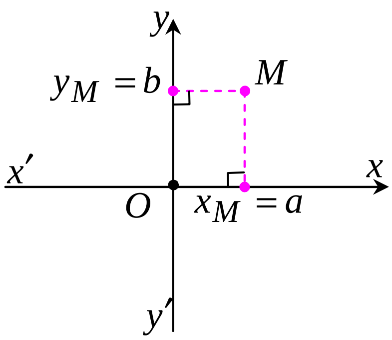
درس اوّل : بردار در فضای دو بعدی

در این درس ابتدا به معرفی فضای دو بعدی پرداخته و در ادامه به مفهوم بردار و ویژگی های آن و همچنین اعمال روی بردار در فضای دو بعدی می پردازیم.

صفحه و دستگاه مختصات

دو محور $x'ox$ و $y'oy$ که در یک صفحه قرار دارند، یک دستگاه مختصات به وجود می آورند، هرگاه این دو محور بر هم عمود باشند و در نقطه‌ی O (مبدأ مشترک) متقاطع باشند.

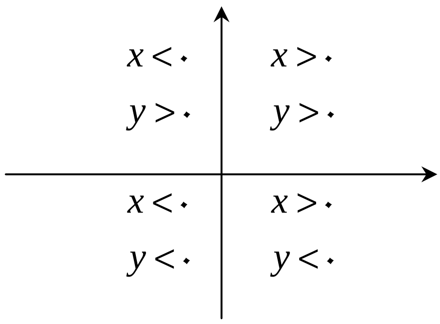


محور افقی ($x'ox$) را محور طول ها و محور قائم ($y'oy$) را محور عرض ها می نامند.

بدیهی است که هر نقطه روی صفحه، مانند M با دو عدد حقیقی مشخص می شود. تصویر نقطه‌ی M روی محور طول ها را طول $(x_M = a)$ و تصویر نقطه‌ی M روی محور عرض ها را عرض $(y_M = b)$ می نامند.

$$M = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \text{یا} \qquad M\left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right. \qquad \text{یا} \qquad M(a,b)$$

طول و عرض نقطه را مختصات نقطه می نامند.



نتیجه : دستگاه مختصات قائم صفحه را به چهار ناحیه (ربع) تبدیل می کند.علامت مختصات هر نقطه با توجه به ربعی که در آن قرار دارد، به صورت زیر است.

همچنین:

الف : هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن صفر است و برعکس

ب : هر نقطه که روی محور عرض ها قرار دارد، طول آن صفر است و برعکس

ج : نقطه‌ی تقاطع دو محور که مبدأ مختصات نام دارد، طول و عرض آن صفر است.

هر رابطه‌ی یکسان بین طول و عرض مجموعه‌ی نقاط یک خط را معادله‌ی خط نامیده می شود. اگر c و b و a اعداد حقیقی بوده و b و a هم زمان صفر نباشند، معمولاً معادله‌ی یک خط در دستگاه مختصات را به صورت $ax+by=c$

می نویسند.

تمرین ۱ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقاط $A(۳,۱)$ و $B(-۱,-۷)$ بگذرد.

حل :

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{-۷-۱}{-۱-۳}=\frac{-۸}{-۴}=۲$$

$$y=m(x-x_۱)+y_۱ \rightarrow y=۲(x-۳)+۱=۲x-۵$$

$\rightarrow ۲x-y=۵$ معادله‌ی خط مطلوب

***

معرفی فضای دو بعدی ($R^۲$)

واضح است که هر نقطه از صفحه توسط یک زوج مرتب مانند (a,b) مشخص می شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه مشخص می کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به صورت زوج مرتب مانند (x,y) نمایش می دهند. در این صورت مجموعه‌ی $\{(x,y)\,|\,x,y\in R\}$ شامل همه‌ی نقاط صفحه می باشد و آن را **فضای دو بعدی** می نامند و با $R^۲$ نمایش می دهند. یعنی :

$$R^۲=\{(x,y)\,|\,x,y\in R\}$$

***

نمودار رابطه در فضای دو بعدی

برای رسم نمودار یک معادله در فضای دو بعدی کافی است، از نقاط مختلفی از دستگاه $R^۲$ استفاده کنیم، طوری که این نقاط در معادله‌ی داده شده صدق کنند.

تمرین۲ : نمودار هر یک از روابط زیر را رسم کنید.

۱) $y=۲$	۴) $y=۰$	۷) $y=۲x+۳$
۲) $x=-۱$	۵) $y=x$	۸) $y=x^۲$
۳) $x=۰$	۶) $y=-x$	۹) $y=\|x\|$

تمرین برای حل :

۴ : نمودار رابطه‌ی $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۹$ را رسم کنید.

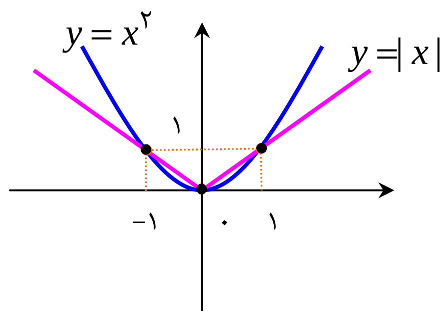
۵ : نمودار رابطه‌ی $A=\{(x,y)\,\|\,|x|+|y|=۴\}$ را رسم کنید.

توجه :

۱ : برای رسم نمودار یک مجموعه شامل دو یا چند معادله لازم است مجموعه‌ی نقاطی را تعیین کنیم که در تمام معادلات داده شده صدق کنند.

مثال : معادله‌ی $|x|=x^۲$ را حل کنید.

حل : نمودار رابطه های $y=|x|$ و $y=x^۲$ را جداگانه رسم می کنیم و سپس نقاط تقاطع آنها را تعیین می کنیم.



لذا این دو نمودار همدیگر را در نقاط $x=۱$ و $x=۰$ و $x=-۱$ قطع می کنند. یعنی معادله دارای سه ریشه‌ی $x=۱$ و $x=۰$ و $x=-۱$ می باشد.

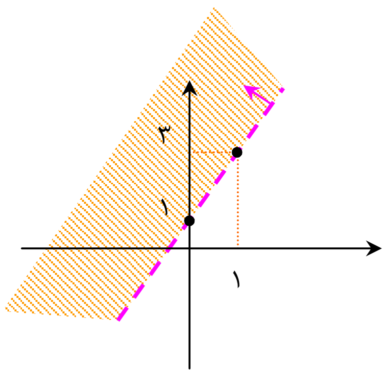
تمرین برای حل :

۶ : معادله‌ی $|x|=x^{۳}$ را حل کنید.

۲ : برای تعیین ناحیه‌ی مجموعه‌ی جواب برای یک نامعادله، پس از رسم نمودار معادله‌ی متناظر آن[1]، یک نقطه‌ی دلخواه روی صفحه و غیر واقع بر نمودار را انتخاب نموده و مختصات آنرا در نامعادله قرار می دهیم. واضح است که نتیجه‌ی بدست آمده از این کار یا درست یا نادرست خواهد بود. اگر این نتیجه درست باشد،لازم است ناحیه‌ی شامل آن نقطه را قبول کنیم و اگر نادرست باشد،لازم است ناحیه‌ای را قبول کنیم که شامل آن نقطه نباشد.

مثال : نمودار رابطه‌ی $y > ۲x+۱$ را رسم کنید.

حل : ابتدا نمودار معادله‌ی $y=۲x+۱$ را رسم می کنیم و با انتخاب یک نقطه غیر واقع بر این خط ناحیه-ی جواب را تعیین می کنیم.



$y=۲x+۱$

x	۰	۱
y	۱	۳

تمرین برای حل :

۷ : نمودار رابطه‌ی $y \geq x^{۲}$ را رسم کنید.

۸ : نمودار رابطه‌ی $y < |x|+۱$ را رسم کنید.

۹ : نمودار رابطه‌ی مقابل را رسم کنید. $A=\{(x,y) \mid x^{۲}+y^{۲}>۱\}$

۳ : برای تعیین مجموعه‌ی شامل دو یا چند نامعادله، ابتدا نمودار معادله‌ی متناظر با هر نامعادله را رسم نموده و پس از تعیین ناحیه‌ی مربوط به هر یک، اشتراک ناحیه ها را مشخص می کنیم.

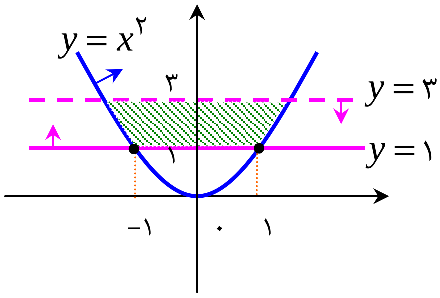
---

[1] . در صورتی که نامعادله‌ی متناظر آن شامل مساوی باشد نمودار کامل و اگر شامل مساوی نباشد، نمودار بصورت نقطه چین رسم می شود.

مثال : نمودار رابطه‌ی زیر را رسم کنید.

$$y \geq x^{۲} \quad و \quad ۱ \leq y < ۳$$

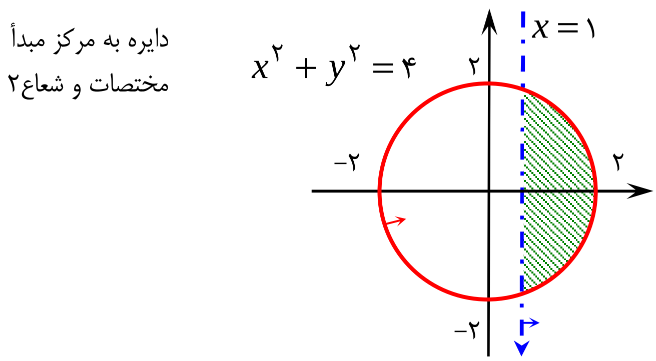
حل : ابتدا نمودار هریک از نامعادلات داده شده را رسم می کنیم. سپس اشتراک ناحیه‌ی مربوط به هر یک را تعیین می کنیم.



مثال : نمودار مجموعه‌ی زیر را رسم کنید.

$$A = \{(x, y) \in R^{۲} \mid x^{۲} + y^{۲} \leq ۴, x > ۱\}$$

حل: ابتدا نمودار هریک از نامعادلات داده شده را رسم می کنیم. سپس اشتراک ناحیه‌ی مربوط به هر یک را تعیین می کنیم.



تمرین برای حل :

۱۰ : در هر مورد نمودار ناحیه‌ی مربوط به معادلات یا نامعادلات داده شده را رسم کنید.

الف) $x = ۱ \quad و \quad -۱ \leq y < ۳$

ب) $y = x^{۲} \quad و \quad -۱ < y \leq ۲$

پ) $y = x^{۲} \quad و \quad ۱ \leq x \leq ۲$

ت) $-۱ \leq x \leq ۱ \quad و \quad \begin{cases} y \geq ۱ \\ y \leq -۲ \end{cases}$

ث) $x^{۲} < y \leq ۲$

۱۱ : در هر یک از موارد زیر نمودار مجموعه‌ی داده شده را در صفحه نمایش دهید.

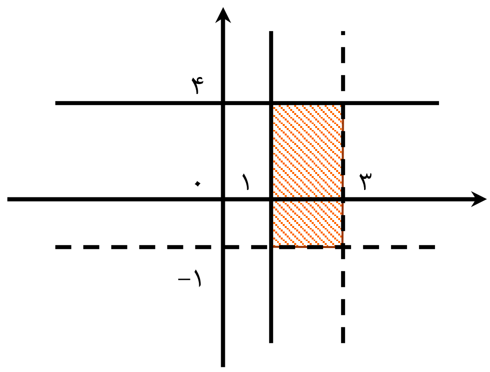
الف) $A=\{(x,y)\,|\,x\geq ۱\,,\,y>۳\}$

ب) $B=\{(x,y)\,|\,y\geq x^{۲}\,,\,۱\leq y<۲\}$

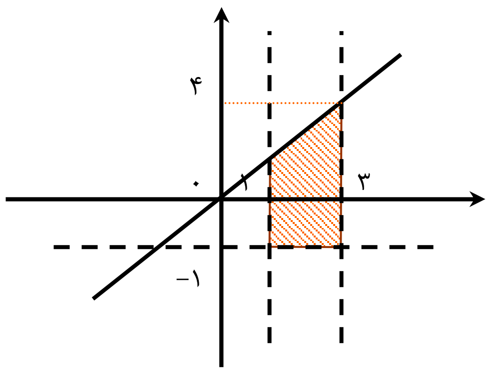
ج) $C=\{(x,y)\,||\,۲x+y\,|<۱\}$

د) $D=\{(x,y)\,|\,x^{۲}+y^{۲}>۴\,,\;x^{۲}+y^{۲}\leq ۵\}$

۱۲ : متناظر با ناحیه های زیر یک رابطه بنویسید.



(الف)

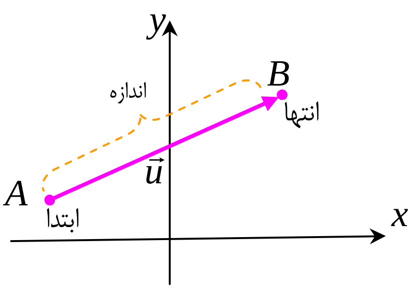


(ب)

***

بردارها در فضا دو بعدی

هر پاره خط جهت دار را یک پیکان می‌نامند. در شکل مقابل پاره خط جهت دار AB یک پیکان است. این پیکان را با نماد $\overrightarrow{AB}$ یا به اختصار $\vec{u}$ نمایش می دهیم. هر پیکان دارای چهار مشخصه‌ی مبدأ ، جهت ، امتداد و اندازه می باشد.

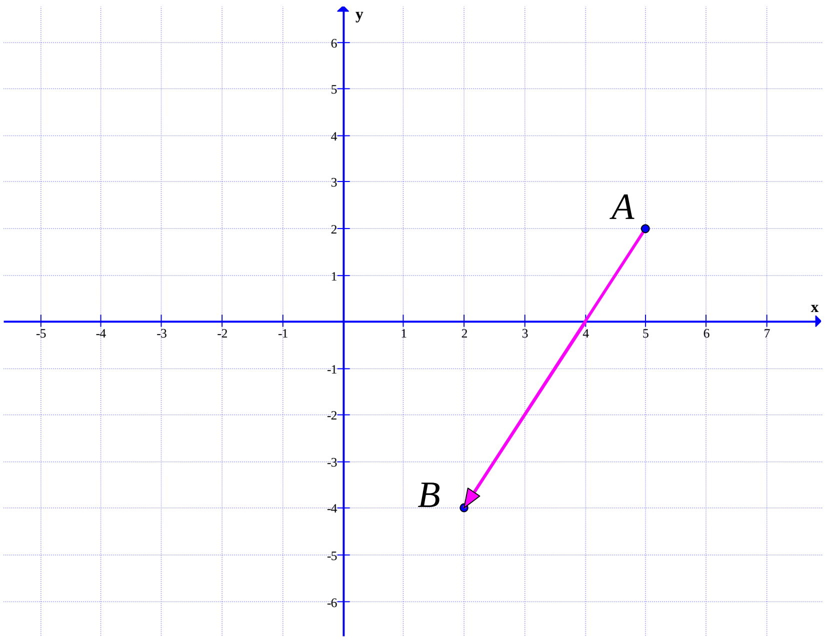


برای هر پیکان می توان یک زوج مرتب تحت عنوان مختصات پیکان به صورت زیر نوشت. مختصات پیکان نشان دهنده‌ی تغییرات طولی و عرضی نقاط ابتدا و انتهای پیکان می باشد.

