2-3x, x^2+1)$ روی محور طول‌ها واقع است؟

$$x^2-3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 3$$

مثال: جاها خالی را پر کنید.

الف) شرط آن که نقطه‌ی $A(x, y)$ در ربع اول یا دوم باشد آن است که $y > 0$ و $x \neq 0$.

ب) شرط آن که نقطه‌ی $A(x, y)$ در ربع اول یا چهارم باشد آن است که $x > 0$ و $y \neq 0$.

پ) شرط آن که نقطه‌ی $A(x, y)$ در ربع دوم یا سوم باشد آن است که $x < 0$ و $y \neq 0$.

ت) شرط آن که نقطه‌ی $A(x, y)$ در ربع سوم یا چهارم باشد آن است که $x < 0$ و $y < 0$.

سؤال: جاهای خالی را پر کنید.

الف) شرط آن نقطه $A(x, y)$ در ربع اول یا سوم باشد، آن است که $xy > 0$

ب) شرط آن نقطه $A(x, y)$ در ربع دوم یا چهارم باشد، آن است که $xy < 0$

سؤال: عدد m را چنان بیابید که نقطه $A(2m+1, 3-m)$ در ربع اول یا سوم باشد

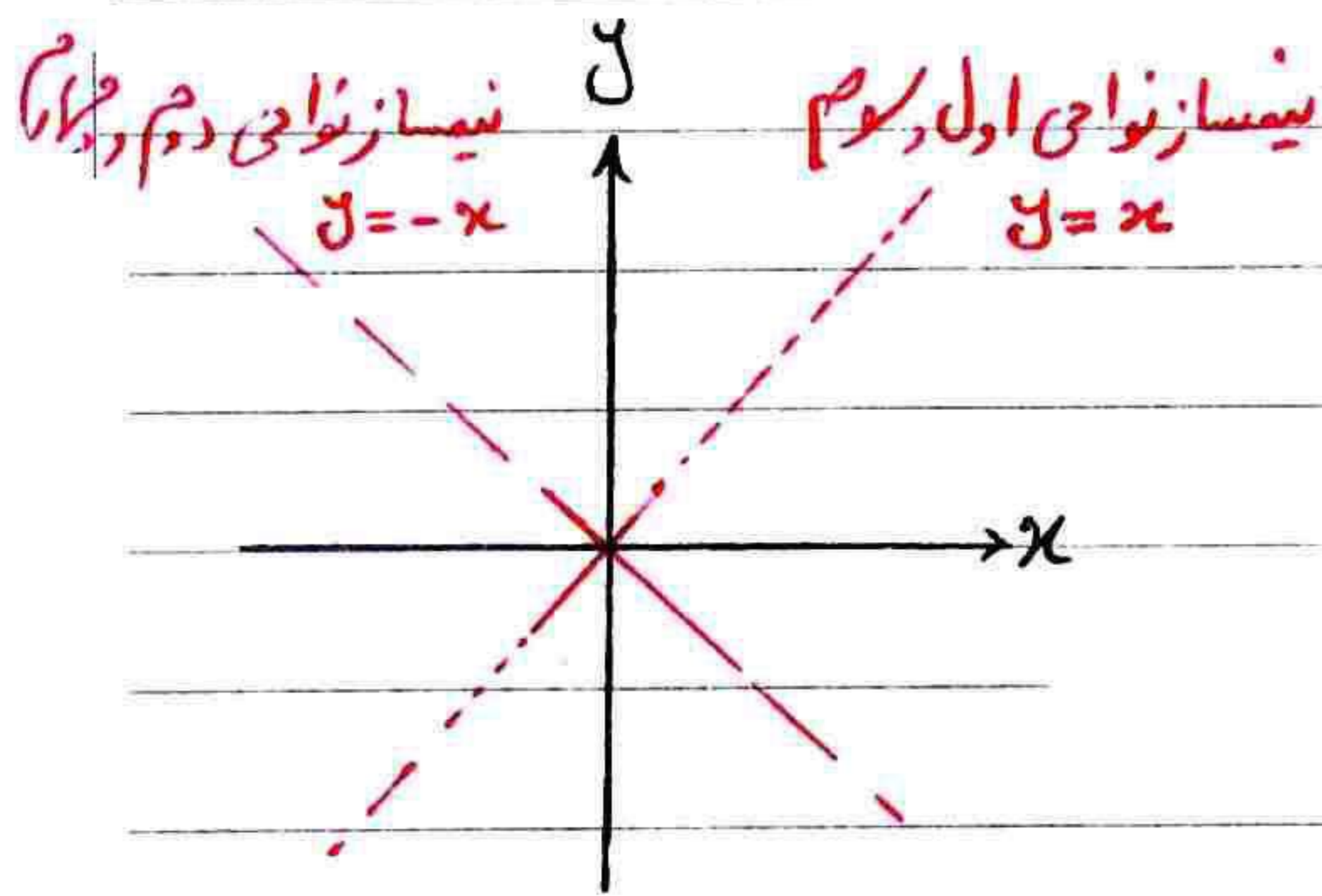
طبق سؤال فوق باید $xy > 0$ باشد پس:

$$(3-m)(2m+1) > 0$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$3-m$	+	+	0	-
$2m+1$	-	0	+	+
کل	-	+	0	-

جواب

$$-\frac{1}{2} < m < 3$$



نکته (۲): اگر نقطه ای روی نیمساز ربع اول دوم باشد، طول و عرض نقطه با هم برابرند.

اگر نقطه ای روی نیمساز ربع دوم اول باشد، طول و عرض نقطه قرینند یعنی برابرند.
به عبارت دیگر: $عرض + طول = 0$

سؤال: بدانچه مقدار از x نقطه $A(x^2, x-6)$ روی نیمساز ربع دوم و چهارم واقع است.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = 2$$

نکته (۲): اگر M وسط دو نقطه A و B باشد، آنگاه $M = \frac{A+B}{2}$

مثال: با فرض $A[7]$ و $B[9]$ مختصات نقطه وسط AB را بدست آورید.

$$AB \text{ وسط } M \Rightarrow M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M[8]$$

مثال: قرینه نقطه $E[6]$ نسبت به نقطه $F[1]$ چیست؟

سیم قرینه E نسبت به F ، E' باشد پس F وسط EE' است. $E \quad F \quad E'$

$$F = \frac{E+E'}{2} \Rightarrow E+E' = 2F \Rightarrow E' = 2F - E = [2] - [6] = [-4]$$

نکته (۴): اگر $A[x_A, y_A]$ و $B[x_B, y_B]$ دو نقطه در دستگاه مختصات باشند، فاصله این دو نقطه از فرمول زیر (طول پاره خط AB) برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

مثال: با فرض $A[-1]$ و $B[2]$ طول پاره خط AB را بیابید.

$$AB = \sqrt{16+9} = 5$$

مثال: اگر $M(-2, 1)$ و $N(3, 4)$ دو قطر یک دایره باشند، مطلوب است:

الف) اندازه شعاع دایره $R = \sqrt{5}$ شعاع $\rightarrow R = \sqrt{5} \rightarrow R^2 = 5 = \frac{MN^2}{2} = \frac{14+4}{2} = \frac{18}{2} = 9$ قطر MN

ب) مختصات نقطه مرکز دایره

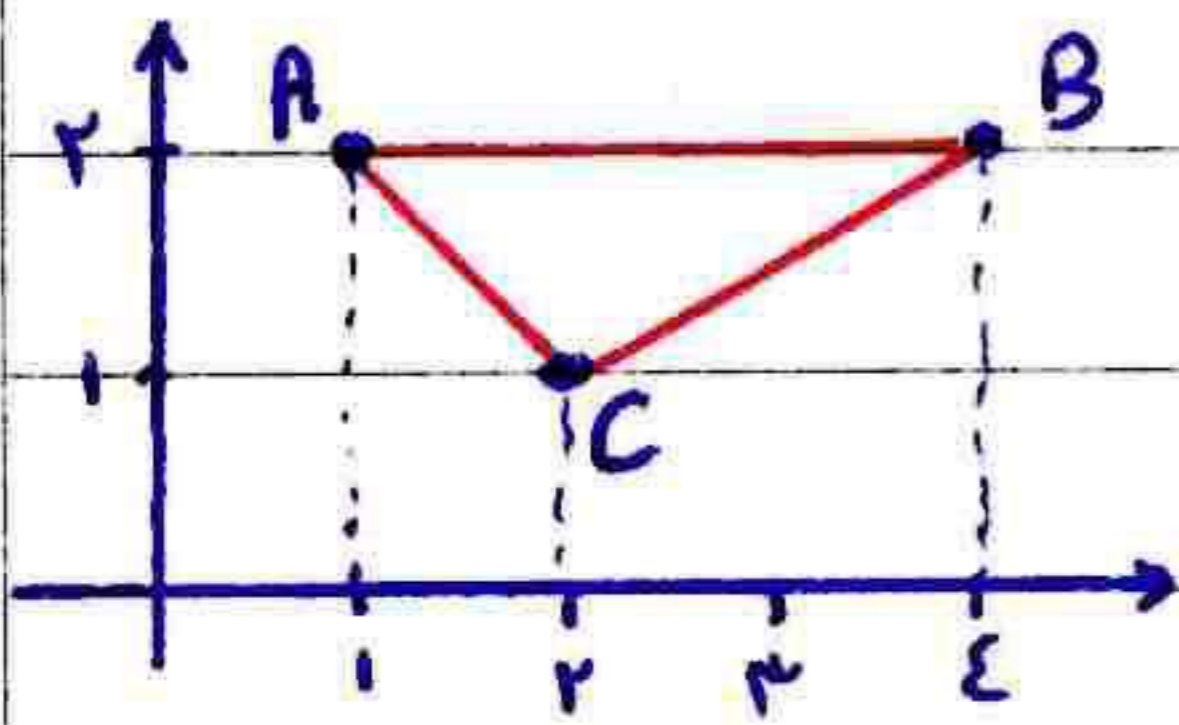
$$O = \frac{M+N}{2} \Rightarrow O = (1, 3)$$

پ) آیا نقطه $P(2, 3)$ درون دایره واقع است؟ چرا؟

چون فاصله P از مرکز دایره، کمتر از شعاع است $\Rightarrow OP = \sqrt{1+0} = 1 < \sqrt{5}$ پس نقطه درون دایره است.

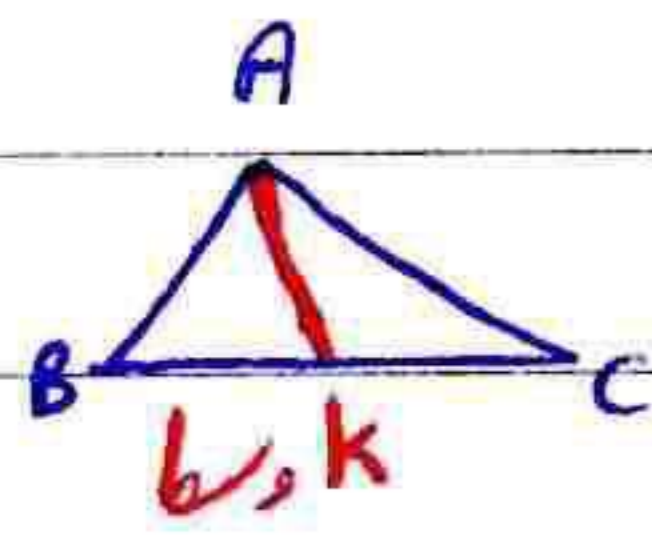


سؤال: اگر $A(1, 2)$ و $B(4, 2)$ و $C(2, 1)$ سه رأس یک مثلث باشند، مطلوب است:
الف) رسم مثلث



ب) محیط مثلث را حساب کنید.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \\ AB &= \sqrt{9+0} = 3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} AC \\ BC \\ AB \end{aligned}} \right\} + \rightarrow \text{محیط} = \sqrt{2} + \sqrt{5} + 3$$



ب) طول میانبر وارد بر ضلع BC را بدست آورید.

$$k = \frac{B+C}{2} \Rightarrow k \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

طول میانبر AK: $AK = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

سؤال: نقاط $A(2, x)$ و $B(0, 3)$ و $C(-2, -2)$ رئوس مثلث ABC هستند. مقدار x را چنانچه یابید این مثلث در رأس A متساوی الساقین باشد.

