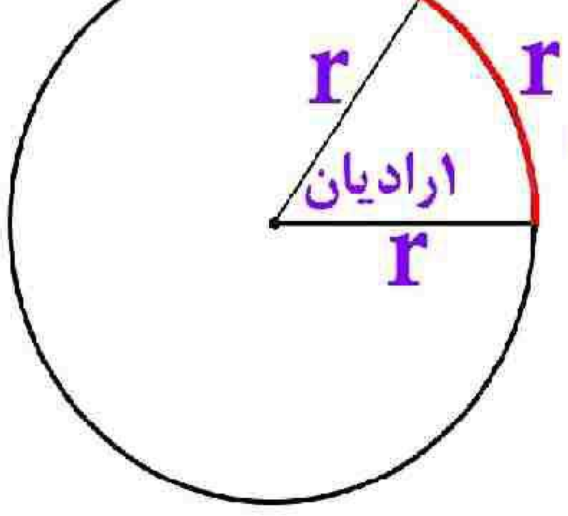
مثلثات

واژه‌ی مثلثات در زبان یونانی از دو کلمه‌ی Trigonon، به معنی مثلث و Metria به معنی اندازه گیری گرفته شده است.

واحدهای اندازه گیری زاویه:

تا کنون برای اندازه گیری زاویه از واحد درجه استفاده کرده ایم و می دانیم اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به هر قسمت را یک درجه گوییم.

در اینجا واحد دیگری برای اندازه گیری زاویه به نام رادیان را معرفی می کنیم:



قطعه نخی به اندازه‌ی شعاع دایره جدا می کنیم و آن را به طور کشیده روی محیط دایره می خوابانیم، اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به این کمان یک رادیان است.

توجه: برای تعیین اندازه‌ی یک زاویه بر حسب رادیان، کافیست طول کمان مقابل آن را به شعاع دایره تقسیم کنیم.

بنابراین اگر l طول کمان، r شعاع دایره و α اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد، آنگاه $\alpha = \frac{l}{r}$، که می توان آن را به صورت $r.\alpha = l$ نیز نوشت.

مثال: در دایره‌ای به شعاع $10\ cm$، اندازه زاویه مرکز مقابل به کمانی به طول $8\ cm$ از این دایره چند رادیان است؟

$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{8}{10} = 0/8$ رادیان

مثال: در مسابقه قوی ترین مردان ایران، یکی از ورزشکاران میله‌ای که به انتهای آن وزنه‌ای وصل شده است را روی آرنج بلند کرده و در یک مسیر دایره‌ای به قطر ۲۰ متر، آن را 4π متر جابه جا می کند، او چه زاویه‌ای را پیموده است؟

$r = \frac{20}{2} = 10$ و $l = 4\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$ رادیان

مثال: یک زاویه‌ی تمام صفحه (دایره) چند رادیان است؟

طول کمان در این دایره، همان محیط دایره است، لذا با فرض اینکه شعاع آن r باشد طول کمان $2\pi r = l$ خواهد بود بنابراین اندازه‌ی زاویه برابر است با: $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زاویه به یکدیگر:

اگر مقدار یک زاویه برحسب درجه را با حرف D و مقدار همان زاویه را برحسب رادیان با حرف R نمایش دهیم آنگاه: $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

به عبارت دیگر، برای تبدیل درجه به رادیان باید آن را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کرد و برای عکس آن باید تقسیم نمود.

مثال: ۳۰ درجه معادل چند رادیان است؟ $30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ رادیان

مثال: $\frac{2\pi}{3}$ رادیان معادل چند درجه است؟ $\frac{2\pi}{3} \div \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 120^\circ$

جدول R.D: در حین محاسبات مثلثاتی حداقل لازم است تبدیل یافته‌ی زوایای زیر را بدانیم:

رادیان R	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
درجه D	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰

تمرین:

۱- هریک از زوایای -12°، 72° و 315° را به رادیان تبدیل کنید.

$-12 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{15}$ رادیان ؛ $72 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$ رادیان ؛ $315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{4}$

۲- هریک از زوایای $-\frac{\pi}{18}$ رادیان و $\frac{3\pi}{4}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

$-\frac{\pi}{18} \times \frac{180}{\pi} = -10^\circ$ ؛ $\frac{3\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 135^\circ$

۳- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویه‌ی حاده چهار برابر زاویه‌ی حاده‌ی دیگر باشد، زاویه‌ی کوچکتر چند رادیان است؟

$$\left.\begin{array}{l} a = 4b \\ a + b = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 4b + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 5b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{10}$$

۴- مجموع سه زاویه 135° است. اگر اندازه‌ی آنها بر حسب رادیان به نسبت ۲ و ۳ و ۴ باشد، بزرگترین این زوایا چند رادیان است؟

$135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$ رادیان

زوایا: $2x , 3x , 4x \Rightarrow 2x + 3x + 4x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 9x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$

$\Rightarrow$ زاویه‌ی بزرگتر $= 4x = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ رادیان

۵- اگر زاویه 160° در دایره‌ای کمانی به طول $24\,cm$ جدا کند، شعاع دایره چند سانتی‌متر است؟

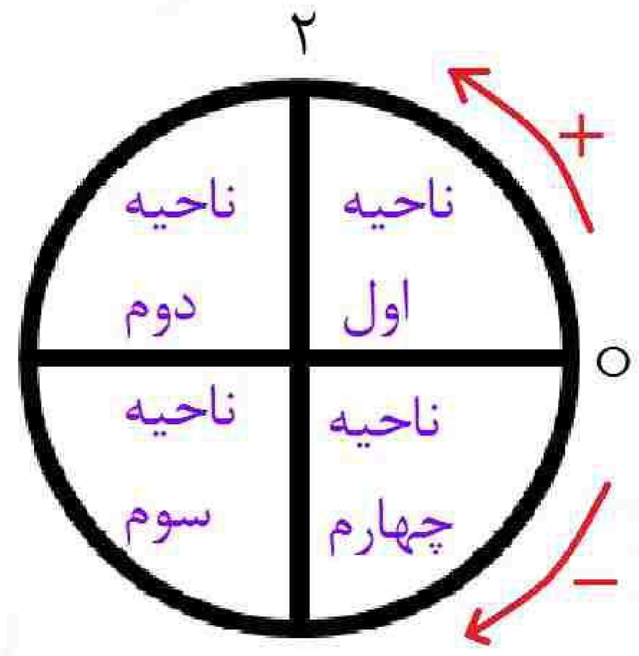
$\alpha = 160 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8\pi}{9}$ و $l = 24\,cm \xrightarrow{l = r\cdot\alpha} 24 = r \times \frac{8\pi}{9} \Rightarrow r = \frac{27}{\pi} \simeq 8.6\,cm$

دایره مثلثاتی

دایره‌ای است به شعاع واحد، دارای مبدأ حرکت و جهت دار که جهت مثبت آن خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است.

$\frac{\pi}{2}$

$\ldots , \pm 3\pi , \pm \pi$



$0 , \pm 2\pi , \pm 4\pi , \ldots$

دایره‌ی مثلثاتی را مطابق شکل روبه‌رو به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک ناحیه گوییم. هر ناحیه تحت زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان یعنی 90° ساخته شده است.

مثال: ناحیه‌ی مربوط به هر یک از زوایای زیر را تعیین کنید.

الف) $a = \frac{13\pi}{6} \rightsquigarrow a = 2\pi + \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow$ ناحیه‌ی اول

ب) $b = \frac{62\pi}{3} \rightsquigarrow b = 21\pi - \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow$ ناحیه‌ی دوم

پ) $c = \frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \rightsquigarrow c = 3\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \rightsquigarrow$ ناحیه‌ی سوم

ت) $d = -\frac{71\pi}{5} \rightsquigarrow d = -14\pi - \frac{\pi}{5} \rightsquigarrow$ ناحیه‌ی چهارم

مثال: انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی 1300° در کدام ناحیه دایره مثلثاتی واقع است؟

چون هر ناحیه تحت زاویه‌ی 90° ساخته شده است، ابتدا 1300 را بر 90 تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 1300 & 90 \\ \hline \vdots & 14 \\ 40 & \end{array}$$ ⇐ بنابراین به طور غیر رسمی می نویسیم :

$$1300 = 14 \times 90^\circ + 40^\circ \Rightarrow 14 \times \frac{\pi}{2} + 40^\circ = 7\pi + 40^\circ \Rightarrow$$ ناحیه‌ی سوم

یادآوری مهم :

در سال گذشته ، آموختیم که نسبت های مثلثاتی در هر یک از نواحی دایره مثلثاتی چه علامتی دارند ، در این جا به طور مختصر آنها را یادآوری می کنیم :

در ناحیه‌ی اول **ه**مگی مثبت ، در ناحیه‌ی دوم فقط **س**ینوس مثبت ، در ناحیه‌ی سوم **تا**نژانت مثبت و در ناحیه‌ی چهارم فقط **ک**سینوس مثبت است . "**هستک**"

توجه داشته باشیم که کتانژانت و تانژانت همه جا علامت یکسان دارند به طور مثال تانژانت در ناحیه‌ی سوم مثبت است ، بنابراین معکوس آن یعنی کتانژانت نیز مثبت می باشد .

همچنین تاکید می شود که موارد گفته نشده منفی اند ، به طور مثال در ناحیه ی دوم ، کسینوس ، تانژانت و کتانژانت منفی می باشند .

مثال : مثبت یا منفی بودن مقدار هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\cos 70^\circ \xrightarrow{\text{۷۰° در ناحیه اول واقع است}}$ $\cos 70^\circ$ مثبت است

ب) $\tan \frac{3\pi}{4} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{ناحیه دوم}}$ منفی است

پ) $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی چهارم}}$ منفی است

ت) $\cot \frac{4\pi}{3} = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی سوم}}$ مثبت است

مثال : با فرض $\theta = \frac{11\pi}{3}$ تعیین کنید هر یک از نسبت های مثلثاتی θ ، از نظر علامت چه وضعی دارند؟

$\theta = \frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3} \longrightarrow$ ناحیه‌ی چهارم

بنابراین $\sin\theta$ ، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ منفی بوده و فقط $\cos\theta$ مثبت است .