مختصات پیکان $\qquad \overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ابتدا و $B=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix}$ انتهای پیکان $\overrightarrow{AB}$ باشند. ابتدا پیکان را رسم و سپس مختصات آن را بدست آورید.

حل :



مختصات این پیکان نیز به شکل زیر است.

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A)=(۲-۵,-۴-۲)=(-۳,-۶)$$

اگر نقاط ابتدا و انتهای پیکانی بر هم منطبق باشند، پیکان را **پیکان صفر** می نامند و آن را با $\vec{o}$ نمایش می دهند. مختصات پیکان صفر به صورت زیر است.

$$\vec{o}=(۰,۰)$$

اندازه یا طول هر پیکان مانند $\overrightarrow{AB}$ برابر طول پاره خط منطبق بر آن یعنی AB می باشد. اندازه‌ی پیکان $\overrightarrow{AB}$ را به صورت $\|\overrightarrow{AB}\|$ نمایش می دهیم و به صورت زیر بدست می آوریم.

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

مثال : اندازه‌ی پیکان تمرین قبل را محاسبه کنید.

حل :

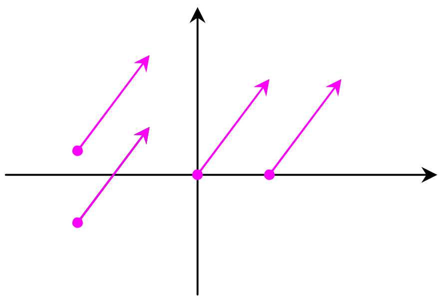
$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(۲-۵)^۲ + (-۴-۲)^۲} = \sqrt{۹+۳۶} = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

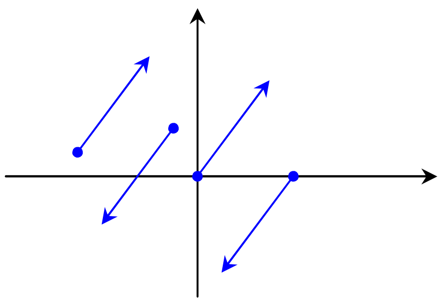
تمرین برای حل :

۱۳ : اگر $A=\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲\\ k\end{bmatrix}$ دو نقطه در صفحه باشند. مقدار k را چنان بیابید که اندازه پیکـان $\overrightarrow{AB}$ برابر $\sqrt{۱۳}$ باشد.

تذکر : دو پیکان را **مساوی** گویند، هرگـاه مختـصات آنهـا یکسان باشد. به عبارتی دیگر موازی ، هم جهت و هم انـدازه باشند.



همچنین دو پیکان را **قرینه** گوینـد، هرگـاه مختـصات آنهـا قرینه باشد. یعنی موازی ، هـم انـدازه ولـی غیـر هـم جهـت هستند.

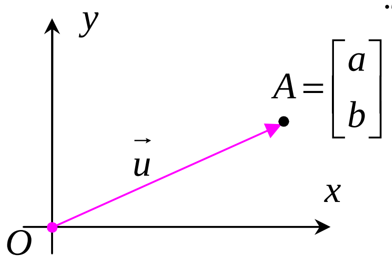


***

یادآوری : مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB به شکل زیر بدست می آید.

$$M = \begin{bmatrix}\dfrac{x_A + x_B}{۲}\\ \dfrac{y_A + y_B}{۲}\end{bmatrix}$$

تعریف : هر پیکان که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را **بردار** می نامند.



نتیجه : اگر نقطه‌ی $A=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ انتهای بردار $\overrightarrow{OA}$ باشد. در این صورت :

الف : مختصات بردار با مختصات نقطه‌ی انتهایی آن برابر است.

$$\overrightarrow{OA}=(x_A-x_O,y_A-y_O)=(a-۰,b-۰)=(a,b)$$

ب : اندازه‌ی بردار به شکل زیر محاسبه می شود.

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_A-x_O)^۲+(y_A-y_O)^۲}=\sqrt{(a-۰)^۲+(b-۰)^۲}=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ ابتدا و $B=\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$ دو نقطه در صفحه‌ی محور های مختصات و M نقطه‌ی وسط پاره خط AB باشند. مختصات و اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{OM}$ را بدست آورید.

حل :

$$M=\begin{bmatrix}\frac{x_A+x_B}{۲}\\\frac{y_A+y_B}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۲+۴}{۲}\\\frac{۱+(-۳)}{۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM}=(۳,-۱)$$

$$\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{(۳)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

تمرین برای حل :

۱۴ : اگر $M=\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}$ نقطه ای روی صفحه باشد.

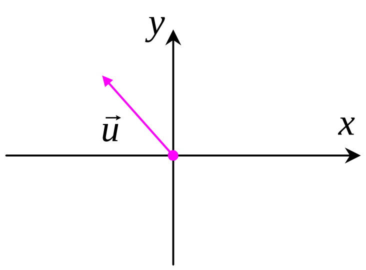
الف : بردار $\overrightarrow{OM}$ را رسم کنید. ب : اندازه‌ی بردار $\overrightarrow{OM}$ را تعیین کنید.

***

بردار واحد

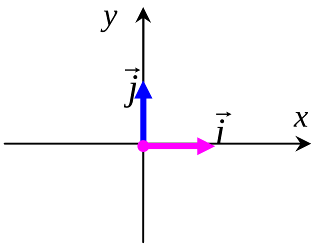
هر بردار که اندازه آن یک واحد طول باشد را **بردار واحد** (بردار یکه) می نامند.

به عبارتی دیگر بردار $\vec{u}$ یکه است اگر و تنها اگر $\|\vec{u}\|=۱$



مثال : نشان دهید که بردار $\vec{u}=(\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}})$ بردار واحد است.

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(\frac{۱}{\sqrt{۵}})^۲+(\frac{۲}{\sqrt{۵}})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۵}+\frac{۴}{۵}}=\sqrt{\frac{۵}{۵}}=۱$$



دو بردار $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ که اوّلی بر محور طول ها و دوّمی بر محور عرض ها منطبق و همجهت آنها است را بردار **واحد مختصات** (استاندارد) می‌نامند.

$$\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=۱$$

***

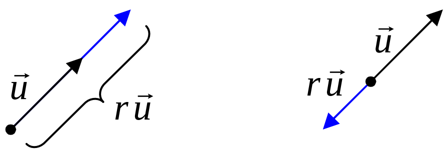
اعمال روی بردارها

در ادامه به اعمال روی بردار ها اشاره می کنیم و خواص آنها را بیان می نماییم.

الف: ضرب عدد در بردار

اگر $\vec{u}$ یک بردار و r یک عدد حقیقی باشند. در این صورت ضرب عدد r در بردار $\vec{u}=(a,b)$ بـه صـورت زیر تعریف می شود.

$$r\vec{u}=r(a,b)=(ra,rb)$$



تذکر :

۱ : اگر $|r|>۱$ آنگاه اندازه‌ی بردار $r\vec{u}$ از اندازه‌ی بردار $\vec{u}$ بیشتر است.

۲ : اگر $|r|=۱$ آنگاه اندازه‌ی بردار $r\vec{u}$ با اندازه‌ی بردار $\vec{u}$ برابر است.

۳ : اگر $|r|<۱$ آنگاه اندازه‌ی بردار $r\vec{u}$ از اندازه‌ی بردار $\vec{u}$ کمتر است.

۴ : اندازه‌ی بردار $r\vec{u}$ با حاصل ضرب قدرمطلق r در اندازه‌ی بردار $\vec{u}$ برابر است.

$$\|r\vec{u}\|=|r|\times\|\vec{u}\|$$

۵ : اگر r مثبت باشد، دو بردار $r\vec{u}$ و $\vec{u}$ هم جهت هستند.

۶ : اگر r منفی باشد، دو بردار $r\vec{u}$ و $\vec{u}$ در جهت مخالف همدیگر هستند.

۷ : اگر $r=۰$ باشد، بردار $r\vec{u}=\vec{o}=(۰,۰)$

۸ : اگر $r=۱$ باشد. در این صورت $r\vec{u}=\vec{u}=(a,b)$

۹ : اگر $r=-۱$ باشد. در این صورت $r\vec{u}=-\vec{u}$ لذا $-\vec{u}=(-a,-b)$

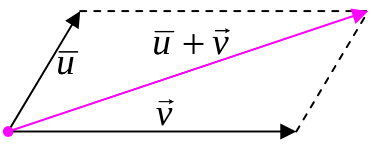
***

ب : جمع دو بردار

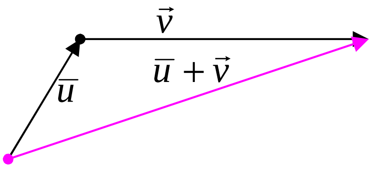
اگر $\vec{u}=(a_۱,b_۱)$ و $\vec{v}=(a_۲,b_۲)$ دو بردار باشند. در این صورت جمع این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{u}+\vec{v}=(a_۱,b_۱)+(a_۲,b_۲)=(a_۱+a_۲,b_۱+b_۲)$$

نمایش هندسی جمع جبری دو بردار به شکل های زیر است.

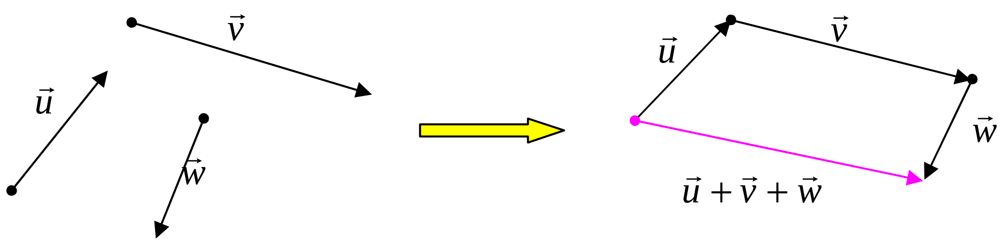


حالت اوّل : اگر دو بردار هم مبدأ باشند. بردار حاصل جمع، قطری است از متوازی الاضلاع است که با این دو بردار تشکیل می شود. به شـرط اینکه این بردار قطری هم مبدأ با دو بردار داده شده باشد.



حالت دوّم : اگر دو بردار طوری باشند که انتهای یکی ابتـدای دیگـری باشد. بردار حاصل جمع برداری است که مبدأ آن مبدأ اوّلی و انتهای آن انتهای دوّمی می باشد.

این روش برای حاصل جمع چند بردار که حالت های فوق را نداشته باشند، را نیز می توان بکـار بـرد. بـشرط اینکه از بردار های مساوی استفاده نمایید.



***

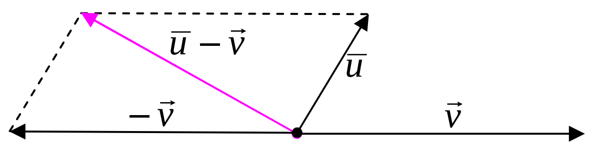
ج : تفاضل دو بردار

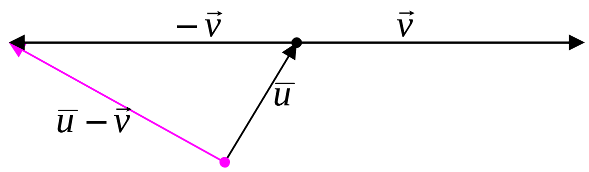
اگر $\vec{u}=(a_۱,b_۱)$ و $\vec{v}=(a_۲,b_۲)$ دو بردار باشند. در این صورت تفاضل ایـن دو بـردار بـه صـورت زیـر تعریف می شود.

$$\vec{u}-\vec{v}=(a_۱,b_۱)-(a_۲,b_۲)=(a_۱-a_۲,b_۱-b_۲)$$

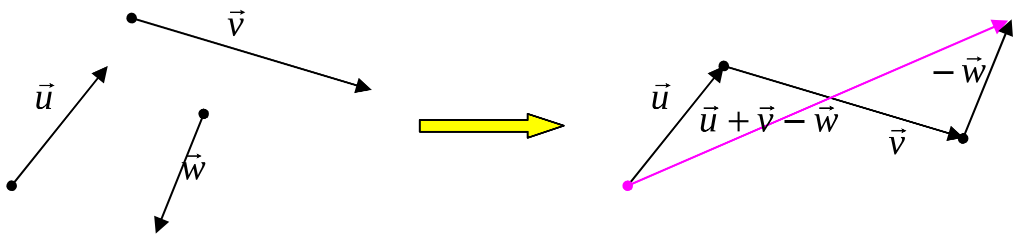
یعنی بردار $\vec{u}-\vec{v}$ با حاصل جمع بردار اوّلی با قرینه‌ی بردار دوّمی بدست می آید.

بطور مشابه نمایش هندسی تفاضل دو بردار به شکل های زیر است.





برای مثال داریم:



توجه : هر بردار را می‌توان برحسب بردارهای واحد مختصات نوشت:

$$\vec{u}=(a,b)$$
$$\rightarrow \vec{u}=(a,۰)+(۰,b)$$
$$\rightarrow \vec{u}=a(۱,۰)+b(۰,۱)$$
$$\rightarrow \vec{u}=\vec{ai}+\vec{bj}$$

مثال : بردار $\vec{u}=۵\vec{i}-۴\vec{j}$ را در نظر بگیرید.

الف) مختصات این بردار را بنویسید.

ب) اندازه‌ی بردار را بدست آورید.

حل :

$$\vec{u}=(۵,-۴)\rightarrow \|\vec{u}\|=\sqrt{۲۵+۱۶}=\sqrt{۴۱}$$

د : ضرب داخلی دو بردار

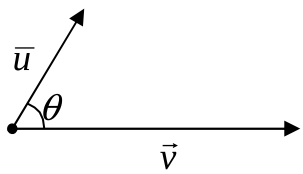
اگر $\vec{u}=(a_1,b_1)$ و $\vec{v}=(a_2,b_2)$ دو بردار باشند. در این صورت ضرب داخلی[2] این دو بردار عددی است که به صورت های محاسبه می شود.

حالت اوّل : اگر مختصات دو بردار معلوم باشد.

$$\vec{u}.\vec{v}=a_1a_2+b_1b_2$$

حالت دوّم : اگر اندازه های دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ زاویه‌ی بین آنها معلوم باشد.

$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\theta$$



توجه : زاویه بین دو بردار، کوچکترین زاویه ای است که بین دو بردار وجود دارد. لذا $0\leq\theta\leq\pi$

***

مثال : اگر $\vec{u}=(2,-3)$ و $\vec{v}=(-4,7)$ تساوی‌های زیر را کامل کنید.