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{4 + (x-3)^2} = \sqrt{16 + (x+2)^2} \Rightarrow 4 + x^2 - 6x + 9 = 16 + x^2 + 4x + 4$$

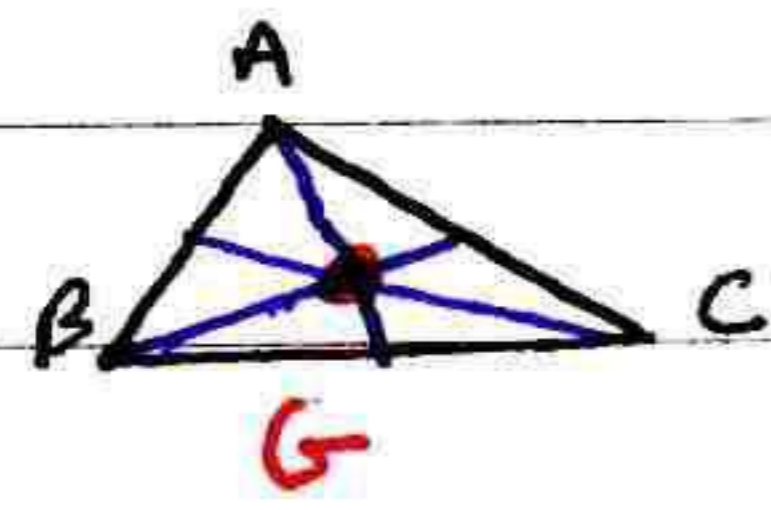
$$\Rightarrow -12x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{-12} \Rightarrow x = -1$$

سؤال: نوع مثلثی با رئوس $A(1, 4)$ ، $B(3, 0)$ و $C(-1, 0)$ را مشخص کنید.
 $AB = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ ، $BC = \sqrt{16+0} = 4$ ، $AC = \sqrt{8+16} = \sqrt{24}$
 $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow$ مثلث در رأس A متساوی الساقین است

سؤال: نوع مثلثی با رئوس $M(1, 1)$ ، $N(1, 4)$ و $K(1, 0)$ را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{0+9} = 3 \\ NK &= \sqrt{16+0} = 4 \\ MK &= \sqrt{16+0} = 4 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} MN \\ NK \\ MK \end{aligned}} \right\} \Rightarrow NK^2 = MN^2 + MK^2 \Rightarrow \text{مثلث قائم الزامی است}$$

نکته (۵): اگر G محل تلاقی سه میان (تقاطع همزی میانها - مرکز ثقل - را نگاه) مثلث ABC باشد، آنگاه:



$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

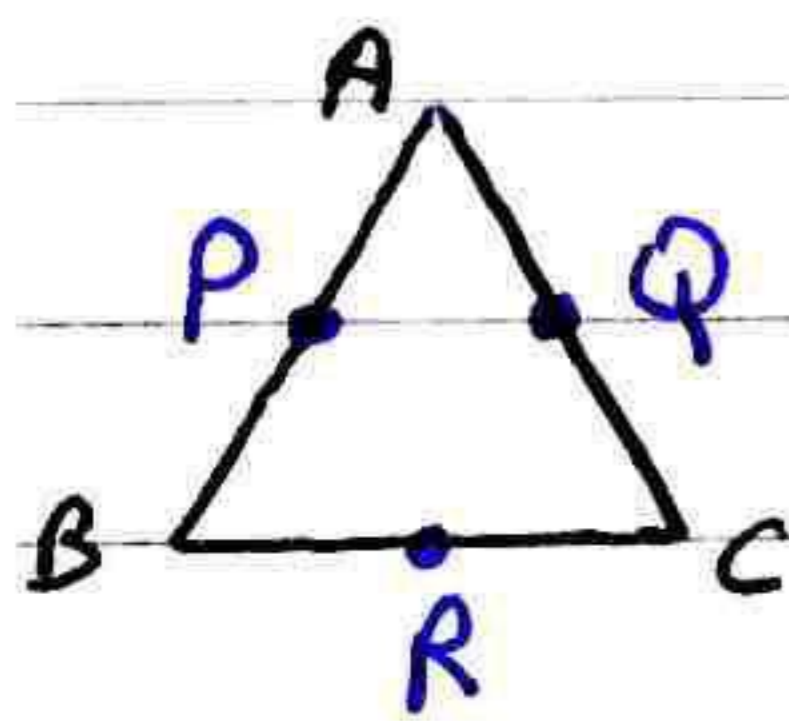
مثال: تقاطع همزی سه میان در مثلث به رؤوس $A(1,2)$ و $B(-2,3)$ و $C(-2,-1)$ را تعیین کنید.

$$\therefore G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}}{3} = \frac{\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}}{3} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

مثال: نقاط $M(-2,-2)$ و $N(4,0)$ در رأس مثلث MNK هستند. $G(2,-2)$ مرکز ثقل آن می باشد. مختصات رأس K را تعیین کنید.

$$G = \frac{M+N+K}{3} \Rightarrow M+N+K = 3G \Rightarrow K = 3G - M - N = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

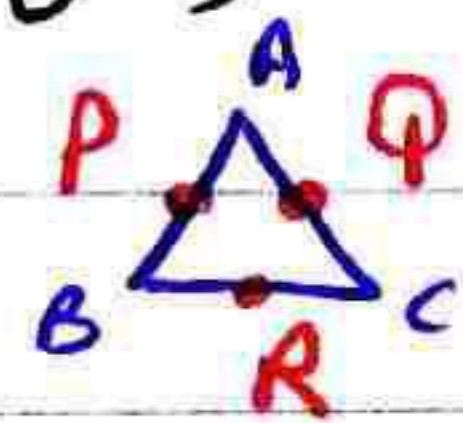


نکته (۶): اگر P و Q و R نقاط وسط اضلاع مثلث ABC باشند، آنگاه مثلث متقابل باشند، آنگاه مختصات رؤوس طبق روابط زیر بدست می آید.

$$A = P + Q - R, \quad B = P + R - Q, \quad C = Q + R - P$$

مثال: اگر $P(1,-1)$ و $Q(4,4)$ و $R(-1,4)$ وسط اضلاع یک مثلث باشند، مختصات رؤوس این مثلث را بیابید.

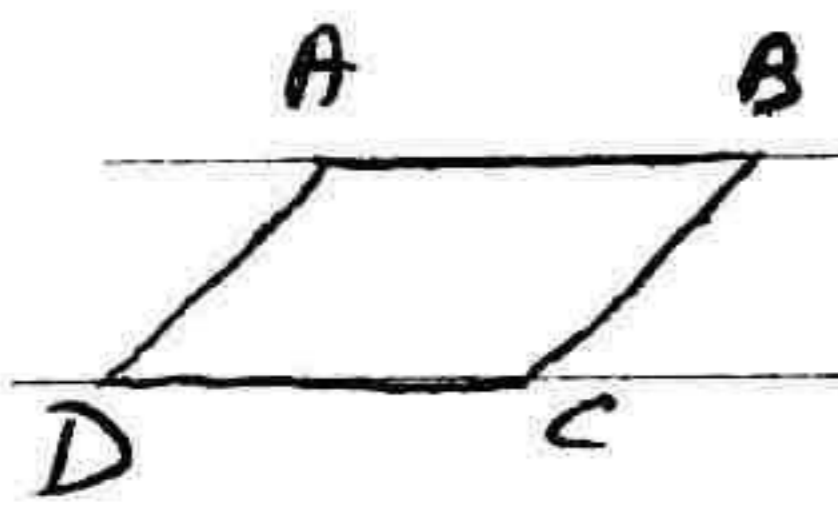
$$A = P + Q - R = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$B = P + R - Q = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

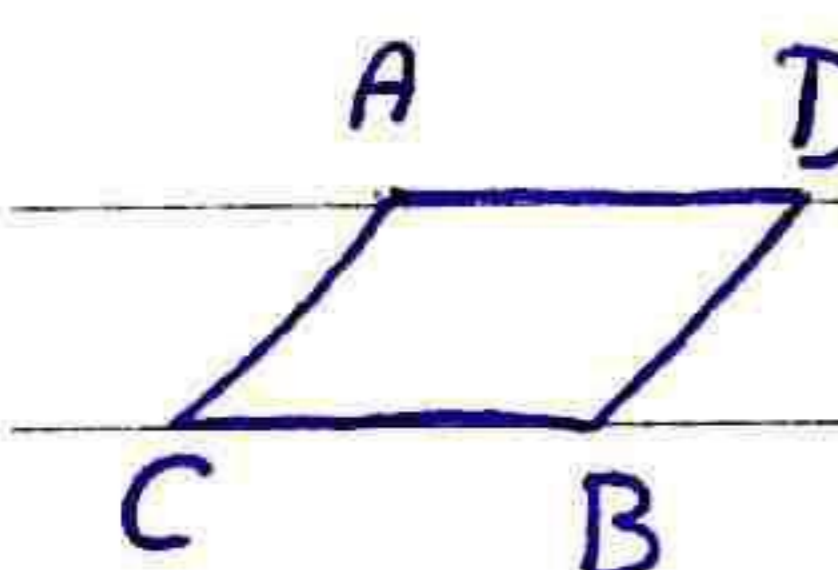
$$C = Q + R - P = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

نکته (۷): مطابق شکل رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ABCD$ فرض شوند. $A+C = B+D$



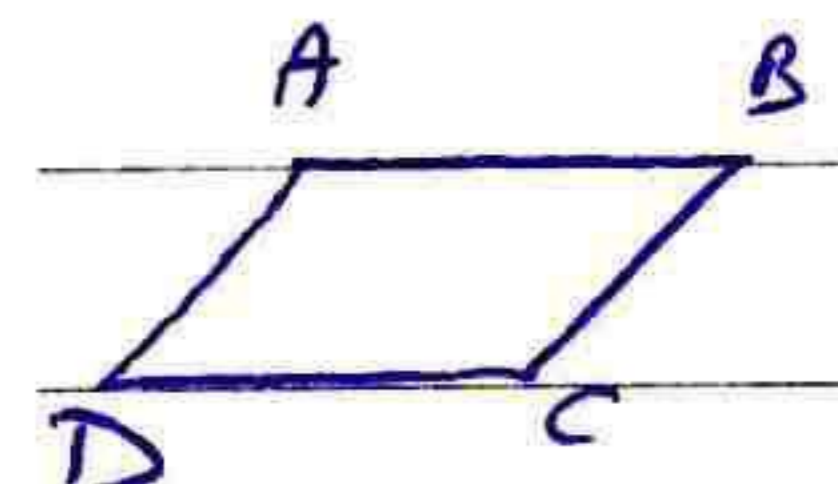
سؤال: نقاط $A(2,1)$ و $B(4,4)$ و $C(-4,4)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع $ADBC$ هستند. مختصات رأس چهارم را تعیین کنید.

$A+B = C+D \Rightarrow D = A+B-C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$



سؤال: نقاط $A(2,1)$ و $B(4,4)$ و $C(-4,4)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس چهارم را بیابید.

$A+C = B+D \Rightarrow D = A+C-B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$



نکته (۸): مساحت مثلث ABC :

مساحت قدرمطلق $\div 2$ \rightarrow ؟ \rightarrow ؟ \rightarrow ؟ \rightarrow ؟

عرض طول \rightarrow ؟ $(A-B)(A-C)$ \rightarrow ؟ \rightarrow ؟ \rightarrow ؟

طول عرض \rightarrow ؟ $(B-A)(B-C)$ \rightarrow ؟ \rightarrow ؟ \rightarrow ؟

سؤال: مساحت مثلث با رئوس $A(1,4)$ ، $B(4,2)$ ، $C(3,7)$ را بدست آورید.

$(A-B)(A-C) \rightarrow (4-1)(2-7) = -20$

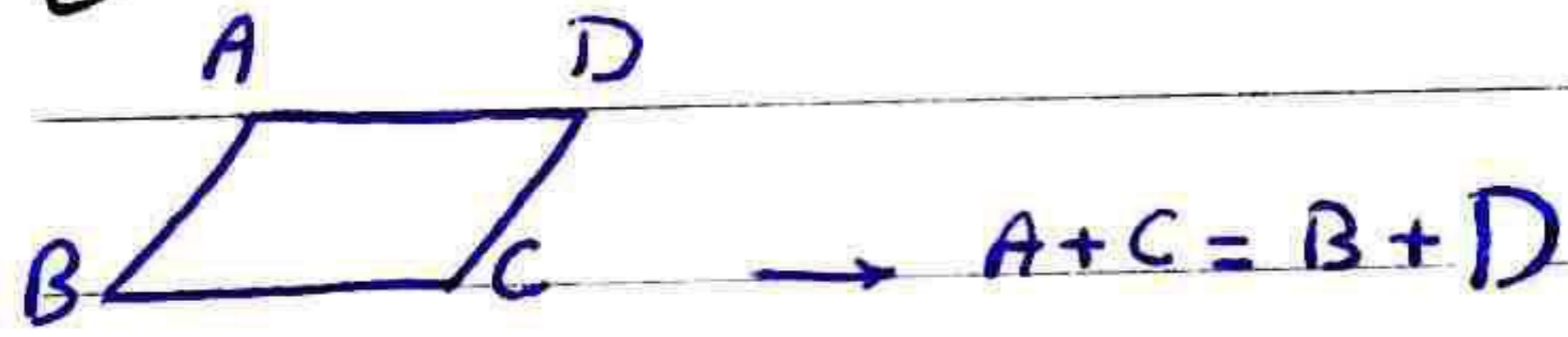
$(B-A)(B-C) \rightarrow (4-1)(2-7) = -20$

$(C-A)(C-B) \rightarrow (3-1)(7-4) = 6$

$\rightarrow -16 \xrightarrow{+2} -14 \Rightarrow S_{ABC} = 7$

ترین:

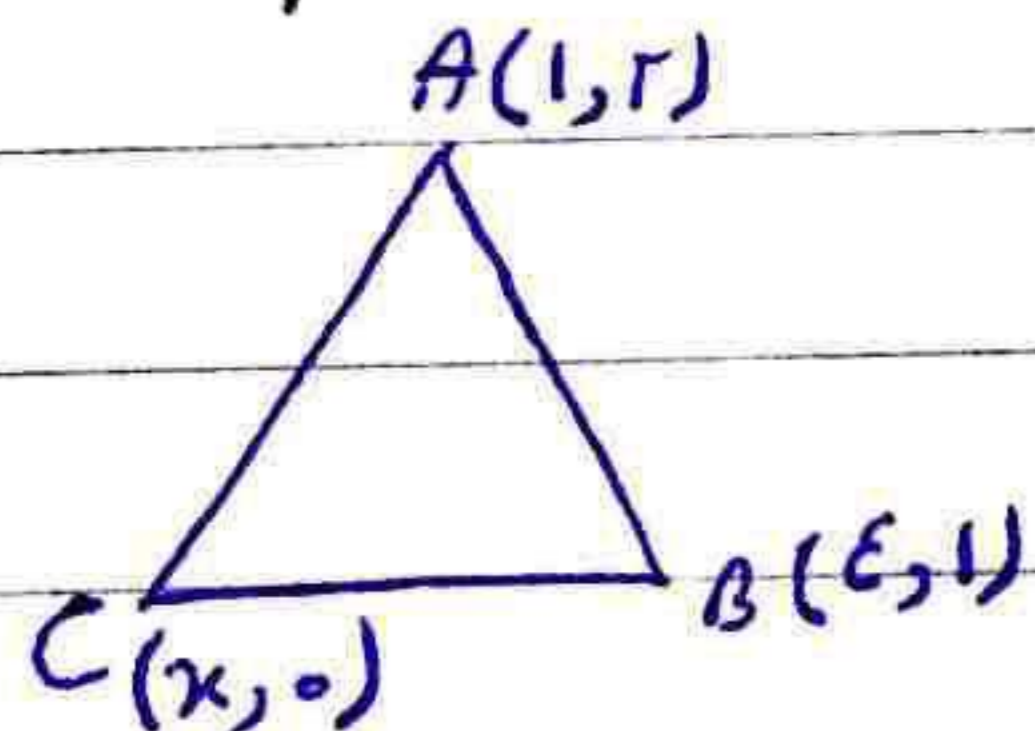
۱- اگر $A(2a, b)$, $B(-b, a+2)$, $C(2, a)$ و $D(a+b+2, -1)$ رئوس متوازی الاضلاع $ADCB$ فرض شوند، a و b را بیابید.



$$\text{طولها: } 2a+2 = -b+a+b+2 \Rightarrow a=1$$

$$\text{عرض: } b+a = a+2 + (-1) \Rightarrow b=2$$

۲- نقاط $A(1, 2)$ و $B(4, 1)$ دو رأس مثلث هستند که رأس سوم آن روی محور طولها و محل تلاقی میان خط های آن روی نیمساز مربع اول است. مختصات رأس سوم چیست؟

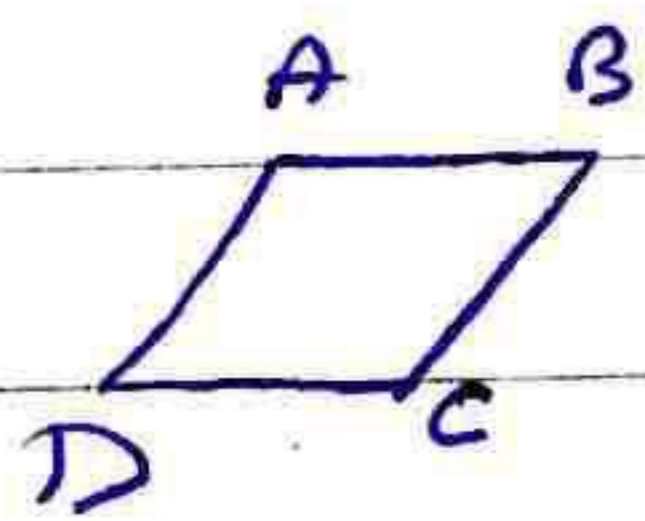


$$\rightarrow \text{نقطه تلاقی میان: } G = \frac{A+B+C}{3} = \left[\frac{x+1}{3}, 1 \right]$$

G در نیمساز مربع اول است پس: عرض = طول

$$\Rightarrow \frac{x+1}{3} = 1 \Rightarrow x+1=3 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{رأس سوم } G(-2, 0)$$

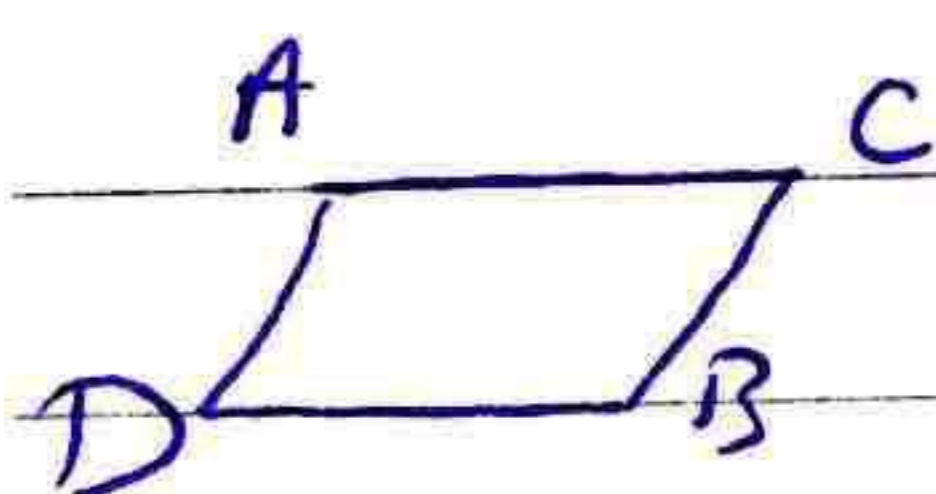
۳- اگر نقاط $A(2, 1)$, $B(4, 1)$ و $C(-4, 1)$ رئوس یک متوازی الاضلاع باشند، مختصات رأس چهارم آن را بیابید (مسئله چند جواب دارد؟)



$$\rightarrow A+C=B+D$$

حالت اول:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + D \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2-4-4 \\ 1+1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

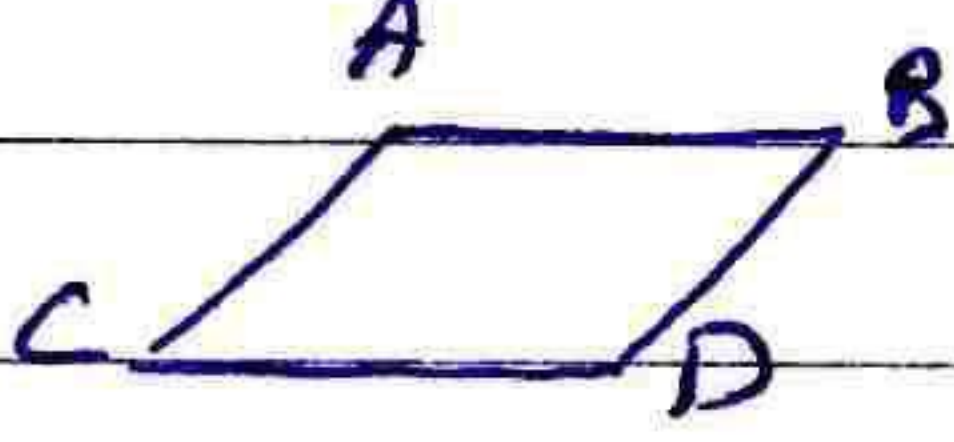


$$\Rightarrow A+B=C+D$$

حالت دوم:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} + D \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2+4+4 \\ 1+5-5 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حالت سوم ۱



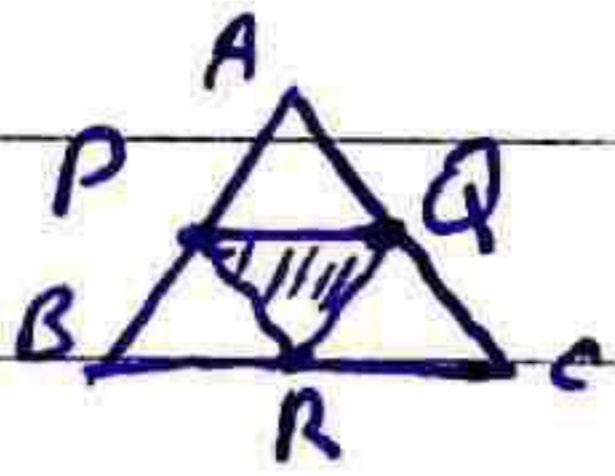
$$\Rightarrow A + D = B + C$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + D = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 4+(-4)-2 \\ 5+5-1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

۴- اگر $P(2, -4)$, $Q(-2, 1)$, $R(1, 3)$ وسطها اضلاع مثلث ABC منفرجه باشد، مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

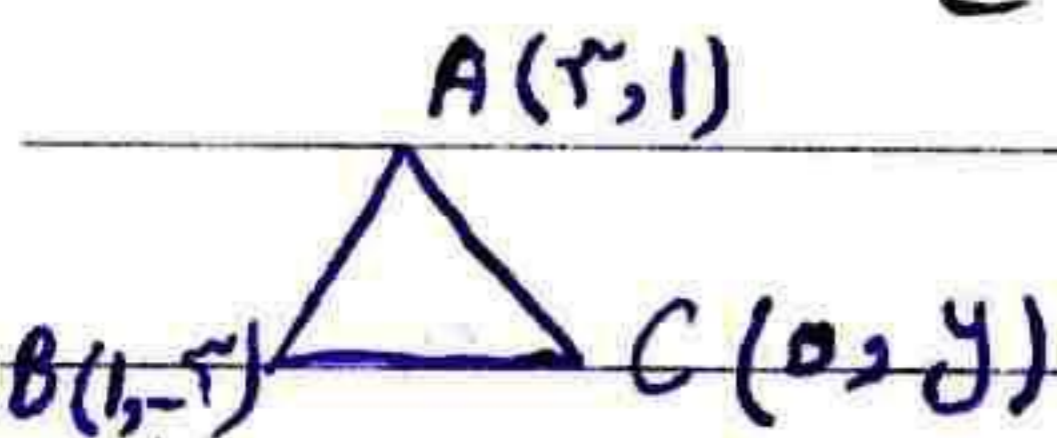
عرض طول $\rightarrow (-4)(-1) = -4$
 عرض طول $\rightarrow (-2)(1) = -2$

$$\left. \begin{array}{l} (P-Q)(P-R) \\ (P-Q)(P-R) \end{array} \right\} \rightarrow -26 \xrightarrow{\div 2} -13 \Rightarrow S_{PQR} = 13$$



$$\Rightarrow S_{ABC} = 4 S_{PQR} = 4 \times 13 = 52$$

د- نقاط $A(2, 1)$ و $B(1, -2)$ دو رأس از مثلث به مساحت ۳ واحد قطع کنند ممقتضات رأس سوم واقع بر محور عرضها را تعیین کنید.

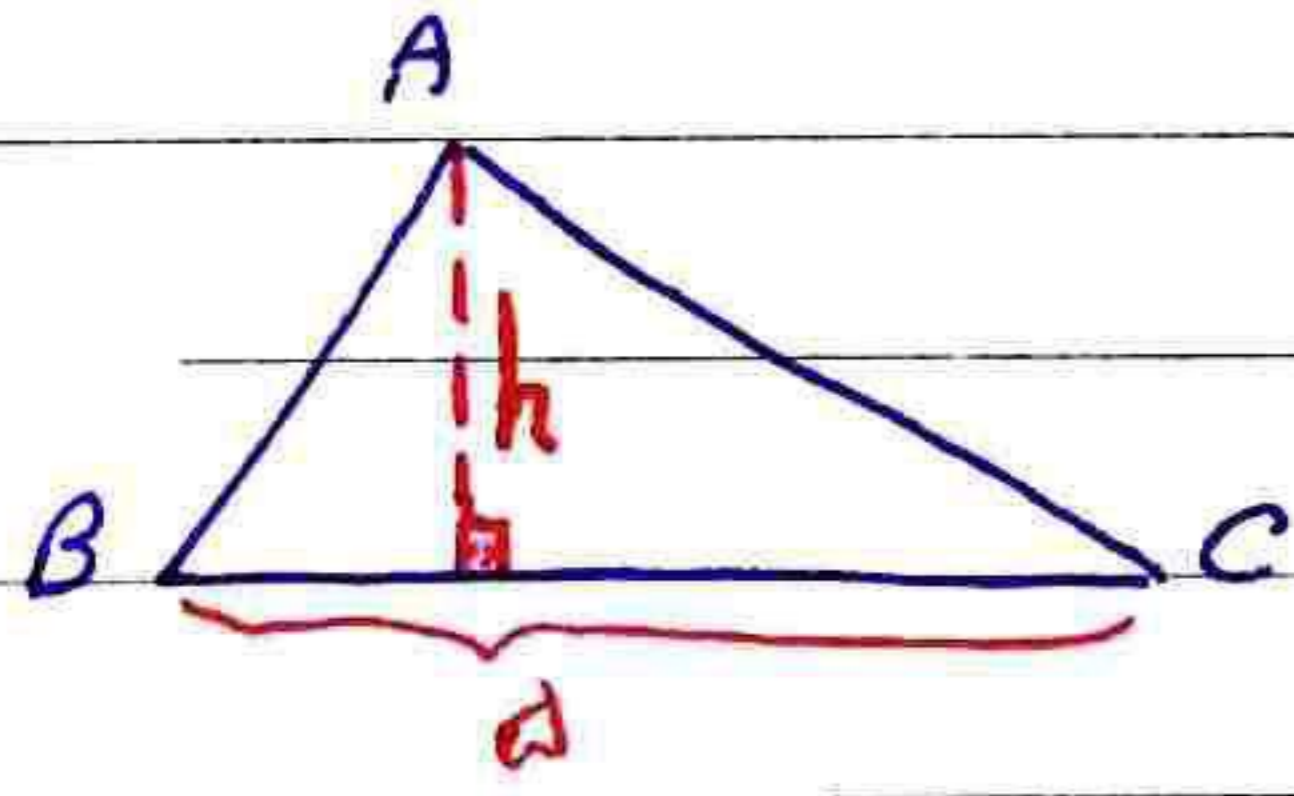


عرض طول $\rightarrow (2)(1-d) = 2-2d$
 عرض طول $\rightarrow (2)(3) = 6$

$$\left. \begin{array}{l} (A-B)(A-C) \\ (A-B)(A-C) \end{array} \right\} \rightarrow -2d-10 \xrightarrow{\div 2} -d-5 \Rightarrow S_{ABC} = |-d-5|$$

$$\Rightarrow |-d-5| = 3 \begin{cases} -d-5=3 \Rightarrow d=-8 \Rightarrow C(0, -8) \\ -d-5=-3 \Rightarrow d=-2 \Rightarrow C(0, -2) \end{cases}$$