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

تعیین نسبت های مثلثاتی $k\pi \pm \theta$:

اگر θ زاویه‌ی حاده و k عدد صحیح باشد، کافیست ناحیه‌ی مربوط به زاویه را یافته و علامت آن نسبت مثلثاتی را مشخص کنیم، پس آن نسبت را برای θ بنویسیم. به طور مثال:

$\sin(3\pi+\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی سوم است و سینوس در این ناحیه منفی است } 3\pi+\theta} = -\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی دوم است و کسینوس در این ناحیه منفی است } \pi-\theta} = -\cos\theta$

$\tan(2\pi-\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی چهارم است و تانژانت در این ناحیه منفی است } 2\pi-\theta} = -\tan\theta$

$\cot(6\pi+\theta) \xrightarrow{\text{در ناحیه‌ی اول بوده که کتانژانت مثبت است } 6\pi+\theta} = \cot\theta$

θ	30°	45°	60°
θ برحسب رادیان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

حال به کمک نسبت های مثلثاتی زوایای ۳۰ درجه ، ۴۵ درجه و ۶۰ درجه (طبق جدول روبرو) می توان به حل مسائل زیادی پرداخت .

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{5\pi}{4}$ را تعیین کنید.

$\frac{5\pi}{4} = \frac{4\pi+\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ ناحیه ی سوم، تانژانت و کتانژانت مثبت و سینوس و کسینوس منفی اند

$\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\cot\frac{5\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $-\frac{\pi}{3}$ را تعیین کنید.

$-\frac{\pi}{3} \Rightarrow$ ناحیه ی چهارم ، فقط کسینوس مثبت و بقیه ی نسبت ها ی مثلثاتی منفی اند

$\sin\frac{-\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{-\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan\frac{-\pi}{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\cot\frac{-\pi}{3} = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

تمرین ۱: نسبت های مثلثاتی زاویه $\alpha = ۶۱۵۰^\circ$ را تعیین کنید.

$$۶۱۵۰ \div ۹۰ = ۶۸ \text{ (باقیمانده } ۳۰)$$

$$\Rightarrow ۶۱۵۰ = ۶۸ \times ۹۰ + ۳۰ \Rightarrow \alpha = ۶۸\frac{\pi}{۲} + ۳۰^\circ = ۳۴\pi + ۳۰^\circ \quad \text{ناحیه‌ی اول}$$

$$\sin\alpha = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \ , \ \cos\alpha = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \ , \ \tan\alpha = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \ , \ \cot\alpha = \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$$

تمرین ۲: جاهای خالی را برحسب نسبت مثلثاتی x، پر کنید.

الف) $\sin(\pi - x) = \sin x$ ب) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

پ) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ ت) $\cot(\pi - x) = -\cot x$

ث) $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ج) $\cos(\pi + x) = -\cos x$

چ) $\tan(\pi + x) = \tan x$ ح) $\cot(\pi + x) = \cot x$

خ) $\sin(-x) = -\sin x$ د) $\cos(-x) = \cos x$

ذ) $\tan(-x) = -\tan x$ ر) $\cot(-x) = -\cot x$

تمرین ۳: حاصل هریک از عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\cos ۳۰۰^\circ \xrightarrow{۲\pi - ۶۰^\circ \ \text{ناحیه چهارم}} = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

ب) $\sin ۴۲۰^\circ \xrightarrow{۲\pi + ۶۰^\circ \ \text{ناحیه اول}} = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پ) $\tan(-۲۲۵^\circ) \xrightarrow{-\pi - ۴۵^\circ \ \text{ناحیه دوم}} = -\tan ۴۵^\circ = -۱$

ت) $\cot(-۳۳۰^\circ) \xrightarrow{-۲\pi + ۳۰^\circ \ \text{ناحیه‌ی اول}} = \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$

ث) $\sin \frac{۱۱\pi}{۴} \xrightarrow{۳\pi - \frac{\pi}{۴} \ \text{ناحیه دوم}} = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ج) $\cos\left(\frac{-۷\pi}{۴}\right) \xrightarrow{-۲\pi + \frac{\pi}{۴} \ \text{ناحیه اول}} = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

تمرین ۴: عبارت روبرو را ساده کنید.

$$\cos\frac{\pi}{۷} + \cos\frac{۲\pi}{۷} + \cos\frac{۳\pi}{۷} + \cos\frac{۴\pi}{۷} + \cos\frac{۵\pi}{۷} + \cos\frac{۶\pi}{۷}$$

$$\cos\frac{۴\pi}{۷} = \cos\left(\pi - \frac{۳\pi}{۷}\right) = -\cos\frac{۳\pi}{۷} \ , \ \cos\frac{۵\pi}{۷} = \cos\left(\pi - \frac{۲\pi}{۷}\right) = -\cos\frac{۲\pi}{۷} \ , \ \cos\frac{۶\pi}{۷} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{۷}\right) = -\cos\frac{\pi}{۷}$$

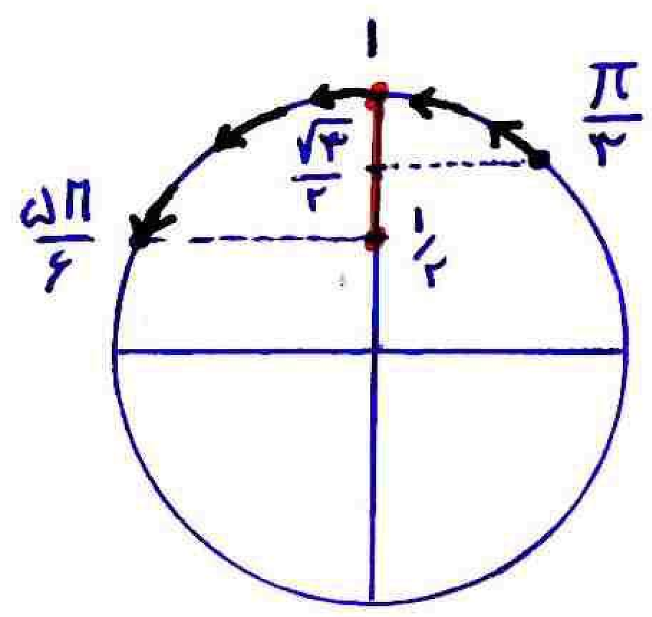
$$\Rightarrow \text{عبارت} = \cos\frac{\pi}{۷} + \cos\frac{۲\pi}{۷} + \cos\frac{۳\pi}{۷} - \cos\frac{۳\pi}{۷} - \cos\frac{۲\pi}{۷} - \cos\frac{\pi}{۷} = ۰$$

تمرین ۵ : در مثلث ABC، با فرض $A=120^\circ$ نشان دهید $\tan 3B+\tan 3C=0$.

$$A=120^\circ \xrightarrow{A+B+C=180^\circ} B+C=60^\circ \xrightarrow{\times 3} 3B+3C=180^\circ \Rightarrow 3B=\pi-3C$$

$$\Rightarrow \tan 3B=\tan(\pi-3C) \Rightarrow \tan 3B=-\tan 3C \Rightarrow \tan 3B+\tan 3C=0$$

تمرین ۶ : اگر $\frac{\pi}{9}\leq\alpha\leq\frac{5\pi}{18}$ ، آنگاه $\sin 3\alpha$ در چه محدوده‌ای واقع است ؟



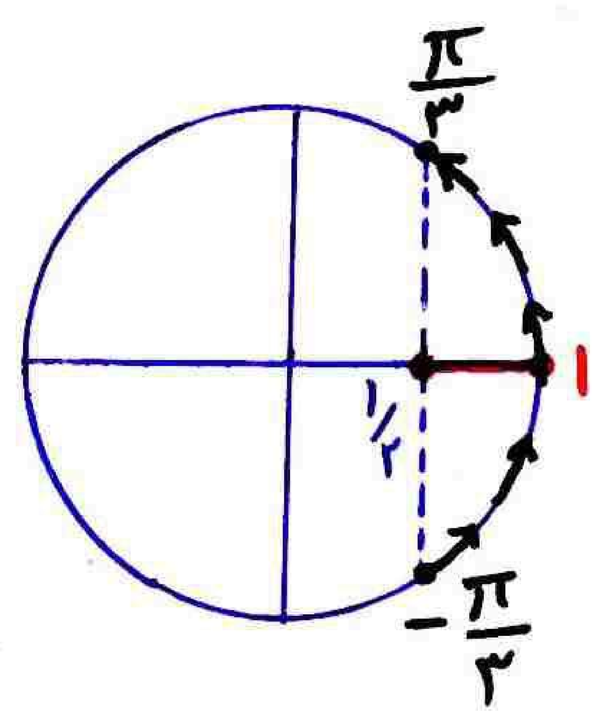
$$\frac{\pi}{3}\leq 3\alpha\leq\frac{5\pi}{6} \xleftarrow{\times 3}$$

می‌دانیم $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

حال با توجه به دایره مثلثاتی در شکل روبرو، مقدار $\sin 3\alpha$ از $\frac{1}{2}$ تا ۱ تغییر می‌کند

به عبارت دیگر $\frac{1}{2}\leq\sin 3\alpha\leq 1$

تمرین ۷ : اگر $-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{3}$ ، حدود تغییرات m را چنان بیابید که $\cos\theta=\frac{m-1}{2}$ باشد.



می‌دانیم $\cos(-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ و با توجه به دایره مثلثاتی در شکل روبرو، با تغییر θ از $-\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{\pi}{3}$ ، $\cos\theta$ بین $\frac{1}{2}$ تا ۱ تغییر می‌کند.