۱) $2\vec{u}=$

۲) $-\vec{v}=$

۳) $\vec{u}+\vec{v}=$

۴) $\vec{u}-\vec{v}=$

۵) $\vec{v}-\vec{u}=$

۶) $2\vec{u}+3\vec{v}=$

۷) $\vec{u}.\vec{v}=$

۸) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=$

حل :

۱) $2\vec{u}=2(2,-3)=(4,-6)$

۲) $-\vec{v}=-(-4,7)=(4,-7)$

۳) $\vec{u}+\vec{v}=(2,-3)+(-4,7)=(-2,4)$

۴) $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(2,3)+(4,-7)=(6,-10)$

۵) $\vec{v}-\vec{u}=\vec{v}+(-\vec{u})=(-4,7)+(-2,3)=(-6,10)$

---

2 . ضرب عددی یا ضرب نقطه ای نیز نامیده می شود.

$$۶)\ ۲\vec{u}+۳\vec{v}=۲(۲,-۳)+۳(-۴,۷)=(۴,-۶)+(-۱۲,۲۱)=(-۸,۱۵)$$

$$۷)\ \vec{u}.\vec{v}=(۲)(-۴)+(-۳)(۷)=-۸-۲۱=-۲۹$$

$$۸)\ (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=(-۲)(۶)+(۴)(-۱۰)=-۱۲-۴۰=-۵۲$$

تذکر: ضرب داخلی دو بردار همواره یک عدد حقیقی است.

مثال : اگر $\|\vec{u}\|=۳$ و $\|\vec{v}\|=۱۰$ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر۶۰ درجه باشد حاصل ضرب داخلی این دو بردار را بدست آورید.

حل :

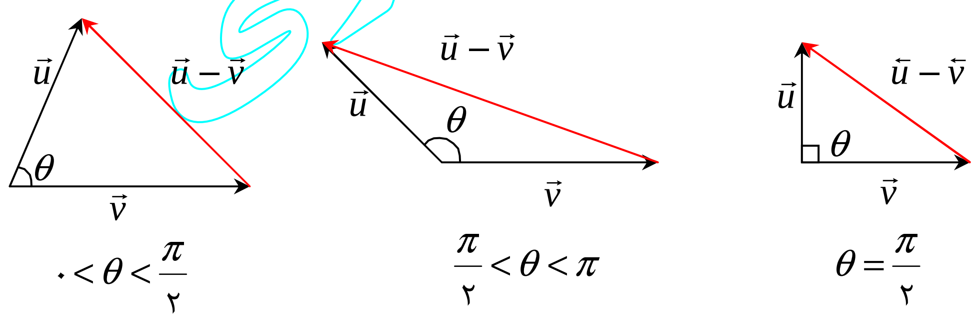
$$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta=۳\times۱۰\times\cos۶۰=۳\times۱۰\times\frac{۱}{۲}=۱۵$$

توجه داشته باشید که، دو روش محاسبه‌ی ضرب داخلی دو بردار، قابل تبدیل به همدیگر هستند.به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

قضیه : اگر $\vec{u}=(a_۱,b_۱)$ و $\vec{v}=(a_۲,b_۲)$ دو بردار باشند، در این صورت

$$\vec{u}.\vec{v}=a_۱a_۲+b_۱b_۲$$

اثبات: با توجه به حالت های مختلف، اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو بردار، مثلث های زیر را رسم می کنیم. در هر حالت، طبق قضیه‌ی کسینوس ها داریم.



$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^۲=\|\vec{u}\|^۲+\|\vec{v}\|^۲-۲\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\cos\theta$$

$$\rightarrow\|\vec{u}-\vec{v}\|^۲=\|\vec{u}\|^۲+\|\vec{v}\|^۲-۲\vec{u}.\vec{v}$$

اکنون با توجه به اندازه‌ی بردار ها می توان نوشت:

$$(a_۱-a_۱)^۲+(b_۲-b_۲)^۲=(a_۱{}^۲+b_۱{}^۲)+(a_۲{}^۲+b_۲{}^۲)-۲\vec{a}.\vec{b}$$

پس :

$$-۲a_۱a_۲-۲b_۱b_۲=-۲\vec{a}.\vec{b}$$

در نتیجه:

$$-۲(a_۱a_۲+b_۱b_۲)=-۲\vec{a}.\vec{b}$$

و لذا

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱a_۲+b_۱b_۲$$

اگر $\theta=۰$ یا $\theta=\pi$ باشد. قضیه بدیهی است.

تمرین برای حل :

۱۵ : حاصل تساوی های زیر را بدست آورید.

الف) $a\begin{bmatrix}-۱\\ ۲\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}=$

ب) $(۲\vec{i}+۳\vec{j})+۲(-۳\vec{i}+۲\vec{j})-(\vec{i}+\vec{j})=$

ج) $(۲\vec{i}-۷\vec{j})+(۴\vec{i}+۵\vec{j})=$

د) $(۵\vec{i}+۲\vec{j}).(۱۰\vec{i}-۲\vec{j})=$

۱۶ : در هر مورد مختصات بردار $\vec{x}$ را به دست آورید.

الف) $\begin{bmatrix}۶\\ ۱۲\end{bmatrix}+\vec{x}=\begin{bmatrix}۳\\ ۷\end{bmatrix}$ ب) $-۴\begin{bmatrix}۵\\ -۲\end{bmatrix}+۲\vec{x}=\begin{bmatrix}۶\\ ۴\end{bmatrix}$ ج) $\vec{x}-۲\begin{bmatrix}-۱\\ ۳\end{bmatrix}=۳\begin{bmatrix}۱\\ -۵\end{bmatrix}$

***

تعیین زاویه‌ی بین دو بردار

با توجه به تعریف ضرب داخلی دو بردار ، به سهولت می توان رابطه‌ی زیر را برای تعیین زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را بکار برد.

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$$

مثال : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{v}=۲\vec{i}$ و $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ را بدست آورید.

حل :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{(۲)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۴+۰}=۲$$

$$\vec{u}.\vec{v}=(۱)(۲)+(۱)(۰)=۲+۰=۲$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}=\frac{۲}{(\sqrt{۲})(۲)}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\theta=۴۵^\circ$$

تمرین برای حل :

۱۷ : کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{v}=(۳,۲)$ و $\vec{u}=(۴,۳)$ را محاسبه کنید.

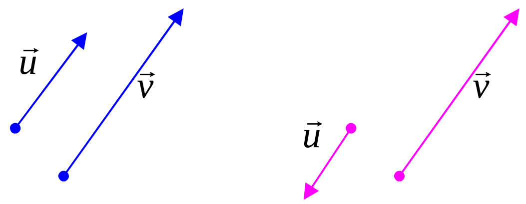
۱۸ : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{v}=(۱,\sqrt{۳})$ و $\vec{u}=(\sqrt{۳},۱)$ را بدست آورید.

۱۹ : اگر $\|\vec{u}\|=۱$ و $\|\vec{v}\|=۲$ و $\vec{u}.\vec{v}=\sqrt{۳}$. زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را بدست آورید.

***

بردارهای موازی

دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازی هستند، هرگاه عدد حقیقی و غیر صفر r وجود داشته باشد که $\vec{u}=r\vec{v}$



با این تعریف، به سهولت می توان گفت که اگر $\vec{u}=(a_۱,b_۱)$ و $\vec{v}=(a_۲,b_۲)$ دو بردار موازی باشند، پس

$$\vec{u}=r\vec{v}$$

$$(a_۱,b_۱)=r(a_۲,b_۲)$$

$$(a_۱,b_۱)=(ra_۲,rb_۲)$$

$$\rightarrow\begin{cases}a_۱=ra_۲\rightarrow\dfrac{a_۱}{a_۲}=r\\ b_۱=rb_۲\rightarrow\dfrac{b_۱}{b_۲}=r\end{cases}\rightarrow\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲}$$

مثال : نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(۷,-۳)$ و $\vec{v}=(-۱۴,۶)$ موازیند.

حل :

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_۱}{a_۲} = \dfrac{۷}{-۱۴} = -\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{b_۱}{b_۲} = \dfrac{-۳}{۶} = -\dfrac{۱}{۲} \end{cases} \rightarrow \dfrac{a_۱}{a_۲} = \dfrac{b_۱}{b_۲} \rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$$

تمرین برای حل :

۲۰ : در هر مورد موازی بودن دو بردار داده شده را بررسی کنید.

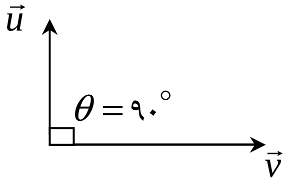
الف) $\vec{u} = (۶,\sqrt{۸})$ و $\vec{v} = (۳,\sqrt{۲})$ ب) $\vec{u} = (۵,-۳)$ و $\vec{v} = (۴,۲)$

۲۱ : اگر دو بردار $\vec{u} = (۵,۱۰)$ و $\vec{v} = (m-۱,۲)$ موازی باشند. مقدار m را تعیین کنید.

***

بردارهای متعامد

دو بردار بر هم عمودند، هرگاه زاویه‌ی بین آنها برابر ۹۰ درجه باشد.



$$\theta = ۹۰^\circ \rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

با توجه به تعریف ضرب داخلی به سهولت می توان گفت که دو بردار بر هم عمودند ، هرگاه ضرب داخلی آنها صفر شود و برعکس

$$\vec{u}.\vec{v} = ۰ \quad \leftrightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$$

مثال : نشان دهید که دو بردار $\vec{u} = (-۱,\sqrt{۳})$ و $\vec{v} = (۶,۲\sqrt{۳})$ برهم عمودند.

حل :

$$\begin{aligned} &\vec{u}.\vec{v} = (-۱)(۶) + (\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳}) \\ &= -۶ + ۲(۳) \\ &= -۶ + ۶ = ۰ \rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \end{aligned}$$

***

تمرین برای حل :

۲۲ : نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(۳,۵)$ و $\vec{v}=(-۵,۳)$ برهم عمودند.

۲۳ : در هر مورد عمود بودن دو بردار داده شده را بررسی کنید.

الف) $\vec{u}=(۵,\sqrt{۲})$ و $\vec{v}=(۰,\sqrt{۲})$　　　　ب) $\vec{u}=(۳,\sqrt{۳})$ و $\vec{v}=(-۲,\sqrt{۱۲})$

۲۴ : مقدار m را چنان تعیین کنید که دو بردار $\vec{u}=(m+۱,۳m)$ و $\vec{v}=(۴,۲)$ برهم عمود باشند.

۲۵ : اگر $A=\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۷\\۵\end{bmatrix}$ سه رأس مثلثی باشند. نشان دهید که این مثلث قائم الزاویه است.

۲۶ : اگر $A=\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۵\\-۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۴\\۳\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}۲\\۶\end{bmatrix}$ مختصات رئوس چهار ضلعی $ABCD$ باشند. به روش برداری ثابت کنید که دو قطر AC و BD بر هم عمودند.

***

تهیه کننده : جابرعامری

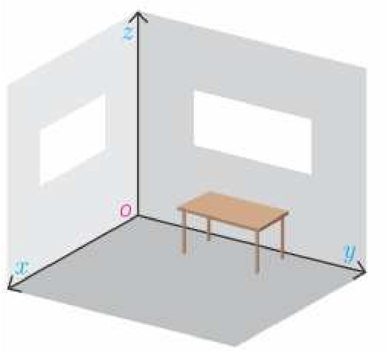
عضو گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس دوّم : بردار در فضای سه بعدی

در این درس ابتدا به معرفی فضای سه بعدی پرداخته و در ادامه به مفهوم بردار و ویژگی های آن و همچنین اعمال روی بردار در فضای سه بعدی می پردازیم.

فضای سه بعدی



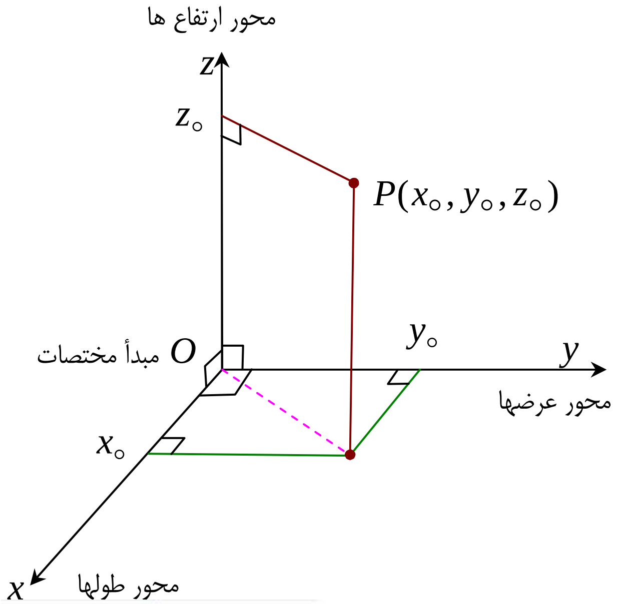
اگر R مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد در این صورت مجموعه‌ی

$$R^۳ = R\times R\times R=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in R\}$$

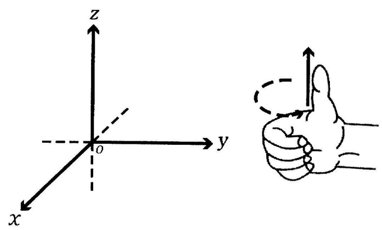
فضای سه بعدی نامیده می شود. هر نقطه در فضای سه بعدی نسبت به سه محور دو به دو عمود بر هم که از یک نقطه می گذرند، مشخص می شود. بنابراین هر نقطه در $R^۳$ دارای سه مؤلفه است.

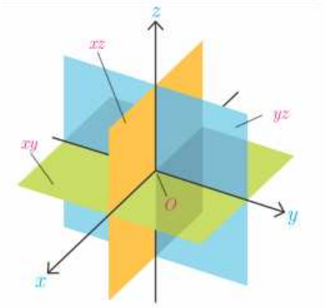
$x_\circ$ را طول، $y_\circ$ را عرض و $z_\circ$ را ارتفاع می نامند.

$$P(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$$



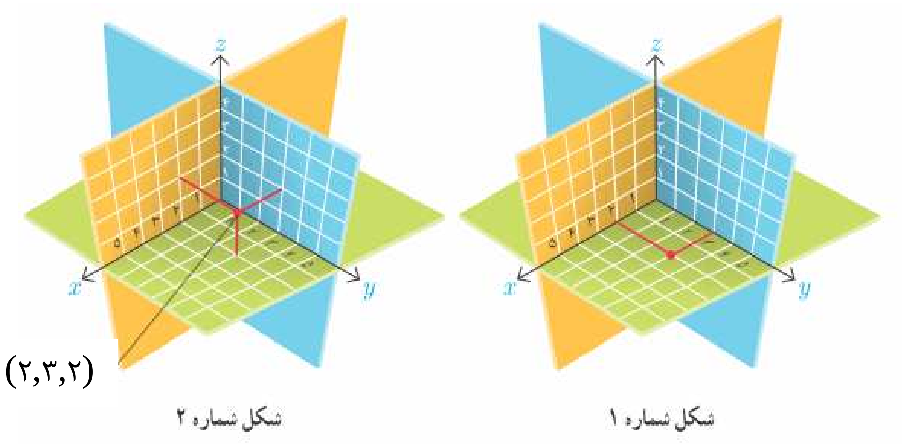
در فضای سه بعدی، سه صفحه مختصات موجود است و لذا هشت ناحیه (کُنج[1]) در فضا شکل می گیرد. توجه داشته باشید که دستگاه مختصات سه بعدی راست گرد است یعنی با انگشتان دست راست جهت مثبت محور ها را می توان مشخص کرد.