۶- اگر $A(1, 2)$ و $B(0, -4)$ و $C(4, -1)$ سه رأس یک مثلث باشند طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را بدست آورید.



$$BC = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{dh}{2}$$

طول عرض $\rightarrow (1)(3) = 3$

$(A-B)(A-C)$

طول عرض $\rightarrow (6)(-5) = -30$

$$\rightarrow -30 \div 2 = -15 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{30}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{2} = \frac{30}{2} \Rightarrow dh = 30 \Rightarrow h = \frac{30}{5} = 6$$

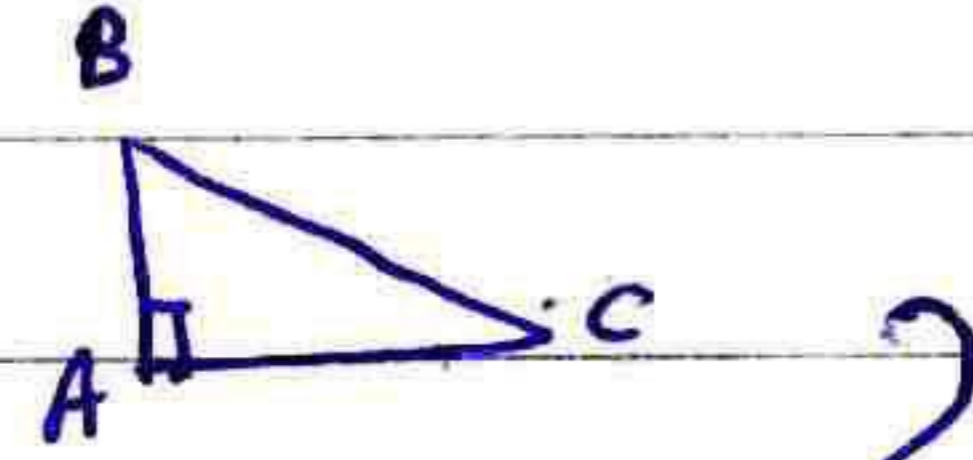
۷- اگر $A(1, 1)$ ، $B(2, 2)$ و $C(-1, 3)$ سه رأس یک مثلث باشند،
الف) محیط مثلث را بدست آورید. (ب) نوع مثلث را مشخص کنید.
پ) مساحت مثلث را بدین استناد از نکته ۱) حساب کنید.

$$AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$BC = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$



مثلث قائم الزامی است

$$\rightarrow \text{محیط} = \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{10}$$

$$S_{ABC} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{AC \times AB}{2} = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

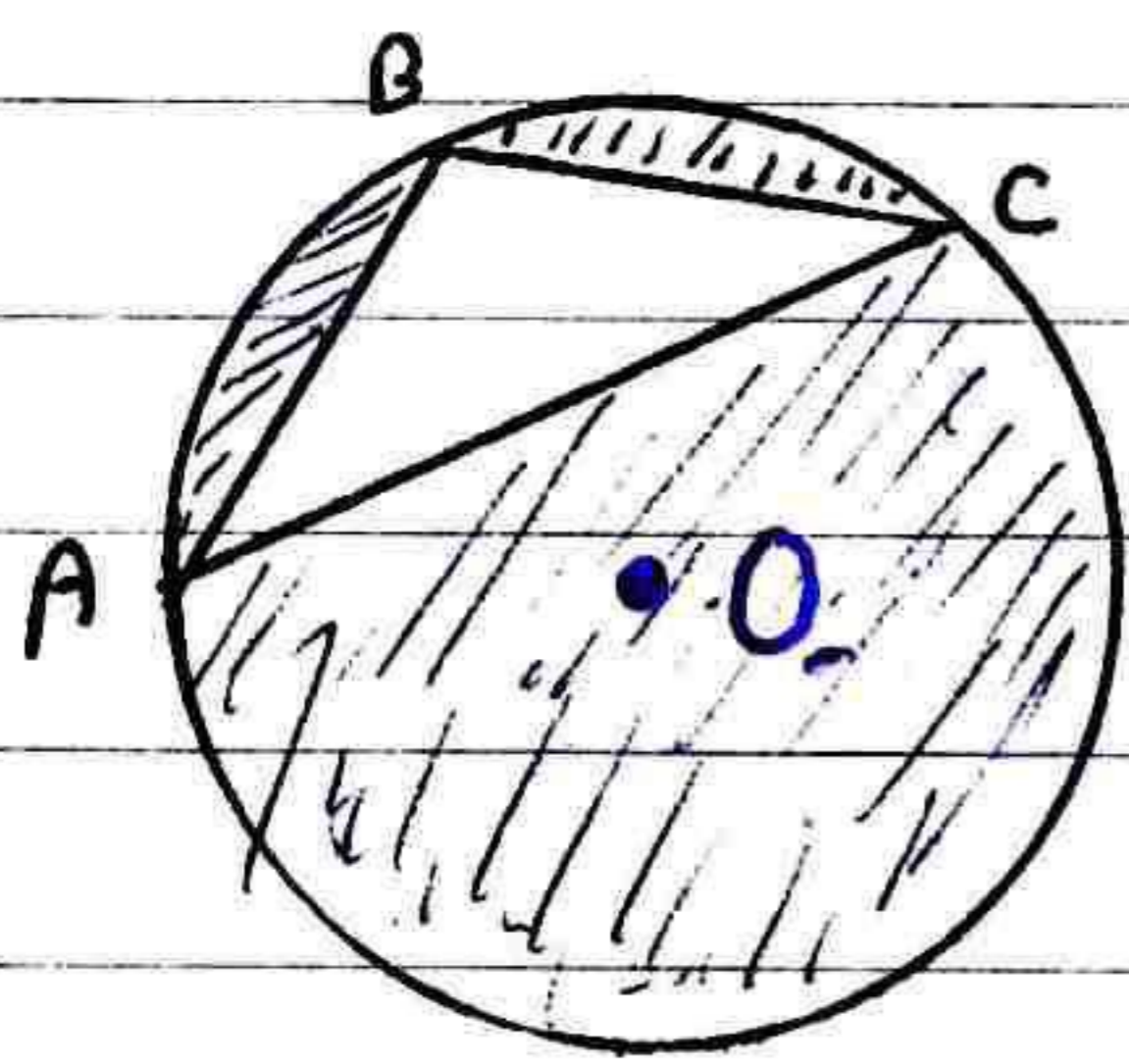
۸- نقطه ای روی نیمساز نواحی دوم و چهارم باشد که فاصله اش از نقطه $P(1,1)$ برابر $\sqrt{20}$ باشد.

تیم A در نیمساز نواحی دوم و چهارم باشد پس $A(x, -x)$ است.

$$AP = \sqrt{(x-1)^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 20$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, -3)$$

$$\Rightarrow x = -3 \Rightarrow A(-3, 3)$$



۹- در رأس مقابل نقاط $A(-2, -1)$, $B(2, 7)$ و $C(4, 3)$ سه رأس مثلث هستند.

- الف) مختصات مرکز دایره
- ب) اندازه شعاع دایره
- پ) مساحت مثلث را بدین روش پیدا کنید.

تیم $O(x, y)$ مرکز دایره باشد بنابراین: شعاع دایره $OA = OB = OC$

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-7)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 9 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 \Rightarrow x + 2y = -2$$

$$OA = OC \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 9 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 \Rightarrow 7x + 11y = -24$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 7x + 11y = -24 \end{cases} \xrightarrow{x(-7)} \begin{cases} -7x - 14y = 14 \\ 7x + 11y = -24 \end{cases}$$

$x = -1$ و $y = 1$
الف) $O(-1, 1)$ مرکز

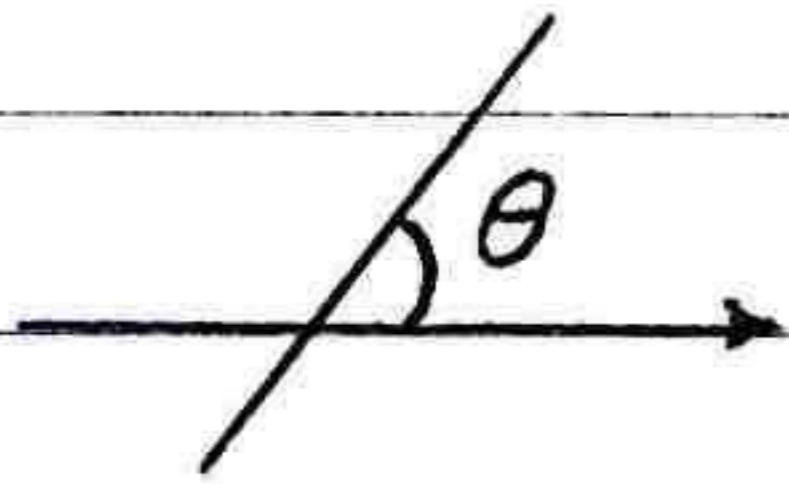
ب) شعاع $OA = \sqrt{4 + 11} = \sqrt{15}$

پ) مساحت دایره $= \pi R^2 \approx 3 \times 15 = 45$

* معادله خط *

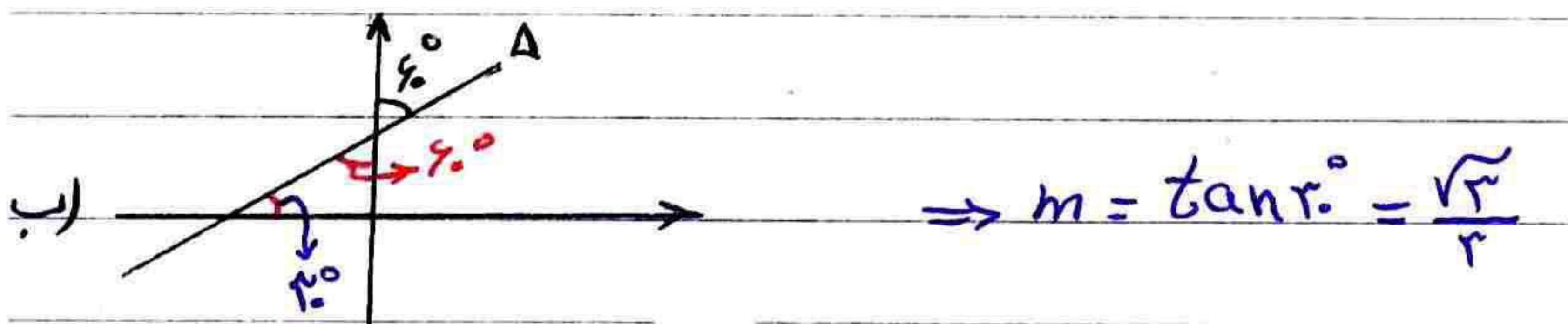
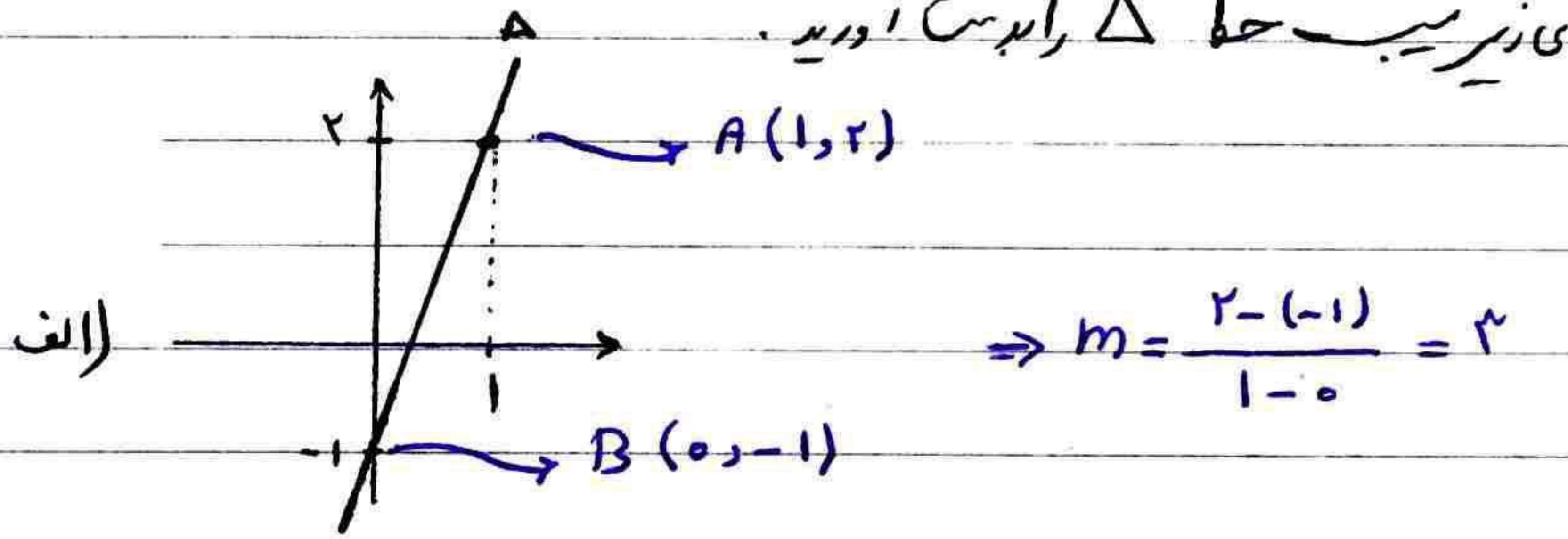
نکته (۱) شیب خط گذرا از دو نقطه A و B برابر است با: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

نکته (۲) اگر خط مطابق کس با محور طولها زاویه θ بسازد
آنگاه شیب آن خط $m = \tan \theta$



یادآوری: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

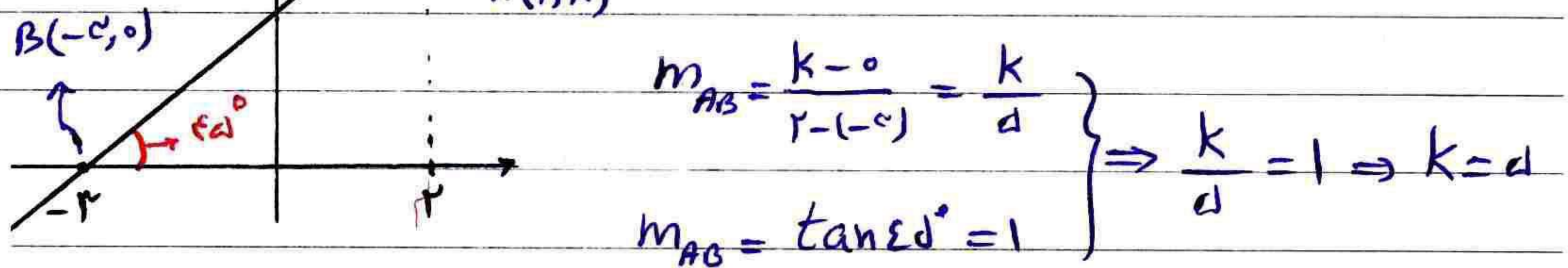
مثال: در هر یک از شکل های زیر شیب خط Δ را بیست آورید.