بنابراین :

$$\frac{1}{2}<\cos\theta\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{m-1}{2}\leq 1 \xrightarrow{\times 2} 1<m-1\leq 2 \xrightarrow{+1} 2<m\leq 3$$

تمرین ۸ : با فرض $f(x)=2\cos x+x\sin x$ ، نشان دهید $f(-x)=f(x)$.

$$f(-x)=2\cos(-x)+(-x)\sin(-x)=2\cos x+(-x)(-\sin x)=2\cos x+x\sin x=f(x)$$

تمرین ۹ : حاصل عبارت زیر را بدست آورید .

$$\frac{\overbrace{\sin\frac{3\pi}{4}}^{\sin(\pi-\frac{\pi}{4})}-\overbrace{\cos\frac{5\pi}{6}}^{\cos(\pi-\frac{\pi}{6})}}{\underbrace{\sin(-\frac{3\pi}{4})}_{\sin(-\pi+\frac{\pi}{4})}+\underbrace{\tan(-\frac{4\pi}{3})}_{\tan(-\pi-\frac{\pi}{3})}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}-(-\cos\frac{\pi}{6})}{-\sin\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

@sinxcosx ملاسعیدی
09168324500

تعیین نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{2}$فرد $\pm\theta$:

ابتدا با تعیین ناحیه، علامت نسبت مثلثاتی را مشخص می کنیم، سپس با تغییر نسبت مثلثاتی برای θ ، مقدار آن را تعیین می کنیم، تغییر نسبت مثلثاتی به صورت زیر است :

$$\sin \rightleftharpoons \cos \quad , \quad \tan \rightleftharpoons \cot$$

مثال: $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) \xrightarrow{\frac{\pi}{2}+\theta \text{ در ناحیه ی دوم بوده و سینوس در این ناحیه مثبت است}} = +\cos\theta$

مثال: $\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta) \xrightarrow{\frac{3\pi}{2}-\theta=\pi+\frac{\pi}{2}-\theta \text{ در ناحیه ی سوم بوده و کسینوس در این ناحیه منفی است}} = -\sin\theta$

مثال: $\tan(\frac{-17\pi}{2}+\theta) \xrightarrow{-\frac{17\pi}{2}+\theta=-8\pi-\frac{\pi}{2}+\theta \text{ در ناحیه ی چهارم بوده و تانژانت در این ناحیه منفی است}} = -\cot\theta$

مثال: $\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) \xrightarrow{\frac{\pi}{2}-\theta \text{ در ناحیه ی اول بوده و کتانژانت در این ناحیه مثبت است}} = +\tan\theta$

مثال : نسبت های مثلثاتی زاویه ی $\alpha=6060^\circ$ را تعیین کنید.

$6060 \div 90$: خارج قسمت 67، باقیمانده 30

$\Rightarrow \alpha = 67\times 90 + 30 \Rightarrow \alpha = 67\frac{\pi}{2}+30^\circ = 32\pi+\frac{\pi}{2}+30^\circ \longrightarrow$ ناحیه چهارم

$\sin\alpha = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos\alpha = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan\alpha = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$ ، $\cot\alpha = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال : جاهای خالی را بر حسب نسبت مثلثاتی x پر کنید.

الف) $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ ب) $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$

پ) $\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\cot x$ ت) $\cot(\frac{\pi}{2}-x)=\tan x$

ث) $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$ ج) $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$

چ) $\tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x$ ح) $\cot(\frac{\pi}{2}+x)=-\tan x$

نتیجه مهم : اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند، آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به طور مثال دو زاویه ی $\frac{\pi}{10}$ و $\frac{2\pi}{5}$ متمم یکدیگرند زیرا مجموع آنها $\frac{\pi}{2}$ است، بنابراین :

$\sin\frac{2\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{10}$ ، $\tan\frac{2\pi}{5}=\cot\frac{\pi}{10}$ ، $\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}$

مثال : عبارات زیر را ساده کنید

الف)
$$A=\frac{2\overbrace{\cos\frac{-2\pi}{5}}^{\cos\frac{2\pi}{5}\,\to\,\sin\frac{\pi}{10}}-\overbrace{\sin\frac{-\pi}{10}}^{-\sin\frac{\pi}{10}}}{3\sin\frac{\pi}{10}-\underbrace{\cos\frac{2\pi}{5}}_{\sin\frac{\pi}{10}}}\Longrightarrow A=\frac{2\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{10}}{3\sin\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{3\sin\frac{\pi}{10}}{2\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{3}{2}$$

ب)
$$\tan 23^\circ\times\tan 40^\circ\times\underbrace{\tan 50^\circ}_{\cot 40^\circ}\times\underbrace{\tan 67^\circ}_{\cot 23^\circ}=\underbrace{(\tan 23^\circ\times\cot 23^\circ)}_{1}\times\underbrace{(\tan 40^\circ\times\cot 40^\circ)}_{1}=1$$

پ)
$$\cos 80^\circ\times\frac{\sin 80^\circ+\cos 10^\circ}{\cos 80^\circ+\sin 10^\circ}=\sin 10^\circ\times\frac{\cos 10^\circ+\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ+\sin 10^\circ}=\cancel{\sin 10^\circ}\times\frac{\cancel{2}\cos 10^\circ}{\cancel{2\sin 10^\circ}}=\cos 10^\circ$$

مثال : زاویه‌ی حاده‌ی x را چنان بیابید که $\sin x=\cos(20^\circ+x)$ باشد.

با به حاده بودن x و تساوی داده شده، نتیجه می‌شود x و $20^\circ+x$ متمم یکدیگرند، پس :

$$x+(20^\circ+x)=90^\circ\Longrightarrow 2x=70^\circ\longrightarrow x=35^\circ$$

مثال : عبارت زیر را ساده کنید.

$$A=\frac{\overbrace{\cot(\theta-10\pi)}^{\text{ناحیه اول}\,\to\,\cot\theta}+\overbrace{\tan(\theta+\frac{9\pi}{2})}^{4\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه دوم}\,\to\,-\cot\theta}+3\overbrace{\cos(\theta-\frac{11\pi}{2})}^{-5\pi-\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه‌ی دوم}\,\to\,-\sin\theta}-\overbrace{\sin(\theta-5\pi)}^{\text{ناحیه‌ی سوم}\,\to\,-\sin\theta}}{\underbrace{\cot(\theta-\frac{5\pi}{2})}_{-2\pi-\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه‌ی چهارم}\,\to\,-\tan\theta}+\underbrace{\tan(\theta-9\pi)}_{\text{ناحیه‌ی سوم}\,\to\,\tan\theta}+3\underbrace{\cos(\theta-8\pi)}_{\text{ناحیه‌ی اول}\,\to\,\cos\theta}+\underbrace{\sin(\theta+\frac{7\pi}{2})}_{3\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه‌ی چهارم}\,\to\,-\cos\theta}}\times\overbrace{\sin(\theta+\frac{3\pi}{2})}^{\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\ \text{ناحیه‌ی چهارم}\,\to\,-\cos\theta}$$

$$\Longrightarrow A=\frac{\cancel{\cot\theta}-\cancel{\cot\theta}-3\sin\theta+\sin\theta}{\cancel{-\tan\theta}+\cancel{\tan\theta}+3\cos\theta-\cos\theta}\times(-\cos\theta)=\frac{-2\sin\theta}{2\cancel{\cos\theta}}\times(-\cancel{\cos\theta})=\sin\theta$$

یادآوری روابط بین نسبت های مثلثاتی :

در سال گذشته با روابطی بین نسبت های مثلثاتی آشنا شدیم ، بنا به اهمیت زیاد آنها ، یادآوری می شوند:

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \longrightarrow \sin^2\theta=1-\cos^2\theta \quad , \quad \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

(2) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \tan\theta.\cot\theta=1 \quad , \quad \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta} \quad , \quad \tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$

(3) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta} \quad , \quad 1+\cot^2\theta=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

مثال : ثابت کنید: $\sin^2(\frac{5\pi}{2}+x)+\sin^2(x-3\pi)=1$

$\sin(\frac{5\pi}{2}+x)=\sin(2\pi+\frac{\pi}{2}+x)=\cos x \quad , \quad \sin(x-3\pi)=-\sin x$

$\Rightarrow$ چپ عبارت $=\cos^2 x+(-\sin x)^2=\cos^2 x+\sin^2 x=1$

مثال : اگر $\cos x=\frac{-4}{5}$ و $\sin x>0$ ، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه ی x را بنویسید.

$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \Rightarrow \sin x=\pm\frac{3}{5} \xrightarrow{\sin x>0} \sin x=\frac{3}{5}$

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4} \quad , \quad \cot x=\dfrac{1}{\tan x}=-\frac{4}{3}$

مثال : با فرض $\cot(\frac{7\pi}{2}-\alpha)=\frac{3}{4}$ و اینکه α زاویه ی حاده است ، مقدار $\sin(8\pi-\alpha)$ را بدست آورید.

$\cot(\frac{7\pi}{2}-\alpha)=\cot(3\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{3}{4}$

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$

$\sin(8\pi-\alpha)=-\sin\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$

تمرین ۱ : مقدار عددی $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$ را بدست آورید.

می دانیم $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ یعنی $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{3\pi}{8}$ متمم یکدیگرند پس $\cos\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}$.

$\Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$

تمرین ۲ : تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید : $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$

$$f(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$$

$$\Longrightarrow f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}+\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}=1$$

ب) حاصل عبارت $A=f(10^\circ)+f(20^\circ)+f(30^\circ)+f(40^\circ)+f(50^\circ)+f(60^\circ)+f(70^\circ)+f(80^\circ)$ را بدست آورید.

طبق تساوی قسمت الف، مجموع مقدار هر زاویه با مقدار متمم آن در تابع f برابر ۱ است بنابراین :

10° و 80° متمم اند $\Rightarrow f(10^\circ)+f(80^\circ)=1$

20° و 70° متمم اند $\Rightarrow f(20^\circ)+f(70^\circ)=1$

30°، 60° متمم اند $\Rightarrow f(30^\circ)+f(60^\circ)=1$

40°، 50° متمم اند $\Rightarrow f(40^\circ)+f(50^\circ)=1$

$$\Longrightarrow A=1+1+1+1=4$$

تمرین ۳ : اگر $\tan\theta=0.2$ باشد، مقدار $\dfrac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ را حساب کنید.