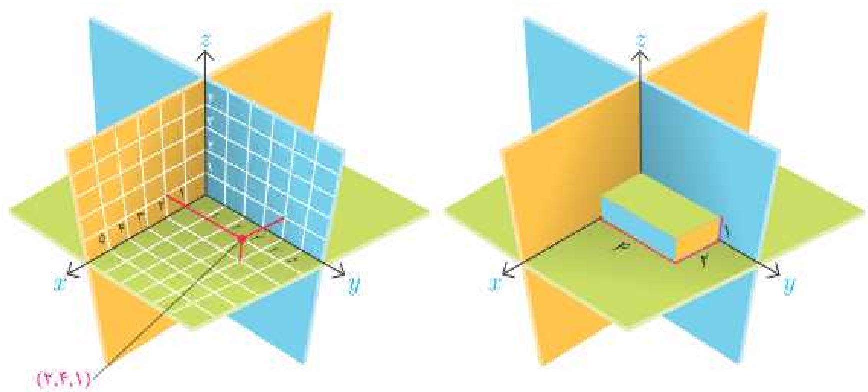


[1] . از برخورد سه صفحه‌ی دو به دو متقاطع یک کنج تشکیل می شود.

برای تعیین موقعیت یک نقطه مانند $P(۲,۳,۲)$ در فضای سه بعدی ابتدا نقطه‌ی $(۲,۳)$ در صفحه‌ی xOy را تعیین و سپس نقطه‌ی بدست آمده را ۲ واحد در جهت مثبت موازی محور ارتفاع ها انتقال می دهیم. به شکل های زیر توجه کنید.

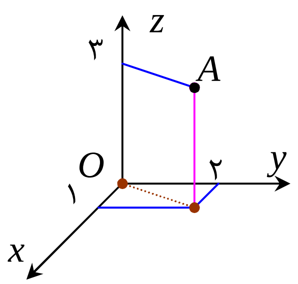


در شکل زیر نیز موقعیت نقطه‌ی $P(۲,۴,۱)$ را مشاهده می کنید.



مثال : نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ را در دستگاه مختصات سه بعدی مشخص کنید.

حل : ابتدا نقطه‌ی $(۱,۲)$ در صفحه‌ی xOy را تعیین کرده و سپس به موازت محور z ها به اندازه‌ی سه واحد در جهت مثبت انتقال می دهیم.



تمرین ۱ : هر یک از نقاط زیر را روی دستگاه مختصات سه بعدی نمایش دهید.

الف) $A(-۱,۲,۴)$ ب) $B(۲,۰,۱)$ ج) $D(۰,۰,۵)$

تذکر:

۱ : اگر یک مؤلفه از سه مؤلفه‌ی نقطه ای صفر باشد، آن نقطه روی صفحه ای قرار می گیرد که مؤلفه های نظیر آن صفر نباشند. مثلاً نقطه‌ی $A(۰,۲,۳)$ روی صفحه‌ی yoz قرار می گیرد.

۲ : اگر دو مؤلفه از سه مؤلفه‌ی نقطه ای صفر باشند، آن نقطه روی محوری از دستگاه مختصات قرار می گیرد که مؤلفه‌ی متناظر آن صفر نباشد. مثلاً نقطه‌ی $A(۰,۲,۰)$ روی محور y ها قرار می گیرد.

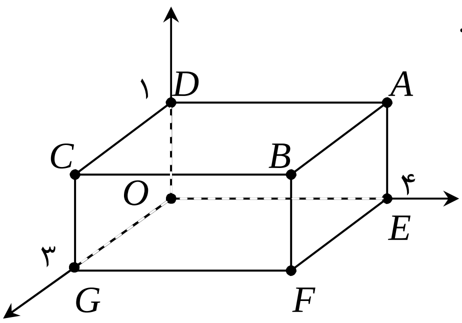
۳ : علامت سه مؤلفه‌ی یک نقطه و نواحی هشتگانه در دستگاه سه بعدی به شرح جدول زیر است.

شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

برای مثال، نقطه ای به مختصات $P(۳,۱,-۲)$ در ناحیه‌ی پنجم قرار دارد.

***

تمرین ۱ : با توجه به شکل مقابل به سئوالات زیر پاسخ دهید.



الف : مختصات تمامی رئوس مکعب را بنویسید.

ب : معادلات تمامی یال ها را بنویسید.

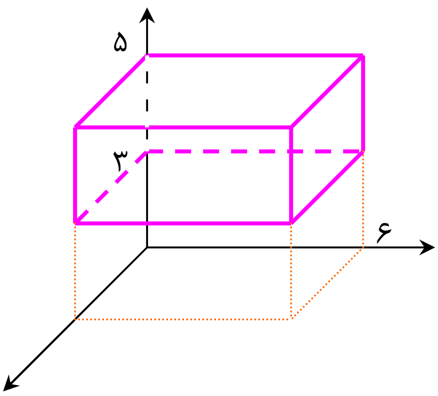
پ : معادلات تمامی وجوه را بنویسید.

ت : مختصات نقطه ای را بنویسید که روی سه وجه متفاوت واقع باشد.

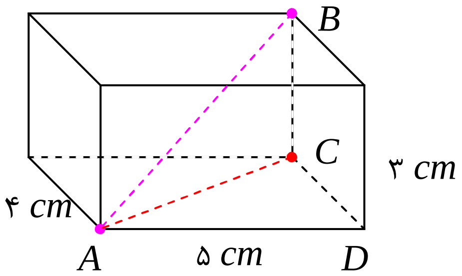
ث : مختصات نقطه ای را بنویسید که روی دو وجه متفاوت باشد.

ج : مختصات نقطه ای را بنویسید که روی یک وجه باشد.

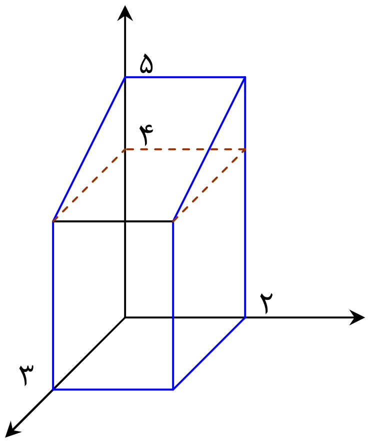
تمرین ۲ : با توجه به شکل مقابل، معادلات تمام وجوه و یالها و مختصات تمام رئوس را بنویسید.



تمرین ۳ : قطر مکعب مستطیل، پاره خطی است که دو رأس غیر واقع بر یک وجه را به هم وصل می کند. با توجه به شکل مقابل، اندازه‌ی قطر مکعب مستطیل را محاسبه کنید.



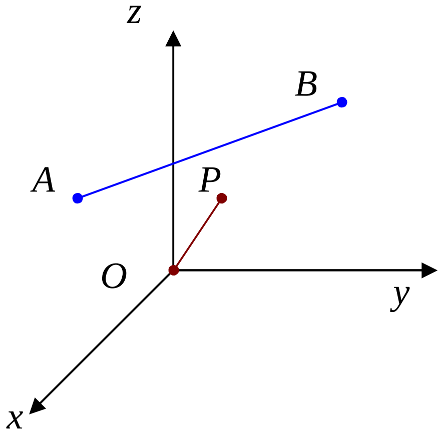
تمرین ۴ : حجم چند وجهی مقابل را محاسبه کنید.



***

اندازه‌ی پاره خط (طول پاره خط)

اگر A و B دو نقطه در دستگاه مختصات سه بعدی باشند، در این صورت واضح است که :



$$\| AB \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

نتیجه: فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه در فضا، تا مبدأ مختصات، به صورت زیر است.

$$\| OP \| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

مثال : اگر $A(3,1,-1)$ و $B(1,0,2)$ طول پاره خط AB را بدست آورید.

حل :

$$\| AB \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\|AB\| = \sqrt{(۱-۳)^۲ + (۰-۱)^۲ + (۲+۱)^۲} = \sqrt{۴+۱+۹} = \sqrt{۱۴}$$

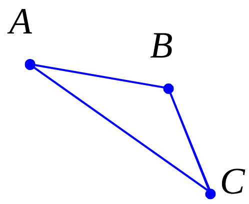
تمرین۵ : فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۱,-۱,\sqrt{۷})$ تا مبدأ مختصات را بدست آورید.

تمرین۶ : اگر نقاط M و N به ترتیب تصاویر قائم نقطه‌ی $A(۳,-۴,۲)$ بر صفحات xoz و yoz باشند. طول پاره خط MN را محاسبه کنید.

***

ویژگی های طول پاره خط

اگر C و B و A سه نقطه فرض شوند، در این صورت



الف) اگر B و A روی هم منطبق باشند، آنگاه $\|AB\|=۰$ و برعکس.

یعنی $\|AB\|=۰$ اگر و فقط اگر $A=B$

ب) طول پاره خط های BA و AB برابر است. $\|AB\|=\|BA\|$

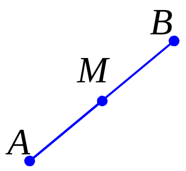
ج) در هر مثلث مجموع طولهای هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است. (نامساوی مثلثی)

$$\|AB\|+\|BC\|>\|AC\|$$

***

مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط

اگر M نقطه‌ی میانی پاره خط AB فرض شود، در این صورت



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{۲}$$

مثال : اگر $A(۱,۰,۲)$ و $B(۳,۱,-۱)$

الف) مختصات نقطه‌ی M نقطه‌ی وسط پاره خط AB را بدست آورید.

ب) طول پاره خط OM را تعیین کنید.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۱+۳}{۲}=۲ \\ y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۰+۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \\ z_M=\frac{z_A+z_B}{۲}=\frac{۲+(-۱)}{۲}=\frac{۱}{۲} \end{array}\right\}\rightarrow M(۲,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$$

$$\|OM\|=\sqrt{(۲)^۲+(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{۴+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{\frac{۹}{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین برای حل :

۷ : اگر $A(۱,۰,۲)$ و $B(۳,۲,۳)$ و $C(۱,۲,-۱)$ سه رأس مثلثی باشند، طول میانه‌ی AM را بیابید.

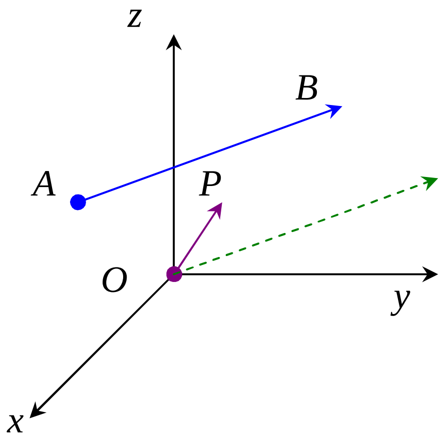
۸ : اگر $A(-۱,-۳,۲)$ و $B(۱,۲,-۳)$ و مبدأ مختصات سه رأس یک مثلث باشند،

الف: نوع مثلث AOB را تعیین کنید .   ب : طول میانه‌ی OM را بیابید.

۹ : نوع مثلثی را تعیین کنید که $A(۵,۱,۵)$ و $B(۴,۳,۲)$ و $C(-۳,-۲,۱)$ سه رأس آن باشند،

***

بردارها در فضای سه بعدی



هر پاره خط جهت دار در فضای $R^۳$ را یک پیکان می نامند. مانند پیکان $\overrightarrow{AB}$

هر پیکان دارای مختصاتی به صورت زیر است.

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$$

دو پیکان وقتی مساویند که مختصات یکسان داشته باشند.

به عبارت دیگر هم جهت، هم راستا و هم اندازه باشند.

هر پیکان که نقطه‌ی ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را یک بردار (بردار مکان) در $R^۳$ می نامند. مانند $\overrightarrow{OP}$

هر بردار در $R^۳$ با مختصات نقطه‌ی پایانی آن نمایش داده می شود. مثلاً می نویسند:

$$\vec{p}=(a_۱,a_۲,a_۳)$$

که در آن اعداد حقیقی $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ مؤلفه های بردار نامیده می شوند.

تذکر: هر پیکان در فضای R^{3} دارای یک بردار مساوی آن می باشد. بنابراین در اینجا فقط ویژگی های بردار ها را بررسی می کنیم.

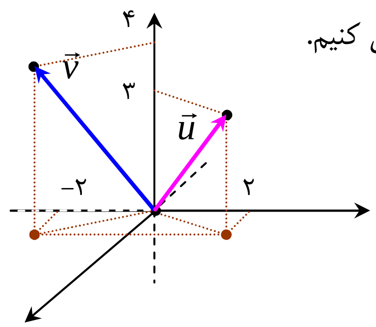
مثال : اگر $A(1,2,4)$ ابتدا و $B(-1,3,2)$ انتهای یک پیکان باشند. مختصات بردار (بردار مکان) مساوی پیکان $\overrightarrow{AB}$ را بدست آورید.

حل :

$$\overrightarrow{AB}=(-1-1,3-2,2-4)=(-2,1,-2)$$

مثال : بردار های $\vec{u}=(1,2,3)$ و $\vec{v}=(1,-2,4)$ را در دستگاه R^{3} نمایش دهید.

حل : کافی است ابتدا مختصات نقاط $(1,2,3)$ و $(1,-2,4)$ را تعیین کنیم.



نتیجه :

۱ : بین بردار های R^{3} و نقاط فضای R^{3} یک تناظر دو سویی برقرار است.یعنی هر نقطه‌ی R^{3} را می توان با یک بردار و هر بردار را می توان با یک نقطه در R^{3} نمایش داد.

۲ : برداری که نقطه‌ی پایانی آن مبدأ مختصات باشد را بردار صفر می نامند و آنرا با $\vec{o}$ نمایش می دهند.

$$\vec{o}=(0,0,0)$$

۳ : طول بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ که با $\|\vec{a}\|$ نشان داده می شود، برابر است با

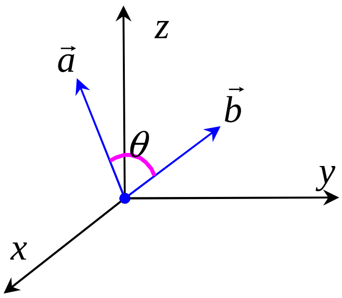
$$\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

در این صورت برای هر بردار مانند $\vec{a}$ در فضا می توان نوشت:

$$\|\vec{a}\|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

۴ : دو بردار را مساوی گویند هرگاه مؤلفه های نظیر به نظیر آنها مساوی باشند.

$$(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)\rightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$$



۵ : زاویه‌ی بین دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ زاویه ای است مانند θ که همواره در محدوده‌ی $0 \le \theta \le \pi$ قرار دارد. در واقع زاویه‌ی بین دو بردار ، کوچکترین زاویه ای است که بین آن دو بردار قرار دارد.

***

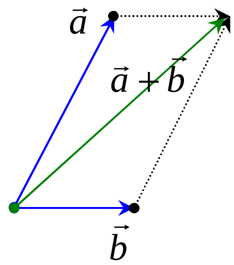
اعمال روی بردار ها

برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ در فضا می توان اعمال زیر را تعریف کرد.