مثال: برای ای چه مقدار از a ، شیب خط عبور کننده از نقاط $P(a-1, 2)$ و $Q(-1, 2)$ برابر $\frac{2}{a+1}$ است؟

$$m_{PQ} = \frac{2-2}{-1-a+1} = \frac{1}{-a} \Rightarrow \frac{1}{-a} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow a+1 = -2a \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

مثال: با توجه به شکل مقابل، مقدار k را بیست آورید.



نکته (۳) سه نقطه A، B، C به شرطی بر یک استقامت هستند:

$$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$$

واضح است در این حالت، سه نقطه تشکیل مثلث نمی دهند.

مثال: آیا نقاط A(۳،۱) و B(۱-،۱-) و C(-۴،-۱۶) بر یک استقامتند؟

$$m_{AB} = \frac{1-1}{3-1} = 0$$

$$m_{BC} = \frac{-1+16}{1+4} = 3$$

تقاطع بر یک استقامت هستند $\Rightarrow m_{AB} = m_{BC}$

توجه: در تساوی $m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$ وجود یکی از دو تساوی کافی است
یعنی اگر به طور مثال $m_{AB} = m_{BC}$ باشد، خود به خود تساوی سه تای برقرار است.

مثال: برای چه مقدار از a تقاطع A[۲-]، B[۳-a-]، C[۲-] بر یک خط راست واقعند؟

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{2-3+a}{-1-2a+1} = \frac{2+1}{-1-2} \Rightarrow \frac{-1+a}{-2a} = \frac{1}{-1} \Rightarrow +1-a = -2a$$

$$\Rightarrow a = -1$$

نکته (۴) اگر خطی با شیب m از نقطه (x_0, y_0) بگذرد، معادله آن به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور طول ها زاویه 60° ساخته و از نقطه $(-1, 2)$ بگذرد.

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$y - 2 = \sqrt{3}(x + 1) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3} + 2$$



مسئله: معادله خطی را بنویسید، از نقاط $A(1, 2)$ و $B(4, 0)$ به طول $\frac{4}{3}$ واقع بر محور طولها

روستاد: $B(4, 0) \Rightarrow$ عرض B منفرجه $\Rightarrow B$ واقع بر محور طولها

$$m_{AB} = \frac{2-0}{1-4} = -\frac{2}{3}$$

$$y-0 = -\frac{2}{3}(x-4) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \rightarrow 2x + 3y = 8$$

روش دوم: فرم کلی معادله خط $y = ax + b$ است، باید مختصات نقاط A و B در آن صدق کنند:

$$y = ax + b \begin{cases} A(1, 2) \rightarrow 2 = a + b \\ B(4, 0) \rightarrow 0 = 4a + b \end{cases} \xrightarrow{x(-)} \begin{cases} -a - b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{cases}$$

$$\underline{a = -\frac{2}{3}, b = \frac{8}{3}}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط: } y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

تمرین ۱: خطی از دو نقطه $A(\sqrt{12}, 2)$ و $B(\sqrt{3}, 1)$ می گذرد، چه زاویه ای با محور افقی می سازد؟

$$m_{AB} = \frac{2-1}{\sqrt{12}-\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

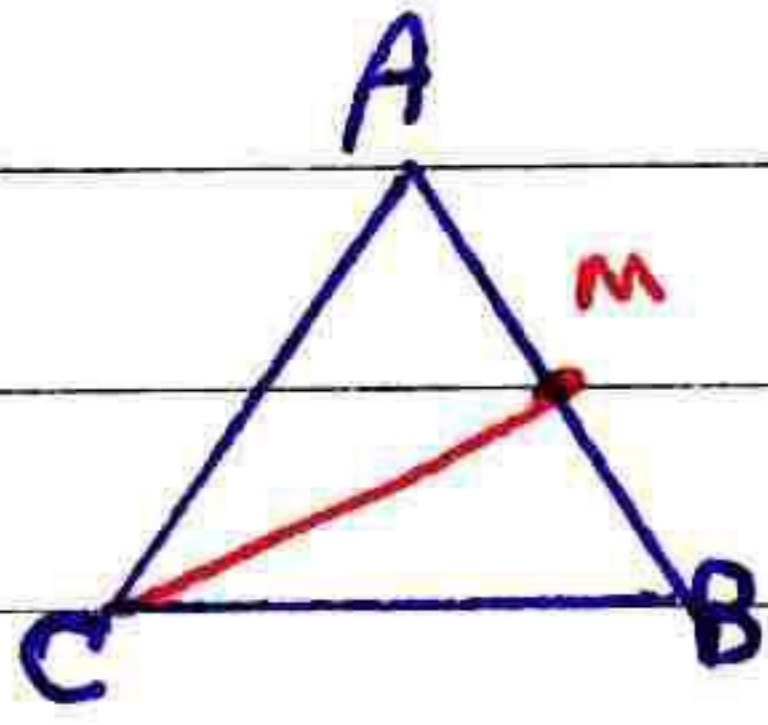
تمرین ۲: دو نقطه $A(4, 9)$ و $B(4t-2, 2t-1)$ بر خط موازی محور طولها قرار دارند. مقدار t چقدر است؟

روش ۱: هر دو نقطه روی خط موازی محور طولها، عرضی یکسان دارند پس:

روش ۲: هر خط موازی محور طولها، دارای شیب صفر است پس:

$$m_{AB} = \frac{2t-1-9}{4t-2-4} = 0 \Rightarrow 2t-10=0 \Rightarrow t=5$$

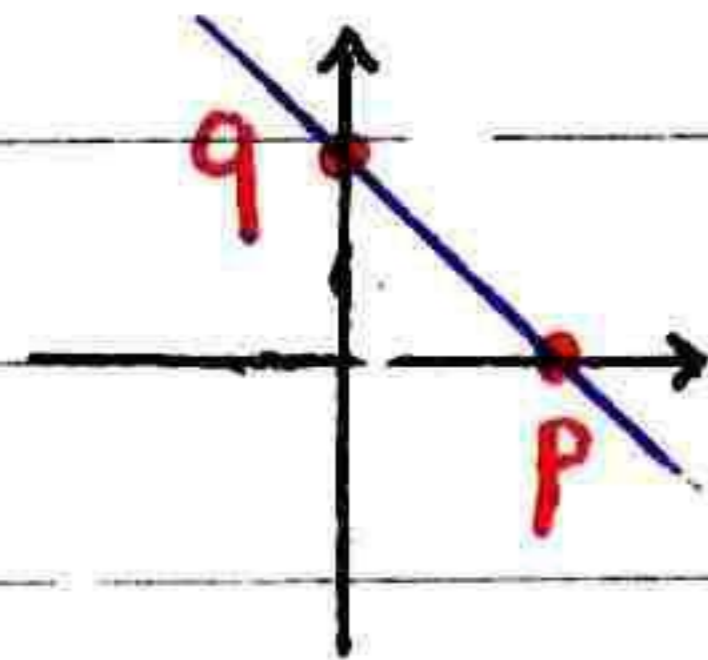
تمرین ۱: اگر $A[2]$ و $B[-1]$ و $C[4]$ سه رأس یک مثلث باشند معادله میانی CM را بنویسید.



$$M \text{ وسط } AB \Rightarrow M = \frac{A+B}{2} = \left[\frac{0}{2} \right]$$

$$m_{CM} = \frac{-2-4}{1-0} = -7$$

$$Cm \text{ معادله: } y-4 = -7(x-0) \Rightarrow y = -7x+4$$



نکته (۵) نقطه برخورد خط با محور طول ها (P) را طول از مبدأ و نقطه برخورد خط با محور عرضها (9) را عرض از مبدأ گویند.

برای تعیین طول از مبدأ، کافی است در معادله خط $y=0$ گذاشته تا x بدست آید.

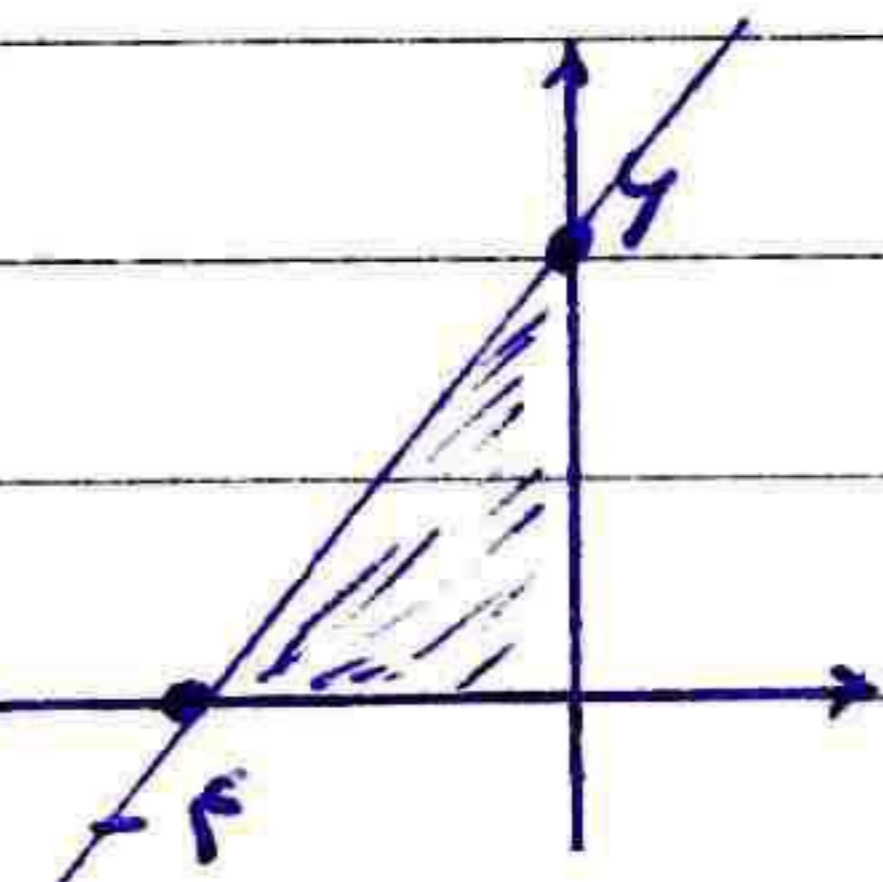
برای تعیین عرض از مبدأ، کافی است در معادله خط $x=0$ گذاشته تا y بدست آید.

مثال: طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط $2x-3y-9=0$ معادله را بدست آورید.

$$y=0 \text{ طول از مبدأ} \rightarrow 2x-9=0 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$x=0 \text{ عرض از مبدأ} \rightarrow -3y-9=0 \Rightarrow y = -3$$

مثال: اگر طول از مبدأ خط -4 و عرض از مبدأ آن 4 باشد، مساحت مثلث که خط با محورهای مختصات میسازد چقدر است؟



$$S = \frac{4 \times 4}{2} = 12 \Rightarrow \text{مساحت} \Rightarrow \text{ارتفاع} = 4 \text{ و } \text{قاعدۀ} = 4$$

نتیجه: اگر طول از مبدأ P و عرض از مبدأ q فرض شود، معادله خط با محورهای مختصات برابر است با: $S = \left| \frac{P \times q}{2} \right|$

نکته (۶) اگر طول از مبدأ خط P و عرض از مبدأ آن q باشد معادله آن خط

به صورت $\frac{x}{P} + \frac{y}{q} = 1$ است.

مثال: معادله خط را بنویسید، طول از مبدأ آن -2 و عرض از مبدأ آن -3 باشد.

$P = -2, q = -3$

$\Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1 \xrightarrow{\times(-6)} 3x + 2y = -6$

مثال: معادله خط را بنویسید، از نقطه $A(-3, 4)$ بگذرد و عرض از مبدأ آن 2 برابر طول از مبدأ آن باشد.

