بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

حسابان (۱)

پایه یازدهم ریاضی و فیزیک

فصل ۵

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

m.ghaderi.5165@gmail.com

فصل ۵

درس ۱

مفهوم حد و فرآیندهای حدی

اهداف

- آشنایی با فرایندهای حدی و اصطلاحاتی مانند میل کردن و نزدیک شدن
- درک شهودی حد به کمک جدول مقادیر و رسم نمودار تابع و آشنایی با نماد حد
- درک مفهوم همسایگی (دو طرفه، راست، چپ و محذوف) و نقش آن در وجود حد یک تابع در یک نقطه

به منظور تحلیل یک پدیده، می توان رفتار تابع متناظر با آن پدیده را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار داد.

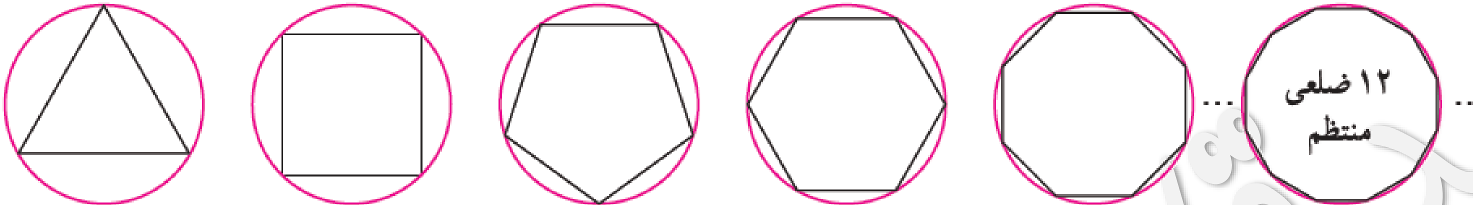
مثال: محاسبهٔ سرعت یک جسم متحرک در یک لحظه،
یافتن شیب خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه از آن،
تعیین مساحت اشکال هندسی و ....

یکی از ابزارهایی که در تحلیل رفتار تابع می توان موثر باشد، حد تابع است.

نتیجه: کاربرد مفهوم حد در ریاضیات: بیان رفتار یک تابع یا دنباله ای از اعداد

فعالیت صفحهٔ ۱۱۴ کتاب درسی

در شکل زیر، شعاع دایره ها، برابر ۱ واحد است.



۱) با افزایش اضلاع چند ضلعی های محاط در دایره، مساحت چند ضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می شود؟ دایره

۲) مساحت دایره ای به شعاع ۱ چقدر است؟ $S = \pi r^۲ = \pi(۱)^۲ = \pi$

۳) اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر ۳/۱۴۱۵۹ در نظر بگیریم و مساحت n ضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای $n \in \mathbb{N}$ برخی نشان می دهد.

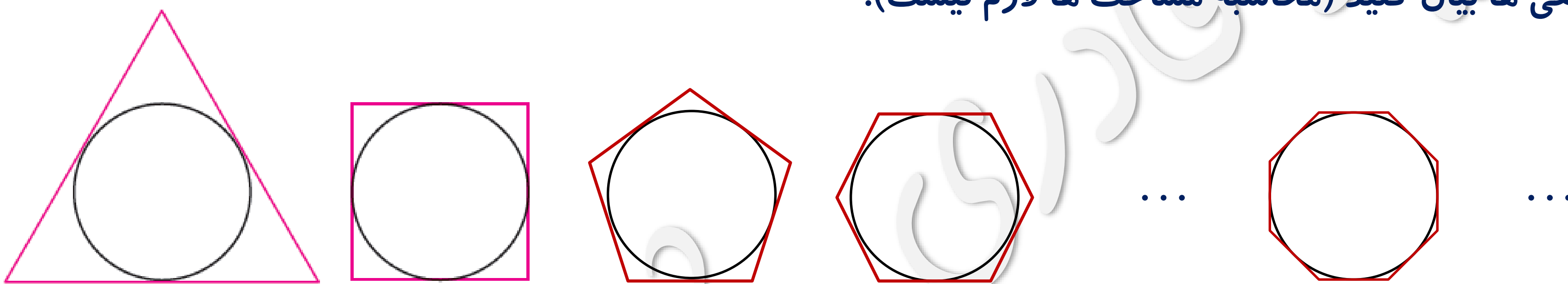
n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴) با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی های داخل دایره زیاد می شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد π که برابر مساحت دایره با شعاع یک واحد است نزدیک می شود.

نتیجه: مساحت چندضلعی های منتظم درون دایره (محاطی) را به هراندازه که بخواهیم، می توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آن که تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

به این نحوهٔ نزدیک شدن؛ نزدیک شدن از چپ می گوییم.

فرض کنید در فعالیت قبل برای دایره به شعاع r از چند ضلعی های منتظم محیطی (چند ضلعی که همهٔ اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند) استفاده کنیم. نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به دست آمد، دربارهٔ این چند ضلعی ها بیان کنید (محاسبه مساحت ها لازم نیست).



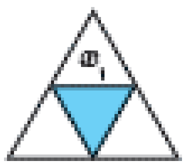
با نگاه کردن به شکل ها به این نتیجه می رسیم که وقتی تعداد اضلاع چند ضلعی های محیطی زیاد و زیادتر می شود، مساحت آنها نیز به مساحت دایره نزدیک و نزدیک تر می شود.

به عبارت دیگر مساحت چندضلعی های منتظم محیط بر دایره را هر چه قدر که بخواهیم می توانیم به مساحت دایره نزدیک تر کنیم به شرط آنکه تعداد اضلاع چندضلعی را به مقدار کافی زیاد کنیم.