الف : جمع دو بردار

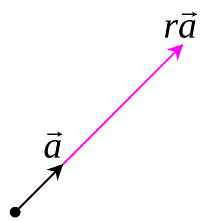
اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار دلخواه باشند، حاصل **جمع این دو بردار** را که با $\vec{a}+\vec{b}$ نشان می دهیم، به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$



***

ب : ضرب عدد حقیقی در بردار



اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ یک بردار و r یک عدد حقیقی باشد،حاصل ضرب r در بردار $\vec{a}$ که به **ضرب اسکالر** معروف است، را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$r\vec{a}=r(a_1,a_2,a_3)=(ra_1,ra_2,ra_3)$$

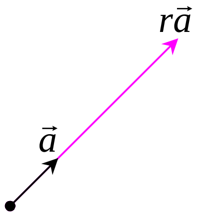
نتیجه :

۱ : قرینه‌ی بردار $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نمایش می دهند که از حاصل ضرب عدد ۱− در بردار $\vec{a}$ بدست می آید.

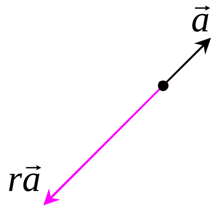
$$-\vec{a}=-۱\vec{a}=(-a_۱,-a_۲,-a_۳)$$

۲ : اگر r یک عدد حقیقی و $\vec{a}$ یک بردار باشد، در این صورت

الف) اگر r مثبت باشد، بردار $r\vec{a}$ با بردار $\vec{a}$ هم جهت است.



۳ : اگر r منفی باشد، بردار $r\vec{a}$ در جهت مخالف بردار $\vec{a}$ است.



۴ : اگر r صفر باشد، بردار $r\vec{a}$ نیز صفر است.

۵ : در هر صورت $\|r\vec{a}\|=|r|\times\|\vec{a}\|$ زیرا :

$$\|r\vec{a}\|=\sqrt{(ra_۱)^۲+(ra_۲)^۲+(ra_۳)^۲}=\sqrt{r^۲a_۱{}^۲+r^۲a_۲{}^۲+r^۲a_۳{}^۲}$$

$$=\sqrt{r^۲(a_۱{}^۲+a_۲{}^۲+a_۳{}^۲)}=|r|\sqrt{a_۱{}^۲+a_۲{}^۲+a_۳{}^۲}=|r|\times\|\vec{a}\|$$

۶ : اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر صفر و موازی باشند، پس وجود دارد یک عدد حقیقی و ناصفر مانند r بطـوری که $\vec{a}=r\vec{b}$

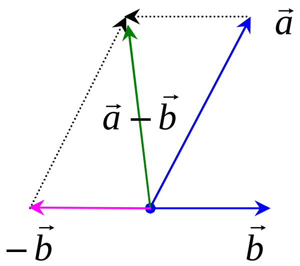
مثال : نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(۲,-۱,۴\sqrt{۳})$ و $\vec{v}=(-۱,\frac{۱}{۲},-۲\sqrt{۳})$ موازی یکدیگرند.

حل : چون $\vec{u}=-۲\vec{v}$ پس این دو بردار موازیند.

***

پ : تفاضل دو بردار

اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار دلخـواه باشـند، در این صورت **تفاضل این دو بردار** یعنـی $\vec{a}-\vec{b}$ را مـی تـوان بـه صورت زیر تعریف کرد.



$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_۱,a_۲,a_۳)+(-b_۱,-b_۲,-b_۳)=(a_۱-b_۱,a_۲-b_۲,a_۳-b_۳)$$

مثال : اگر $\vec{u}=(۳,۲,-۱)$ و $\vec{v}=(۳,-۱,۱)$ تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\vec{u}+\vec{v}=$ ب) $\vec{u}-\vec{v}=$ ج) $-۲\vec{u}=$

حل :

الف) $\vec{u}+\vec{v}=(۳,۲,-۱)+(۳,-۱,۱)=(۶,۱,۰)$

ب) $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(۳,۲,-۱)+(-۳,۱,-۱)=(۰,۳,-۲)$

ج) $-۲\vec{u}=-۲(۳,۲,-۱)=(-۶,-۴,۲)$

مثال : اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۲)$ و $\vec{b}=(-۴,-۱,۰)$ تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\vec{a}+\vec{b}=$ ۴) $۳\vec{a}-۲\vec{b}=$ ۷) $\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|=$

۲) $\vec{a}-\vec{b}=$ ۵) $\|\vec{a}\|=$ ۸) $\|۲\vec{a}\|=$

۳) $۲\vec{a}=$ ۶) $\|\vec{b}\|=$ ۹) $\|\vec{a}+\vec{b}\|=$

حل :

۱) $\vec{a}+\vec{b}=(۱,-۳,۲)+(-۴,-۱,۰)=(-۳,-۴,۲)$

۲) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(۱,-۳,۲)+(۴,۱,۰)=(۵,-۲,۲)$

۳) $۲\vec{a}=۲(۱,-۳,۲)=(۲,-۶,۴)$

۴) $۳\vec{a}-۲\vec{b}=۳(۱,-۳,۲)-۲(-۴,-۱,۰)=(۳,-۹,۶)+(۸,۲,۰)=(۱۱,-۷,۶)$

۵) $\|\vec{a}\|=\sqrt{(۱)^۲+(-۳)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{۱+۹+۴}=\sqrt{۱۴}$

۶) $\|\vec{b}\|=\sqrt{(-۴)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۱۶+۱+۰}=\sqrt{۱۷}$

۷) $\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|=\sqrt{۱۴}+\sqrt{۱۷}$

۸) $\|۲\vec{a}\|=۲\|\vec{a}\|=۲\sqrt{۱۴}$

۹) $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{(-۳)^۲+(-۴)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{۹+۱۶+۴}=\sqrt{۲۹}$

مثال : با فرض $\vec{a}=(۲,۱,۳)$ و $\vec{b}=(-۱,۲,۲)$ طول بردار های $۲\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+۳\vec{b}$ را محاسبه کنید.

حل :

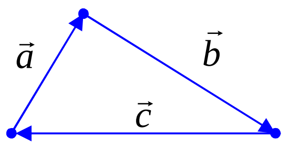
$$۲\vec{a}-\vec{b}=۲(۲,۱,۳)+(۱,-۲,-۲)=(۵,۰,۴)\rightarrow\|۲\vec{a}-\vec{b}\|=\sqrt{۲۵+۰+۱۶}=\sqrt{۴۱}$$

$$\vec{a}+۳\vec{b}=(۲,۱,۳)+۳(-۱,۲,۲)=(۲,۱,۳)+(-۳,۶,۶)=(-۱,۷,۹)$$

$$\rightarrow\|\vec{a}+۳\vec{b}\|=\sqrt{۱+۴۹+۸۱}=\sqrt{۱۳۱}$$

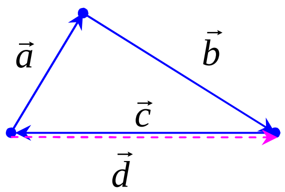
***

مثال : با توجه به شکل زیر ثابت کنید که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$



حل: واضح است که $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$ و $\vec{d}=-\vec{c}$ لذا :

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}+\vec{c}=-\vec{c}+\vec{c}=\vec{o}$$



تمرین برای حل :

۱۰ : با فرض $A(۲,۱,۰)$ و $B(۳,-۱,t)$. مقدار t را چنان بیابید که طول بردار مساوی پیکان $\overrightarrow{AB}$ برابـر ۳ شود.

۱۱: با استفاده از بردار ها نشان دهید نقاط $A(۲,۲,۲)$ و $B(-۱,۳,۳)$ و $C(۰,۱,۲)$ و $D(۳,۰,۱)$ رأس های یک متوازی الاضلاع می باشند.

***

خواص اعمال روی بردار ها

فرض کنیم که $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار دلخواه و $\vec{o}$ بردار صفر و r و s دو عدد حقیقی باشند، در این صورت:

۱) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ خاصیت جابجایی جمع بردار ها

۲) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ خاصیت شرکت پذیری جمع بردار ها

۳) $\vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}$

۴) $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{o}$

۵) $r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$

۶) $(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$

۷) $(rs)\vec{a}=r(s\vec{a})$

۸) $۱\vec{a}=\vec{a}$

۹) $۰\vec{a}=\vec{o}$

۱۰) $r\vec{o}=\vec{o}$

توجه داشته باشید که تمامی خواص فوق را می توان به کمک تعریف اثبات کرد. برای مثال :

$\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$

$$r(\vec{a}+\vec{b})=r(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,a_۳+b_۳)$$

$$=(r(a_۱+b_۱),r(a_۲+b_۲),r(a_۳+b_۳))=((ra_۱+rb_۱),(ra_۲+rb_۲),(ra_۳+rb_۳))$$

$$=(ra_۱,ra_۲,ra_۳)+(rb_۱,rb_۲,rb_۳)=r\vec{a}+r\vec{b}$$

تمرین۱۲: خواص دیگر اعمال روی بردار ها را ثابت کنید.

❋❋❋

بردار واحد (یکه)

هر بردار که اندازه‌ی آن برابر یک واحد طول باشد را **بردار واحد** می نامند.

مثال : نشان دهید که بردار $\vec{a}=(\frac{۳}{\sqrt{۱۴}},\frac{-۱}{\sqrt{۱۴}},\frac{-۲}{\sqrt{۱۴}})$ یک بردار واحد است.

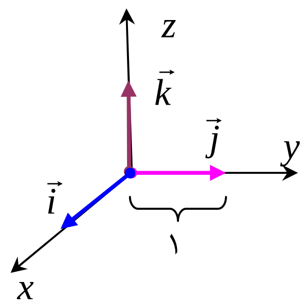
حل :

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(\frac{۳}{\sqrt{۱۴}})^۲+(\frac{-۱}{\sqrt{۱۴}})^۲+(\frac{-۲}{\sqrt{۱۴}})^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۱۴}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۴}{۱۴}}=\sqrt{\frac{۱۴}{۱۴}}=۱$$

از بین بردار های واحد، بردار های $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ و $\vec{k}=(۰,۰,۱)$ که از اهمیت ویژه ای برخوردارند را بردار های واحد مختصات (بردار های استاندارد) می نامند.

هر بردار را می توان برحسب بردار های واحد مختصات نوشت.

$$\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$$
$$\to \vec{a}=(a_۱,۰,۰)+(۰,a_۲,۰)+(۰,۰,a_۳)$$
$$\to \vec{a}=a_۱(۱,۰,۰)+a_۲(۰,۱,۰)+a_۳(۰,۰,۱)$$
$$\to \vec{a}=a_۱\vec{i}+a_۲\vec{j}+a_۳\vec{k}$$



مثال : بردار $\vec{u}=(۲,-۳,۵)$ را بر حسب بردار های مختصات بنویسید.

حل :

$$\vec{u}=(۲,-۳,۵)=۲\vec{i}-۳\vec{j}+۵\vec{k}$$

مثال : بردار $\vec{a}=\vec{i}+۲\vec{j}-۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید. برداری مانند $\vec{b}$ معرفی کنید به طوری که :

الف : طول آن برابر ۵ و موازی و هم جهت با $\vec{a}$ باشد.

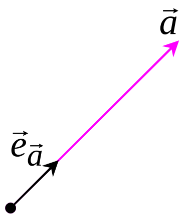
ب : طول آن برابر ۲ و موازی و مخالف جهت با $\vec{a}$ باشد.

حل :

$$\|\vec{b}\|=۵\ ,\ \|\vec{a}\|=\sqrt{۱+۴+۴}=۳$$

$$\vec{b}=\frac{۵}{۳}\vec{a}=\frac{۵}{۳}(\vec{i}+۲\vec{j}-۲\vec{k})=\frac{۵}{۳}\vec{i}+\frac{۱۰}{۳}\vec{j}-\frac{۱۰}{۳}\vec{k}$$

$$\vec{b}=-\frac{۲}{۳}\vec{a}=-\frac{۲}{۳}(\vec{i}+۲\vec{j}-۲\vec{k})=-\frac{۲}{۳}\vec{i}-\frac{۴}{۳}\vec{j}+\frac{۴}{۳}\vec{k}$$



برای هر بردارغیر صفر مانند $\vec{a}$ برداری موسوم بـه **بردار جهت** $\vec{a}$ مـی تـوان بـه صورت زیر تعریف کرد.

$$\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{۱}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$$

مثال : اگر $\vec{a}=(۳,-۱,۲)$ یک بردار باشد.

الف: بردار $\vec{a}$ را بر حسب بردار های واحد مختصات بنویسید.

ب : اندازه‌ی بردار $\vec{a}$ را تعیین کنید. ج : بردار جهت بردار $\vec{a}$ را بنویسید.

حل :

الف) $\vec{a}=(۳,-۱,۲)=۳\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$

ب) $\|\vec{a}\|=\sqrt{(۳)^۲+(-۱)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{۹+۱+۴}=\sqrt{۱۴}$

ج) $\vec{e}_{\vec{a}}=\frac{۱}{\|\vec{a}\|}\vec{a}=\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}(۳,-۱,۲)=(\frac{۳}{\sqrt{۱۴}},-\frac{۱}{\sqrt{۱۴}},\frac{۲}{\sqrt{۱۴}})$

نتیجه :

۱ : چون $\frac{۱}{\|\vec{a}\|}$ مثبت است، بردار جهت بردار $\vec{a}$ هم راستا و هم جهت با $\vec{a}$ می باشد.

۲ : بردار جهت بردار $\vec{a}$ برداری با طول واحد است.

$$\|\vec{e}_{\vec{a}}\|=\|\frac{۱}{\|\vec{a}\|}\vec{a}\|=|\frac{۱}{\|\vec{a}\|}|\times\|\vec{a}\|=\frac{۱}{\|\vec{a}\|}\times\|\vec{a}\|=۱$$

۳ : بردار جهت بردار $\vec{a}$ جهت $\vec{a}$ را مستقل از اندازه‌ی آن مشخص می کند.

۴ : با توجه به تعریف بردار جهت می توان نوشت:

$$\vec{a}=\|\vec{a}\|\vec{e}_{\vec{a}}$$

یعنی هر بردار با یک کمیت عددی غیر منفی $\|\vec{a}\|$ که اندازه‌ی آن است و یـک جهـت $\vec{e}_{\vec{a}}$ مـشخص مـی شود.

تمرین برای حل :

۱۳: اگر $\vec{a}=۲\vec{i}-\sqrt{۳}\vec{j}+\sqrt{۵}\vec{k}$ و $r=۲$ باشد.

الف) اندازه‌ی بردار $r\vec{a}$ را بدست آورید. ب) بردار جهت بردار $r\vec{a}$ را بنویسید.

۱۴ : اگر $\vec{u}=۳\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{v}=(۳,-۱,۱)$ تساوی های زیر را کامل کنید.

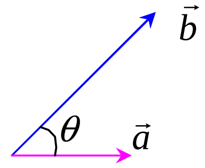
الف) $\vec{u}+\vec{v}=$ ب) $\vec{u}-\vec{v}=$ ج) $-۲\vec{u}=$

۱۵: اگر $\vec{a}=۳\vec{i}+۲\vec{j}$ و $\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ باشد. مختصات بردار $\vec{e}_{\vec{a}+\vec{b}}$ را تعیین کنید.

***

ضرب داخلی دو بردار

اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر صفر باشند و θ زاویه‌ی بین آنها در نظر گرفته شود.در این صورت ضرب داخلی (ضرب نقطه ای) دو بردار به شکل زیر تعریف می شود.



$$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta$$

مثال : اگر $\|\vec{b}\|=\sqrt{۳}$ و $\|\vec{a}\|=\sqrt{۱۲}$ و زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ برابر۳۰ درجه باشد. حاصل ضرب داخلی این دو بردار را بدست آورید.