$q = 2P \rightarrow$ معادله خط: $\frac{x}{P} + \frac{y}{2P} = 1 \xrightarrow{\times 2P} \frac{2x}{P} + \frac{y}{P} = 2 \xrightarrow{P=4} \frac{2x}{4} + \frac{y}{4} = 2$

$-6 + 4 = 2P \Rightarrow P = -1$

معادله خط: $\frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1 \Rightarrow -2x - y = 1 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0$

تذکره: خطی که در مختصات را در نقاط صحیح و مثبت قطع کرده است. و این خط با محورهای مختصات مثلث به مساحت $\frac{3}{2}$ میسازد. معادله خط را بنویسید.

$S = \left| \frac{P \times q}{2} \right| \xrightarrow{P, q > 0} \frac{P \times q}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow P \times q = 3 \xrightarrow{P, q صحیح اند}$

$\rightarrow P=1, q=3 \Rightarrow$ معادله خط: $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + y = 3$

$\rightarrow P=3, q=1 \Rightarrow$ معادله خط: $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1 \Rightarrow x + 3y = 3$

نکته (۷) اگر معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، شیب خط $m = a$ خواهد بود و در صورتی که معادله خط $ax + by + c = 0$ باشد، شیب آن $m = -\frac{a}{b}$ است.

مثال: شیب هر یک از خطوط زیر را تعیین کنید.

الف) $2y = 4 - 5x$
 $\xrightarrow{\div 2} y = 2 - \frac{5}{2}x \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$

ب) $4x - 2y = 9 \rightarrow m = \frac{-4}{-2} = \frac{4}{2}$

اگر معادله خط فاقد متغیر x باشد، آنگاه شیب آن صفر است.
 مثال: $5y - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{0}{5} = 0$

اگر معادله خط فاقد متغیر y باشد، چه تعریف نشده است.
 مثال: $2x + 7 = 0 \rightarrow m = \frac{-2}{0} = \text{تعریف نشده}$

نکته (۸) دو خط با شیب های m و m' موازی یکدیگرند هرگاه $m = m'$ باشد و برعکس.

مثال: برای چه مقدار از P دو خط $(P-1)x + 2y + 1 = 0$ و $(2P+1)x + 3y = 7$ با هم موازیند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} m = -\frac{(2P+1)}{3} = -\frac{2P+1}{3} \\ m' = -\frac{(P-1)}{2} = -\frac{P-1}{2} \end{array} \right.$$

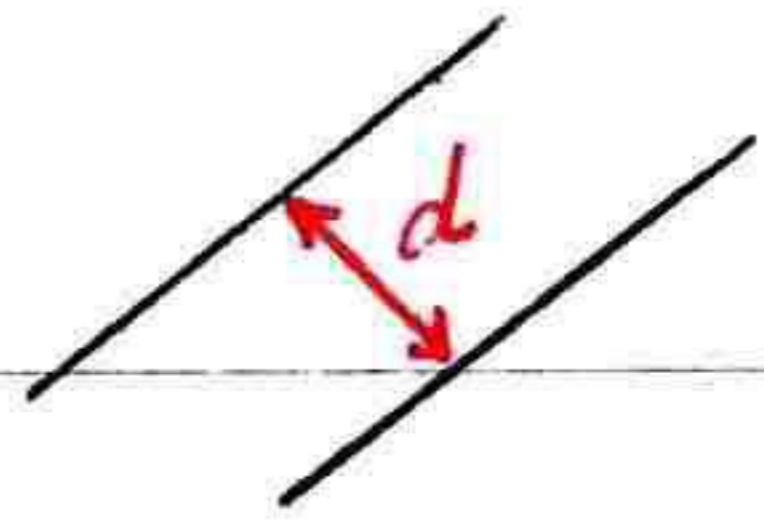
$$m = m' \rightarrow -\frac{2P+1}{3} = -\frac{P-1}{2} \Rightarrow -2P+2 = -4P-2 \Rightarrow P = -2$$

مثال: معادله خط را بنویسید موازی خط $2x = 3y + 1$ بوده و از نقطه $A(-1, 2)$ بگذرد.

$$m' = \frac{2}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3} \xrightarrow{\div 3} \frac{2}{3}x = y + \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\text{معادله خط: } y - 2 = \frac{2}{3}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

توجه (۱) فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از



$$d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

یکدیگر برابر است با:

(ضرایب متغیرها نظیر به نظیر برابر است)

مثال: فاصله دو خط موازی $2x-4y=1$ و $8y-6x+d=0$ ازید

چقدر است؟

ابتدا باید ضرایب متغیرها نظیر به نظیر برابر باشد، لذا معادله اول را در $\frac{2}{3}$ ضرب کنیم:

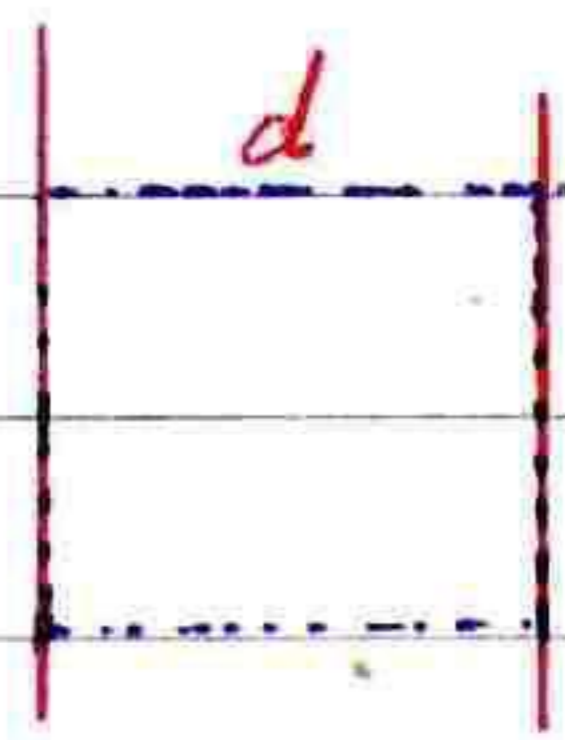
$$\begin{aligned} \text{معادله اول} &: -6x+8y+2=0 \\ \text{معادله دوم} &: -6x+8y+d=0 \end{aligned} \Rightarrow d = \frac{|2-d|}{\sqrt{36+64}} = \frac{2}{10}$$

تمرین: به ازای چه مقادیری از m و n دو خط موازی $x+2y+1=0$ و $x+my+n=0$ باشد فاصله $\sqrt{5}$ از یکدیگر رسم شده اند.

$$\begin{aligned} \text{شیب خط اول} &: m_1 = -\frac{1}{2} \\ \text{شیب خط دوم} &: m_2 = -\frac{1}{m} \end{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{m} \Rightarrow m=2$$

$$d = \frac{|n-1|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5} \Rightarrow |n-1| = d \begin{cases} n-1=d \Rightarrow n=6 \\ n-1=-d \Rightarrow n=-4 \end{cases}$$

تمرین: معادلات دو ضلع مربعی $x-2y+2=0$ و $2x-6y-2=0$ است. مساحت مربع را بدست آورید.



با توجه به موازی بودن دو خط، این خطوط معادلات دو ضلع مقابل است. که فاصله بین این دو خط موازی همان طول ضلع مربع است.

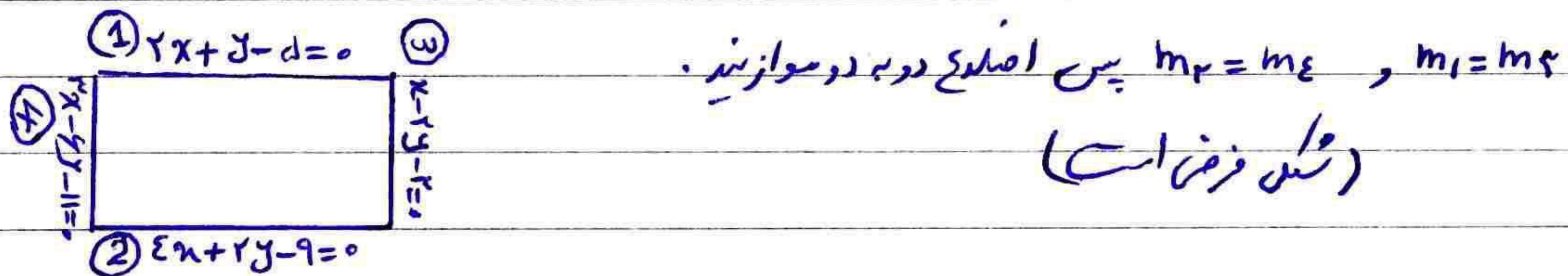
$$\begin{aligned} \text{معادله خط اول} &: 2x-6y+6=0 \\ \text{معادله خط دوم} &: 2x-6y-2=0 \end{aligned} \Rightarrow d = \frac{|6-(-2)|}{\sqrt{4+36}} = \frac{8}{\sqrt{40}}$$

$$S = d^2 = \frac{64}{40}$$

تمرین: مساحت مستطیلی به اضلاع $2x+y=4$ و $x-2y=2$ و $4x+2y=9$ و $2x-4y=11$ را بدست آورید.

$$2x+y-4=0 \rightarrow m_1 = -2 \quad \text{و} \quad x-2y-2=0 \rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

$$4x+2y-9=0 \rightarrow m_3 = -2 \quad \text{و} \quad 2x-4y-11=0 \rightarrow m_4 = \frac{1}{2}$$

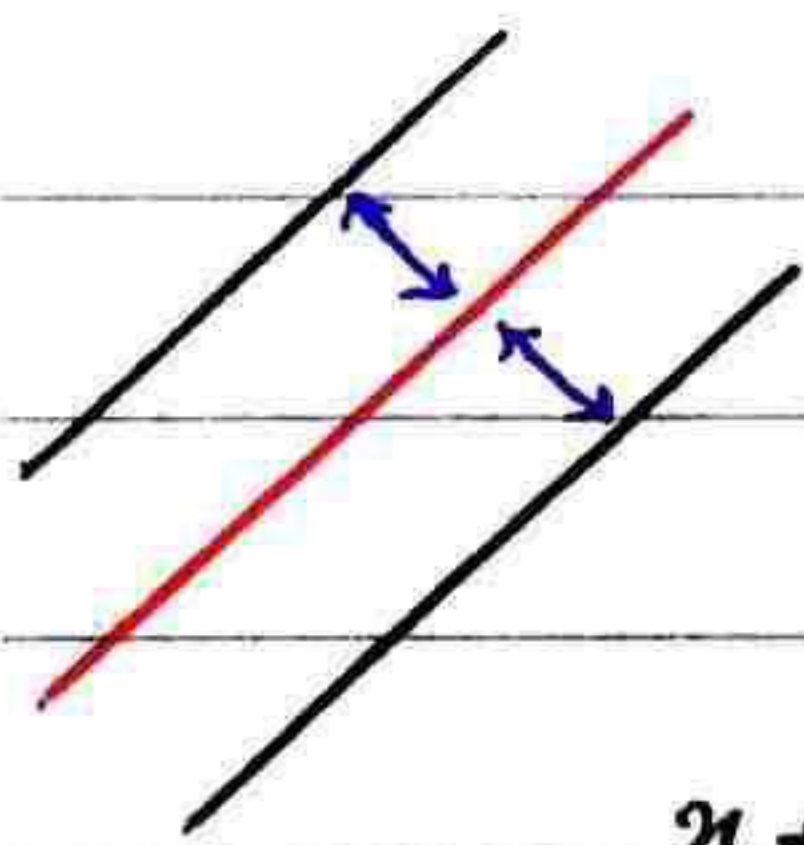


طول یک ضلع مستطیل $\frac{4}{\sqrt{20}}$ $\Rightarrow d = \frac{|-4+9|}{\sqrt{14+4}} = \frac{5}{\sqrt{20}}$ \Rightarrow $4x+2y-9=0$ و $2x+y-d=0$ \Rightarrow $4x+2y-9=0$

طول ضلع دیگر مستطیل $\frac{11}{\sqrt{48}}$ $\Rightarrow d = \frac{|-2+11|}{\sqrt{9+16}} = \frac{9}{\sqrt{25}}$ \Rightarrow $2x-4y-11=0$ و $2x-4y-d=0$

$$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = \frac{5}{\sqrt{20}} \times \frac{9}{\sqrt{25}} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$$

توجه (۲) دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ را در نظر بگیرید.



معادله خطی که از این خطوط به یک فاصله باشد (شکل درج شده) برابر است با: $ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$

سؤال: معادله خطی را بنویسید که از دو خط $x+y+1=0$ و $x+y+4=0$ به یک فاصله باشد.

باتوجه به موازی بودن خطوط، داریم: $x+y+\frac{1+4}{2}=0 \Rightarrow x+y+\frac{5}{2}=0$

توجه (۳) خط $D: ax+by+c=0$ را در نظر بگیرید.

دو خط می توان در دو طرف D رسم کرد که از D به فاصله k باشند.