$\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\cos(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$ و $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ و $\sin(3\pi+\theta)=-\sin\theta$

$$\Rightarrow \text{کسر}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cot\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{10}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$$

تمرین ۴ : اگر $\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$ باشد، مقدار $\tan(\theta+\frac{11\pi}{6})$ را بدست آورید.

$$\tan(\theta+\frac{11\pi}{6})=\tan(\theta+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}+\frac{11\pi}{6})=\tan(\theta+\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2})=\tan((\theta+\frac{\pi}{3})+\pi+\frac{\pi}{2})=-\cot(\theta+\frac{\pi}{3})$$

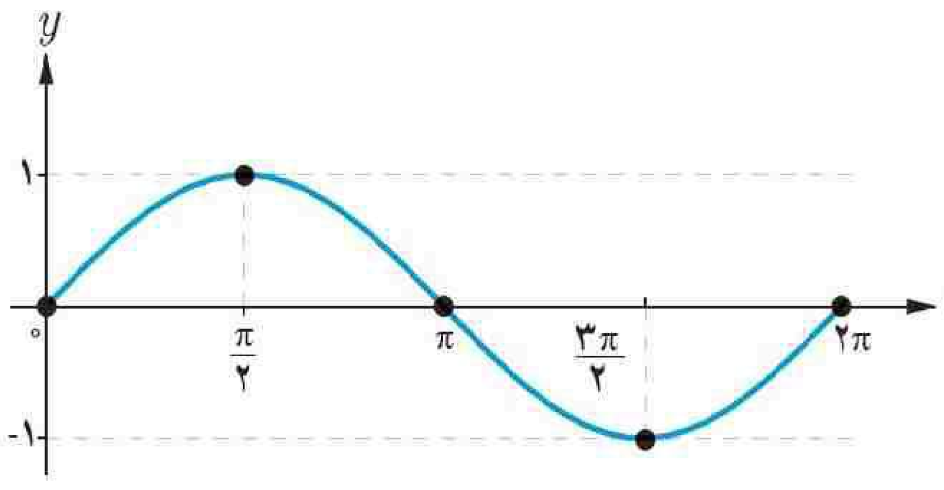
از طرفی می دانیم $1+\cot^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ بنابراین :

$$1+\cot^2(\theta+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{1/9}=9\Longrightarrow \cot^2(\theta+\frac{\pi}{3})=8\Rightarrow \cot(\theta+\frac{\pi}{3})=\pm2\sqrt{2}$$

بنابراین نتیجه می شود : $\tan(\theta+\frac{11\pi}{6})=\mp2\sqrt{2}$

رسم نمودار تابع $y=\sin x$:

نمودار این تابع به صورت



می باشد.

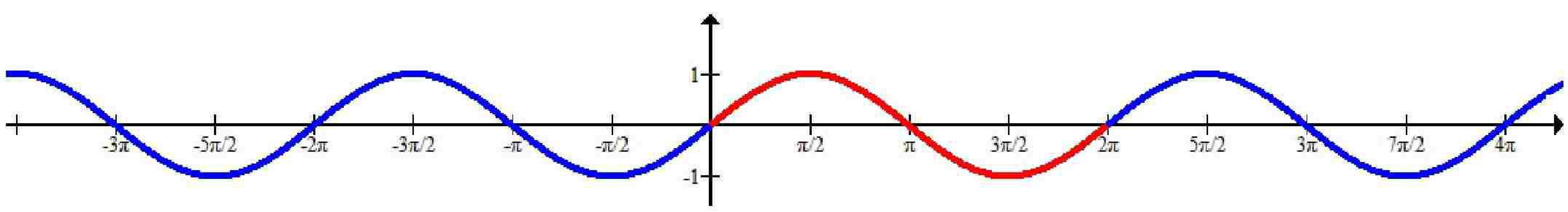
برای رسم آن کافیست مطابق جدول مقادیر

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0

، پنج نقطه مهم را شناسایی کرده و سعی کنیم نمودار را همچون شکل فوق رسم کنیم.

نکات مهم :

$\boxed{1}$ نمودار فوق در بازه $[0,2\pi]$ رسم شده و در بازه‌ی $[2\pi,4\pi]$ و $[4\pi,6\pi]$ و $[6\pi,8\pi]$ و ... همچنین بازه های $[-2\pi,0]$ و $[-4\pi,-2\pi]$ و $[-6\pi,-4\pi]$ و ... ، همین شکل دقیقاً تکرار می شود.



$\boxed{2}$ دامنه و بُرد تابع $f(x)=\sin x$ به صورت $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=[-1,1]$ است.

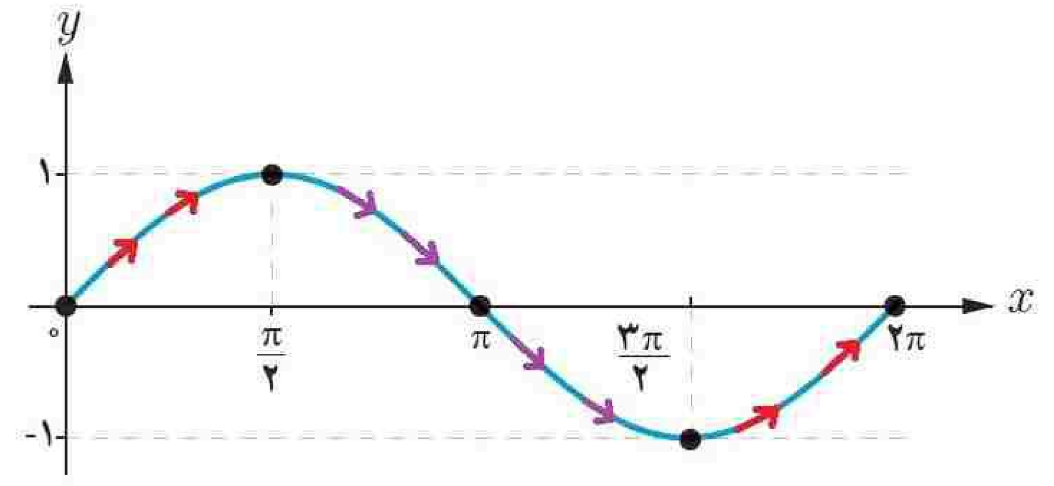
مثال: بُرد تابع $f(x)=2\sin x-1$ را تعیین کنید.

$$-1\le \sin x\le 1 \xrightarrow{\times 2} -2\le 2\sin x\le 2 \xrightarrow{-1} -3\le 2\sin x-1\le 1 \Rightarrow R_f=[-3,1]$$

$\boxed{3}$ حداکثر مقدار تابع $f(x)=\sin x$ برابر 1 است که در نقاطی به طول های $x=\frac{\pi}{2}$ ، $x=\frac{5\pi}{2}$ ، $x=\frac{9\pi}{2}$ و ... و همچنین نقاطی به طول‌های $x=-\frac{3\pi}{2}$ و $x=-\frac{7\pi}{2}$ و ... به دست می آید. در حالت کلی می توان گفت، حداکثر مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ که در آن $k\in\mathbb{Z}$ است، رخ می دهد.

$\boxed{4}$ حداقل مقدار تابع $f(x)=\sin x$ برابر -1 است که در نقاطی به طول های $x=\frac{3\pi}{2}$ ، $x=\frac{7\pi}{2}$ و ... و همچنین نقاطی به طول‌های $x=-\frac{\pi}{2}$ ، $x=-\frac{5\pi}{2}$ و ... (یعنی در حالت کلی $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ ، $k\in\mathbb{Z}$) به دست می آید.

$\boxed{5}$ مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول‌های $x=0$ ، $x=\pm\pi$ ، $x=\pm 2\pi$ و ... (در حالت کلی $x=k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$) صفر است.



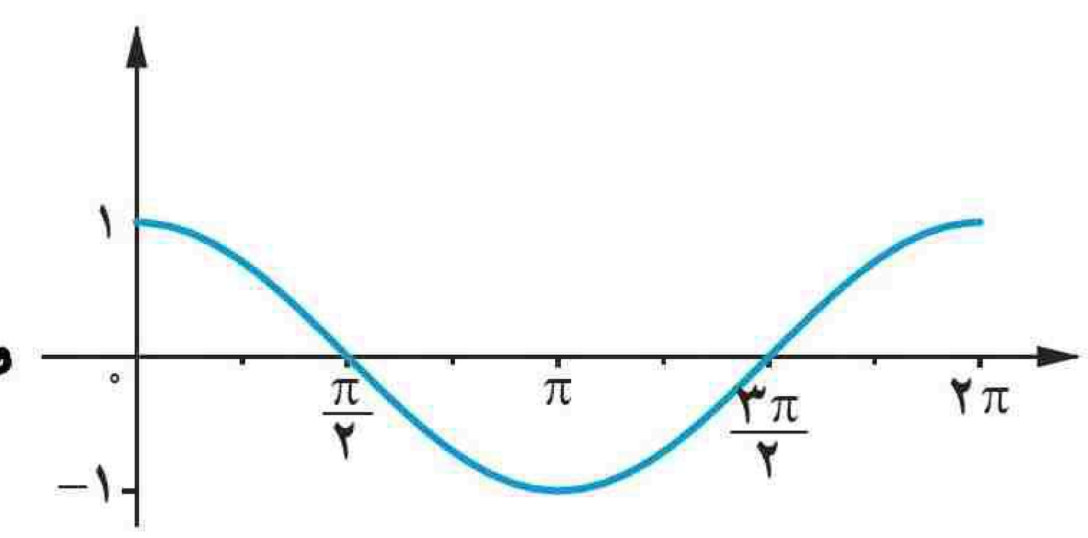
۶) مطابق با نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در می‌یابیم که مقدار تابع در بازه‌های $[0, \frac{\pi}{2}]$ و $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ (نواحی اول و چهارم دایره مثلثاتی) افزایش می‌یابد، اصطلاحاً گوییم تابع صعودی است.