به این نحوهٔ نزدیک شدن؛ نزدیک شدن از راست می گوییم.

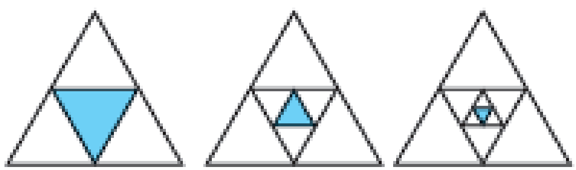
فعالیت صفحهٔ ۱۱۵ کتاب درسی

یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ را درنظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می باشد.



۱) مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را $x_۱$ و اندازهٔ محیط آن را $P_۱$ می نامیم. در این صورت $x_۱$ برابر یک $P_۱$ برابر ۳ خواهد بود.

۲) اگر عمل وصل کردن وسط ضلع های مثلث های جدید را ادامه دهیم و در مرحله n ام طول مثلث به وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید:



(۱) (۲) (۳)

x_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۳۲}$	...	$\frac{۱}{۲^n}$
P_n	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۳}{۳۲}$	...	$\frac{۳}{۲^n}$

۳) اندازه اضلاع مثلث ها، به چه عددی نزدیک می شوند؟ صفر

۴) اندازه محیط این مثلث ها، به چه عددی نزدیک می شوند؟ صفر

اگر طول ضلع اولیه را x در نظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می کند، آن گاه داریم:

$f(x) = ۳x$

همان طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می شود، محیط مثلث ها، یعنی مقادیر تابع f نیز به عدد صفر نزدیک می شوند.

مثال صفحه ۱۱۶ کتاب درسی

رفتار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ را در اطراف $x=2$ بررسی کنید.

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \rightarrow f(x)=x+2 \quad , x\neq 2$$

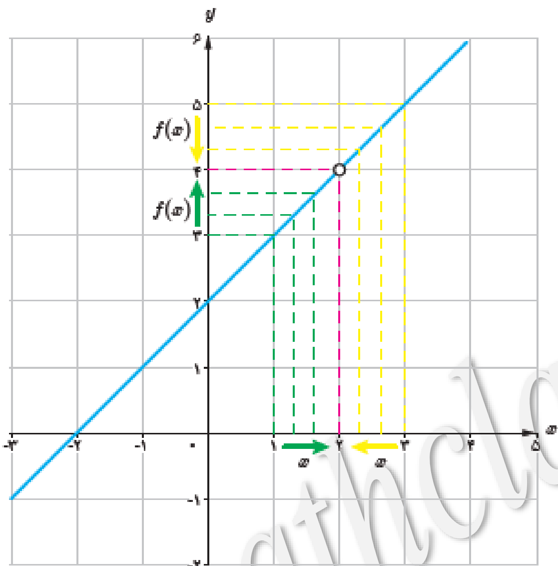
تابع f به ازای $x=2$ مقدار ندارد. به عبارت دیگر $f(2)$ وجود ندارد.

اینک مقدار تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچک تر از ۲، که به تدریج از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ تر از ۲، که به تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می شوند، و جدول زیر را تنظیم می کنیم.

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود — x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→	؟	←	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود — $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود



درستی این مطلب را از روی نمودار تابع نیز می توان دید.

با نزدیک شدن x به عدد ۲، $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می شود.

در این صورت می گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x به ۲ نزدیک می شود، برابر ۴ است.

می نویسیم: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

این مفهوم را حدگیری از تابع $f(x)$ در $x=2$ می نامیم.

کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۷ کتاب درسی

توابع f ، g و h با ضابطه های زیر را در نظر بگیرید.

$$h(x)=\begin{cases} x+۳ & ,x\neq ۳ \\ ۴ & ,x=۳ \end{cases}$$

$$g(x)=\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}$$

$$f(x)=x+۳$$

۱) مقدار توابع f ، g و h را به ازای $x=۳$ به دست آورید.

$h(۳)=۴$

$g(۳)=$ وجود ندارد

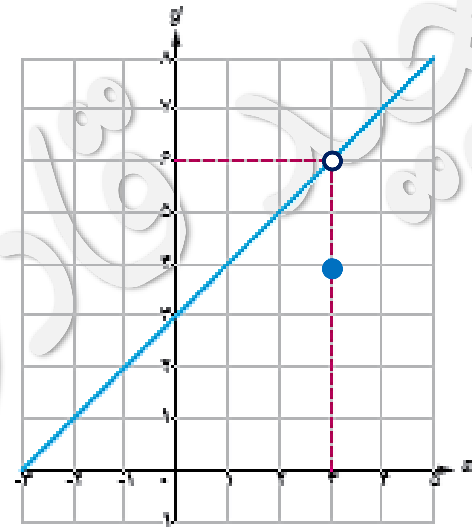
$f(۳)=۳+۳=۶$

۲) با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می کنیم، مقدار توابع f ، g و h هرکدام به چه عددی نزدیک می شوند؟

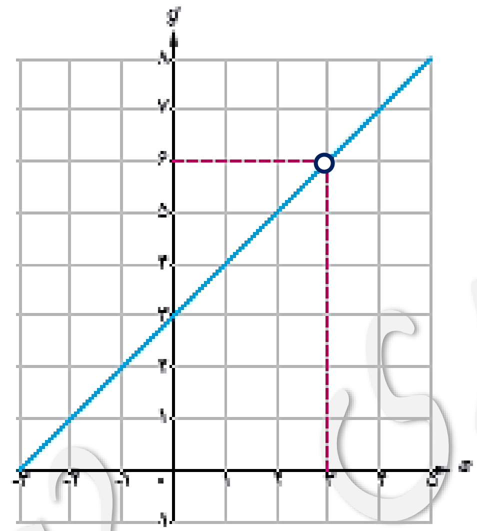
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	→	۳	←	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	?	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	?	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$h(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	?	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱

کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۷ کتاب درسی

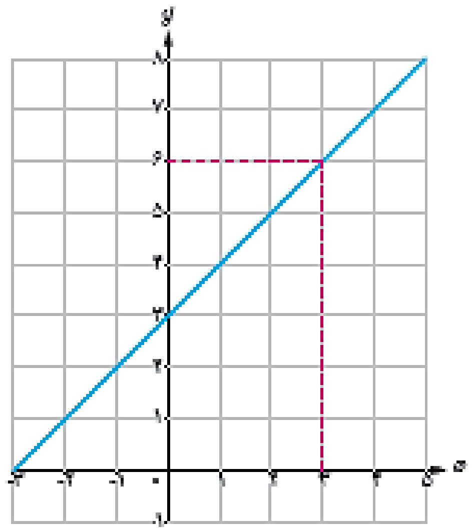
نمودار توابع f ، g و h به صورت زیر رسم شده است.



نمودار h



نمودار g



نمودار f

۳) از روی نمودار توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می کنیم، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ هرکدام به چه عددی نزدیک می شوند؟

۴) حد هر سه تابع وقتی به ۳ نزدیک می شود برابر با ۶ است. می نویسیم:

$$\lim_{x\to ۳} h(x) = ۶ \qquad \lim_{x\to ۳} g(x) = ۶ \qquad \lim_{x\to ۳} f(x) = ۶$$

کار در کلاس صفحهٔ ۱۱۸ کتاب درسی

با توجه به کار در کلاس قبل تفاوت ها و شباهت های این سه تابع را بیان کنید.

$$f(x) = x + ۳$$

❖ مقدار $f(۳)$ موجود و برابر ۶ است. یعنی $f(۳) = ۶$،
همچنین داریم $\lim\limits_{x \to ۳} f(x) = ۶$،
پس $\lim\limits_{x \to ۳} f(x) = f(۳)$.

$$g(x) = \frac{x^۲ - ۹}{x - ۳}$$

❖ تابع $g(x)$ در $x = ۳$ مقدار ندارد، یعنی $g(۳)$ وجود ندارد.
ولی $\lim\limits_{x \to ۳} g(x) = ۶$.

$$h(x) = \begin{cases} x + ۳ & , x \neq ۳ \\ ۴ & , x = ۳ \end{cases}$$

❖ مقدار $h(۳)$ موجود و برابر ۴ است. یعنی $h(۳) = ۴$،
ولی $\lim\limits_{x \to ۳} h(x) = ۶$.
پس $\lim\limits_{x \to ۳} h(x) \neq h(۳)$.

صفحهٔ ۱۱۸ کتاب درسی

جمع بندی:

وجود حد در یک نقطه، به وجود مقدار تابع در همان نقطه ربطی ندارد.

به عبارت دیگر ممکن است:

- در یک نقطه مقدار تابع موجود نباشد ولی حد وجود داشته باشد.
- در یک نقطه مقدار تابع موجود باشد ولی حد وجود نداشته باشد.
- در یک نقطه حد و مقدار تابع موجود باشد و با هم برابر باشد.
- در یک نقطه حد و مقدار تابع موجود باشد ولی با هم برابر نباشد.

چند تعریف

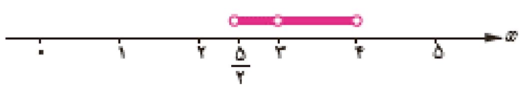
صفحه ۱۱۸ کتاب درسی

همسایگی : هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.
به‌عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a\ ,\ b)$ آنگاه بازهٔ (a, b) یک همسایگی x_0 می‌باشد.

به عنوان مثال؛ بازهٔ $(۲\ ,\ ۵)$ یک همسایگی برای ۳ محسوب می شود.

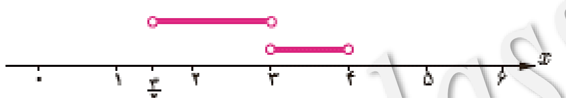
همسایگی محذوف : اگر بازهٔ (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a\ ,\ b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می‌شود.

به عنوان مثال؛ مجموعهٔ $\left(\frac{۵}{۲}\ ,\ ۴\right) - \{۳\}$ یک همسایگی محذوف برای ۳ محسوب می شود.



همسایگی چپ و راست : اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_0\ ,\ x_0 + r)$ یک همسایگی راست x_0 نامیده می‌شود. همچنین، $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

به عنوان مثال؛ بازهٔ $(۳\ ,\ ۴)$ یک همسایگی راست برای ۳ و بازهٔ $\left(\frac{۳}{۲}\ ,\ ۳\right)$ یک همسایگی چپ برای ۳ محسوب می شود.



کار در کلاس بالای صفحهٔ ۱۱۹ کتاب درسی

۱) یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

بازهٔ $(۱\ ,\ ۹)$ یک همسایگی برای ۳ محسوب می شود. مجموعهٔ $(-۱\ ,\ ۵) - \{۳\}$ یک همسایگی محذوف برای ۳ محسوب می شود.
بازهٔ $(۳\ ,\ ۷)$ یک همسایگی راست برای ۳ و بازهٔ $(۰\ ,\ ۳)$ یک همسایگی چپ برای ۳ محسوب می شود.

۲) آیا بازهٔ $(۲\ ,\ ۳)$ یک همسایگی برای ۲ محسوب می شود؟ خیر، زیرا شامل عدد ۲ نمی شود.