برای بدست آوردن معادله این دو خط طبق رابطه زیر عمل می کنیم:

$$ax+by+c = \pm k\sqrt{a^2+b^2}$$

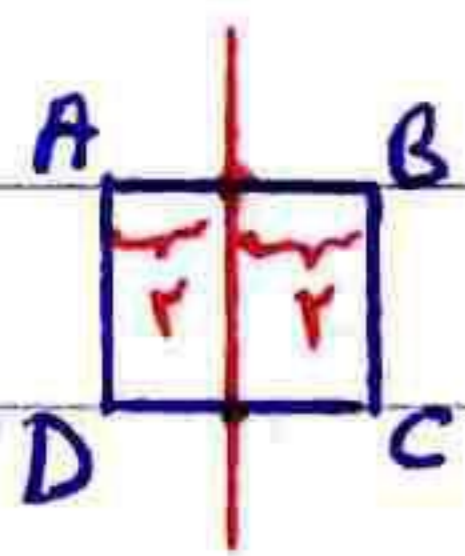
مثال: معادله خطوط را بنویسید از خط $3x - 4y + 1 = 0$ به فاصله ۲ باشند.

$$3x - 4y + 1 = \pm 2\sqrt{9+16} \Rightarrow 3x - 4y + 1 = \pm 10 \rightarrow 3x - 4y = 9$$

$$\rightarrow 3x - 4y = -11$$

تمرین: مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است. اگر وسطهای (ضلع AB و CD) روی خط

$3y - 4x + 2 = 0$ واقع باشند، معادلات اضلاع AD و BC را بنویسید.



AD و BC دو خط هستند از خط مفروض به فاصله ۲ باشند. (توجه ۲)

$$3y - 4x + 2 = \pm 2\sqrt{9+16} \Rightarrow 3y - 4x = 8 \text{ و } 3y - 4x = -12$$

تمرین ۱: معادله خط را بنویسید موازی محور طولها بوده و خط $2x - 3y = 1$ را در نقطه $(1, 2)$ قطع کند.

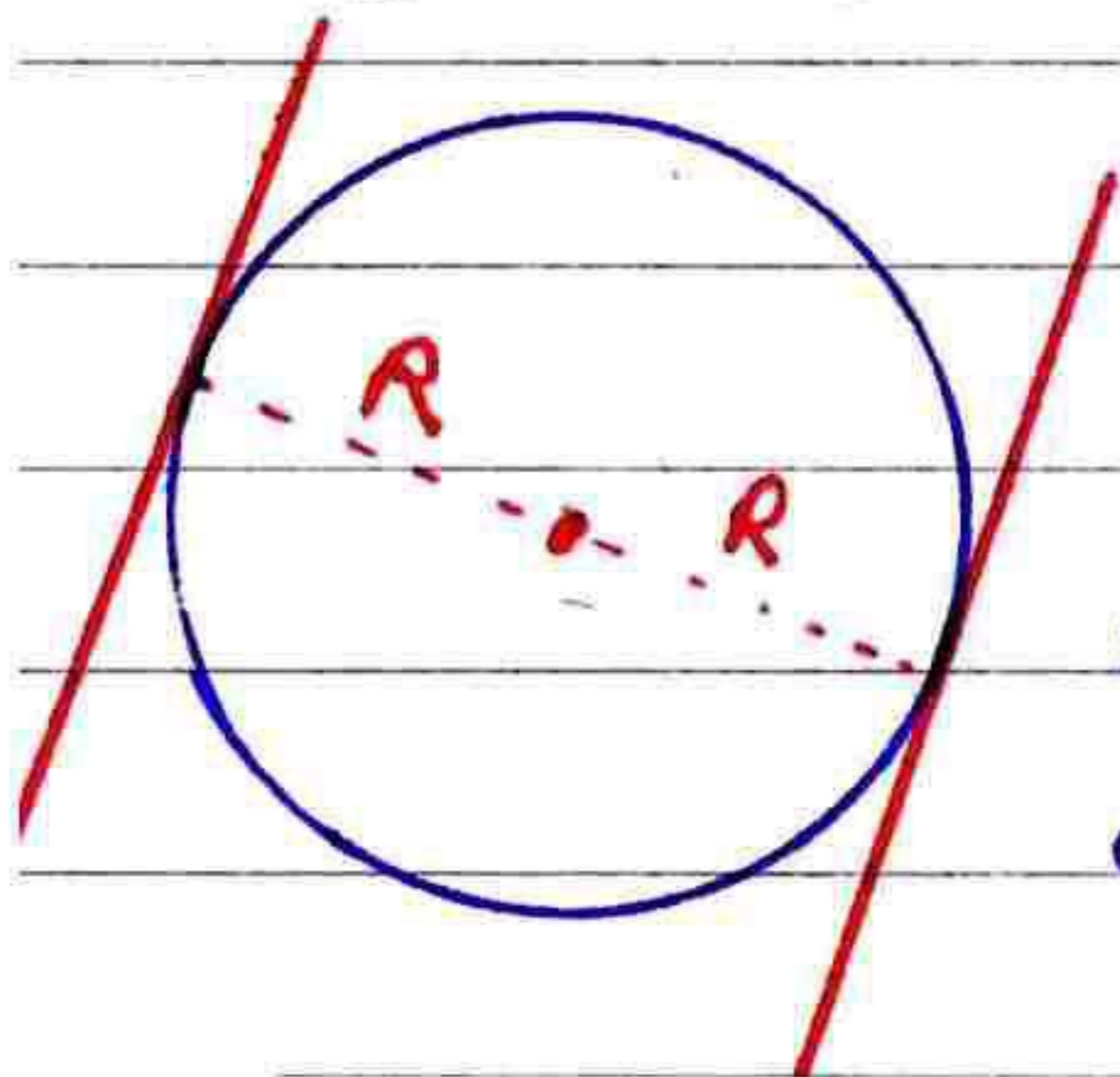
اگر خط موازی محور طولها باشد شیب آن صفر است $m=0$
نقطه ای به عرض ۱ روی خط $2x - 3y = 1$ است لذا: $2x - 3 = 1 \Rightarrow x = 2$

نقطه $(2, 1)$

$$\Rightarrow y - 1 = 0 \quad (x - 2) \Rightarrow y = 1$$

معادله خط: $y - 1 = 0$

تمرین ۲: اگر دو خط $4x - 12y + 1 = 0$ و $4x = 12y + 25$ بر دایره ها مماس باشند، مساحت آن دایره چقدر است؟



واضح است که دو خط با هم موازیند، لذا می توانیم شیب هر دو را برابر کنیم در نظر گرفت. قطر دایره همان فاصله دو خط موازی از یکدیگر است:

$$4x - 12y + 1 = 0 \text{ و } 4x - 12y - 25 = 0 \Rightarrow d = \frac{|1+25|}{\sqrt{16+144}} = 2$$

$$R = \frac{\text{قطر}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow S = 1^2 \times \pi = \pi$$

نکته (۹) دو خط برهم عمودند هرگاه شیب‌های قرینیتی مقلوس شیب دیگری باشد.

به عنوان نمونه اگر شیب خط $m = \frac{2}{3}$ باشد شیب خط عمود بر آن $m' = -\frac{3}{2}$ است.

واضح است که حاصلضرب دو شیب برابر -1 خواهد شد یعنی $m \cdot m' = -1$

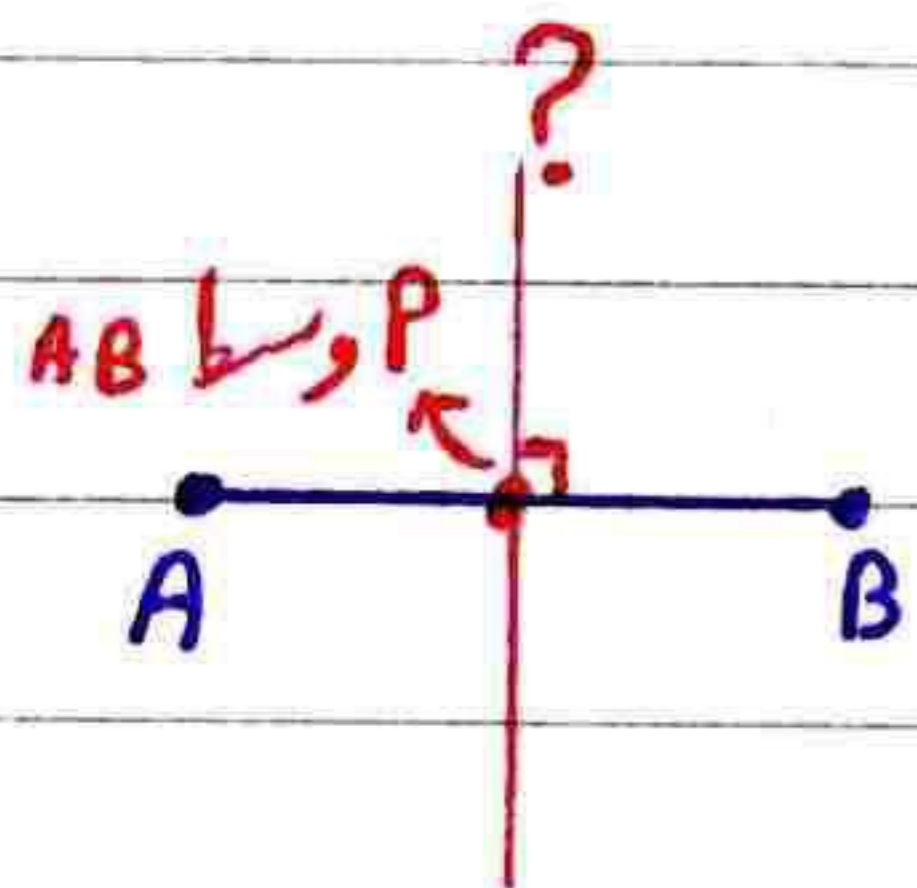
مثال: معادله خطی را بنویسید که بر خط $2x + 3y = 1$ عمود بوده و از نقطه A بر عرض -2 روی خط $x - 4 = y$ بگذرد.

$$m = -\frac{2}{3} \rightarrow m' = \frac{3}{2}$$

$$-2 = x - 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, -2)$$

$$\text{معادله خط: } y + 2 = \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow 2y + 4 = 3x - 3 \Rightarrow 3x - 2y - 9 = 0$$

مثال: معادله عمود منصف پاره خط AB با فرض $A[2]$ و $B[-5]$ را بنویسید.



$$P = \frac{A+B}{2} \Rightarrow P[-1]$$

$$m_{AB} = \frac{4-4}{2+5} = 0 \rightarrow \text{شیب خط عمود } m' = \infty$$

$$\text{معادله عمود منصف: } x - 2 = 4(x + 1) \Rightarrow y = 4x + 7$$

مثال: اگر $A(-3, -2)$ و $B(1, 4)$ و $C(-6, 9)$ سه رأس یک مثلث باشند:

الف) نشان دهید مثلث ABC قائم الزامیه است. (بدون استفاده از قضیه فیثاغورث)

ب) معادله ارتفاع نظیر وتر مثلث را بنویسید.

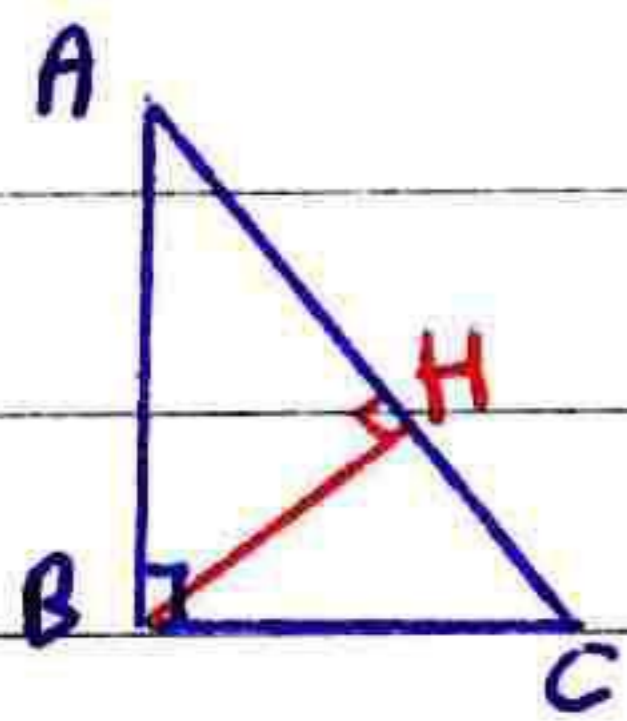
$$m_{AB} = \frac{-2-d}{-2-1} = \frac{v}{4} \quad \text{الف)}$$

$$m_{AC} = \frac{9+2}{-6+2} = -\frac{11}{4}$$

$$m_{BC} = \frac{9-d}{-4-1} = -\frac{4}{v}$$

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow AB \perp BC$$

بنابراین B رأس قائم است.