همچنین در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (نواحی دوم و چهارم دایره مثلثاتی) کاهش می‌یابد، در اصطلاح گوییم تابع نزولی است.

۷) مطابق با نمودار تابع سینوس در شکل فوق، مقدار تابع در بازه‌های $(0, \frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ یعنی نواحی اول و دوم دایره مثلثاتی مثبت است زیرا نمودار بالای محور x ها رسم شده و در نواحی سوم و چهارم دایره مثلثاتی یعنی بازه‌های $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ منفی است زیرا نمودار زیر محور x ها رسم شده است.

رسم نمودار تابع $y=\cos x$:

نمودار این تابع به صورت



می‌باشد.

برای رسم آن کافیست مطابق جدول مقادیر

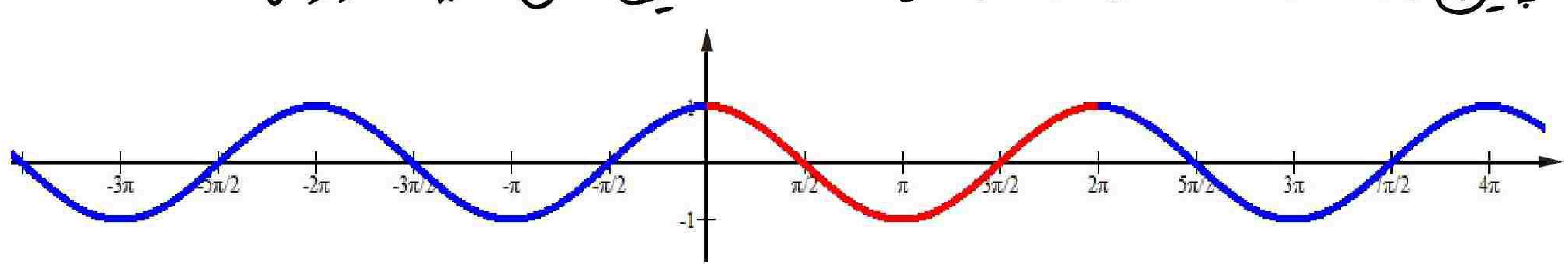
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1

، پنج نقطه مهم را شناسایی کرده و نمودار را تا حد امکان مشابه نمودار فوق رسم کنیم.

نکات مهم :

۱) نمودار فوق در بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده و در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ و $[4\pi, 6\pi]$ و ...

همچنین بازه‌های $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ و ... همین شکل دقیقاً تکرار می‌شود.



ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۲) دامنه و بُرد تابع کسینوس به صورت $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=[-1,1]$ است.

مثال: بُرد تابع $f(x)=\frac{3+\cos x}{2}$ را تعیین کنید.

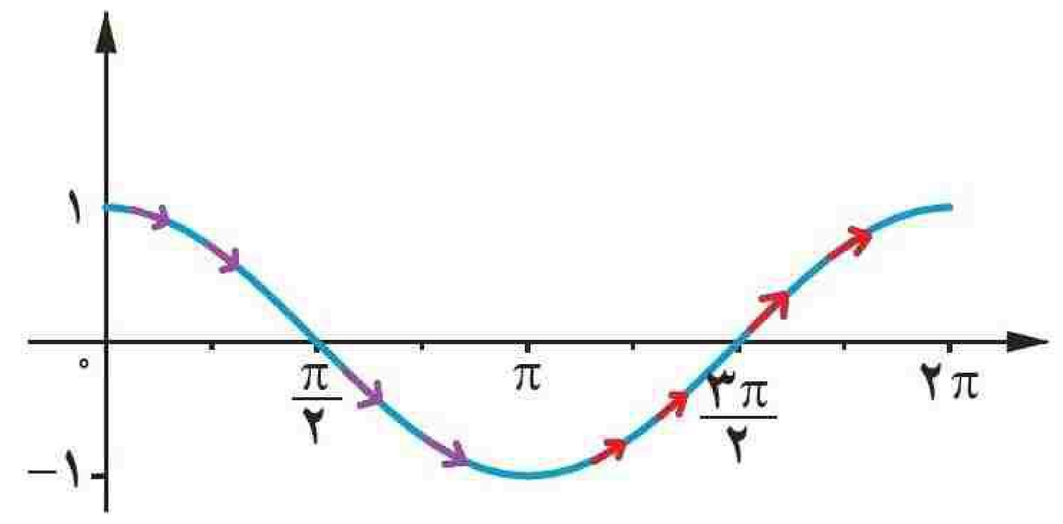
$$-1\leq \cos x\leq 1 \xrightarrow{+3} 2\leq 3+\cos x\leq 4 \xrightarrow{\div 2} 1\leq \frac{3+\cos x}{2}\leq 2 \Rightarrow R_f=[1,2]$$

۳) حداکثر مقدار تابع $f(x)=\cos x$ برابر 1 بوده که در نقاط به طول های $x=0$ ، $x=\pm 2\pi$ ، $x=\pm 4\pi$ و ... یعنی $x=2k\pi$ و $k\in\mathbb{Z}$ بدست می آید. ($x=$ زوج π)

۴) حداقل مقدار تابع $f(x)=\cos x$ برابر -1 بوده که در نقاط به طول های $x=\pm\pi$ ، $x=\pm 3\pi$ و ... یعنی $x=2k\pi+\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$ بدست می آید. ($x=$ فرد π)

۵) مقدار تابع کسینوس در نقاط به طولهای $x=\pm\frac{\pi}{2}$ ، $x=\pm\frac{3\pi}{2}$ و ... یعنی $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، $k\in\mathbb{Z}$ برابر صفر است.

به عبارت ساده تر در $x=\frac{\pi \text{ فرد}}{2}$ مقدار تابع صفر است.



۶) مطابق با نمودار تابع $f(x)=\cos x$ در بازه $[0,2\pi]$ در می یابیم که مقدار تابع در بازه $[0,\pi]$ (نواحی اول و دوم) کاهش می یابد، در اصطلاح تابع نزولی است، ولی در بازه $[\pi,2\pi]$ یعنی نواحی سوم و چهارم دایره مثلثاتی مقدار تابع رو به افزایش است یعنی تابع صعودی است.

۷) مطابق با نمودار فوق، تابع کسینوس در نواحی اول و چهارم دایره مثلثاتی یعنی بازه های $(0,\frac{\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ ، مقدار مثبت دارد زیرا نمودار در این فواصل بالای محور طولهاست.

ولی در بازه های $(\frac{\pi}{2},\pi)$ و $(\pi,\frac{3\pi}{2})$ یعنی نواحی دوم و سوم، مقدار تابع منفی است زیرا نمودار زیر محور طولها واقع است.

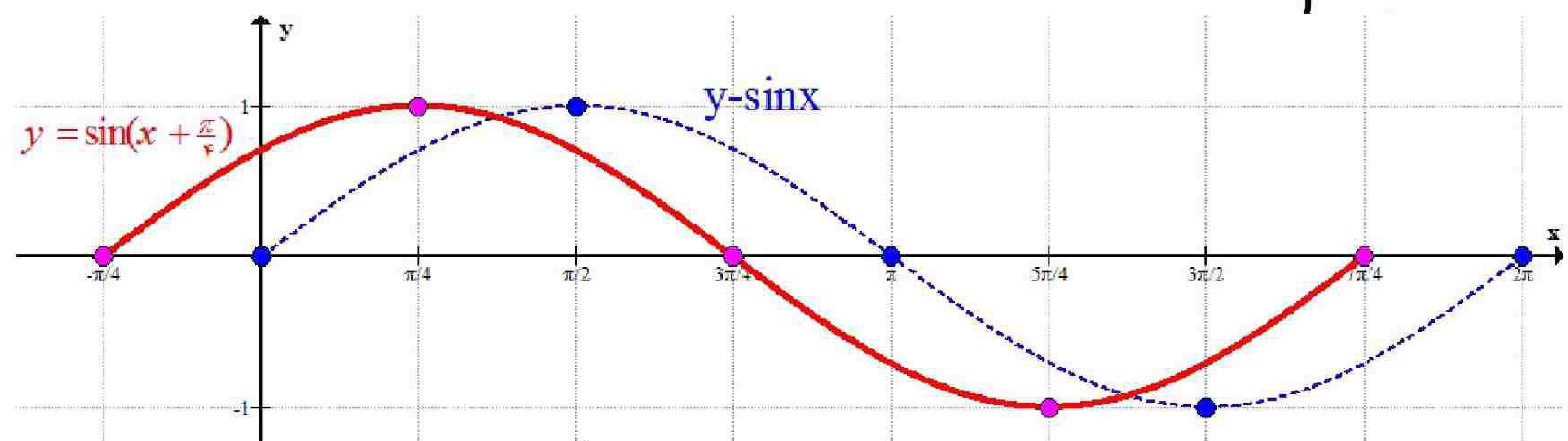
رسم نمودار همراه با اعمال درونی (لجبازی):

فرض کنید با وجود نمودار تابع $y=\sin x$ می‌خواهیم نمودار توابعی همچون $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ ، $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ ، $y=\sin 2x$ ، $y=\sin\frac{x}{2}$ و ... را رسم کنیم.

در این نوع توابع، اعمال چهارگانه + ، − ، × و تقسیم روی x صورت گرفته است و به اصطلاح آن را اعمال درونی یا لجبازی گوییم. اما چرا لجبازی؟!