حد تابع (شرط وجود حد در یک نقطه)

صفحه ۱۱۹ کتاب درسی

فرض کنیم تابع f در همسایگی a تعریف شده باشد (ممکن است در خود a تعریف نشده باشد)، می گوییم حد تابع f در a برابر عدد l است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آن که x با مقادیر مخالف a از هر دو سمت راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود.

در این صورت می نویسیم: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

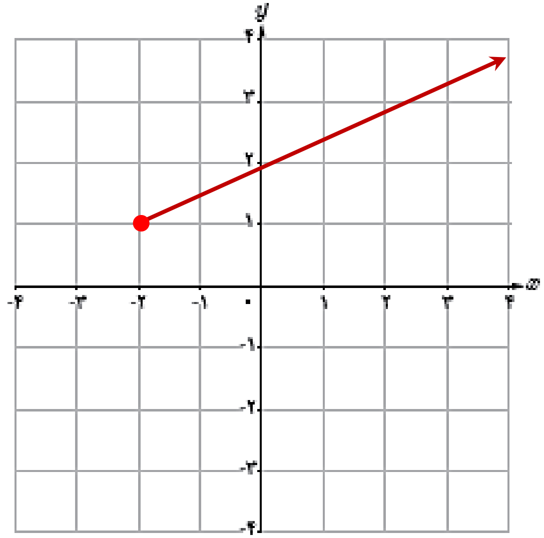
کار در کلاس پایین صفحهٔ ۱۱۹ کتاب درسی

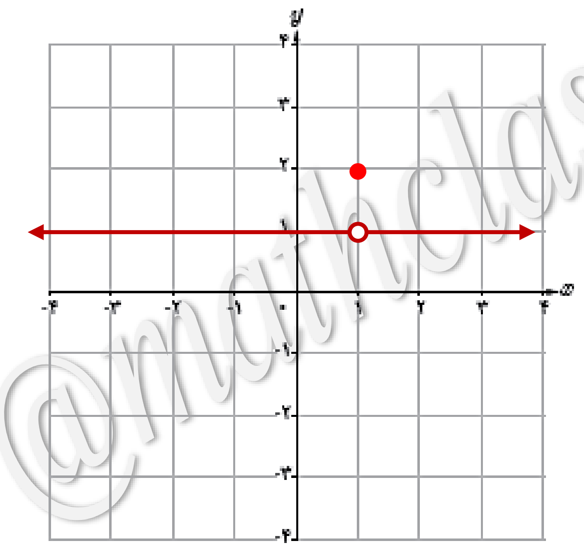
۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه -۲ تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

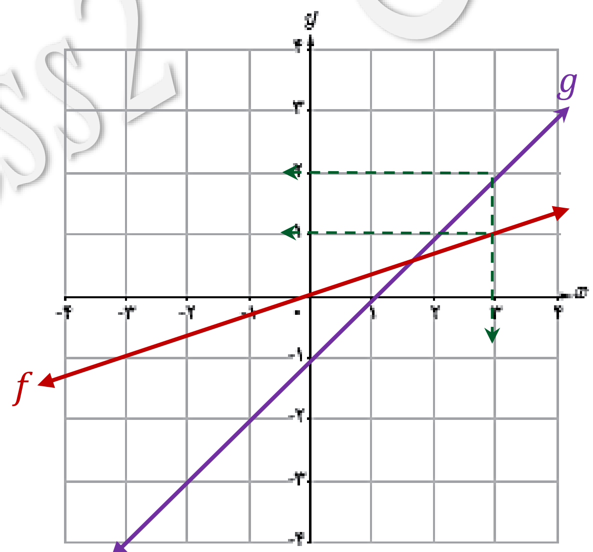
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(۳) \neq g(۳)$.

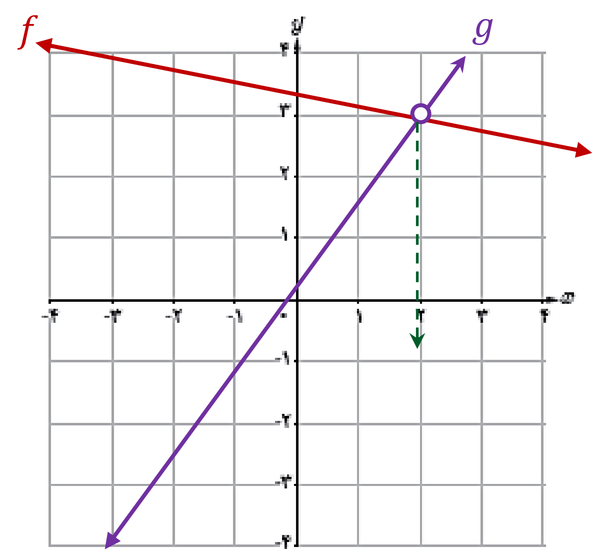
۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.


(۱)


(۲)



(۳)



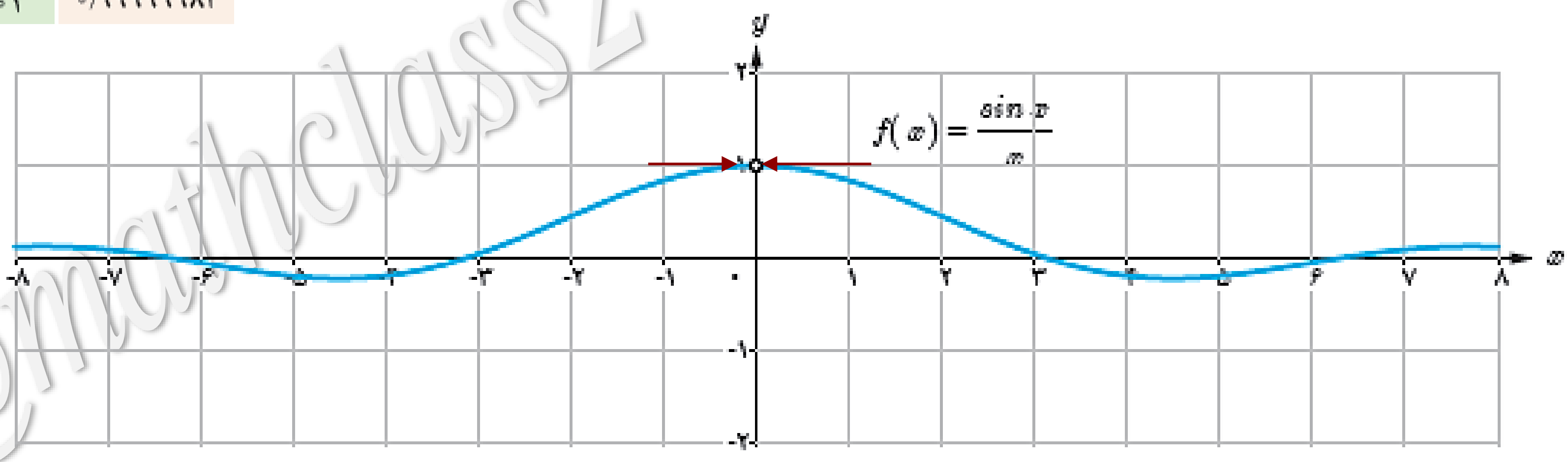
(۴)

کار در کلاس ۵ صفحهٔ ۱۲۰ کتاب درسی

۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f، مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور xها برحسب رادیان است).

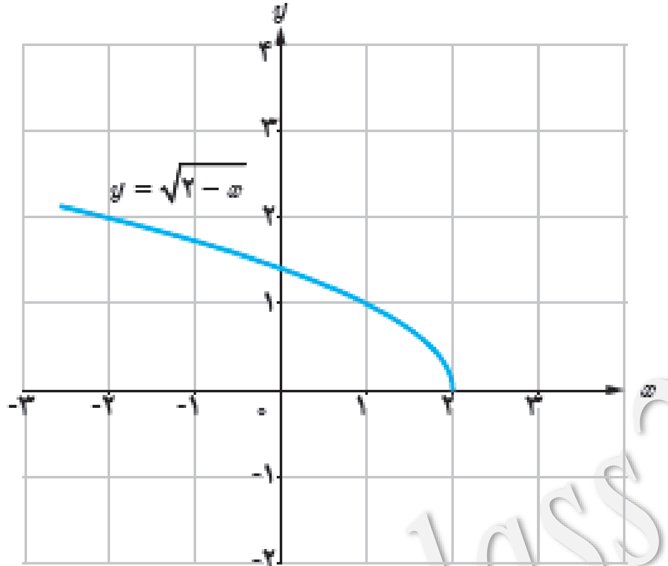
x	$\dfrac{\sin x}{x}$
±۱	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
±۰/۵	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
±۰/۴	۰/۹۷۳۵۴۵۸۶
±۰/۳	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
±۰/۲	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
±۰/۱	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
±۰/۰۵	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
±۰/۰۱	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
±۰/۰۰۵	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
±۰/۰۰۱	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



مثال صفحهٔ ۱۲۰ کتاب درسی

آیا تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد؟ چرا؟

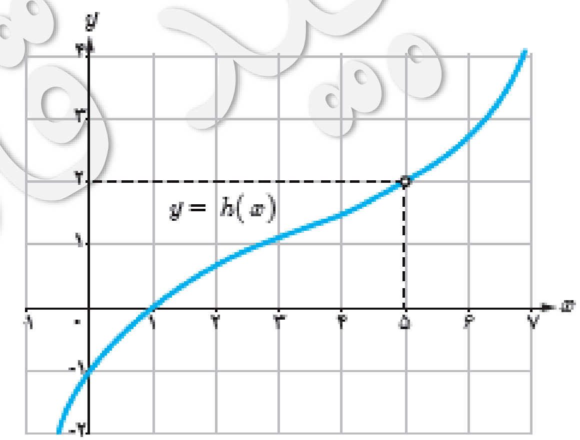


تابع f در نقطهٔ $x=۲$ حد ندارد، زیرا:

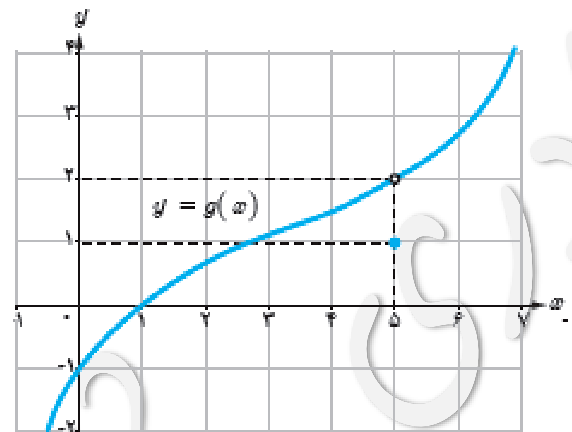
دامنهٔ تابع برابر با بازهٔ $(-\infty\,,۲]$ می باشد. لذا اعداد حقیقی بیشتر از ۲ متعلق به دامنهٔ تابع نیستند و نمی توان همسایگی راست برای ۲ تعریف نمود.

تمرین ۱ صفحهٔ ۱۲۰ کتاب درسی

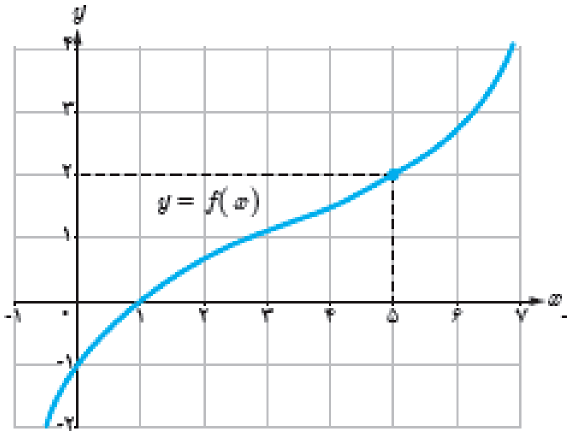
نمودار توابع f ، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x = ۵$ مشخص کنید.



$$\lim_{x \to ۵} h(x) = ۲$$



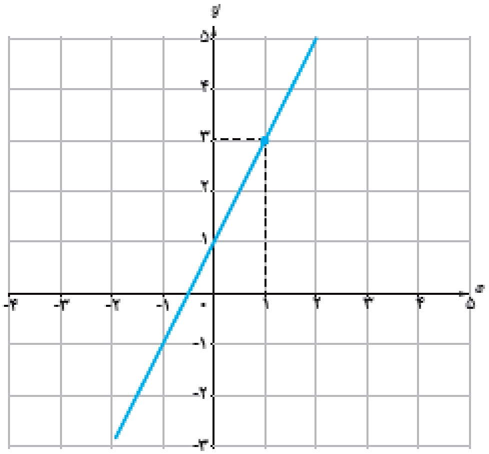
$$\lim_{x \to ۵} g(x) = ۲$$



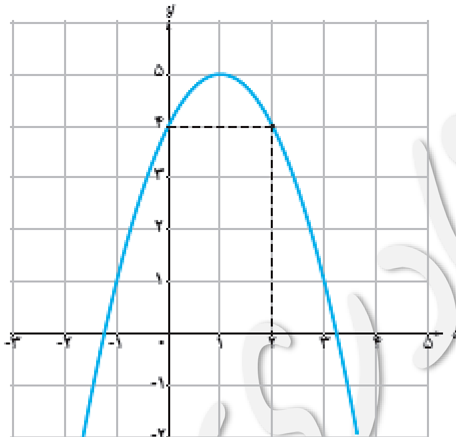
$$\lim_{x \to ۵} f(x) = ۲$$

تمرین ۲ صفحهٔ ۱۲۱ کتاب درسی

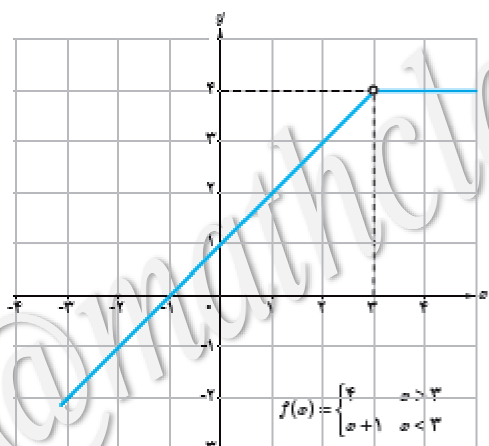
با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



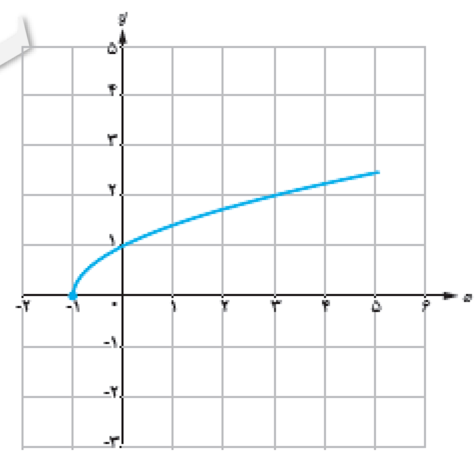
$\lim_{x \to ۱} (۲x+۱) =$ ۳



$\lim_{x \to ۲} (-x^{۲}+۲x+۴) =$ ۴



$\lim_{x \to ۳} f(x) =$ ۴



$\lim_{x \to -۱} \sqrt{x+۱} =$ وجود ندارد

تمرین ۳ صفحهٔ ۱۲۱ کتاب درسی

با تکمیل هر یک از جدول های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} (-۳x + ۴) = ۴$

x	−۱	−۰/۹	−۰/۱	−۰/۰۱	→	۰	←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰۳	→	?	←	۳/۹۹۷	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

ب) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = -۵$

$$f(x) = \begin{cases} x - ۴ & x \neq -۱ \\ ۳ & x = -۱ \end{cases}$$

x	−۲	−۱/۵	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	→	−۱	←	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹	−۰/۸
$f(x)$	−۶	−۵/۵	−۵/۱	−۵/۰۱	−۵/۰۰۱	→	?	←	−۴/۹۹۹	−۴/۹۹	−۴/۹	−۴/۸

تمرین ۴ صفحهٔ ۱۲۲ کتاب درسی

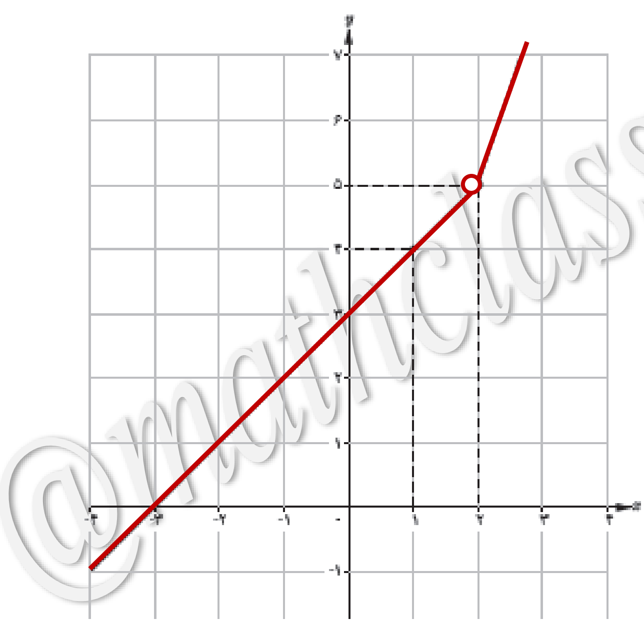
تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۳x - ۱, & x > ۲ \\ x + ۳, & x < ۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ تعریف شده است؟

تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ تعریف نشده است، زیرا $۲ \notin D_f$

ب) با رسم نمودار f و با نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$ را به دست آورید.

x	۱	۱/۵	۱/۹	$\longrightarrow$	۲	$\longleftarrow$	۲/۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۴	۴/۵	۴/۹	$\longrightarrow$	؟	$\longleftarrow$	۵/۲	۶/۵	۸



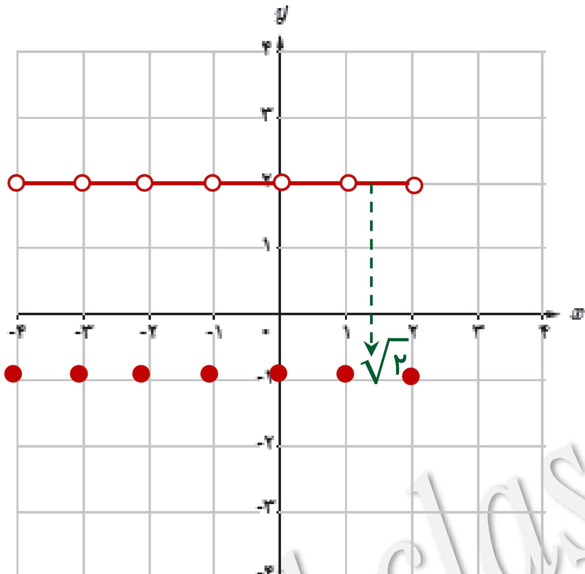
$$\lim_{x \to ۲} f(x) = ۵$$

تمرین ۵ صفحهٔ ۱۲۲ کتاب درسی

تابع g با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} -۱, & x \in \mathbb{Z} \\ ۲, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع g را در بازهٔ $[-۴ , ۲]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.



$$\lim_{x\to ۱} g(x) = ۲$$

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}} g(x) = ۲$$

تمرین ۶ صفحهٔ ۱۲۲ کتاب درسی

تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{۱ - x^۲}}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنهٔ تابع f را به دست آورید.

$۱ - x^۲ \geq ۰ \quad \to \quad x^۲ \leq ۱ \quad \to \quad -۱ \leq x \leq ۱$ و $x \neq ۰$

$D_f = [-۱\,,۱] - \{۰\}$

ب) دامنهٔ تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ همسایگی محذوف صفر

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع در همسایگی چپ $x = ۱$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x = ۱$ چطور؟

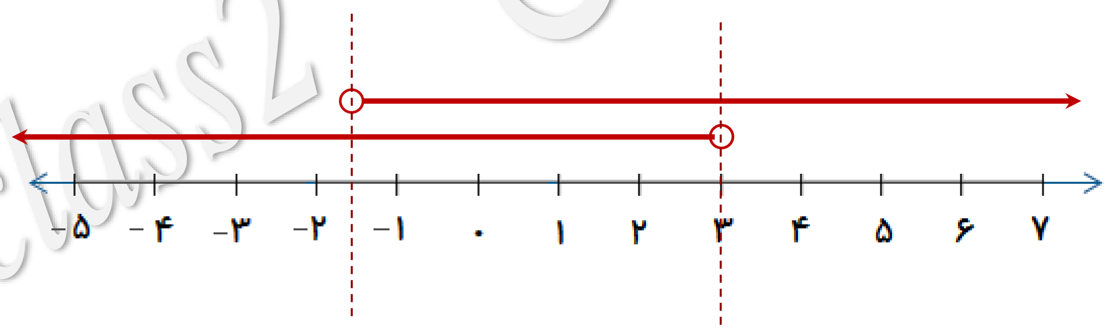
تابع در همسایگی چپ $x = ۱$ تعریف شده است و در همسایگی راست $x = ۱$ تعریف شده نیست.

تمرین ۷ صفحهٔ ۱۲۲ کتاب درسی

اگر بازهٔ $(x - ۱ \, , ۲x + ۳)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعهٔ مقادیر x را به دست آورید.

$$x - ۱ < ۲ \quad \rightarrow \quad x < ۳$$

$$۲x + ۳ > ۲ \quad \rightarrow \quad ۲x > -۱ \quad \rightarrow \quad x > \frac{-۱}{۲}$$



$$x \in \left(\frac{-۱}{۲}, ۳\right)$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱ : توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

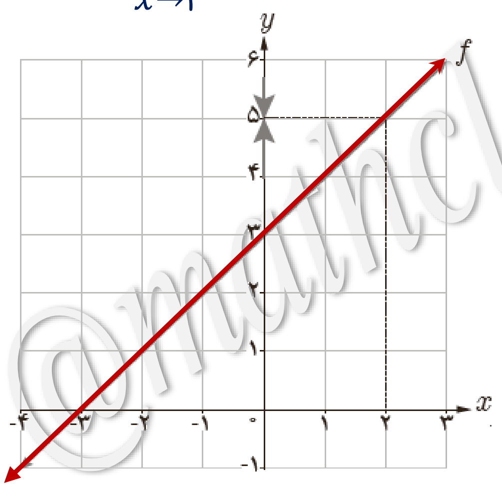
$f(x) = ۲x + ۱$ $\qquad$ $g(x) = ۲x + ۱ \quad , x \neq ۲$ $\qquad$ $h(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x \neq ۲ \\ ۳ & x = ۲ \end{cases}$

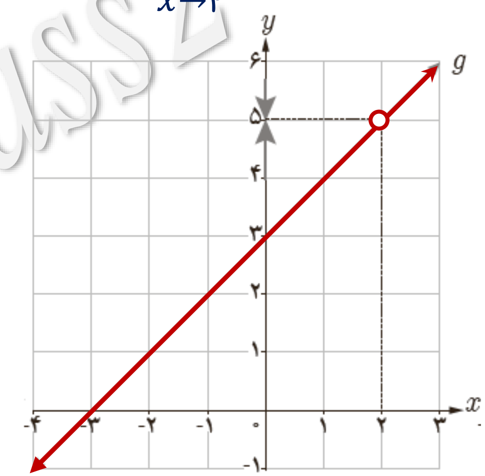
الف) مقادیر $f(۲)$ و $g(۲)$ و $h(۲)$ را در صورت وجود به دست آورید.

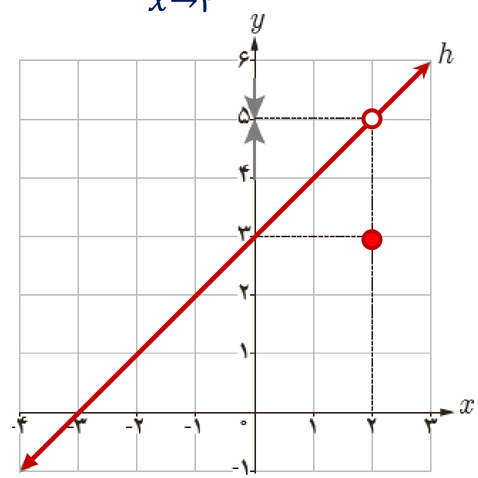
$f(۲) = ۲(۲) + ۱ = ۵$ $\qquad$ $g(۲)$ وجود ندارد $\qquad$ $h(۲) = ۳$

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید:

$\lim_{x \to ۲} f(x) = ۵$ $\qquad$ $\lim_{x \to ۲} g(x) = ۵$ $\qquad$ $\lim_{x \to ۲} h(x) = ۵$







تمرین تکمیلی

سوال ۲ : با تکمیل جدول زیر؛ رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطهٔ ۴ بررسی کنید.

$$f(x) = ۲x - ۱$$

$$g(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & , x \neq ۴ \\ ۵ & , x = ۴ \end{cases}$$

$$h(x) = ۲x - ۱ \quad , x \neq ۴$$

x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود →

← x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود

x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	→ ۴ ←	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	→ ۷ ←	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$g(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	→ ۷ ←	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$h(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	→ ۷ ←	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹

توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ در نزدیکی نقطهٔ $x = ۴$ رفتار یکسانی دارند.

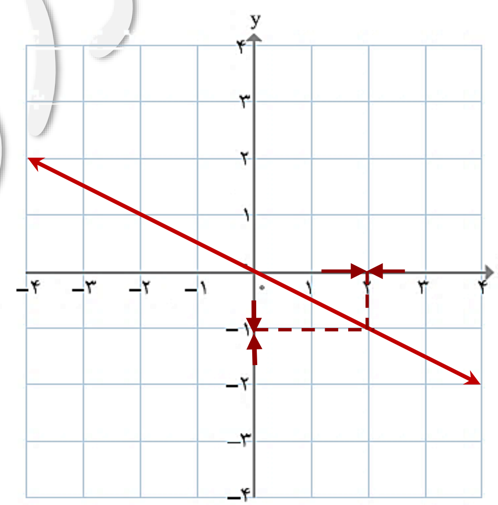
به عبارت دیگر حد آنها وقتی x به ۴ نزدیک می شود، برابر ۷ است.

$$\lim_{x \to ۴} f(x) = ۷ \qquad \lim_{x \to ۴} g(x) = ۷ \qquad \lim_{x \to ۴} h(x) = ۷$$

تمرین تکمیلی

سوال ۳ : مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی ۱- باشد.

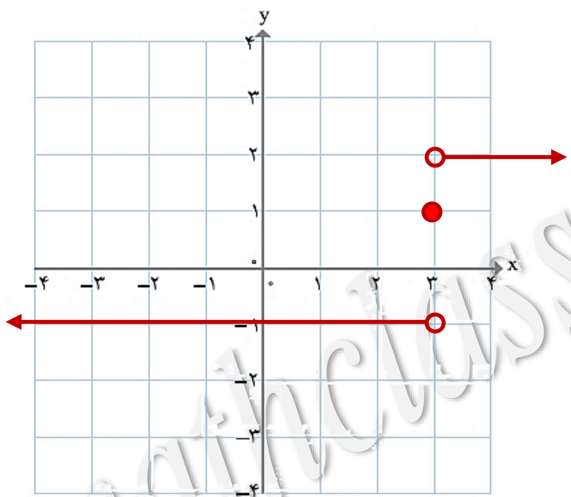
$$f(x) = -\frac{۱}{۲}x$$



$$\lim_{x\to ۲} f(x) = -۱$$

سوال ۴ : تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد و $f(۳) = ۱$.

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & x > ۳ \\ ۱ & x = ۳ \\ -۱ & x < ۳ \end{cases}$$



$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۲ \qquad \lim_{x\to ۳^-} f(x) = -۱$$

پایان درس اول