حل :

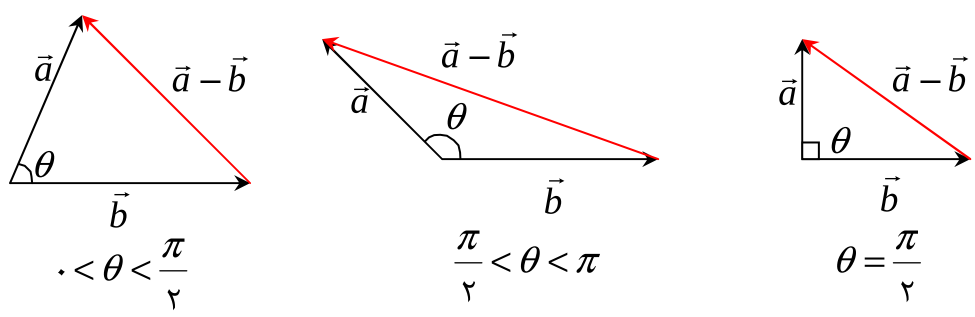
$$\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta=\sqrt{۳}\times\sqrt{۱۲}\times\cos(۳۰^\circ)=\sqrt{۳}\times۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$$

توجه داشته باشید که اگر مختصات دو بردار معلوم باشند، می توان مستقل از زاویه‌ی بین آن دو بردار ، ضرب داخلی را نیز محاسبه کرد. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

قضیه : اگر $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار باشند، در این صورت

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

اثبات: با توجه به حالت های مختلف، اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو بردار، مثلث های زیر را رسم می کنیم. در هر حالت، طبق قضیه‌ی کسینوس ها داریم.



$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^۲=\|\vec{a}\|^۲+\|\vec{b}\|^۲-۲\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta$$

$$\rightarrow\|\vec{a}-\vec{b}\|^۲=\|\vec{a}\|^۲+\|\vec{b}\|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}$$

اکنون با توجه به اندازه‌ی بردار ها می توان نوشت:

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-2\vec{a}.\vec{b}$$

پس :

$$-2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3=-2\vec{a}.\vec{b}$$

در نتیجه

$$-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=-2\vec{a}.\vec{b}$$

و لذا

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

اگر $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ باشد. قضیه بدیهی است.

مثال : اگر $\vec{a}=(1,2,-2)$ و $\vec{b}=(1,2,2)$ ضرب داخلی دو بردار را تعیین کنید.

حل :

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\rightarrow \vec{a}.\vec{b}=(1)(1)+(2)(2)+(-2)(2)=1+4-4=1$$

نتیجه :

۱: حاصل ضرب داخلی دو بردار همیشه یک عدد حقیقی است.

۲ : برای هر بردار $\vec{u}$ همواره $\vec{u}.\vec{o}=0$

مثال : اگر $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار غیر صفر و $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$. آیا می توان نتیجه گرفت که $\vec{b}=\vec{c}$؟

پاسخ : خیر. مثال زیر نشان می دهد که $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ در حالی که $\vec{b}\neq\vec{c}$ است.

$$\left.\begin{array}{r}\vec{a}=(1,1,1)\\ \vec{b}=(2,-1,-1)\\ \vec{c}=(4,-2,-2)\end{array}\right\}\rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}\nrightarrow\vec{b}=\vec{c}$$

لذا قانون حذف در ضرب داخلی دو بردار ، برقرار نمی باشد.

***

ویژگی های ضرب داخلی دو بردار

ویژگی اوّل ضرب داخلی: ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد. یعنی :

$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$$

اثبات:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=b_۱a_۱+b_۲a_۲+b_۳a_۳=\vec{b}.\vec{a}$$

ویژگی دوّم ضرب داخلی: برای هر بردار $\vec{a}$ همواره

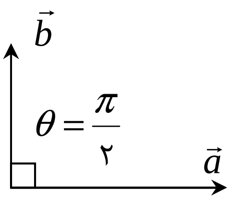
$$\vec{a}.\vec{a}=\|\vec{a}\|^۲$$

اثبات:

$$\vec{a}.\vec{a}=a_۱a_۱+a_۲a_۲+a_۳a_۳=a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲=\|\vec{a}\|^۲$$

ویژگی سوّم ضرب داخلی: برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ اگر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود است، آنگاه $\vec{a}.\vec{b}=۰$ و برعکس

اثبات: اگر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود باشد. پس:



$$\theta=\frac{\pi}{۲}\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\overbrace{\cos\theta}^{۰}=۰$$

اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$ پس $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta=۰$ و چون $\|\vec{b}\|\neq۰$ و $\|\vec{a}\|\neq۰$ لذا $\cos\theta=۰$ یعنی $\theta=\frac{\pi}{۲}$

ویژگی چهارم ضرب داخلی: برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ و هر عدد حقیقی r همواره

$$r\vec{a}.\vec{b}=r(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.r\vec{b}$$

اثبات :

$$r\vec{a}.\vec{b}=(ra_۱)(b_۱)+(ra_۲)(b_۲)+(ra_۳)(b_۳)=r(a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳)=r(\vec{a}.\vec{b})$$

اثبات قسمت دوّم نیز به همین صورت انجام می گیرد.

ویژگی پنجم ضرب داخلی: اگر $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار باشند،آنگاه

الف) $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

ب) $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$

اثبات: گیریم که $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ در این صورت:

$$\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$$

اثبات قسمت دیگر نیز به همین صورت انجام می گیرد.

نتیجه : اگر $\vec{d}$ و $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ چهار بردار باشند، پس:

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}).\vec{d}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{d}+\vec{b}.\vec{d}$$

مثال(نامساوی کشی- شوارتس) : اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند. در این صورت ثابت کنید که:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$$

حل : برای دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می توان نوشت، $\|\vec{a}\|\ge 0$ و $\|\vec{b}\|\ge 0$ و لذا $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\ge 0$

از طرفی برای زاویه‌ی θ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نامساوی $-1\le\cos\theta\le 1$ برقرار است. این نامساوی را می توان به صورت $|\cos\theta|\le 1$ نیز نوشت. اکنون دو طرف این نامساوی را در عدد نامنفی $\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ ضرب می کنیم. پس خواهیم داشت:

$$\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times|\cos\theta|\le\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\times 1$$
$$\to|\vec{a}.\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$$

مثال : برای اعداد حقیقی a_1 و a_2 و a_3 و b_1 و b_2 و b_3 ثابت کنید که:

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2})(\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2})$$

حل : طبق نامساوی کوشی- شوارتز داریم:

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$$

پس :

$$\to|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2})(\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2})$$

مثال : برای اعداد حقیقی a_1 و a_2 و a_3 ثابت کنید که:

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^2\le\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}$$

حل : اگر قرار دهیم $\vec{b}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ پس:

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2})(\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2})$$

$$\to(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

$$\to(\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2+\frac{1}{3}a_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\underbrace{(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9})}_{\frac{1}{3}}$$

$$\to(\frac{a_1+a_2+a_3}{3})^2\le\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}$$

مثال : اگر $x-2y+3z=2$ باشد. مینیمم مقدار $x^2+y^2+z^2$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{7}{2}$

حل : فرض کنیم که $\vec{b}=(x,y,z)$ و $\vec{a}=(1,-2,3)$ طبق نامساوی کشی – شوارتس داریم.

$$|\vec{a}.\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$$

$$\to(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

$$\to((1)(x)+(-2)(y)+(3)(z))^2\le(1+4+9)(x^2+y^2+z^2)$$

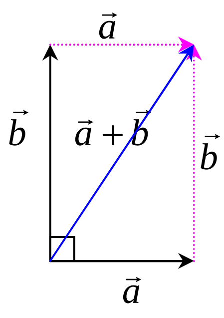
$$\to(x-2y+3z)^2\le14(x^2+y^2+z^2)$$

$$\to(2)^2\le14(x^2+y^2+z^2)$$

$$\to\frac{4}{14}\le x^2+y^2+z^2\to x^2+y^2+z^2\ge\frac{2}{7}$$

مثال(قضیه‌ی فیثاغورس) : فرض کنید که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند. ثابت کنید $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود است، اگر و فقط اگر $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|+^2+\|\vec{b}\|^2$.

حل : اگر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود باشد پس:



$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$$

$$\xrightarrow{\vec{a}\perp\vec{b}\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=0}\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2$$

اگر $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2$ آنگاه داریم:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$$

و در مقایسه با فرض می توان گفت:

$$2\vec{a}.\vec{b}=0\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

مثال : فرض کنید که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند. نامساوی مثلث $\|\vec{a}+\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$ را ثابت کنید.

حل: چون $\cos\theta\le 1$ پس $2\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta\le 2\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$ لذا می توان نوشت.

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\rightarrow\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$$

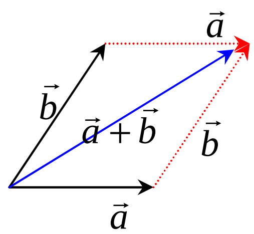
$$\rightarrow\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$$

$$\rightarrow\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\|a\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta$$

$$\rightarrow\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\le\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|$$

$$\rightarrow\|\vec{a}+\vec{b}\|^2\le(\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|)^2$$

$$\rightarrow\|\vec{a}+\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$$



مثال: فرض کنیدکه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند. ثابت کنید:

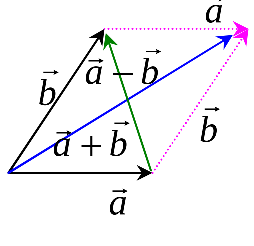
$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2+\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=2\|\vec{a}\|^2+2\|\vec{b}\|^2$$

حل:

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2+\|\vec{a}-\vec{b}\|^2$$

$$=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$$
$$=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$$

$$=\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{a}\|^2-2\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$$
$$=2\|\vec{a}\|^2+2\|\vec{b}\|^2$$



مثال : فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند و $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ غیر صفر باشند. شرط لازم و کافی برای عمود بودن $\vec{a}+\vec{b}$ بر $\vec{a}-\vec{b}$ را پیدا کنید.

حل: شرط لازم و کافی برای عمود بودن $\vec{a}+\vec{b}$ بر $\vec{a}-\vec{b}$ این است که $\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$

$$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})\rightarrow(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=0\rightarrow\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}=0$$

$$\rightarrow\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2=0\rightarrow\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|$$

$$\|\vec{a}\|=\|\vec{b}\|\rightarrow\|\vec{a}\|^2=\|\vec{b}\|^2\rightarrow\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2=0\rightarrow\vec{a}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}=0$$

$$\rightarrow\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}-\vec{b}.\vec{b}=0\rightarrow(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})=0\rightarrow(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$$

یعنی در یک متوازی الاضلاع قطرها بر یکدیگر عمودند، اگر و تنها اگر لوزی باشد.

مثال : اگر برای سه بردار $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ داشته باشیم.

$$\|\vec{a}\|=1 \text{ و } \|\vec{b}\|=2 \text{ و } \|\vec{c}\|=3 \text{ و } \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$$

مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\rightarrow\vec{a}.(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{o}\rightarrow\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=0$$

$$\rightarrow\|\vec{a}\|^2+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=0\rightarrow1^2+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=0\rightarrow\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=-1 \qquad (1)$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\rightarrow\vec{b}.(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}.\vec{o}\rightarrow\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}=0$$

$$\rightarrow\vec{a}.\vec{b}+\|\vec{b}\|^2+\vec{b}.\vec{c}=0\rightarrow\vec{a}.\vec{b}+2^2+\vec{b}.\vec{c}=0\rightarrow\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}=-4 \qquad (2)$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}\rightarrow\vec{c}.(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{c}.\vec{o}\rightarrow\vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}=0$$

$$\rightarrow\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}+\|\vec{c}\|^2=0\rightarrow\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}+3^2=0\rightarrow\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}=-9 \qquad (3)$$

حال نتایج بدست آمده در هر مرحله را نظیر به نظیر جمع می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}=-1\\ \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}=-4\\ \vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}=-9\end{array}\right\}\rightarrow2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{c}+2\vec{a}.\vec{c}=-14\rightarrow2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c})=-14$$

$$\rightarrow\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{a}.\vec{c}=-7$$

تمرین برای حل :

۱۵ : اگر $\vec{u}=(۰,۲,۱)$ و $\vec{v}=(-۱,۱,۳)$ آنگاه مطلوبست تعیین :

الف) $\vec{u}.\vec{v}=$

ب) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=$

۱۶ : نشان دهید که دو بردار $\vec{a}=(-۴,۵,۷)$ و $\vec{b}=(۱,-۲,۲)$ بر هم عمودند.

۱۷ : فرض کنید برای دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ داشته باشیم: $\|\vec{u}\|=۳$ و $\|\vec{v}\|=۴$ و $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{۳۷}$

اندازه‌ی بردار $\vec{u}-\vec{v}$ را بدست آورید.

***

تعیین زاویه‌ی بین دو بردار

اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر صفر و θ زاویه‌ی بین آنها باشد. در این صورت:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}$$

مثال: زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را بیابید.

حل :

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=(۲)(۱)+(-۱)(-۱)+(۲)(۰)=۳$$

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(۲)^۲}=\sqrt{۴+۱+۴}=\sqrt{۹}=۳$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{۱+۱+۰}=\sqrt{۲}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|}=\frac{۳}{۳\times\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

تمرین برای حل :

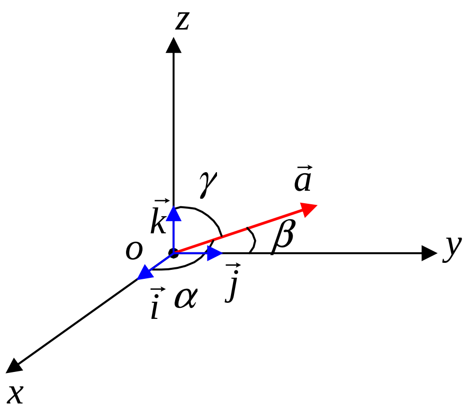
۱۸ : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}=(۲,-۱,۱)$ و $\vec{v}=(۱,۱,۲)$ را بیابید.

۱۹ : اگر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ موازی باشند و $\vec{a}=(۱,-۲,۲)$ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۵$ مختصات بردار $\vec{b}$ را تعیین کنید.

***

زاویه های هادی یک بردار

بنابراین می توان زاویه‌ی بین هر بردار مانند $\vec{a}$ و محور های مختصات را به صورت زیر بدست آورد.



$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{i}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{i}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}.\vec{j}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{j}\|} = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}.\vec{k}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{k}\|} = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$

که در آن α زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}$ و محور طولها در جهت مثبت آن (بردار $\vec{i}$) و β زاویه‌ی بین بـردار a و محور عرضها در جهت مثبت آن (بردار $\vec{j}$) و همچنین γ زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}$ و محور ارتفـاع هـا در جهـت مثبت آن (بردار $\vec{k}$) می باشند. این سه زاویه را **زاویه های هادی** بردار $\vec{a}$ می نامند.