ب) برای یافتن معادله ارتفاع BH به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

$$m_{AC} = -\frac{11}{4} \quad BH \perp AC \rightarrow m_{BH} = \frac{4}{11} \quad B(1, d)$$

$$BH \text{ ارتفاع: } y - d = \frac{4}{11}(x - 1) \times 11 \rightarrow 4x - 11y + 11d = 0$$

تمرین: k را چنان بیابید که دو خط $D: (k-1)x + 2y - 7k = 0$ و $D': dx + (k+1)y + k^2 = 1$ بر هم عمود باشند.

$$m_D = \frac{-k+1}{2} \quad m_{D'} = \frac{-d}{k+1} \quad m_D \times m_{D'} = -1 \rightarrow \frac{-k+1}{2} \times \frac{-d}{k+1} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{dk-d}{2k+2} = -1 \Rightarrow dk-d = -2k-2 \Rightarrow k = \frac{4}{v}$$

تمرین: رابطه $x^2 - y^2 + 4x - 4y = 0$ چه شکلی روی صفحه مختصات پذیرد؟

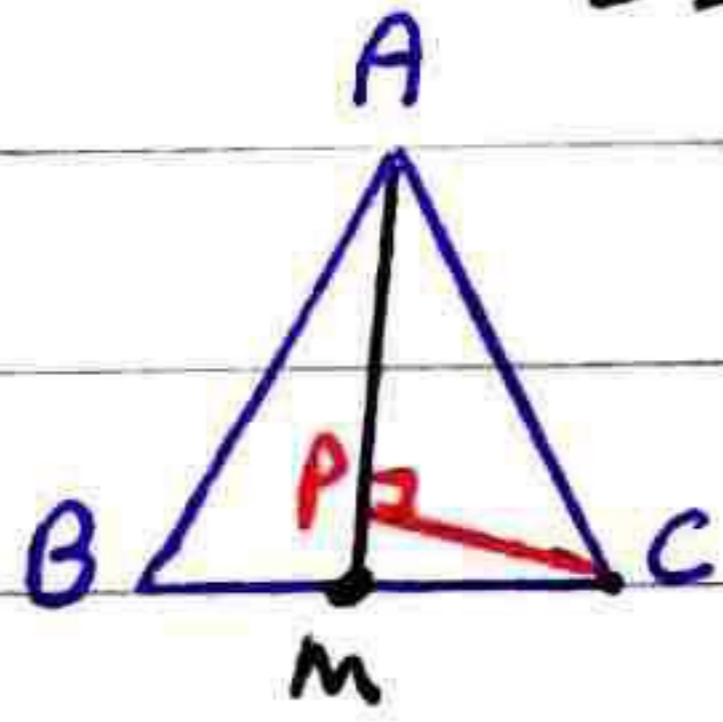
$$(x^2 - y^2) + (4x - 4y) = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) + 4(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(x+y+4) = 0$$

$m=1$ $m'=-1$ $\Rightarrow mm' = -1 \Rightarrow$ شش حاصل روی صفحه مختصات دو خط عمود بر هم است

تمرین: اگر $A[-2]$, $B[5]$, $C[4]$ رئوس مثلث ABC باشند، معادله

خطی که از رأس C بر میانه AM عمود است را بنویسید.



$$BC \text{ وسط } M \Rightarrow m = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M[4]$$

$$AM \text{ شیب} = m_{AM} = \frac{4-1}{2+2} = \frac{1}{2}$$

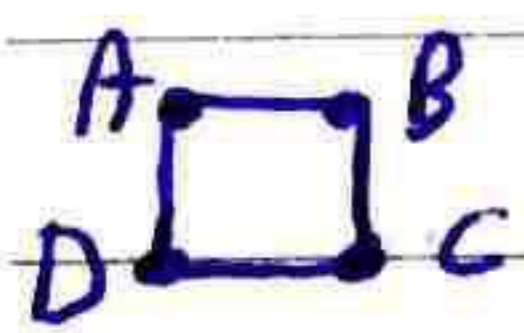
$$CP \perp AM \Rightarrow m_{CP} = -2, \quad C(4, 2)$$

$$CP \text{ معادله: } y-2 = -2(x-4) \Rightarrow y = -2x+11$$

تمرین: مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است. به طوری که $A(1,4)$ و $B(10,4)$ دو رأس مجاور آن هستند.

الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

$$m_{AB} = \frac{4-4}{10-1} = \frac{0}{9} = 0$$



ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.

$$AD \perp AB \Rightarrow m_{AD} = -\frac{1}{0} \text{ (undefined)} \Rightarrow \text{معادله } AD: x=1 \Rightarrow 1x+0y=1$$

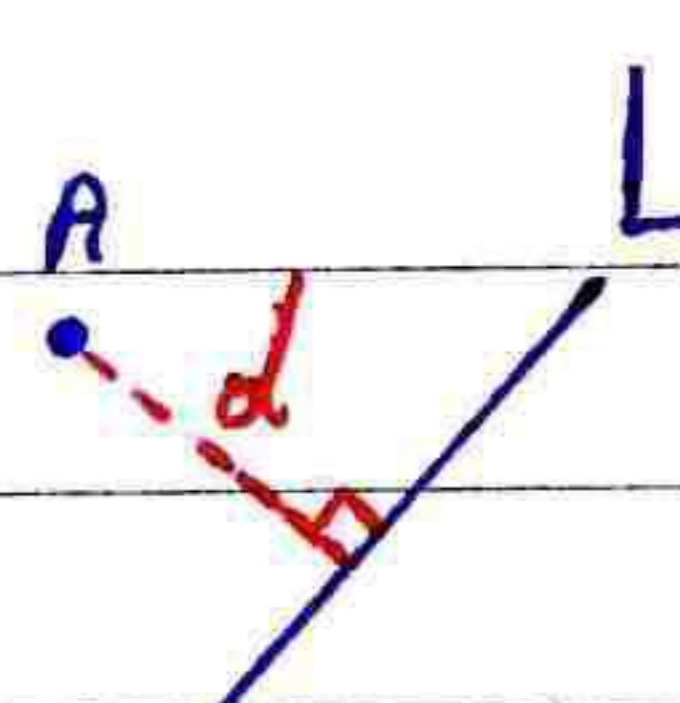
پ) اگر بدانیم نقطه $C(7,9)$ رأس سوم مربع است. مختصات رأس D را بنویسید.

مربع نوعی متوازی الاضلاع است پس طبق نسبتی که قبلاً گفته شد، داریم:

$$A+C=B+D \Rightarrow D=A+C-B = [1] + [9] - [4]$$

$$\Rightarrow D = [6]$$

نکته (۱۰) فاصله ی بین نقطه از خط :



برای محاسبه ی فاصله ی نقطه ی $A(x_0, y_0)$ از خط $ax+by+c=0$:

طبق رابطه ی $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ عمل می کنیم.

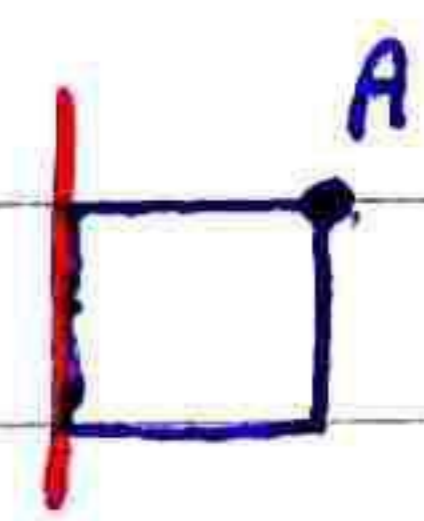
مثال: فاصله ی نقطه ی $A(7, 5)$ را از خط L به معادله ی $4x+2y=18$ بیابید.

$$L: 4x+2y-18=0 \rightarrow d = \frac{|28+10-18|}{\sqrt{16+4}} = \frac{20}{\sqrt{20}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

مثال: یک مربع از اضلاع مربعی بر خط $y=2x-1$ واقع است. اگر $A(2, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد مساحت آن را بیابید.

(ابتدا مشخصات A را در معادله خط قرار می دهیم: $0 = 2(2) - 1 \Rightarrow 0 = 3$)

به نتیجه ی غلط رسیدیم پس A روی خط قرار ندارد. می توان شکل به صورتی زیر برای آن



در نظر گرفت.

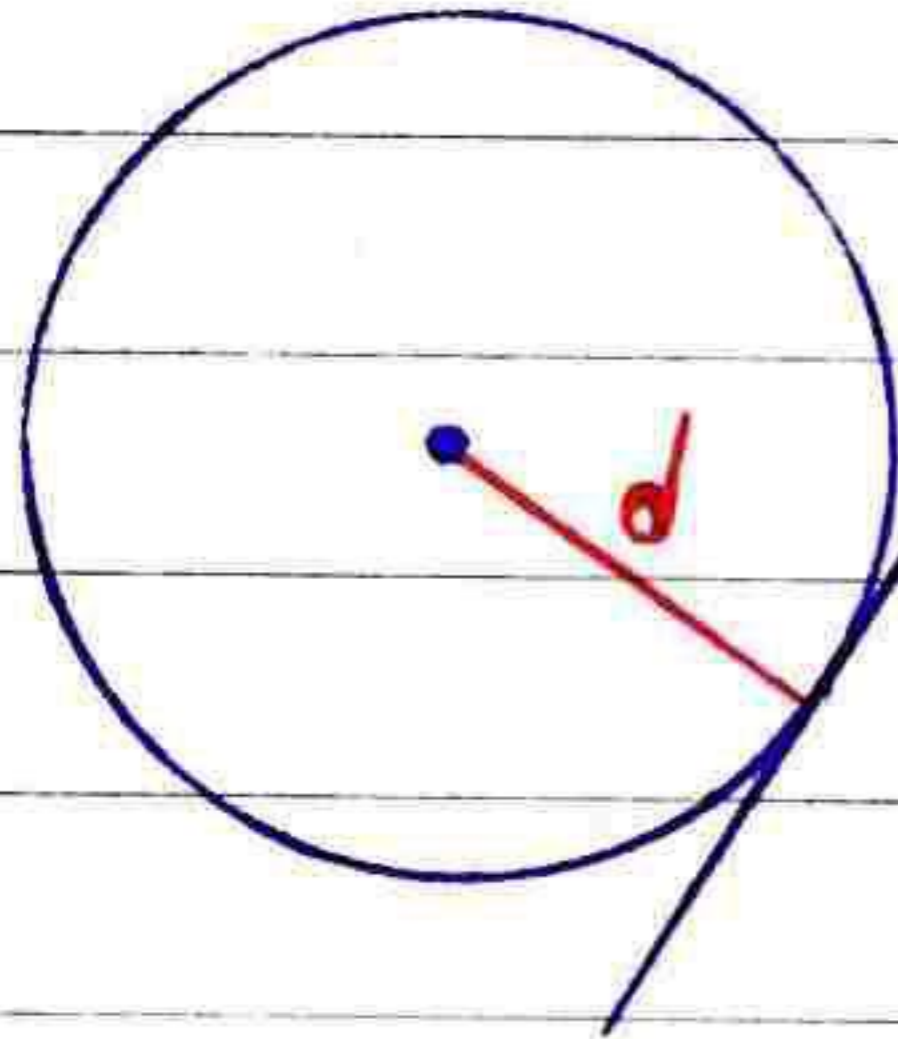
واضح است که طول ضلع مربع، همان فاصله A از خط است.

خط: $2x - y - 1 = 0$

$$\Rightarrow \text{طول ضلع مربع: } d = \frac{|4 - 0 - 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{5} = 1.8$$

تمرین: خط $D: 3x - 4y = 0$ بر دایره‌ای به صورت $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را حساب کنید.



شعاع دایره‌ها فاصله مرکز دایره از خط مماس است. بنابراین:

$$d = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{9 + 16}} = 2$$

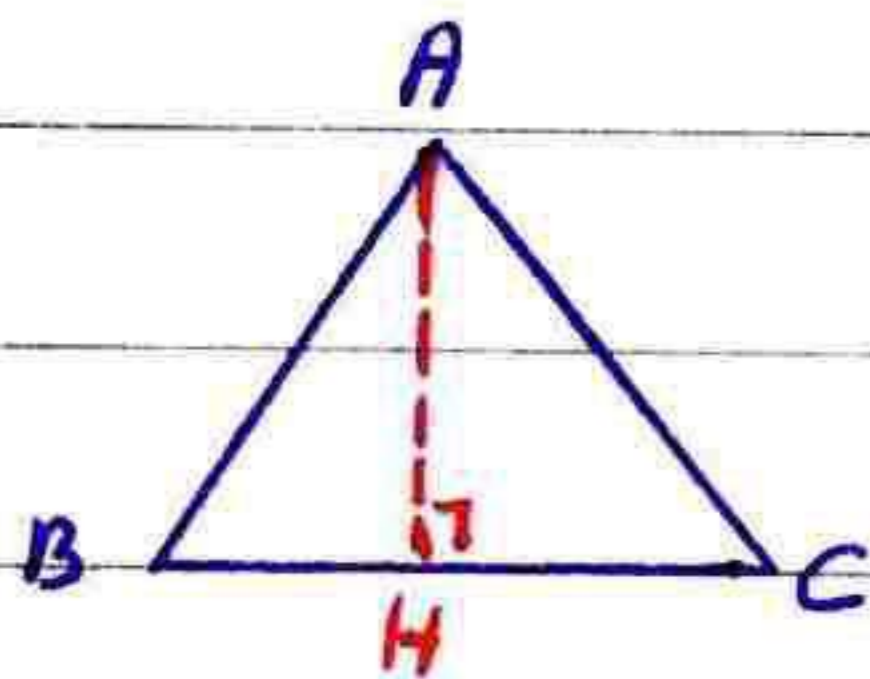
تمرین: به ازای چه مقدار از k فاصله نقطه $A(1, 1)$ از خط $y = x + k$ برابر $\sqrt{2}$ است؟

خط: $x - y + k = 0 \Rightarrow d = \frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{|k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow |k| = 2 \Rightarrow k = \pm 2$$

تمرین: بدون استفاده از رابطه رفته شده برای تعیین مساحت ABC ، مساحت ABC

را با فرض $A(1, 4)$ و $B(4, 2)$ و $C(2, 7)$ بیابید.



$$m_{BC} = \frac{7-2}{2-4} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \rightarrow \text{معادله ضلع BC: } y - 2 = \frac{5}{2}(x - 4) \Rightarrow 5x + 2y - 29 = 0$$

$$\text{طول ارتفاع AH} = \text{فاصله } A \text{ از ضلع BC} = \frac{|5 + 8 - 29|}{\sqrt{25 + 4}} = \frac{14}{\sqrt{29}}$$

$$\text{طول قاعده BC} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$\text{مساحت } \triangle ABC = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{\sqrt{29} \times \frac{14}{\sqrt{29}}}{2} = \frac{14}{2} = 7$$