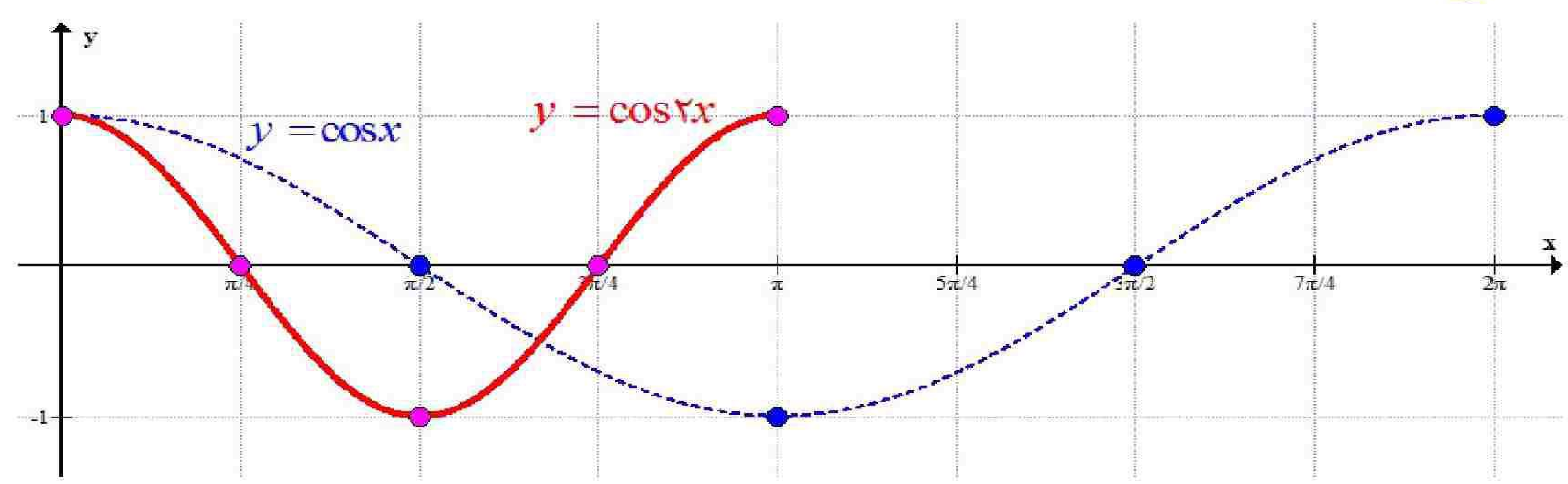
برای رسم این نوع توابع باید عکس عمل خواسته شده را روی نمودار نسبت به x های آن انجام داد

به طور مثال برای رسم $y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$ باید از طول‌های نقاط تابع $y=\sin x$ ، $\frac{\pi}{4}$ کم کرد.



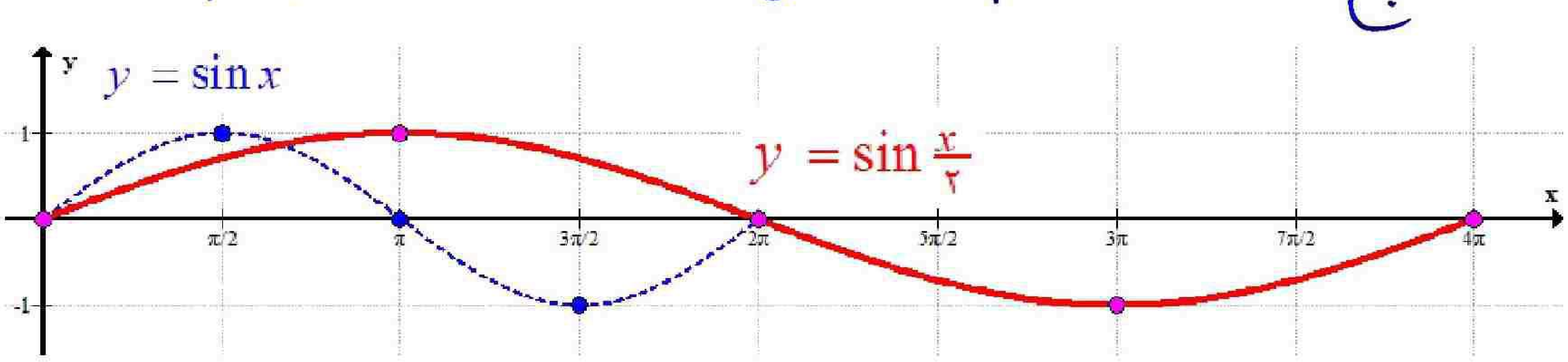
مثال: نمودار تابع $y=\cos 2x$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم کرده، سپس طول نقاط آن را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. (عرض ثابت می‌ماند)



مثال: نمودار تابع $y=\sin(\frac{x}{2})$ را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

کافیست نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم کرده، سپس طول نقاط آن را دو برابر کنیم. (عرض ثابت می‌ماند)

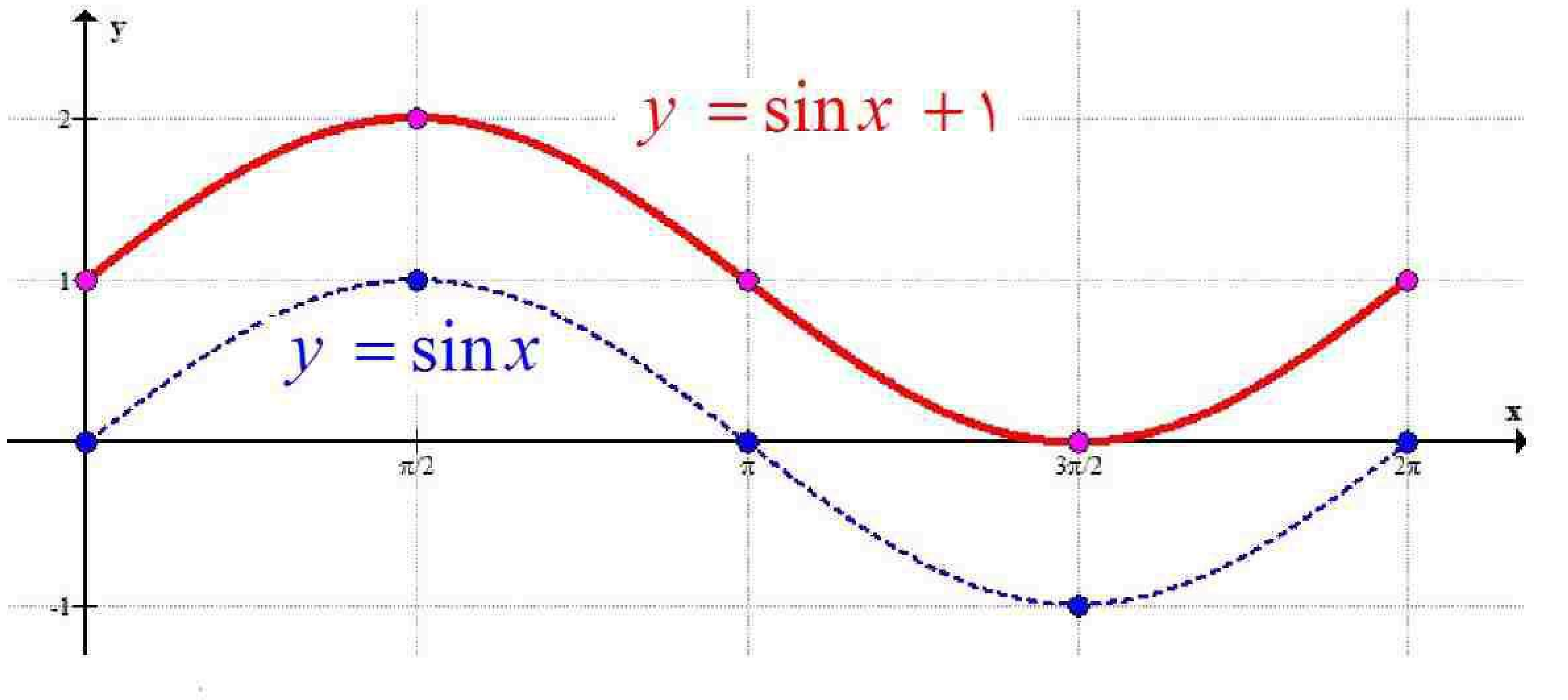


رسم نمودار همراه با اعمال بیرونی (طاعتی) :

با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ می‌خواهیم نمودار توابعی همچون $y = \sin x + 1$ ، $y = \sin x - 1$ ، $y = 2\sin x$ ، $y = \frac{\sin x}{2}$ و ... را رسم کنیم.

در این نوع توابع چهار عمل اصلی روی عرض نمودار $\sin x$ به همان صورت انجام می‌شود، لذا به آن اعمال بیرونی یا طاعتی گوییم.

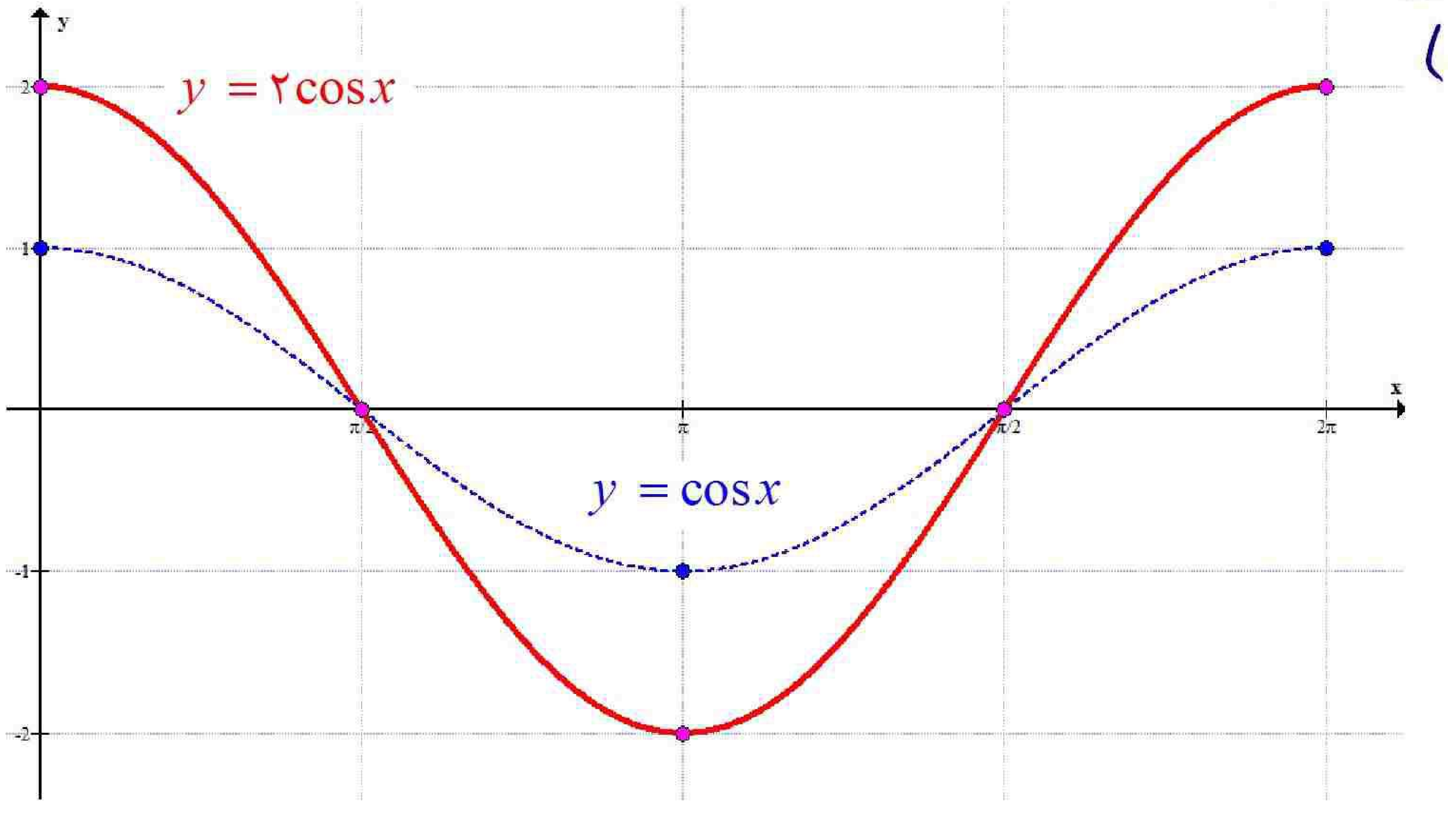
به طور مثال برای رسم تابع $y = \sin x + 1$ ، ابتدا نمودار $y = \sin x$ را رسم کرده سپس به عرض هر کدام از نقاط آن یک واحد اضافه می‌کنیم. (یعنی نمودار یک واحد بالا می‌آید)



مثال : نمودار تابع $y = ۲\cos x$ را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید.

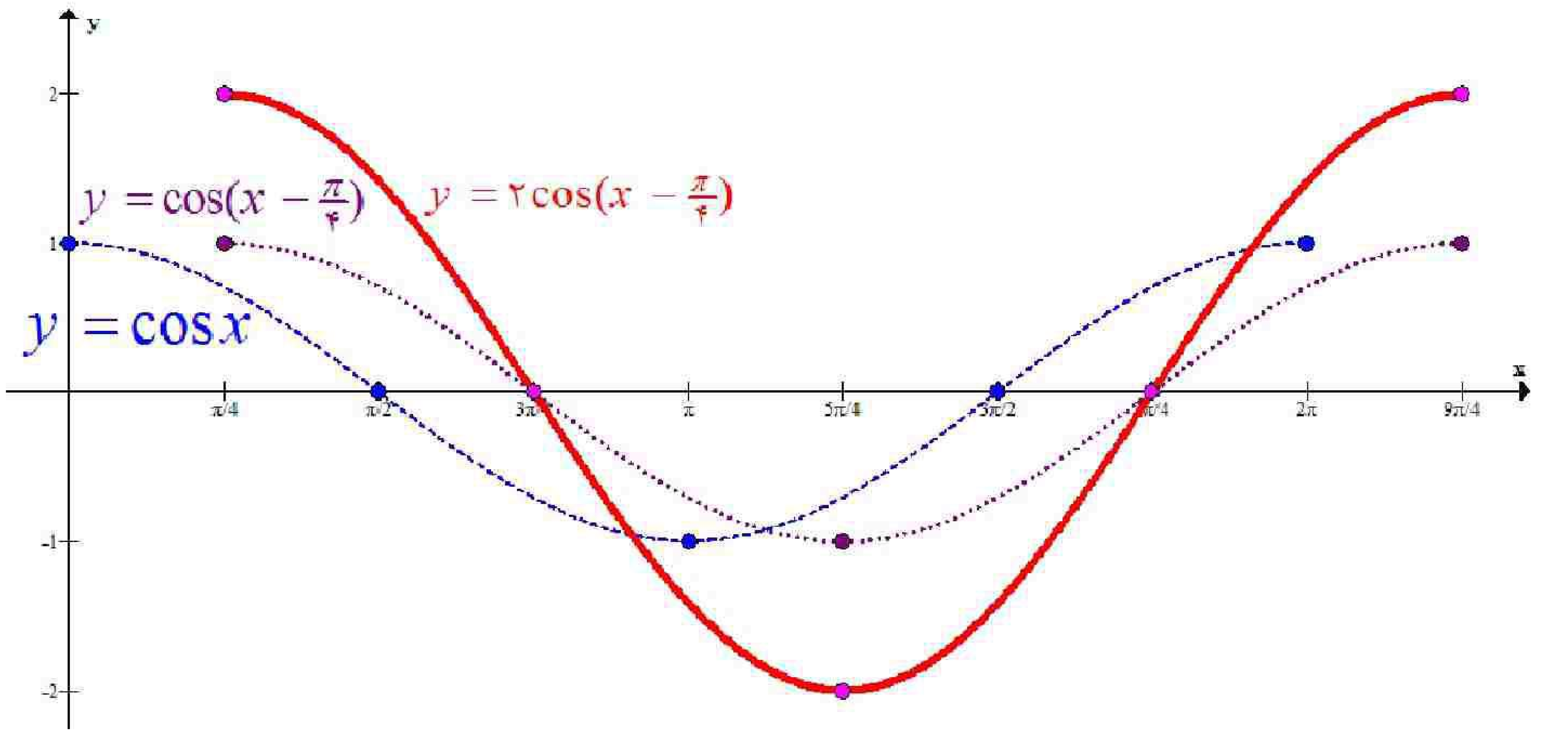
کافیست نمودار تابع $y = \cos x$ را در فاصله‌ی $[۰, ۲\pi]$ رسم کرده سپس عرض نقاط آن را در ۲ ضرب کنیم.

(طول ثابت می‌ماند)



مثال: نمودار تابع $y=2\cos(x-\frac{\pi}{4})$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

ابتدا نمودار تابع $y=\cos x$ را رسم کرده، سپس نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ (عمل درونی) رسم می‌کنیم،
سپس با توجه به نمودار جدید، نمودار $y=2\cos(x-\frac{\pi}{4})$ را طی عمل بیرونی، ضرب در ۲، رسم می‌کنیم.



مثال: آیا نمودارهای هر جفت از توابع زیر، بر هم منطبق اند یا خیر؟

الف) $y=\sin x$, $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})$

می‌دانیم: $\cos(x-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x \Rightarrow$ دو نمودار بر هم منطبق هستند

ب) $y=\cos x$, $y=\sin(\frac{\pi}{2}+x)$

می‌دانیم: $\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x \Rightarrow$ دو نمودار بر هم منطبق هستند

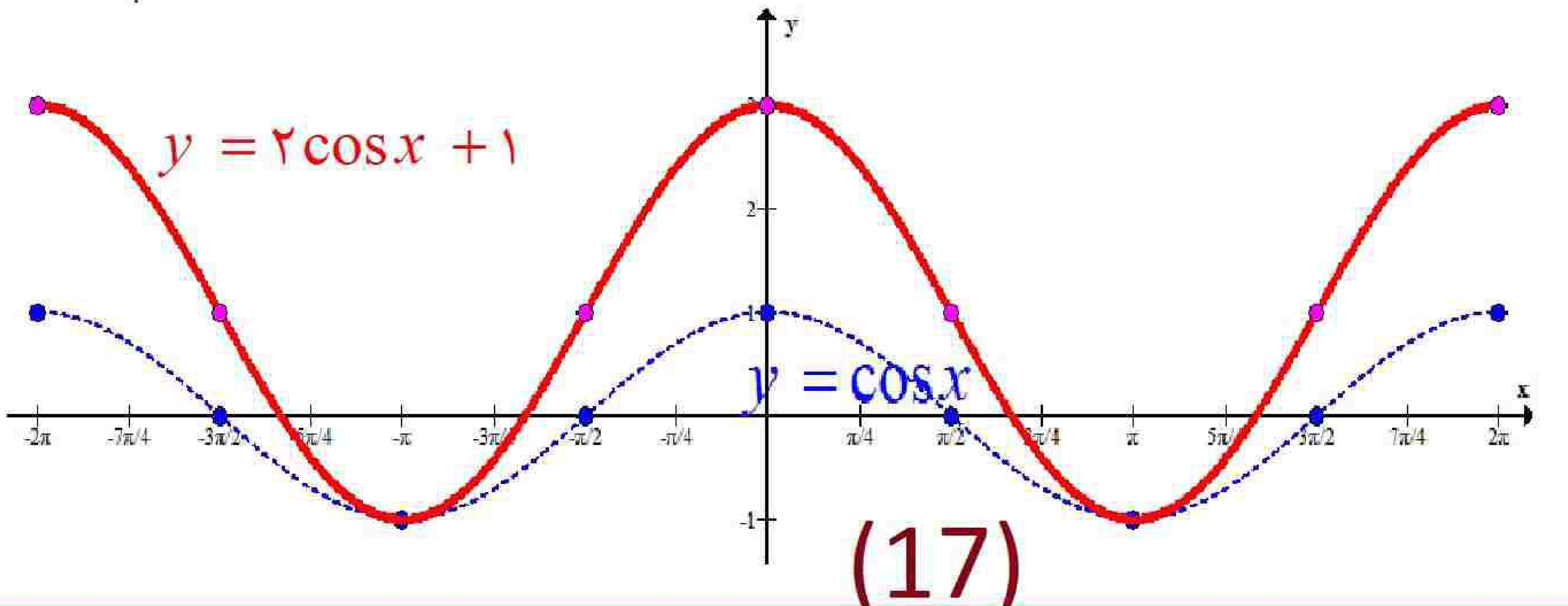
پ) $y=\sin x$, $y=\cos(\frac{\pi}{2}+x)$

می‌دانیم: $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x \Rightarrow$ دو نمودار بر هم منطبق نیستند

مثال: نمودار هر یک از توابع زیر را در بازه‌های داده شده رسم کنید.

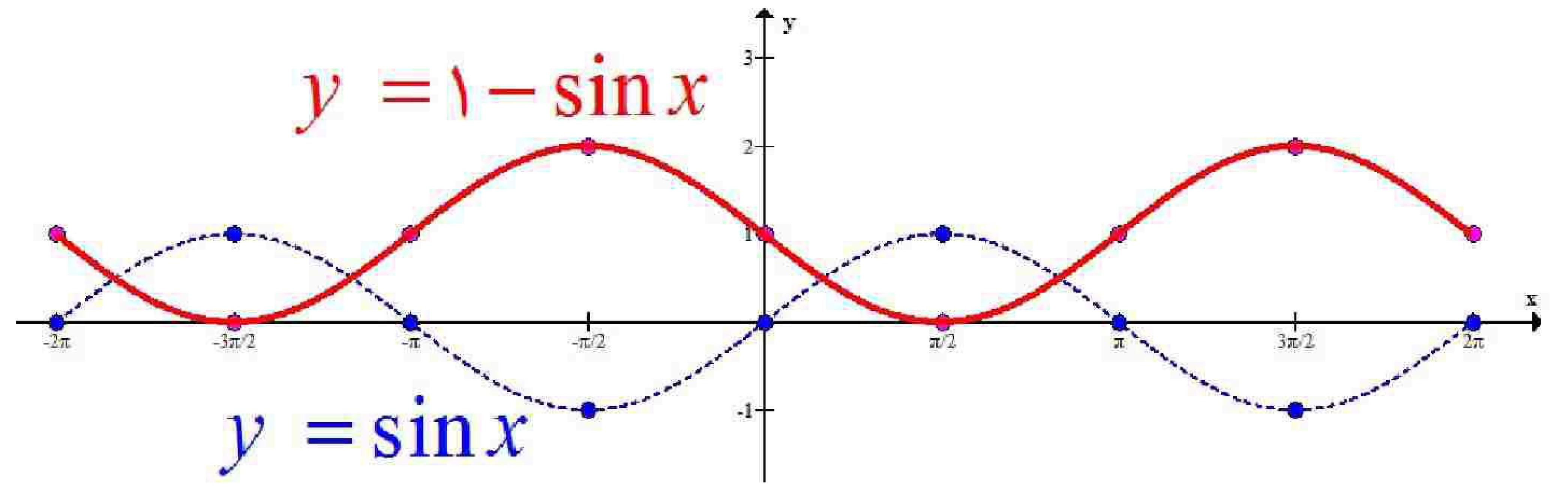
الف) $y=2\cos x+1$, $[-2\pi, 2\pi]$

ابتدا نمودار $y=\cos x$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کرده، سپس اعمال بیرونی (ابتدا ضرب کردن در ۲ و سپس جمع با عدد ۱) را انجام می‌دهیم:



الف) $y = 1 - \sin x$ ، $[-2\pi, 2\pi]$

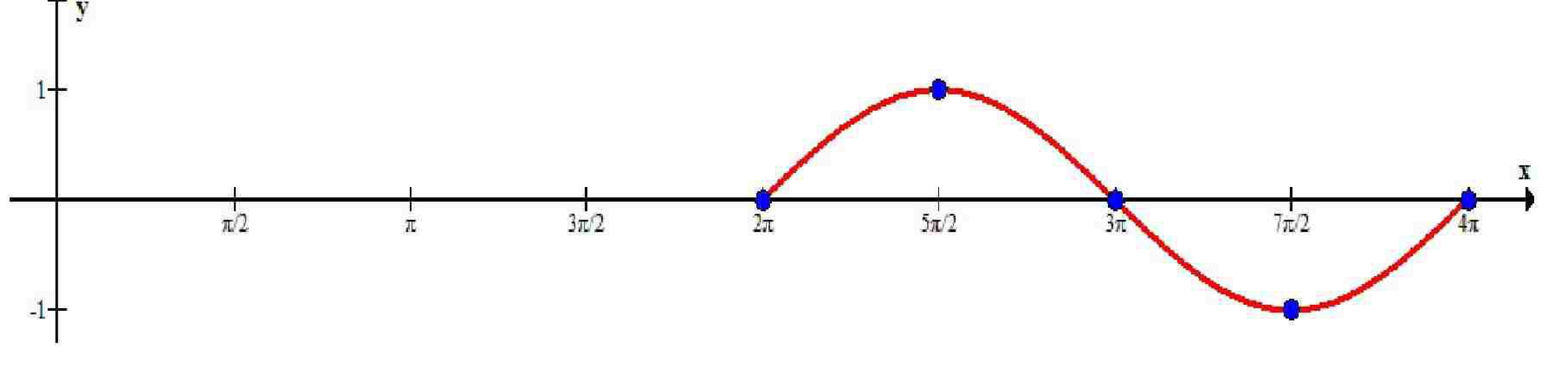
ابتدا نمودار $y = \sin x$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کرده، سپس اعمال بیرونی (ابتدا در -1 ضرب کردن و سپس جمع با عدد 1) را انجام می‌دهیم:



پ) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ ، $[2\pi, 4\pi]$

می‌دانیم: $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

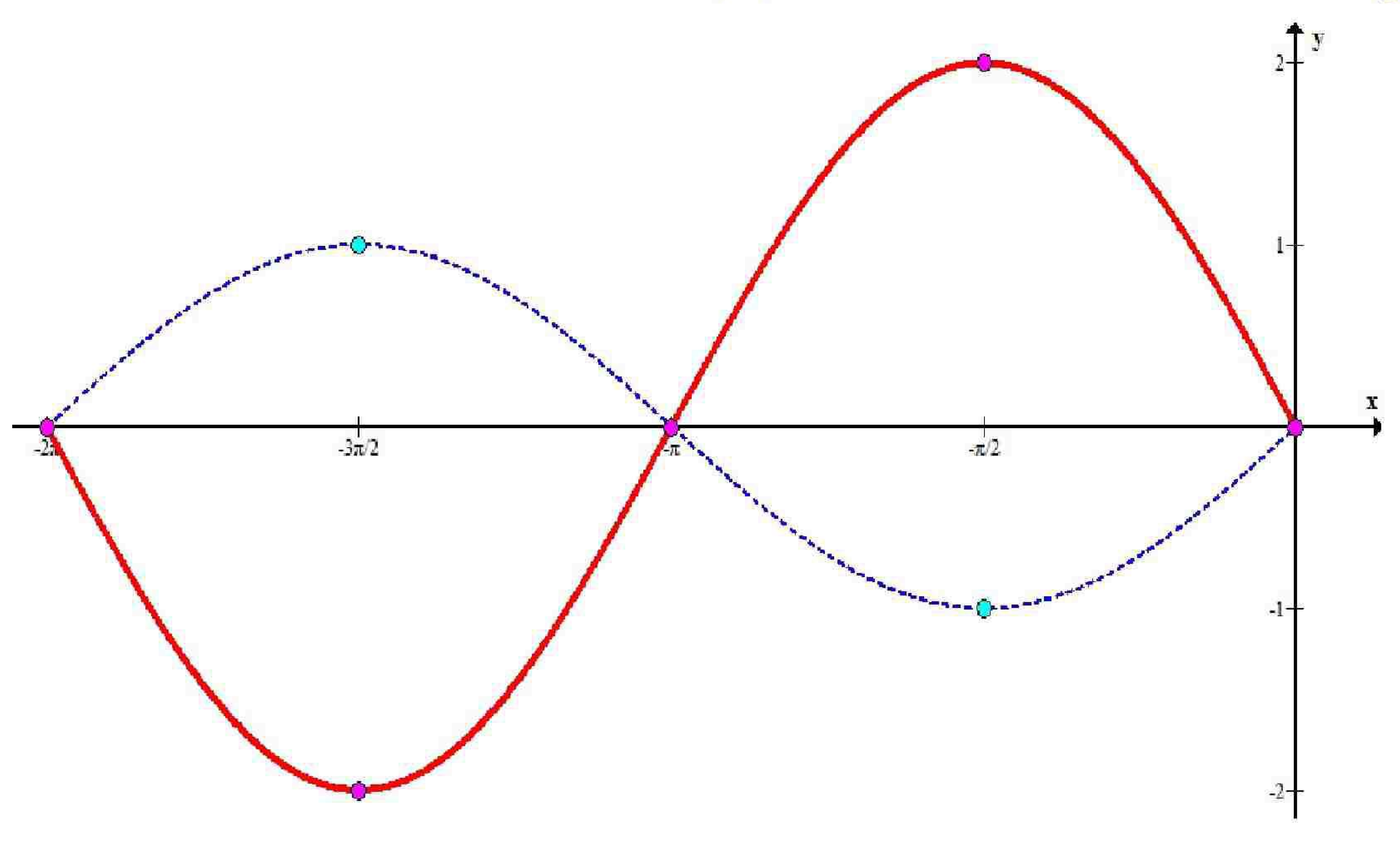
کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را در بازه‌ی $[2\pi, 4\pi]$ رسم کنیم.



ت) $y = 2\sin(5\pi + x)$ ، $[-2\pi, 0]$

می‌دانیم: $\sin(5\pi + x) = -\sin x$

کافیست نمودار تابع $y = -2\sin x$ را در بازه‌ی $[-2\pi, 0]$ رسم کنیم.



ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500