توجه داشته باشید که مثلاً در مورد اوّل داریم:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{i}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{i}\|} = \frac{a_1(1)+a_2(0)+a_3(0)}{\|\vec{a}\|\times 1} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}.\vec{j}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{j}\|} = \frac{a_1(0)+a_2(1)+a_3(0)}{\|\vec{a}\|\times 1} = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}.\vec{k}}{\|\vec{a}\|\times\|\vec{k}\|} = \frac{a_1(0)+a_2(0)+a_3(1)}{\|\vec{a}\|\times 1} = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$

مثال : کسینوس زاویه های هادی بردار $\vec{a}=(2,-1,2)$ را بدست آورید.

حل :

$$\vec{a}=(2,-1,2) \rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} = \frac{-1}{3} \quad \text{و} \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} = \frac{2}{3}$$

مثال : برداری به طول ۲ معرفی کنید که با محورهای x و y و z به ترتیب زاویه های $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۴}$ بسازد.

حل :

$$\cos\alpha = \frac{a_۱}{\|\vec{a}\|} \to \cos(\frac{\pi}{۳}) = \frac{a_۱}{۲} \to \frac{۱}{۲} = \frac{a_۱}{۲} \to a_۱ = ۱$$

$$\cos\beta = \frac{a_۲}{\|\vec{a}\|} \to \cos(\frac{۲\pi}{۳}) = \frac{a_۲}{۲} \to -\frac{۱}{۲} = \frac{a_۲}{۲} \to a_۲ = -۱$$

$$\cos\gamma = \frac{a_۳}{\|\vec{a}\|} \to \cos(\frac{\pi}{۴}) = \frac{a_۳}{۲} \to \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{a_۳}{۲} \to a_۳ = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (۱,-۱,\sqrt{۲})$$

مثال : اگر γ و β و α زاویه های هادی بردار غیر صفر $\vec{a}$ باشند. ثابت کنید که:

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$$

حل:

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma$$

$$= (\frac{a_۱}{\|\vec{a}\|})^۲ + (\frac{a_۲}{\|\vec{a}\|})^۲ + (\frac{a_۳}{\|\vec{a}\|})^۲ = \frac{{a_۱}^۲ + {a_۲}^۲ + {a_۳}^۲}{\|\vec{a}\|^۲} = \frac{\|\vec{a}\|^۲}{\|\vec{a}\|^۲} = ۱$$

مثال : آیا برداری در فضا وجود دارد که با محورهای مختصات زوایای $\alpha = ۴۵$ و $\beta = ۱۳۵$ و $\gamma = ۶۰$ درجه بسازد.

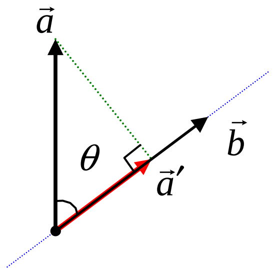
جواب: خیر چنین برداری وجود ندارد. زیرا:

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = \cos^۲ ۴۵ + \cos^۲ ۱۳۵ + \cos^۲ ۶۰$$

$$= (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۲}{۴} + \frac{۲}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴} \neq ۱$$

***

تصویر قائم یک بردار نسبت به امتداد بردار دیگر



اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر صفر باشند و θ زاویه‌ی بین آنها فرض شود. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ را می توان به شکل زیر تعیین کرد.

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}$$

اثبات : واضح است که دو بردار $\vec{a}'$ و $\vec{b}$ در یک راستا بوده و لذا موازیند. پس می توان نوشت:

$$\vec{a}' = r\vec{b}$$

از طرفی بردار $\vec{a}-\vec{a}'$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است. پس :

$$(\vec{a}-\vec{a}').\vec{b} = ۰$$

$$\rightarrow \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}'.\vec{b} = ۰ \xrightarrow{\vec{a}'=r\vec{b}} \vec{a}.\vec{b} - r\vec{b}.\vec{b} = ۰ \rightarrow \vec{a}.\vec{b} - r\|\vec{b}\|^۲ = ۰$$

$$\rightarrow r = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\vec{a}' = r\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b}$$

مثال : اگر $\vec{a} = (۱,۲,-۲)$ و $\vec{b} = (۱,۲,۲)$ مطلوبست تعیین:

الف : ضرب داخلی دو بردار ب : تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$

حل :

$$\vec{a}.\vec{b} = (۱)(۱) + (۲)(۲) + (-۲)(۲) = ۱$$

$$\|\vec{b}\|^۲ = (۱)^۲ + (۲)^۲ + (۲)^۲ = ۹$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^۲}\vec{b} = \frac{۱}{۹}(۱,۲,۲) = (\frac{۱}{۹}, \frac{۲}{۹}, \frac{۲}{۹})$$

مثال : اگر $\vec{a}=(۱,۲,-۲)$ و $\vec{b}=(۱,۲,۳)$. مطلوبست تعیین تصویر بردار $\vec{a}-\vec{b}$ نسبت به امتداد بردار $\vec{a}+\vec{b}$

حل :

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}=(۱,۲,-۲)-(۱,۲,۳)=(۱,۲,-۲)+(-۱,-۲,-۳)=(۰,۰,-۵)$$

$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=(۱,۲,-۲)+(۱,۲,۳)=(۲,۴,۱)$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v}=(۰)(۲)+(۰)(۴)+(-۵)(۱)=-۵$$

$$\|\vec{v}\|^{۲}=(۲)^{۲}+(۴)^{۲}+(۱)^{۲}=۲۱$$

$$\vec{u}'=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^{۲}}\vec{v}=-\frac{۱}{۲۱}(۲,۴,۱)$$

مثال : تصویر قائم بردار $\vec{a}=(۴,-۳,۲)$، بر امتداد برداری که با قسمت مثبت محور های مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می سازد، را به دست آورید.

حل : واضح است که برداری که هر سه مؤلفه‌ی آن مساوی و مثبت باشند، با قسمت مثبت محور های مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می سازد. مثلاً: $\vec{b}=(۱,۱,۱)$

حال تصویر $\vec{a}$ روی امتداد $\vec{b}$ بصورت زیر در می آید.

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{b}\|^{۲}}\vec{b}=\frac{۳}{(\sqrt{۳})^{۲}}(۱,۱,۱)=(۱,۱,۱)=\vec{b}$$

تمرین برای حل :

۲۰ : تصویر قائم بردار $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ روی امتداد بردار $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ را بیابید.

۲۱ : نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

۲۲ : نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می شود.

۲۳ : اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشند. آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۲۴ : اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}=(-۱,۳,-۴)$، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ را به دست آورید.

۲۵ : اگر $\vec{a}=(۱,۲,-۳)$ و $\vec{b}=(-۳,۳,۱)$، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ را به دست آورید.

***

ضرب خارجی دو بردار

فرض کنیم که $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند. ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که بـا نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش داده می شود، برداری است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

توجه کنید که اگر دترمینان فوق را به کمک بسط نسبت به سطر اوّل محاسبه کنیم، خواهیم داشت:

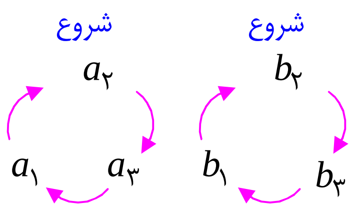
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\vec{j}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+\vec{k}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

برای سادگی می توانید ضرب خارجی را نیز به شکل زیر محاسبه کنید.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})$$



در این روش، همواره مؤلفه های بردار اوّل بالا و مؤلفه های بردار دوّم پایین قرار می گیرند.

مثال : اگر $\vec{a}=(2,-1,3)$ و $\vec{b}=(-1,-2,4)$ در این صورت بردار های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\vec{a}\times\vec{b}=$ ‏ ‏ ‏ ب) $\vec{b}\times\vec{a}=$ ‏ ‏ ‏ ج) $\vec{a}\times\vec{a}=$

حل:

الف) $\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix})=(2,-11,-5)$

ب) $\vec{b}\times\vec{a}=(\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix})=(-2,11,5)$

ج) $\vec{a}\times\vec{a}=(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix})=(0,0,0)=\vec{o}$

نتیجه :

۱ : ضرب خارجی دو بردار همواره یک بردار است.

۲ : ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد.

۳ : برای هر بردار $\vec{u}$ همواره $\vec{u}\times\vec{o}=\vec{o}$

مثال : اگر $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار غیر صفر و $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$. آیا می توان نتیجه گرفت که: $\vec{b}=\vec{c}$؟

پاسخ : در مثال زیر مشاهده می کنید که $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ، در حالی که $\vec{b}\neq\vec{c}$ است.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(۱,۰,۱)\\ \vec{b}=(۱,۰,۱)\\ \vec{c}=(-۱,۰,-۱)\end{array}\right\}\rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}=(۰,۰,۰)\not\rightarrow\vec{b}=\vec{c}$$

لذا قانون حذف در ضرب خارجی دو بردار ، برقرار نمی باشد.

مثال : اگر $\vec{u}=(۱,-۱,۰)$ و $\vec{v}=(۲,۱,-۱)$. مطلوبست تعیین بردار $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})$

حل :

$$\vec{u}-\vec{v}=(۱,-۱,۰)-(۲,۱,-۱)=(-۱,-۲,۱)$$

$$\vec{u}+\vec{v}=(۱,-۱,۰)+(۲,۱,-۱)=(۳,۰,-۱)$$

$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=(\begin{vmatrix}-۲ & ۱\\ ۰ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{vmatrix})=(۲,۲,۶)$$

مثال : اگر $\vec{u}=۲\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$ اندازه‌ی بردار $\vec{u}\times\vec{v}$ را بدست آورید.

حل : واضح است که $\vec{v}=(۱,-۱,۲)$ و $\vec{u}=(۲,۱,۱)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{vmatrix})=(۳,-۳,-۳)$$

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{(۳)^۲+(-۳)^۲+(-۳)^۲}=\sqrt{۹+۹+۹}=۳\sqrt{۳}$$

***

ویژگی های ضرب خارجی دو بردار

ویژگی اوّل ضرب خارجی: برای هر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ همواره $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

اثبات:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})=(-\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix})$$

$$=-(\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix})=-(\vec{b}\times\vec{a})$$

ویژگی دوّم ضرب خارجی: برای هر بردار $\vec{a}$ همواره $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

اثبات:

$$\vec{a}\times\vec{a}=(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix})=(0,0,0)=\vec{0}$$

ویژگی سوّم ضرب خارجی: برای هر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ هر عدد حقیقی r همواره

$$r\vec{a}\times\vec{b}=r(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times r\vec{b}$$

اثبات:

$$r\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}ra_2 & ra_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}ra_3 & ra_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}ra_1 & ra_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})$$

$$=(r\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},r\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},r\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})=r(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix})=r(\vec{a}\times\vec{b})$$

اثبات قسمت دوّم به همین صورت انجام می شود.

ویژگی چهارم ضرب خارجی: برای هر سه بردار $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ داریم.

الف) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$ ب) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$

اثبات:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2+c_2 & b_3+c_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3+c_3 & b_1+c_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1+c_1 & b_2+c_2\end{vmatrix})$$

$$=(a_2(b_3+c_3)-a_3(b_2+c_2),a_3(b_1+c_1)-a_1(b_3+c_3),a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1))$$

$$=((a_2b_3-a_3b_2)+(a_2c_3-a_3c_2),(a_3b_1-a_1b_3)+(a_3c_1-a_1c_3),$$
$$(a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_2-a_2c_1))$$

$$=(a_{۲}b_{۳}-a_{۳}b_{۲},a_{۳}b_{۱}-a_{۱}b_{۳},a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱})$$
$$+(a_{۲}c_{۳}-a_{۳}c_{۲},a_{۳}c_{۱}-a_{۱}c_{۳},a_{۱}c_{۲}-a_{۲}c_{۱})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$$

اثبات قسمت دوّم نیز به همین شکل صورت می گیرد.

نتیجه : برای بردار های $\vec{d}$ و $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ داریم:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{d})$$

اثبات:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{d}$$

$$=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{d})$$

مثال: اگر $\vec{a}=(۲,۱,-۱)$ ضرب های زیر را انجام دهید.

الف) $(\vec{a}\times\vec{i})\times\vec{j}$ ب) $\vec{a}\times(\vec{i}\times\vec{j})$

حل :

الف) $\vec{a}\times\vec{i}=(\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix})=(۰,-۱,-۱)$

$$(\vec{a}\times\vec{i})\times\vec{j}=(\begin{vmatrix}-۱ & -۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & -۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix})=(۱,۰,۰)$$

ب) $\vec{i}\times\vec{j}=(\begin{vmatrix}۰ & ۰\\ ۱ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۰ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{vmatrix})=(۰,۰,۱)$

$$\vec{a}\times(\vec{i}\times\vec{j})=(\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۱ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۰ & ۰\end{vmatrix})=(۱,-۲,۰)$$

نتیجه : ضرب خارجی دو بردار خاصیت شرکت پذیری ندارد. یعنی $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\neq\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

ویژگی پنجم ضرب خارجی: برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ اگر $\vec{a}$ با $\vec{b}$ موازی باشد.آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ و برعکس

اثبات:

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\xrightarrow{\exists r\in R}\vec{b}=r\,\vec{a}\rightarrow(b_{۱},b_{۲},b_{۳})=(ra_{۱},ra_{۲},ra_{۳})$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix}rb_{۲} & rb_{۳}\\ b_{۲} & b_{۳}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}rb_{۳} & rb_{۱}\\ b_{۳} & b_{۱}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}rb_{۱} & rb_{۲}\\ b_{۱} & b_{۲}\end{vmatrix})=(r\begin{vmatrix}b_{۲} & b_{۳}\\ b_{۲} & b_{۳}\end{vmatrix},r\begin{vmatrix}b_{۳} & b_{۱}\\ b_{۳} & b_{۱}\end{vmatrix},r\begin{vmatrix}b_{۱} & b_{۲}\\ b_{۱} & b_{۲}\end{vmatrix})$$

$$=(۰,۰,۰)=\vec{o}$$

مثال : نشان دهید که دو بردار $\vec{a}=(۱,۲,-۳)$ و $\vec{b}=(-۳,-۶,۹)$ موازی همدیگرند.

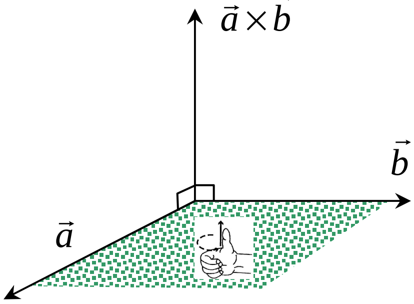
حل :

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ -۶ & ۹ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -۳ & ۱ \\ ۹ & -۳ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & -۶ \end{vmatrix})=(۰,۰,۰)=\vec{o}\to\vec{a}\parallel\vec{b}$$

***

ویژگی عمود بودن ضرب خارجی دو بردار

اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار نامساوی و غیر صفر باشند، در این صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نیز غیر صفر بوده و هم بر $\vec{a}$ و هم بر $\vec{b}$ عمود است و لذا بر صفحه‌ی شامل $\vec{b}$ و $\vec{a}$ عمود خواهد بود. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.



قضیه : فرض کنیم $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار دلخواه باشند. در این صورت

الف) $\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰$ ب) $\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{b})=۰$

اثبات:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_۳ & a_۱ \\ b_۳ & b_۱ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix})$$

$$=((a_۲b_۳-a_۳b_۲),(a_۳b_۱-a_۱b_۳),(a_۱b_۲-a_۲b_۱))$$

$$\vec{a}.(\vec{a}\times\vec{b})=a_۱(a_۲b_۳-a_۳b_۲)+a_۲(a_۳b_۱-a_۱b_۳)+a_۳(a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

$$=a_۱a_۲b_۳-a_۱a_۳b_۲+a_۲a_۳b_۱-a_۲a_۱b_۳+a_۳a_۱b_۲-a_۳a_۲b_۱=۰$$

اثبات قسمت دوّم به همین شکل انجام می شود.

مثال : برداری پیدا کنید که بر هر دو بردار $\vec{a}=(۴,-۱,۳)$ و $\vec{b}=(۲,۳,-۱)$ عمود باشد.

حل: کافی است که یکی از دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ یا $\vec{b}\times\vec{a}$ را تعیین کنیم.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix})=(-۸,۱۰,۱۴)$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=(\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix},\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & -۱ \end{vmatrix})=(۸,-۱۰,-۱۴)$$

اندازه‌ی بردار ضرب خارجی

اندازه‌ی بردار ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ به صورت زیر نیز قابل محاسبه است. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

قضیه : برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ که زاویه‌ی بین آنها θ (کوچکترین زاویه‌ی بین آنها) است. داریم:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta$$

اثبات:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \|a\times b\|^2 = {} & {a_2}^2{b_3}^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + {a_3}^2{b_2}^2 \\ & + {a_3}^2{b_1}^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + {a_1}^2{b_3}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + {a_2}^2{b_1}^2\end{aligned}$$

$$\rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$\rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$$

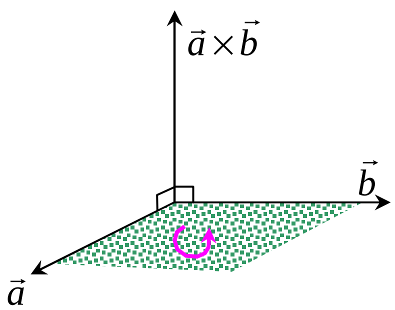
$$\rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\cos\theta)^2$$

$$\rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta$$

$$\rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$\rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\sin^2\theta \rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta$$

تذکر: اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار غیر موازی و غیر صفر باشند، بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ نیز غیر صفر است و برصفحه ای که $\vec{b}$ و $\vec{a}$ در آن قرار دارند، عمود است. به کمک دست راست اگر انگشتان دست از طرف $\vec{a}$ به طرف $\vec{b}$ باشند، انگشت شست در جهت $\vec{a}\times\vec{b}$ قرار می گیرد. (قاعده‌ی دست راست)



مثال : نشان دهید که رابطه‌ی زیر برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همواره برقرار است.

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 + (\vec{a}.\vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2$$

حل :

$$\|\vec a\times\vec b\|^{۲}+(\vec a.\vec b)^{۲}=(\|\vec a\|\times\|\vec b\|\sin\theta)^{۲}+(\|\vec a\|\times\|\vec b\|\cos\theta)^{۲}$$

$$=\|\vec a\|^{۲}\times\|\vec b\|^{۲}\sin^{۲}\theta+\|\vec a\|^{۲}\times\|\vec b\|^{۲}\cos^{۲}\theta=\|\vec a\|^{۲}\times\|\vec b\|^{۲}\,(\underbrace{\sin^{۲}\theta+\cos^{۲}\theta}_{۱})$$

$$=\|\vec a\|^{۲}\|\vec b\|^{۲}$$

مثال : اگر $\|\vec a\|=۱۰$ و $\|\vec b\|=۲$ و $\vec a.\vec b=۱۲$ اندازه‌ی بردار $\vec a\times\vec b$ را بیابید.

حل :

$$\|\vec a\times\vec b\|^{۲}+(\vec a.\vec b)^{۲}=\|\vec a\|^{۲}\|\vec b\|^{۲}\rightarrow\|\vec a\times\vec b\|^{۲}+(۱۲)^{۲}=(۱۰)^{۲}(۲)^{۲}$$

$$\rightarrow\|\vec a\times\vec b\|^{۲}+۱۴۴=۴۰۰\rightarrow\|\vec a\times\vec b\|^{۲}=۲۵۶\rightarrow\|\vec a\times\vec b\|=۱۶$$

تمرین برای حل :

۲۶ : برداری عمود بر دو بردار $\vec a=(-۲\,,۱,-۵)$ و $\vec b=(۱,-۳,۲)$ پیدا کنید.

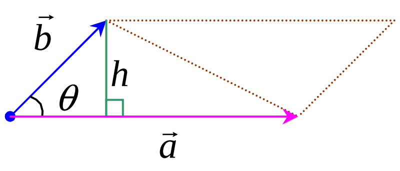
۲۷ : برداری به طول واحد بیابید که بر بردار های $\vec a=(۱,۲,۲)$ و $\vec b=(-۱,۲,-۲)$ عمود باشد.

۲۸ : بردارهای $\vec a$ و $\vec b$ مفروض اند، به طوری که $\|\vec a\|=۳$ و $\|\vec b\|=۲۶$ و $\|\vec a\times\vec b\|=۷۲$ مقدار $\vec a.\vec b$ را محاسبه کنید.

***

مساحت متوازی الاضلاع

برای هر دو بردار غیر صفر و غیر موازی $\vec b$ و $\vec a$ می توان یک متوازی الاضلاع به شکل مقابل ساخت. در این صورت ارتفاع متوازی الاضلاع به شکل زیر قابل محاسبه است.



$$\sin\theta=\frac{\|h\|}{\|\vec b\|}\rightarrow\|h\|=\|\vec b\|\sin\theta$$

و چون مساحت متوازی الاضلاع برابر حاصل ضرب اندازه‌ی قاعده در اندازه‌ی ارتفاع آن است. پس :

$$S=\|\vec a\|\times\|h\|=\|\vec a\|\times\|\vec b\|\sin\theta=\|\vec a\times\vec b\|$$

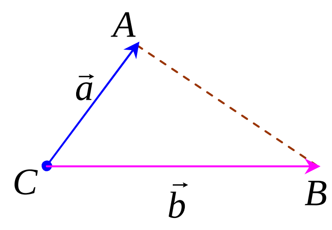
$$\rightarrow S=\|\vec a\times\vec b\|$$

نتیجه : مساحت مثلثی که با دو بردار غیر موازی و غیر صفر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ تولید می شود، برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

مثال: مساحت مثلثی به رأس های $A(۲,۰,۱)$ و $B(۰,۲,۰)$ و $C(۰,۰,۱)$ را به دست آورید.

حل :



$$\vec{a} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (۲,۰,۱) - (۰,۰,۱) = (۲,۰,۰)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (۰,۲,۰) - (۰,۰,۱) = (۰,۲,-۱)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} ۰ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{vmatrix}\right) = (۰,-۲,۴)$$

پس مساحت مثلث مورد نظر به صورت زیر است.

$$S = \frac{۱}{۲}\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۰)^۲ + (-۲)^۲ + (۴)^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۰ + ۴ + ۱۶} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰} = \sqrt{۵}$$

مثال: فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردار هایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ می سازند. مساحت مثلثی را که توسط بردار های $\vec{a} - ۲\vec{b}$ و $۳\vec{a} + ۲\vec{b}$ تولید می شود، پیدا کنید.

حل:

$$\vec{u} = \vec{a} - ۲\vec{b} \quad \text{و} \quad \vec{v} = ۳\vec{a} + ۲\vec{b}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = (\vec{a} - ۲\vec{b})\times(۳\vec{a} + ۲\vec{b}) = (\vec{a}\times ۳\vec{a}) + (\vec{a}\times ۲\vec{b}) + (-۲\vec{b}\times ۳\vec{a}) + (-۲\vec{b}\times ۲\vec{b})$$

$$= (\underbrace{\vec{a}\times ۳\vec{a}}_{\vec{o}}) + (\vec{a}\times ۲\vec{b}) + (-۲\vec{b}\times ۳\vec{a}) + (\underbrace{-۲\vec{b}\times ۲\vec{b}}_{\vec{o}})$$

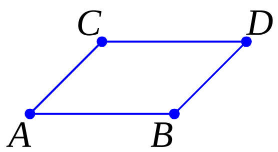
$$= ۲\vec{a}\times\vec{b} - ۶\vec{b}\times\vec{a} = ۲\vec{a}\times\vec{b} + ۶\vec{a}\times\vec{b} = ۸\vec{a}\times\vec{b}$$

$$S = \frac{۱}{۲}\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \frac{۱}{۲}\|۸\vec{a}\times\vec{b}\| = \frac{۱}{۲}\times ۸\|\vec{a}\times\vec{b}\| = ۴\|\vec{a}\|\times\|\vec{b}\|\sin\theta$$

$$\rightarrow S = ۴\times ۵\times ۵\times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵۰\sqrt{۲}$$

تمرین برای حل :

۲۹ : اگر $A(۳,۵,۷)$ و $B(۵,۵,۰)$ و $C(-۴,۰,۴)$ سه رأس متوازی الاضلاع زیر باشد. مساحت متوازی الاضلاع را بدست آورید.

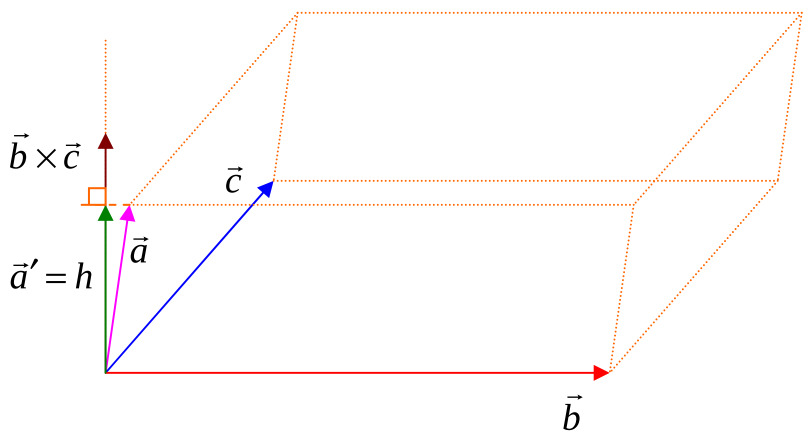


۳۰ : مساحت مثلثی را حساب کنید که $A(۱,۲,۰)$ و $B(۳,۰,-۳)$ و $C(۵,۲,۶)$ سه رأس آن باشند.

***

حجم متوازی السطوح

اگر $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ سه بردار غیر واقع بر یک صفحه باشند. در این صورت واضح است که ارتفاع متوازی السطوح برابر تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ است. پس:



$$h=\vec{a}'=\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|^۲}(\vec{b}\times\vec{c}) \qquad \|h\|=\|\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|^۲}(\vec{b}\times\vec{c})\|=|\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|^۲}|\times\|\vec{b}\times\vec{c}\|$$

$$=\frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|^۲}\|\vec{b}\times\vec{c}\|=\frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|}$$

ارتفاع متوازی السطوح $\qquad \|h\|=\frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|}$

و چون حجم متوازی السطوح برابر حاصل ضرب مساحت قاعده در اندازه‌ی ارتفاع آن است، لذا می توان نوشت:

$$V = \|\vec{b}\times\vec{c}\| \times \frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|} = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$$

$V = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|$ حجم متوازی السطوح

مثال : حجم متوازی السطوحی که به کمک سه بردار زیر تولید می شود را محاسبه کنید.

$$\vec{a} = (۲,۳,-۱) \text{ و } \vec{b} = (۱,-۲,۵) \text{ و } \vec{c} = (۰,۳,۲)$$

حل :

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ -۲ & ۵ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۵ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} \right) = (۱۳,-۱۱,-۷)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = (۱۳)(۰) + (-۱۱)(۳) + (-۷)(۲) = ۰ - ۳۳ - ۱۴ = -۴۷$$

$$V = |(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}| = |-۴۷| = ۴۷$$

نتیجه : بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ روی یک صفحه واقعند، اگر و فقط اگر $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰$

اثبات: اگر بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ روی یک صفحه واقع باشند، آنگاه، حجم متوازی السطوحی که با این سه بردار ساخته می شود، برابر صفر باشد. یعنی $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})| = ۰$ لذا $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰$

برعکس اگر $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = ۰$ یعنی بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ عمود است. از طرفی بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ هم بر $\vec{b}$ و هم بر $\vec{c}$ عمود می باشد. لذا هر سه بردار $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ (به دلیل هم مبدأ بودن) روی یک صفحه واقع می باشند.

مثال : نشان دهید که سه بردار $\vec{a} = (۱,۱,۰)$ و $\vec{b} = (۱,۱,۱)$ و $\vec{c} = (۰,۰,۱)$ روی یک صفحه واقعند.

حل :

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} \right) = (۱,-۱,۰)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = (۱)(۰) + (-۱)(۰) + (۰)(۱) = ۰$$

لذا بردار های $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ روی یک صفحه واقعند.

تمرین برای حل :

۳۱ : حجم متوازی السطوحی را حساب کنید که توسط بردار های زیر تولید می شود.

$$\vec{a}=(۱,۱,۰) \text{ و } \vec{b}=(۰,۱,۱) \text{ و } \vec{c}=(۱,۰,۱)$$

۳۲ : حجم متوازی السطوحی را حساب کنید که توسط بردار های زیر تولید می شود.

$$\vec{i}=(۱,۰,۰) \text{ و } \vec{j}=(۰,۱,۰) \text{ و } \vec{k}=(۰,۰,۱)$$

۳۳ : اندازه‌ی ارتفاع و حجم متوازی السطوحی را حساب کنید که توسط بردار های زیر تولید می شود.

$$\vec{a}=(۱,۱,۰) \text{ و } \vec{b}=(۰,۱,۱) \text{ و } \vec{c}=(۱,۰,۱)$$

۳۴ : نشان دهید که سه بردار زیر روی یک صفحه واقعند.

$$\vec{a}=(۰,۵,-۷) \text{ و } \vec{b}=(۱,-۱,۳) \text{ و } \vec{c}=(۲,۳,-۱)$$

۳۵ : آیا سه بردار $\vec{u}=(۱,۲,۰)$ و $\vec{v}=(۰,۲,۱)$ و $\vec{w}=(۱,۰,۲)$ روی یک صفحه واقع اند. اگر جواب منفی است، حجم متوازی السطوحی که با این سه بردار ایجاد می شود را تعیین کنید.

۳۶ : هم صفحه بودن بردار های زیر را بررسی کنید.

۱) $\vec{a}=(۱,۴,-۷)$ و $\vec{b}=(۲,-۱,۴)$ و $\vec{c}=(۰,-۹,۱۸)$

۲) $\vec{a}=(۲,۱,۰)$ و $\vec{b}=(۰,۲,۱)$ و $\vec{c}=(۱,۰,۲)$

۳) $\vec{a}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۳)$ و $\vec{c}=(۱,۹,-۱۱)$

۳۷ : مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۳)$ و $\vec{b}=(۰,m,-۱)$ و $\vec{c}=(۱,-۲,۳)$ در یک صفحه باشند.

۳۸ : سه بردار $\vec{c}=(۳m^۲,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۰,۱)$ و $\vec{a}=(-m,۱,۰)$ روی یک صفحه واقعند، مقدار m را بیابید.

***

تهیه کننده : جابر عامری ، عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان