تقدیم به محمد رسول الله

مثلثات

تهیه و تنظیم :محمد قاسمی

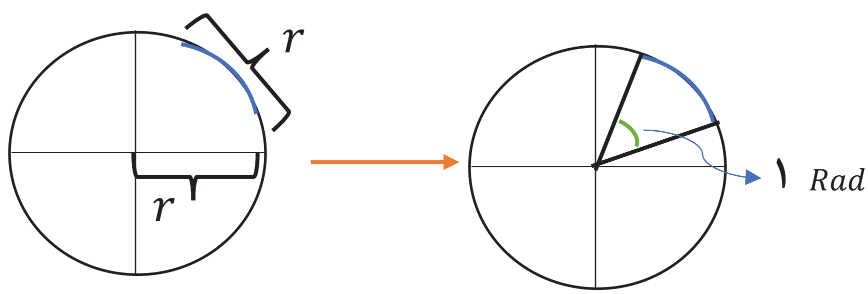
محمد قاسمی

واحدهای اندازه گیری زاویه

درجه:یک درجه زاویه مرکزی روبرو به کمانی از دایره است که طول آن $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است.

رادیان:قسمتی از محیط دایره را انتخاب میکنیم که اندازه اش برابر شعاع دایره باشد،سپس زاویه ای مرکزی رسم میکنیم که از دو سر این قطعه بگذرد.به این زاویه یک رادیان میگوییم.

۱۸۰ درجه معادل با π رادیان است.



تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر:

برای تبدیل واحدهای زاویه به رادیان از رابطه زیر استفاده میکنیم:

درجه　　رادیان

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$

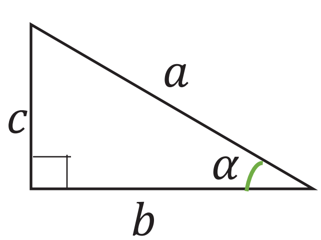
۱-در ساعت ۱۲ و ۱۵ دقیقه،زاویه بین عقربه ی ساعت شمار و دقیقه شمار چند درجه است؟

۲-زاویه های زیر را روی دایره مشخص کنید:

$$\alpha=\frac{۵\pi}{۳} \qquad \alpha=\frac{۷\pi}{۶}$$

نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

در مثلث قائم الزاویه ،نسبت های مثلثاتی زاویه α به شکل زیر تعریف میشود:



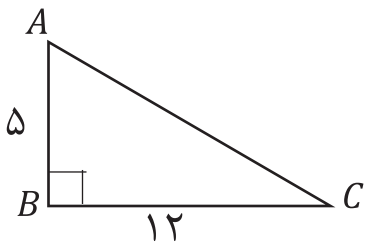
$$\sin\alpha=\frac{c}{a} \qquad \tan\alpha=\frac{c}{b}$$

$\cos\alpha = \dfrac{b}{a}$ $\quad\quad$ $cot\alpha = \dfrac{b}{c}$

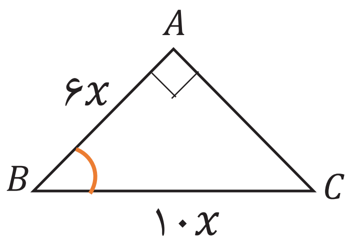
این هم سه نتیجه معروف و مهم از روابط بالا :

$\tan\alpha \times \cot\alpha = ۱$ $\quad\quad$ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad\quad$ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

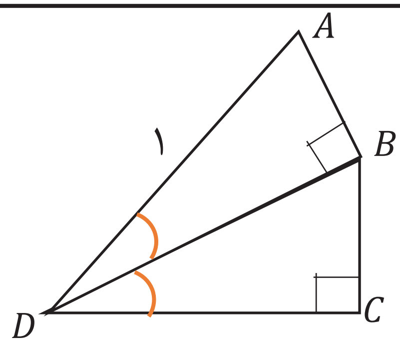
۱-در شکل زیر $\sin\hat{A} + \cos\hat{A}$ را بیابید.



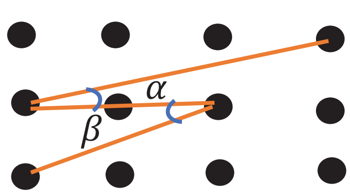
۲-با توجه به شکل، $\tan\hat{B}$ را بیابید.



۳-با توجه به شکل زیر،طول BC را بیابید.

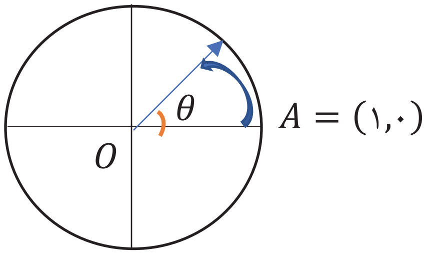


۴-در شکل زیر ،نقاط روی شبکه مربعی هستند.$\tan\beta$ چند برابر $\cot\alpha$ است؟

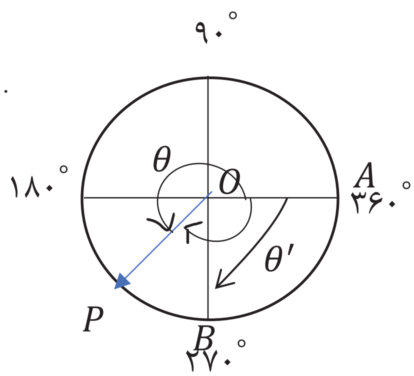


دایره مثلثاتی

دایره ای است به شعاع واحد که مرکز آن $O = (۰,۰)$ ،نقطه ی شروع آن $A = (۱,۰)$ و جهت حرکت در این دایره خلاف جهت عقربه های ساعت است،این هم شکلش:

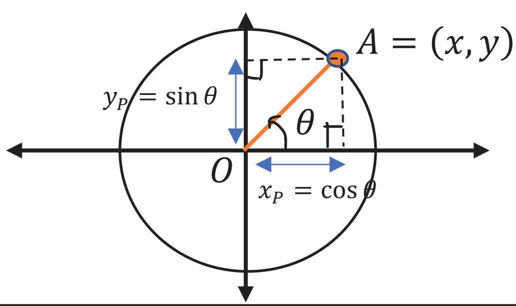


مطابق شکل اگر نقطه P از A شروع کند و در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت حرکت کنیم،زاویه θ مثبت است و بر عکس اگر جهت حرکت P ،ساعت گرد باشد،زاویه θ منفی میشود.به عنوان مثال ،در دایره ی مثلثاتی زیر زاویه ۱۳۵- را رسم کنیم ، $\widehat{AOP} = -۱۳۵^\circ$ است.دقت کنید کنید که اگر انتهای کمان یک زاویه مثلا در نقطه ی B باشد،این زاویه متناسب با این است که مثبت باشد یا منفی دو حالت دارد:مثبت باشد روی شکل میشود θ که برابر ۲۷۰ است و اگر منفی باشد ،میشود θ' که ۹۰- است.



محور های سینوس و کسینوس

در دایره مثلثاتی ،محور y ها را محور سینوس ها و محور x ها را محور کسینوس ها می نامیم.برای پیدا کردن نسبت های مثلثاتی یک زاویه،از نقطه ی نشان دهنده ی زاویه روی محیط دایره بر محورهای x و y عمود میکنیم.در این صورت از مرکز دایره،یعنی O تا پای عمودها، sin یا cos آن زاویه میشود.



اگر θ زاویه ای در ربع دوم باشد،به طوری که $\sin\theta = \frac{۱}{۵}$،سایر نسبت های مثلثاتی θ را بیابید .

نسبت های مثلثاتی زوایای معروف که حفظ آن بر همه واجب است.

زاویه	۰	°۳۰	°۴۵	°۶۰	°۹۰	°۱۸۰	°۲۷۰	۳۶۰
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ت ن	۰	ت ن	۰
cot	ت ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	ت ن	۰	ت ن

محدوده $\sin\alpha$ **و** $\cos\alpha$

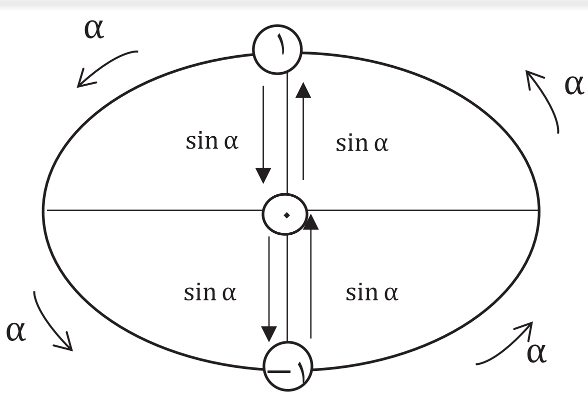
در دایره ی مثلثاتی زیر اگر عقربه ی α رو هر چه قدر بچرخانیم ،$\sin\alpha$ حداکثر برابر ۱ و حداقل برابر ۱- میشود.این مطلب برای $\cos\alpha$ هم صدق میکند.

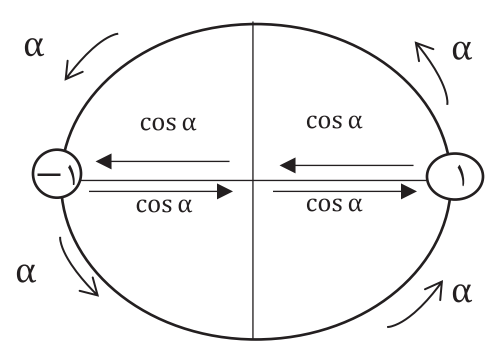
در ربع اول و چهارم با افزایش α ،مقدار $\sin\alpha$ زیاد میشود.

در ربع دوم و سوم با افزایش α ،مقدار $\sin\alpha$ زیاد میشود.

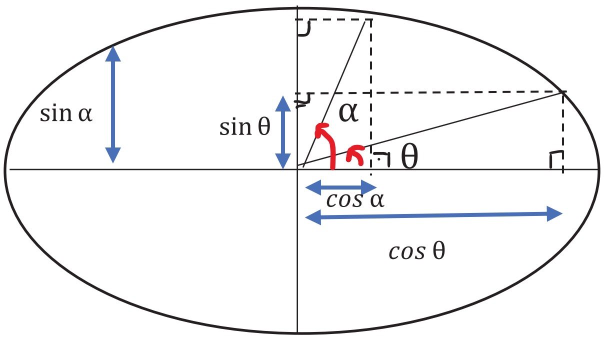
در ربع اول و دوم با افزایش α ،مقدار $\cos\alpha$ زیاد میشود.

در ربع سوم و چهارم با افزایش α ،مقدار $\cos\alpha$ زیاد میشود.





به صورت کلی در دایره مثلثاتی هر نقطه ای که عرضش بیشتر باشد،سینوس هم بیشتر میشود و هر نقطه ای که طولش بیشتر باشد،کسینوسش بیشتر میشود.



$$0 < \theta < \alpha < 90 \Rightarrow \sin\theta < \sin\alpha$$

$$0 < \theta < \alpha < 90 \Rightarrow \cos\theta > \cos\alpha$$

اگر α یک زاویه دلخواه باشد،حداکثر و حداقل هر یک از عبارت های زیر را بیابید.

$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 4$ $\qquad$ $\sin^2\alpha + 1$ $\qquad$ $2\cos\alpha + 3$ $\qquad$ $\sin\alpha - 1$

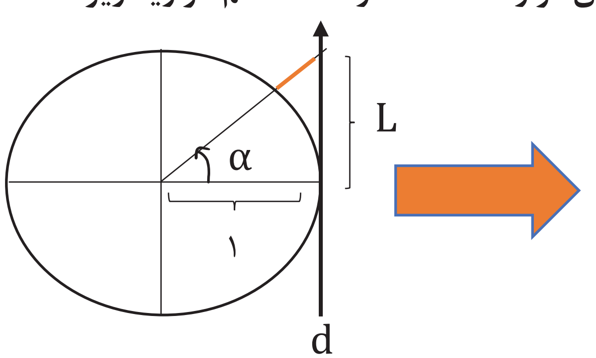
در هر یک از موارد زیر با توجه به محدوده ی α ،مقادیرm و n را تعیین کنید .

$m \le \sin\alpha \le n \,, 30 \le \alpha \le 45$ $\qquad$ $m \le \cos\alpha \le n \,, 30 \le \alpha \le 45$

اگر $30 \le \theta \le 150$ و $\sin\theta = \frac{m-1}{2}$ باشد،برای m چند عدد صحیح وجود دارد؟ $\sin 150 = \frac{1}{2}$

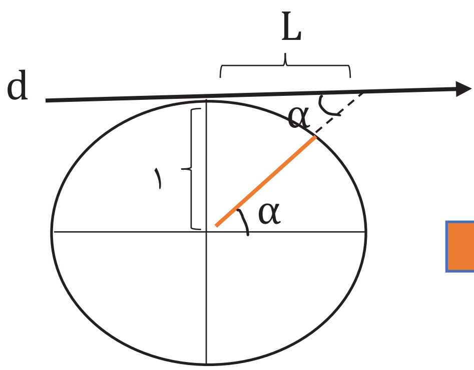
محورهای $\tan$ و cot

در دایره مثلثاتی ،عقربه ای که حاوی زاویه α هست را در نظر بگیرید.همانطور که در شکل مشخص است خط d در سمت راست دایره ،به دایره مماس است .اگر این عقربه را امتداد دهیم تا خط d را قطع کند،یک مثلث قائم الزاویه به دست می آید .طبق قرارداد $\tan\alpha$ در مثلث قائم الزاویه زیر تعریف می شود:



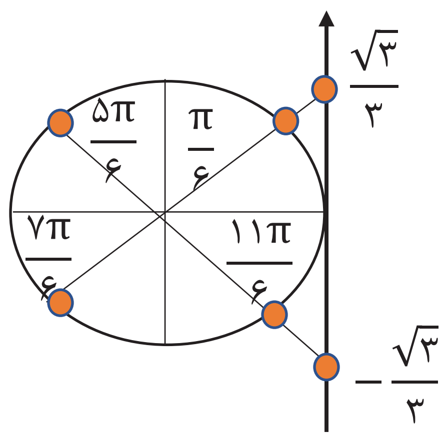
$$\tan\alpha = \frac{L}{1} \Rightarrow \tan\alpha = L$$

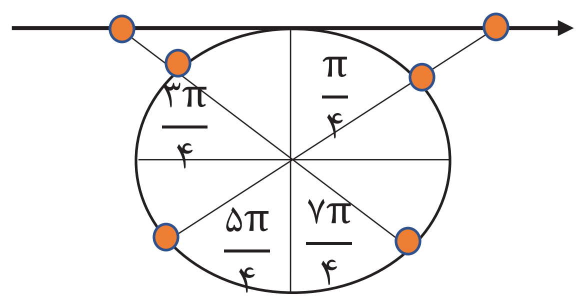
برای $\cot\alpha$ باید خطی افقی بر روی دایره مماس کنیم.اگر عقربه رو امتداد دهیم تا خط d را قطع کند یک مثلث قائم الزاویه به دست می آید که طبق قرارداد $\cot\alpha$ به شکل زیر تعریف می شود:



$$\cot\alpha = \frac{L}{۱} \Rightarrow \cot\alpha = L$$

مقدار تانژانت و کتانژانت زاویه هایی که روی ضربدر ها قرار دارند:



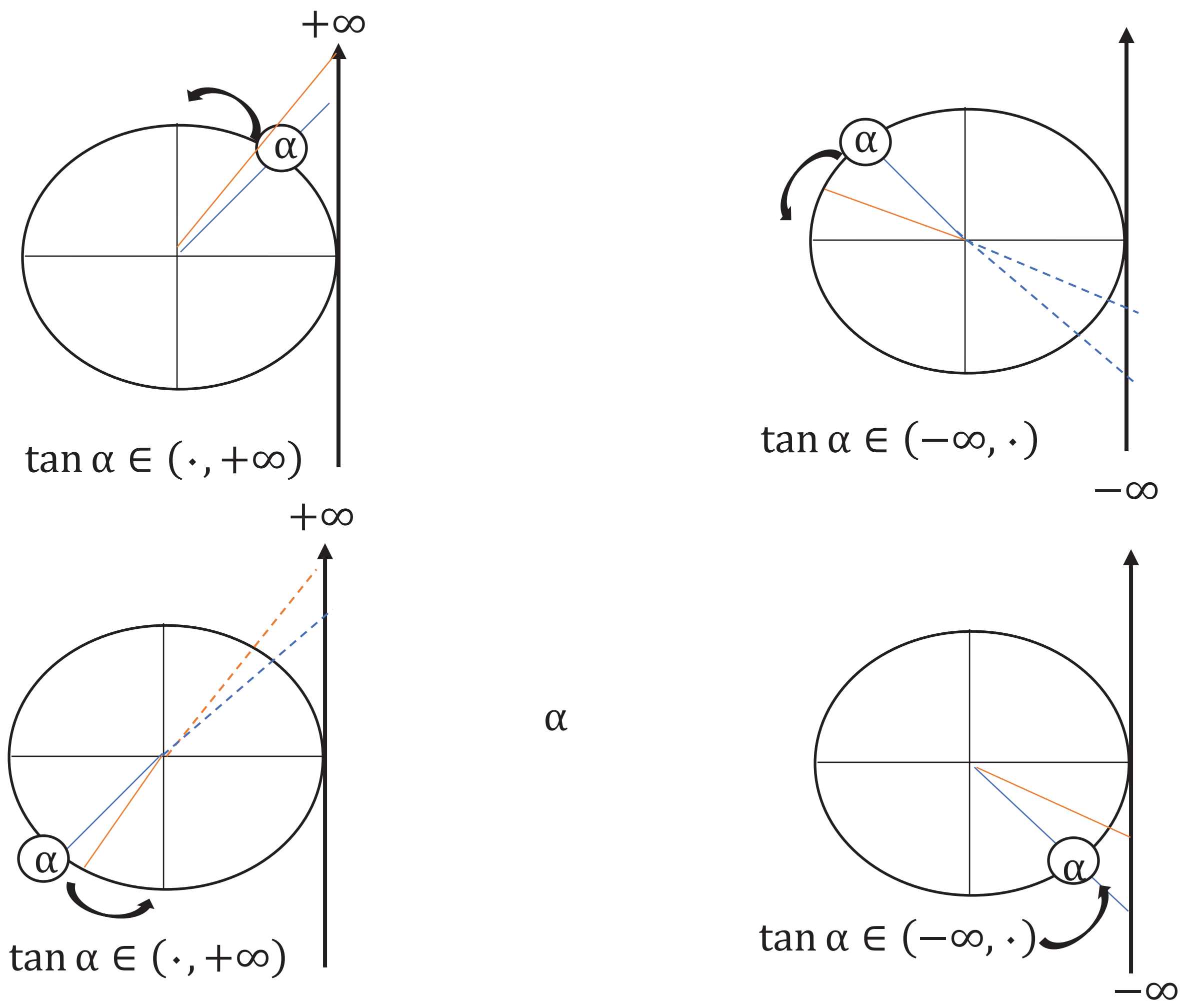


$$\begin{cases} \tan\frac{\pi}{۶} = \tan\frac{۷\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ \tan\frac{۵\pi}{۶} = \tan\frac{۱۱\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cot\frac{\pi}{۴} = \cot\frac{۵\pi}{۶} = ۱ \\ \cot\frac{۳\pi}{۴} = \cot\frac{۷\pi}{۶} = ۱ \end{cases}$$

محدوده ی tan و cot

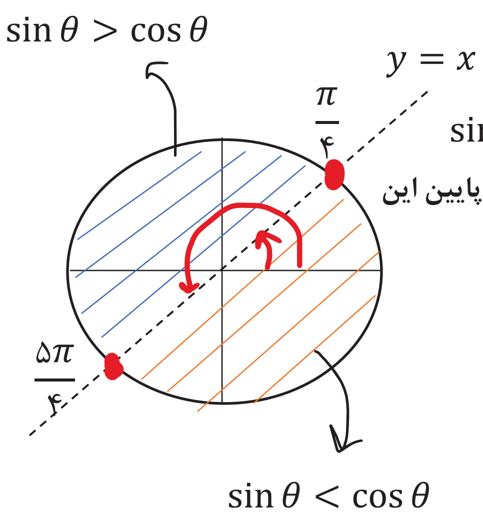
با رسم شکل در پهار ربع دایره مثلثاتی میتوان فمید که با افزایش α مقدار $\tan\alpha$ زیاد میشود.



α

برای $\cot\alpha$ درهر ۴ ربع با افزایش α مقدار $\cot\alpha$ کم میشود.رسم شکل بر عهده دانش آموزان

رابطه sin و cos روی نیمساز ربع (اول و سوم)-(دوم و چهارم)

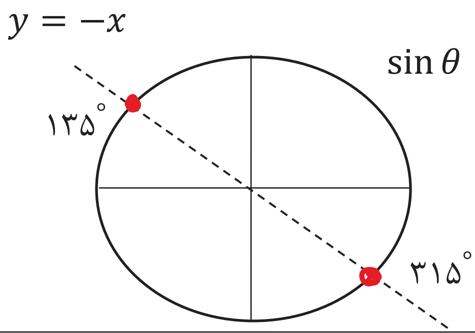


نقاطی که روی نیمساز ربع اول و سوم باشد ($y = x$)، یعنی $\sin\theta = \cos\theta$

نقاطی که بالای این خط هستند،عرضشان از طولشان بیشتر است و نقاطی که پایین این خط هستند طولشان از عرضشان بیشتر است و خواهیم داشت:

$$۰ < \theta < ۴۵ \Rightarrow \tan\theta < \cot\theta$$

$$۴۵ < \theta < ۹۰ \Rightarrow \tan\theta > \cot\theta$$



نقاطی که روی نیمساز ربع دوم و چهارم هستند $y = -x$، یعنی $\sin\theta = -\cos\theta$
مجموع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ در این نقاط صفر خواهد بود .

مثلثات در مثلث

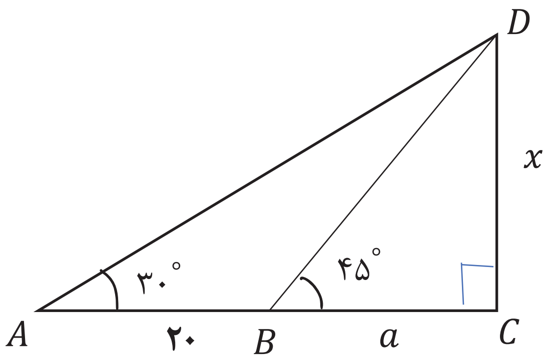
در مثلث قائم الزاویه سه رابطه مهم خواهیم داشت:

۱-ضلع روبرو به زاویه ۳۰ درجه ،نصف وتر است.

۲-ضلع روبرو به °۶۰، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

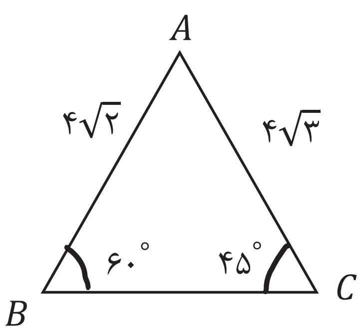
۳-ضلع روبرو به °۴۵، $\frac{۱}{۲}$ وتر است .

افراد A و B که از هم به فاصله ی ۲۰ متر و در یک طرف برجی هستند.بالاترین نقطه ی این برج را به ترتیب با زوایای °۳۰و °۴۵میبینند.ارتفاع برج را بیابید .

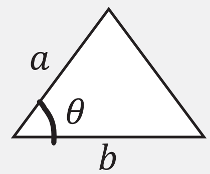
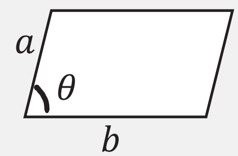
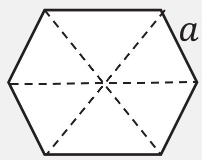
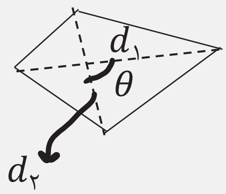


یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین با زاویه ۳۰ درجه پرتاب میشود.پس از طی ۳۰۰۰ متر با همین زاویه ،موشک به چه ارتفاعی میرسد؟

در شکل زیر ،اندازه ضلع BCو ارتفاع وارد بر آن را بیابید.



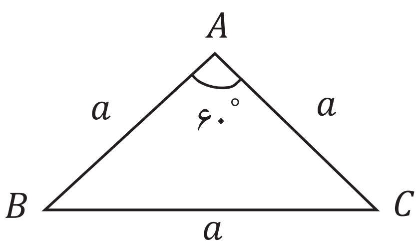
مساحت شکلهای زیر را حفظ باشید .

نام	مثلث	متوازی الاضلاع	شش ضلعی منتظم	چهارضلعی دلخواه
شرایط	داشتن ۲ ضلع و زاویه بین	داشتن ۲ ضلع و زاویه بین	داشتن ضلع	داشتن ۲ قطر و زاویه بین
مساحت	$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$	$S=ab\sin\theta$	$s=\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}$	$S=\frac{۱}{۲}d_{۱}d_{۲}\sin\theta$
شکل				

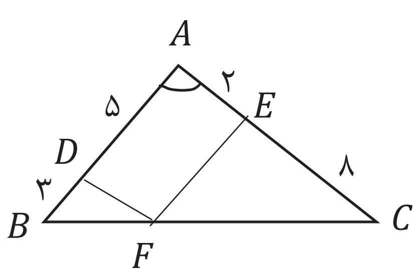
مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع ۶ را بیابید.

نشان دهید مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a **برابراست با** $\frac{\sqrt{۳}a^{۲}}{۴}$

مساحت مثلث زیر را بیابید.

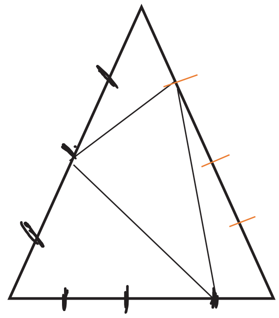


در شکل زیر ،مساحت متوازی الاضلاع چه کسری از مثلث است؟



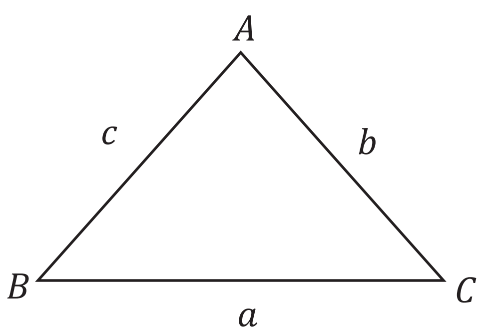
هشت ضلعی منتظمی درون دایره ای به شعاع ۲ قرار دارد.مساحت آن را بیابید.

در شکل زیر ،ضلع مثلث متساوی الاضلاع چهار قسمت شده است.مساحت قسمت رنگ شده چند برابر $\sqrt{۳}$است؟



قضیه سینوس ها

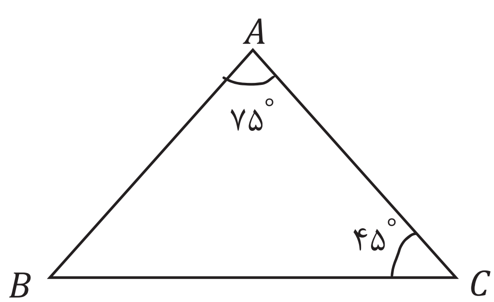
این قضیه برای تمام مثلث ها برقرار است و میگوید:نسبت هر ضلع به سینوس زاویه ی مقابلش عددی ثابت است.



$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{C}{\sin\hat{C}}$$

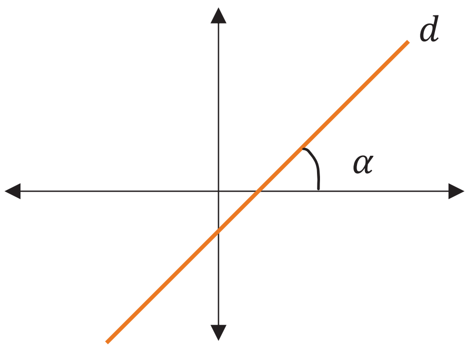
$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}\rightarrow b\sin\hat{A}=a\sin\hat{B}\rightarrow \frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}$$

در مثلث زیر، نسبت $\frac{AB}{AC}$ را بیابید .



شیب خط و تانژانت

مقدار تانژانت زاویه ،همان شیب خط است.



$d = \tan\alpha$

به عنوان مثال در خط $y = x + ۱$ چون شیب خط برابر با ۱ است پس $\tan\alpha = ۱$

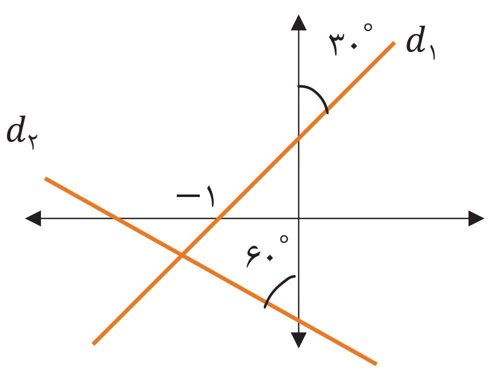
یعنی خط محور x ها را با زاویه ۴۵° قطع میکند.

معادله خطی بنویسید که با محور x ها زاویه ۴۵° بسازد و از نقطه $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ بگذرد.

خط $۴mx + (۳m - ۲)y = ۱$ با محور x ها زاویه ۴۵° میسازد .mرا بیابید .

خطی که با محورxها زاویه ی ۳۰° بسازد و محور y ها را در نقطه ای با عرض$-\sqrt{۳}$قطع کند،معادله اش به چه صورت خواهد بود؟

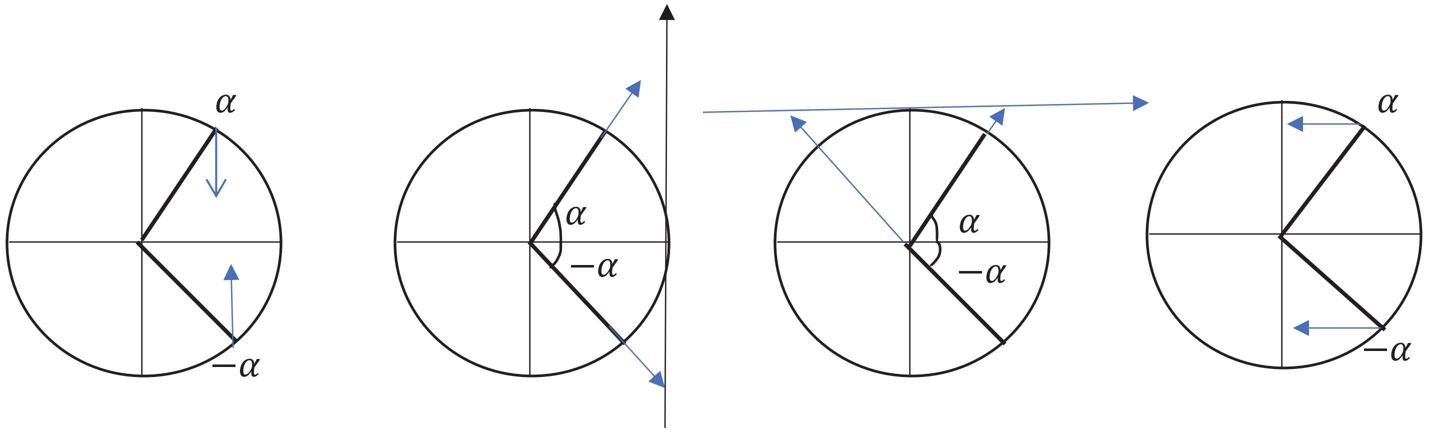
در شکل زیر،عرض نقطه به طول ۱ روی خط $d_۱$ چند برابر شیب خط $d_۲$ است؟



دو زاویه قرینه

دایره مثلثاتی زیر به خوبی دو زاویه قرینه را نمایش میدهد.

به زبان ساده میتوان گفت که cos منفی خوره وsin،tan وcotمنفی انداز هستند.



$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$۲\cos\left(\frac{-۱۲۵\pi}{۴}\right) - ۳\tan\left(-\frac{۱۲۵\pi}{۴}\right) + ۴\cot\left(\frac{-۱۲۵\pi}{۴}\right) =$$

دو زاویه مکمل

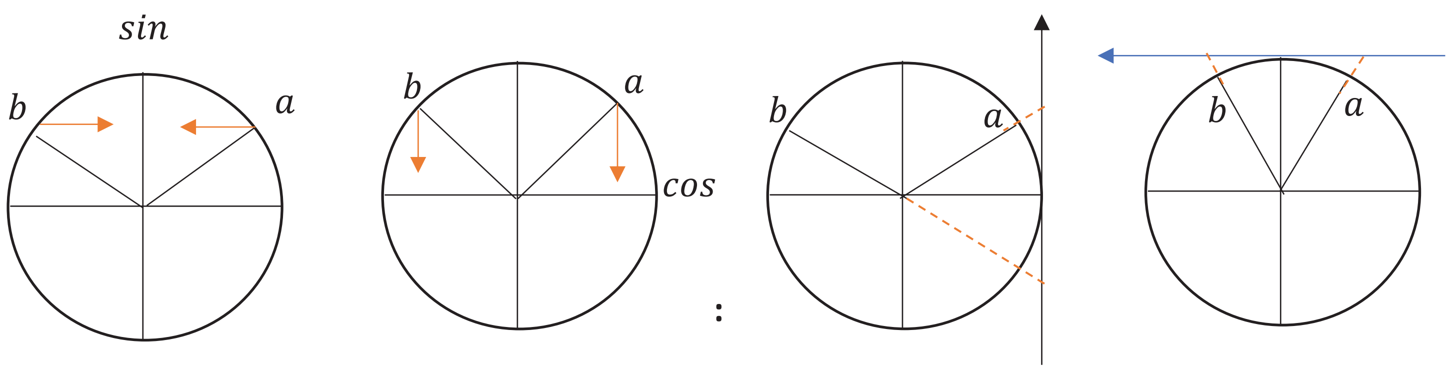
اگر مجموع دو زاویه برابر با ۱۸۰ درجه شود آن دو زاویه مکمل هستند.

مکمل زاویه α برابر با $\pi - \alpha$ است،زیرا: $(\alpha) + (\pi - \alpha) = \pi$

مکمل زاویه های داده شده را بیابید .

$\beta + \frac{۲\pi}{۵}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{۴} - \gamma$ $\qquad$ $\alpha - \frac{\pi}{۶}$

دایره مثلثاتی زیر به خوبی روابط دو زاویه مکمل را نمایش میدهد.به زبان ساده دو زاویه مکمل sin هاشون با هم برابر است اماcos ها، tan ها و cot هاشون قرینه ی یکدیگر هستند.



$sina = sinb$ $\qquad$ $cosa = -cosb$ $\qquad$ $tana = -tanb$ $\qquad$ $cota = -cotb$

$sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\quad cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\quad tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\quad cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

در دو زاویه مکمل داریم:

$$\cos a+\cos b=۰$$

$$tan\, a+tan\, b=۰$$

$$cot\, a+cot\, b=۰$$

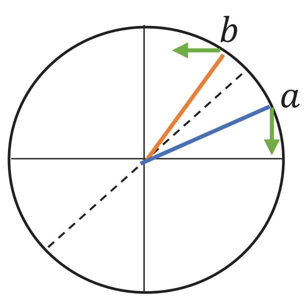
حاصل عبارات زیر را بیابید .

$$\cos\frac{۳\pi}{۱۴}+\cos\frac{۵\pi}{۱۴}+\cos\frac{۷\pi}{۱۴}+\cos\frac{۹\pi}{۱۴}+\cos\frac{۱۱\pi}{۱۴}=$$

$$\sin\frac{۵\pi}{۸}+\cot\left(\alpha+\frac{۳\pi}{۸}\right)+\sin\frac{۳\pi}{۸}+\cot\left(\frac{۵\pi}{۸}-\alpha\right)=$$

دو زاویه متمم

دو زاویه متمم در دایره مثلثاتی نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم متقارن هستند و به زبان ساده sin ها با cos ها برابر هستندو tan با cot ها .



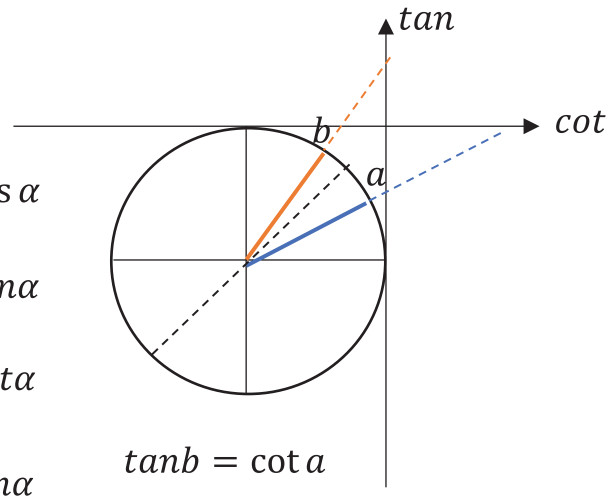
$\sin b=\cos a$

$$sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=sin\alpha$$

$$tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=cot\alpha$$

$$cot\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=tan\alpha$$



$tanb=\cot a$

حاصل عبارات زیر را بیابید .

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{۳}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{۴}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{۶}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\beta\right)$$

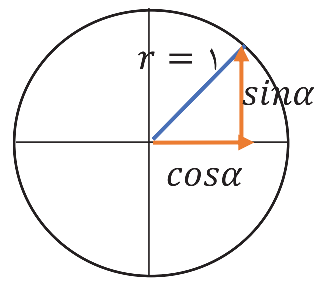
$$A=\tan ۱^\circ\tan ۲^\circ\tan ۸۸^\circ\tan ۸۹^\circ$$

در مثلث قائم الزاویه ABC که $\hat{A} = ۹۰^\circ$ است ثابت کنید:

$$\frac{\tan\hat{B} + \tan\hat{C}}{\cot\hat{B} + \cot\hat{C}} = ۱$$

روابط بین نسبت های مثلثاتی

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \rightarrow \begin{cases} \sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \end{cases}$$



$$\tan\alpha \times \cot\alpha = ۱ \rightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{۱}{\cot\alpha} \\ \cot\alpha = \dfrac{۱}{\tan\alpha} \end{cases}$$

$$(\underbrace{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}_{۱})^۲ = \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha + ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha \rightarrow \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

$$(\underbrace{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}_{۱})^۳ = (\sin^۲\alpha)^۳ + ۳(\sin^۲\alpha)^۲(\cos^۲\alpha) + ۳(\sin^۲\alpha)(\cos^۲\alpha)^۲ + (\cos^۲\alpha)^۳$$

$$\rightarrow \quad ۱ = \sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha + ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha(\underbrace{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha}_{۱}$$

$$\rightarrow \sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha = ۱ - ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

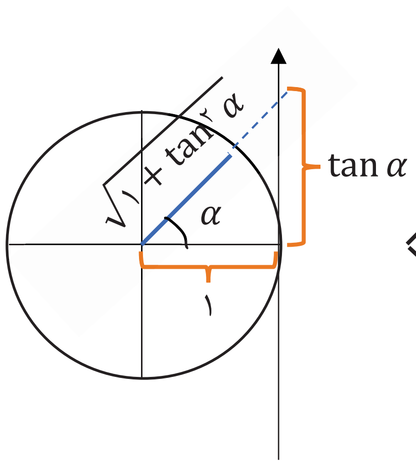
$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \rightarrow \cancel{\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}} + \frac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \rightarrow \tan^۲\alpha + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \rightarrow \frac{\sin^۲\alpha}{\sin^۲\alpha} + \cancel{\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}} = \frac{۱}{\sin^۲\alpha} \rightarrow ۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\overbrace{\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha}^{۱}}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

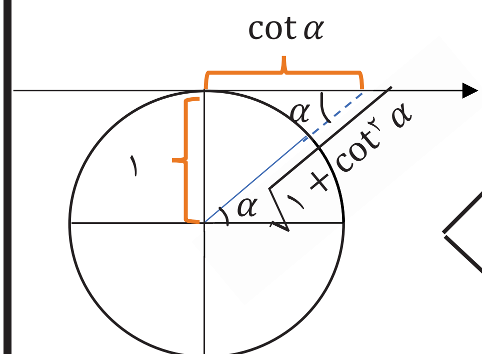
$$\cos^{۴}\alpha-\sin^{۴}\alpha=\overbrace{(\cos^{۲}\alpha+\sin^{۲}\alpha)}^{۱}(\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha)$$

$$\rightarrow\ \cos^{۴}\alpha-\sin^{۴}\alpha=(\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha)$$



$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{۱+\tan^{۲}\alpha}}\rightarrow\sin^{۲}\alpha=\frac{\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}$$

$$\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^{۲}\alpha}}\rightarrow\cos^{۲}\alpha=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}$$



$$\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱+\cot^{۲}\alpha}}\rightarrow\sin^{۲}\alpha=\frac{۱}{۱+\cot^{۲}\alpha}$$

$$\cos\alpha=\frac{\cot^{۲}\alpha}{\sqrt{۱+\cot^{۲}\alpha}}\rightarrow\cos^{۲}\alpha=\frac{\cot^{۲}\alpha}{۱+\cot^{۲}\alpha}$$

حاصل عبارات زیر را ساده کنید .

$$\left(\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}-\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}\right)\times\cos x=$$

$$\tan x+\cot x=$$

$$\frac{\sin^{۳}x+\cos^{۳}x}{۱-\sin x\cos x}=$$

$$\frac{\sin^{۳} x}{۱-\cos x}-\sin x\cos x=$$

$$\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\beta-\cos^{۲}\beta\sin^{۲}\alpha=$$

$$\frac{۱+\tan x}{۱+\cot x}=$$

$$\frac{\tan x+\cot x}{\frac{۱}{\sin x}+\frac{۱}{\cos x}}=$$

$$\left(\frac{۱}{\cos\theta}+\tan\theta\right)(۱-\sin\theta)=$$

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^{۲}+\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}=$$

اگر α در ربع دوم باشد ،ساده شده عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{۱}{\sqrt{۱+\cot^{۲}\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^{۲}\alpha}}=$$

اگر $\tan x=۲$ باشد،حاصل کسر $\frac{\sin x+\cos x}{۳\sin x-۲\cos x}$ را بیابید.

اگر $\sin x+\cos x=\frac{۳}{۵}$باشد،$\sin x\cos x$ را بیابید .

اگر α در ربع اول و $\sin\alpha=\frac{۲ab}{a^{۲}+b^{۲}}$ ،مقدار$tan\alpha$را بیابید.

اگر $tan\alpha=-\frac{۲}{۳}$ و α زاویه ای در ناحیه چهارم باشد، $sin\alpha$ را بیابید.

مقدار a را طوری تعیین کنید که عبارت زیر ،یک اتحاد مثلثاتی باشد:

$$\frac{۱}{۱-\sin x}+\frac{۱}{۱+\sin x}=\frac{a}{\cos^{۲} x}$$

در اتحاد ی زیر، $A-B$ را بیابید .

$$۱-\cos^{۲} x=\frac{A}{\sin^{۲} x}+\frac{B}{\sin^{۴} x}$$

اتحاد بودن تساوی های زیر را بررسی کنید.

$$\tan^{۲} x-\cos^{۲} x=\tan^{۲} x\cos^{۲} x$$

$$\frac{\sin \alpha}{۱-\cos a}=\frac{۱+\cos a}{\sin \alpha}$$

حاصل $(۱+\sin x+\cos x)^{۲}$ چند برابر $(۱+\sin x)(۱+\cos x)$ است؟

حاصل $\frac{\sin x-۱}{\sin x+۱}+\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}$ چند برابر $\frac{\tan x}{\cos x}$ است؟

روابط بین نسبت های مثلثاتی

$$\cos(\alpha+\beta)= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

$$\cos(۲\alpha)=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\sin(۲\alpha)=۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(۴۵+\beta)=\frac{۱+\tan\beta}{۱-\tan\beta}$$

$$\tan(۴۵-\beta)=\frac{۱-\tan\beta}{۱+\tan\beta}$$

روابط مخفی و کاربردی

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}:\ \frac{۱+\tan\beta}{۱-\tan\beta}\Longrightarrow\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan(۴۵+\alpha)$$

$$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}:\ \frac{۱-\tan\beta}{۱+\tan\beta}\Longrightarrow\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\tan(۴۵-\alpha)$$

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲\sin\alpha\times\cos^{۲}\alpha=۲\tan\alpha\times\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}\Longrightarrow\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}$$

$$\sin\alpha=۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\qquad\qquad\sin\alpha=\frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱+\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}$$

$$\cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha=\cos^{۲}\alpha-(۱-\cos^{۲}\alpha)=۲\cos^{۲}\alpha-۱\longrightarrow\boxed{\cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱}$$

$$\cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha=(۱-\sin^{۲}\alpha)-\sin^{۲}\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha\longrightarrow\boxed{\cos ۲\alpha=۱-۲\cos^{۲}\alpha}$$

$$\cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}-\frac{\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}\longrightarrow\boxed{\cos ۲\alpha=\frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}}$$

$$\cos\alpha=\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

$$\cos\alpha=\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-۱$$

$$\cos\alpha=۱-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

$$\cos\alpha=\frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}$$

$$\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha\tan\alpha}\quad=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}$$

$$\tan\alpha=\frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}}$$

در مثلثی رابطه ی $\sin B\cos A(\cot B-\tan A)=۰$ برقرار است .نوع مثلث چیست؟

حاصل کسر زیر را بیابید .

$$\frac{\tan(x+y)+\tan(x-y)}{۱-\tan(x+y)\cdot\tan(x-y)}=$$

بیشترین مقدار عبارت زیر را بیابید.

$$(\sin x+\sin ۲x)^{۲}+(\cos x+\cos ۲x)^{۲}=$$

حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\frac{۱-\tan ۲۵}{۱+\tan ۲۵}=$$

$$\frac{\sin ۱۵+\cos ۱۵}{\sin ۱۵-\cos ۱۵}=$$

$$\sin ۱۵\cos ۱۵=$$

$$\frac{\tan ۷/۵}{۱+\tan^{۲}۷/۵}=$$

$$\frac{\tan a\cot ۲a}{۱-\tan^{۲}a}=$$

اگر $\frac{۱}{۳}=\frac{sinx}{sinx+cosx}$ باشد،مقدار $\boldsymbol{tan2x}$ را بیابید .

روابط فرعی $۲a$

$$(\sin a + \cos a)^{۲} = ۱ + \sin ۲a$$

$$(\sin a - \cos a)^{۲} = ۱ - \sin ۲a$$

$$\tan a + \cot a = \frac{۲}{\sin ۲a}$$

$$\tan a - \cot a = -۲\cot ۲a$$

$$\sin^{۴} a + \cos^{۴} a = ۱ - \frac{۲}{۴}\sin^{۲} ۲a$$

$$\sin^{۶} a + \cos^{۶} a = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^{۲} ۲a$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin^{۲} a &= \frac{۱}{۲}(۱ - \cos ۲a) \\ \cos^{۲} a &= \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲a) \end{aligned}\right. \longrightarrow \tan^{۲} a = \frac{۱ - \cos ۲a}{۱ + \cos ۲a}$$

روابط فرعی $۳a$

$$\sin ۳a = ۳\sin a - ۴\sin^{۳} a$$

$$\cos ۳a = ۴\cos^{۳} a - ۳\cos a$$

اثبات بر عهده دانش آموزان

تبدیل ضرب به جمع و برعکس

$$\begin{cases}\boxed{\sin(\alpha+\beta)} = \boxed{\sin\alpha\cos\beta} + \cancel{\cos\alpha\sin\beta} \\ \boxed{\sin(\alpha-\beta)} = \boxed{\sin\alpha\cos\beta} - \cancel{\cos\alpha\sin\beta}\end{cases} \longrightarrow ۲\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$-\begin{cases}\boxed{\sin(\alpha+\beta)} = \cancel{\sin\alpha\cos\beta} + \boxed{\cos\alpha\sin\beta} \\ \boxed{\sin(\alpha-\beta)} \underset{-}{=} \cancel{\sin\alpha\cos\beta} \underset{+}{-} \boxed{\cos\alpha\sin\beta}\end{cases} \longrightarrow ۲\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

$$\begin{cases}\boxed{\cos(\alpha+\beta)} = \boxed{\cos\alpha\cos\beta} - \cancel{\sin\alpha\sin\beta} \\ \boxed{\cos(\alpha-\beta)} = \boxed{\cos\alpha\cos\beta} + \cancel{\sin\alpha\sin\beta}\end{cases} \longrightarrow ۲\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$-\begin{cases}\boxed{\cos(\alpha+\beta)} = \cancel{\cos\alpha\cos\beta} \boxed{-\sin\alpha\sin\beta} \\ \boxed{\cos(\alpha-\beta)} \underset{-}{=} \cancel{\cos\alpha\cos\beta} \boxed{\underset{-}{+}\sin\alpha\sin\beta}\end{cases} \longrightarrow -۲\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$

به روابط بالا که تولید شده است تبدیل ضرب به جمع گفته میشود .

حاصل عبارت زیر را بیابید .

$$۲\sin ۲x\cos x - ۲\sin ۵x\cos ۲x + \sin ۷x$$

مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$\sin ۷۵ \sin ۱۵ =$$

تبدیل جمع به ضرب

$$\sin x + \sin y = ۲\sin\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}$$

$$\sin x - \sin y = ۲\cos\frac{x+y}{۲}\sin\frac{x-y}{۲}$$

$$cosx + \cos y = ۲\cos\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}$$

$$cosx - \cos y = ۲\sin\frac{x+y}{۲}\sin\frac{x-y}{۲}$$

حاصل عبارات زیر را بیابید .

$$\frac{\sin ۸۰ + \sin ۴۰}{\cos ۲۰} =$$

$$\frac{\cos ۶x + \cos ۲x}{\sin ۶x + \sin ۲x} =$$

پیدا کردن سریع نسبت ها

با اضافه و کم کردن مضارب زوج π به یک کمان ،سینوس ،کسینوس،تانژانت و کتانژانت آن تغییر نمیکند.به عبارت دیگر برای هر عدد صحیح kداریم:

$$\sin(۲k\pi \pm \alpha) = \sin\alpha \qquad \tan(۲k\pi \pm \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cos(۲k\pi \pm \alpha) = \cos\alpha \qquad \cot(۲k\pi \pm \alpha) = \cot\alpha$$

$$\sin\frac{۷\pi}{۳} = \sin\left(۲\pi + \frac{\pi}{۳}\right) = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad tan\frac{۲۱\pi}{۴} = \tan\left(۵\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = \sin\frac{\pi}{۴} = ۱$$

روش سریع

۱-زاویه مورد نظر را به صورت $k\pi \pm \alpha$ **یا** $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ **بنویسید.**

۲- α را در ربع اول فرض کنید و ناحیه مربوط به کمان مورد نظر را مشخص کنید ..

۳-علامت نسبت مثلثاتی مورد نظر در ناحیه ی به دست آمده را درج کنید .

۴-عبارت $\pm k\pi$ یا $\pm\frac{k\pi}{۲}$ را حذف کنید .

دقت شود در مرحله ی قبل از حذف $\pm\frac{k\pi}{۲}$ نسبت های مثلثاتی به صورت زیر تغییر میکنند.

$\sin \to \cos$ $\qquad$ $\cos \to \sin$ $\qquad$ $\tan \to \cot$ $\qquad$ $\cot \to \tan$

مثال:

$$\begin{cases} \sin(۲\pi-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(۲\pi-\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(۲\pi-\alpha) = -\tan\alpha \\ \cot(۲\pi-\alpha) = -\cot\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \\ \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha \\ \cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(۲\pi+\alpha) = \sin\alpha \\ \cos(۲\pi+\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(۲\pi+\alpha) = \tan\alpha \\ \cot(۲\pi+\alpha) = \cot\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right) = \cos\alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right) = -\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right) = -\cot\alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right) = -\tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right) = -\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right) = \sin\alpha \\ \tan\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right) = -\cot\alpha \\ \cot\left(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha\right) = -\tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right) = -\cos\alpha \\ \cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right) = -\sin\alpha \\ \tan\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right) = \cot\alpha \\ \cot\left(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha\right) = \tan\alpha \end{cases}$$

حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\sin\left(\frac{۱۱\pi}{۲}+\alpha\right)=$$

$$\cos\left(\frac{۱۵\pi}{۲}-\alpha\right)=$$

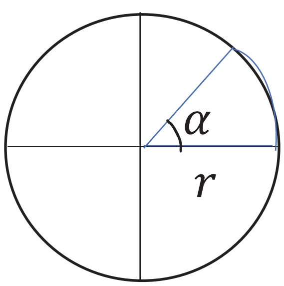
$$\cos(۷۶۵^\circ)=$$

$$\tan\left(\frac{۱۰۱\pi}{۳}\right)=$$

$$\frac{۳\sin ۱۸^\circ+\sin ۱۶۲^\circ-۲\sin ۱۹۸^\circ}{۲\cos ۷۲^\circ+۳\cos ۱۰۸^\circ+\sin ۳۴۲^\circ}=$$

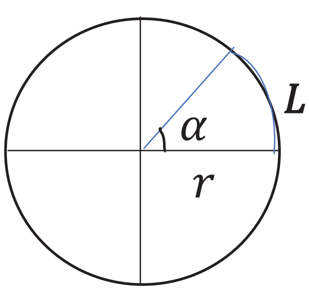
چند کاربرد مثلثات در دایره

۱-مساحت قطاع



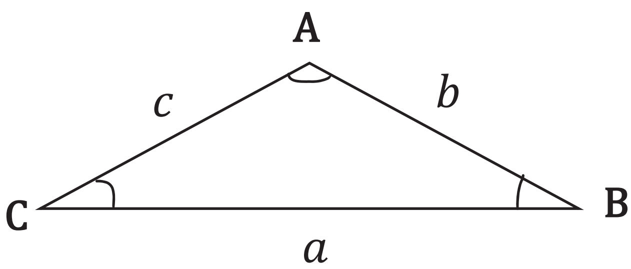
$$\frac{۲\pi}{\alpha}=\frac{\pi r^۲}{S}\longrightarrow S=\frac{۱}{۲}r^۲\alpha$$

۲-طول کمان



$$L=r\times\alpha$$

قضیه کسینوس ها

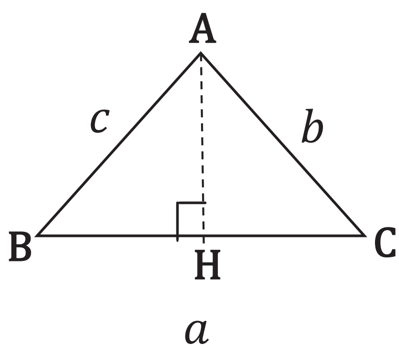


$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A}$$

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos\hat{B}$$

$$c^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲ab\cos\hat{C}$$

همچنین خواهیم داشت:



$$\cos\hat{B} = \frac{BH}{AB} \to BH = c\cos\hat{B}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{HC}{AC} \to HC = b\cos\hat{C}$$

$$BC = BH + HC \to a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}$$

در یک ۸ ضلعی منتظم به طول ضلع واحد،طول قطر کوچک را بیابید.(به کمک قضیه کسینوس ها)

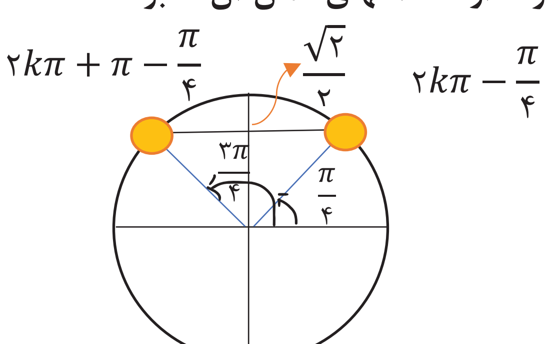
معادله مثلثاتی

به معادله ساده ی زیر دقت کنید:

$$\sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

اولین جوابی که به ذهنتان می آید $x = \frac{\pi}{۴}$ یا $x = \pi - \frac{\pi}{۴}$ هستند . درسته.ولی یک سوال .جوابهای دیگری ندارد؟

با کمی دقت در شکل مشخص میشود بیشمار جواب دیگر هم وجود دارد که انتهای کمان آن ها بر همین دو جواب منطبق است .



بنابرین تمامی جوابهای معادله بالا به صورت زیر خواهد بود:

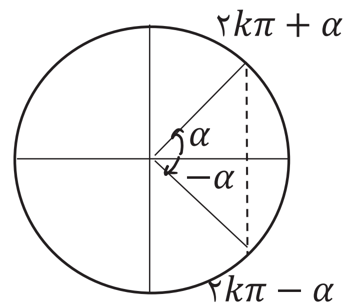
k عدد صحیح و دلخواه

$$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$$

$$x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴}$$

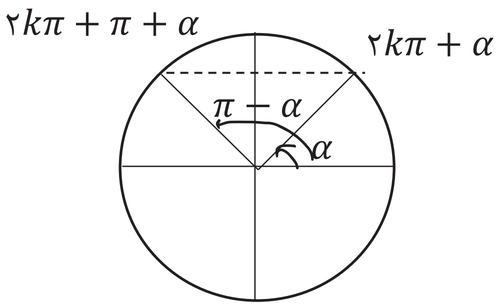
$$\cos x = \cos\alpha$$

$$x = 2k\pi \pm \alpha \qquad k \in Z$$



$$\sin x = \sin\alpha$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi + \alpha \end{cases} \qquad k \in Z$$



$$\cot x = \cot\alpha$$

$$x = k\pi + \alpha \qquad k \in Z$$

$$\tan x = \tan\alpha$$

$$x = k\pi \pm \alpha \qquad k \in Z$$

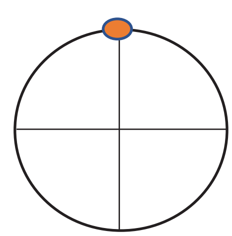
معادلات خاص

به معادله $\cos x = 1$ توجه کنید .جواب این معادله را میتوان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \cos 0 \rightarrow x = 2k\pi \pm 0 \rightarrow x = 2k\pi$$

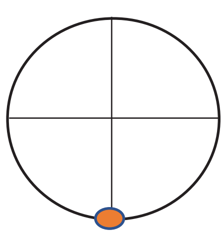
$\sin x = 1$

$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$



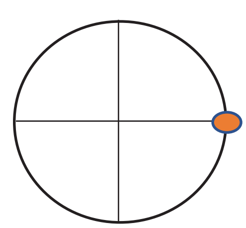
$\sin x = -1$

$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$



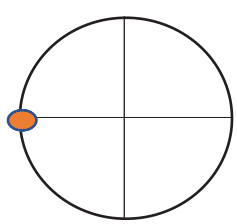
$\cos x = 1$

$x = 2k\pi$



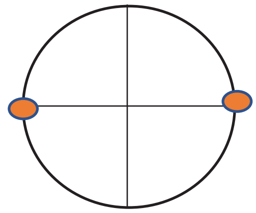
$\cos x = -1$

$x = (2k+1)\pi$



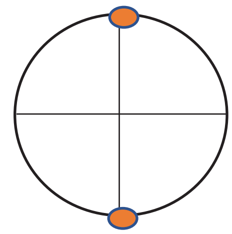
$sin\,x = ۰$

$x = k\pi$



$cos\,x = ۰$

$x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$



جواب کلی معادلات زیر را بیابید .

$\cot x = \sqrt{۳}$

$\frac{\tan ۳x + \tan x}{\tan x} = ۱$

$۲\sin^{۲} x - \sin x - ۱ = ۰$

$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$

$\sin ۳x = \sin ۲x$

$\tan ۴x = \tan ۲x$

$\tan ۴x \cdot cot ۲x = ۱$

$\sin^{۳} x - \sin x = ۰$

$\tan x + \sqrt{۳}\cot x = ۱ + \sqrt{۳}$

$۲\sin x + ۱ = ۰$

جواب معادله های زیر را در فاصله ی $[۰,۲\pi]$ مشخص کنید.

$\cos x = -\frac{۱}{۲}$

$\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan^۲ x = ۳$

$\sin ۲x = \sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)$

جواب معادله ی $\tan x + \sqrt{۳}\cot x = ۱ + \sqrt{۳}$ روی دایره،چند نقطه دارد؟

نمودار $y = -۳\cos\left(۲x - \frac{\pi}{۳}\right)$ در بازه ی $[-\pi,\pi]$ چند بار دارای بیشترین مقدار است؟

معادله ی $\cos ۴x + \cos x = ۰$ چند جواب متمایز در بازه ی $[۰,\pi]$ دارد؟

معادله ی $\tan ۳x = \cot ۵x$ در بازه ی $[۰,\pi]$ دارای چند جواب است؟

معادله ی $\tan ۳x \tan x = ۱$ در بازه ی $[۰,\pi]$ دارای چند جواب است؟

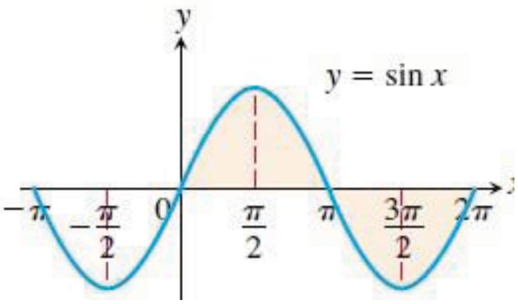
جواب های معادله ی $\cos ۲x = ۶ \sin x - ۱۳ - ۹$ در بازه ی $[۰,۲\pi]$ روی دایره مثلثاتی چند نقطه را مشخص میکند؟

معادله ی $\cot ۴x = \cot x$ در بازه ی $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد؟

نمودار توابع مثلثاتی

رسم نمودار $y=\sin x$

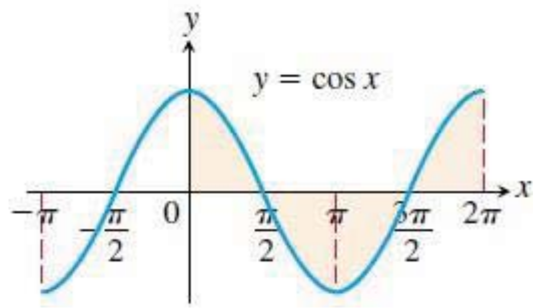
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$sinx$	۰	۱	۰	-۱	۰



$Df=\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ $\quad$ $Rf=[-۱,۱]$

رسم نمودار $y=\cos x$

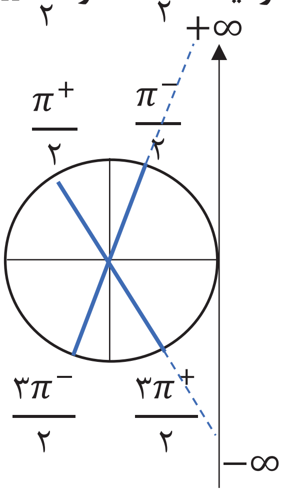
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$sinx$	۱	۰	-۱	۰	۱



$Df=[۰,\pi]$ $\quad$ $Rf=[-۱,۱]$

رسم نمودار $y=tan\,x$

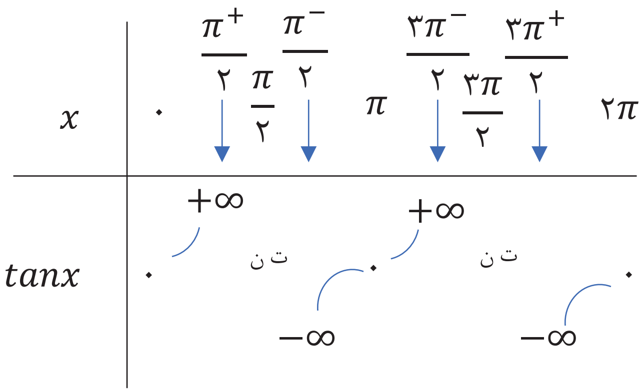
در نقاط $\tan\frac{\pi}{۲}$ و $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نشده است .ولی باید بدانیم در همسایگی بسیار نزدیک $\tan\frac{\pi}{۲}$ و $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ مقدار به چه سمتی میرود.یعنی:

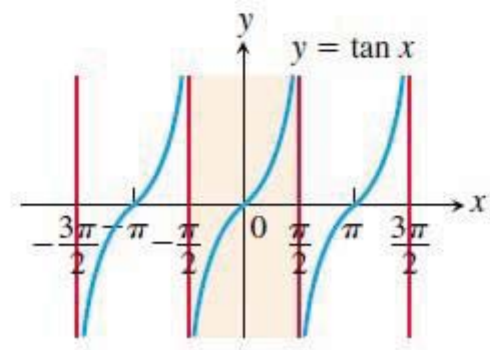


$$\begin{cases}\tan\frac{\pi^-}{۲}=+\infty\\ \tan\frac{\pi^+}{۲}=-\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan\frac{۳\pi^-}{۲}=+\infty\\ \tan\frac{۳\pi^+}{۲}=-\infty\end{cases}$$

برای رسم نمودار $y = tan\,x$ علاوه بر اینکه از ۵ نقطه ی $\left(۰,\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\right)$ استفاده میکنیم از همسایگی بسیار نزدیک $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ هم کمک میگیریم یعنی: $\left(\frac{\pi^-}{۲},\frac{\pi^+}{۲},\frac{۳\pi^-}{۲},\frac{۳\pi^+}{۲}\right)$

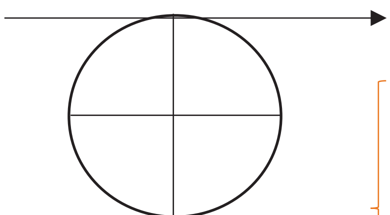




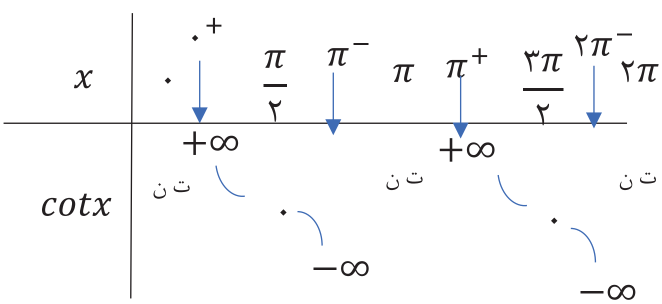
$Df = \left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ $\qquad$ $Rf = \mathbb{R}$

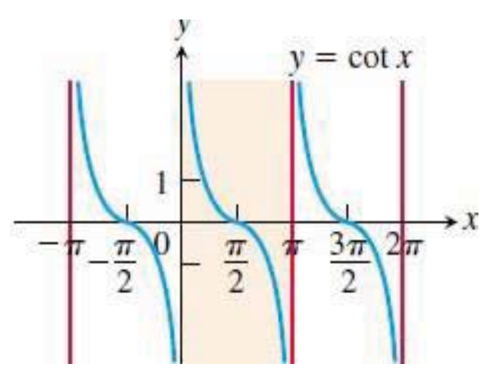
رسم نمودار $y = cot\,x$

کتانژانت در نقاط ۲π، π و ۰ تعریف نشده است .ولی باید بدانیم در همسایگی بسیار نزدیک π و ۲π مقدار به چه سمتی میرود.یعنی:



$$\begin{cases} \cot ۰^+ = +\infty \\ \cot ۰^- = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \cot \pi^+ = +\infty \\ \cot \pi^- = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \cot ۲\pi^+ = +\infty \\ \cot ۲\pi^- = -\infty \end{cases}$$





$Df = [۰,\pi]$ $\qquad$ $Rf = \mathbb{R}$

دامنه و برد توابع مثلثاتی

$y = \sin(f(x))$ $\quad Dy = Df$

$y = \cos(f(x))$ $\quad Dy = Df$

$y = \tan(f(x))$ $\quad Dy = \left\{x | f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}\right\}$

$y = \cot(f(x))$ $\quad Dy = \{x | f(x) \neq k\pi\}$

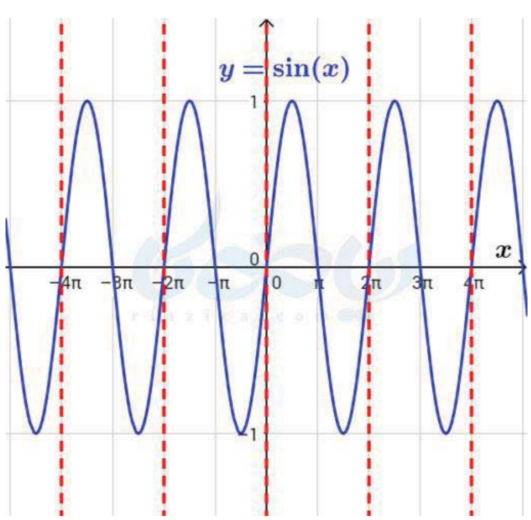
دامنه توابع زیر را بیابید .

$y = \sin\left(\sqrt[۵]{x^۲ + ۲x}\right)$

$y = \tan(۲x)$

$y = \cot\left(۲x + \frac{\pi}{۳}\right)$

دوره تناوب



به تابع $y = \sin x$ زیر توجه کنید:

همانطور که در شکل میبینید اگر نمودار تابع را در بازه ی $[۰,۲\pi]$ تکرار کنیم،نمودار کل تابع به دست می آید .

بازه هایی به طول $[۲\pi, ۴\pi]$ ، $[-۲\pi, ۰]$ ، $[۴\pi, ۶\pi]$ و ...نیز این خاصیت را دارند.تناوب یعنی همین.یعنی تکرار

اگر به منحنی بین خط‌چین‌های قرمز رنگ نگاه کنید، می‌بینید که نمودار بین هر دو خط‌چین قرمز رنگ، دائماً تکرار می‌شود. به چنین توابعی توابع متناوب گفته و کوچکترین بازه‌ای که تابع دارای این خاصیت باشد، **دوره تناوب** می‌گوییم.

$T_{\sin} = ۲\pi$

دوره تناوب

دوره تناوب توابع زیر را با رسم شکل مناسب به دست آورید .

$y = \sin(۲x)$

$y = ۲\sin x$

$y = \sin(\frac{-x}{۳})$

$y = \sin(۲x + ۳)$

$y = ۲\sin(x + ۳)$

$y = ۲\sin(x) + ۳$

از روی شکل ها در صفحات قبل میتوان دریافت که:

$T_{\cos} = ۲\pi$ $\qquad$ $T_{\tan} = \pi$ $\qquad$ $T_{\cot} = \pi$

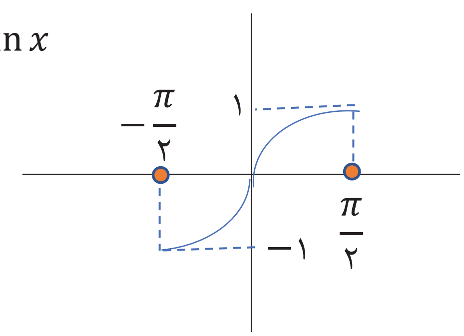
توابع معکوس مثلثاتی

می دانیم که معکوس یک تابع یعنی قرینه ی آن تابع نسبت به خط $y = x$.معکوس تابع f در صورتی تابع خواهد بود که خود تابع f یک تابع یک به یک باشد.

حالا اگر بخواهیم تابع $y = \sin^{-۱} x$ که معکوس تابع $y = \sin x$ میباشد را به دست آوریم ،متوجه خواهیم شد که تابع $y = \sin x$ یک به یک نیست پس معکوس آن نمیتواند یک تابع باشد.

قبول .ولی تابع $y = \sin x$ در بازه ی $\left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ یک تابع یک به یک است پس معکوس پذیر خواهد بود .

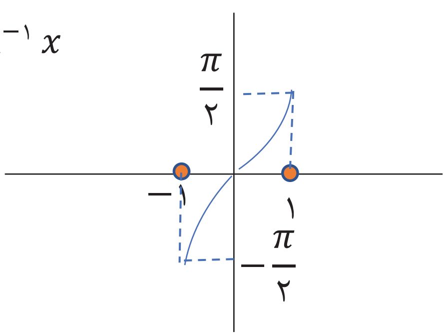
$y = \sin x$



$$Df = \left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$$

$$Rf = [-۱,۱]$$

$y = \sin^{-۱} x$



$$Df^{-۱} = [-۱,۱]$$

$$Rf^{-۱} = \left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$$

$y = sin^{-۱}(x)$ $\qquad$ $Dy = \{x| -۱ \le x < ۱\}$

$y = sin^{-۱}(g(x))$ $\qquad$ $Dy = \{x| -۱ \le g(x) < ۱\}$

حاصل عبارات زیر را بیابید.

$sin^{-۱}(۰) =$ $\qquad$ $sin^{-۱}(۱/۲) =$

$sin^{-۱}(-۱) =$ $\qquad$ $sin^{-۱}(۱^+) =$

$sin^{-۱}(۱) =$ $\qquad$ $sin^{-۱}(-۱^-) =$

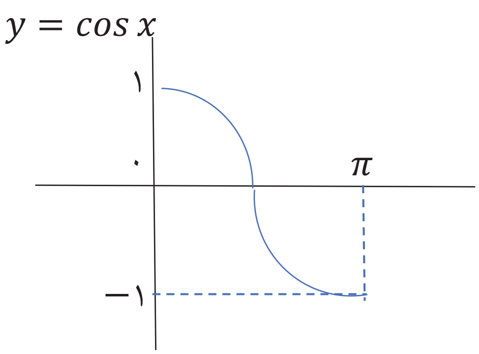
$sin^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) =$ $\qquad$ $sin^{-۱}\left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\right) =$

دامنه توابع زیر را بیابید .

$y = sin^{-۱}\left(\frac{۱}{x-۲}\right)$

$y = sin^{-۱}\left(\sqrt{۴-x^۲}\right)$

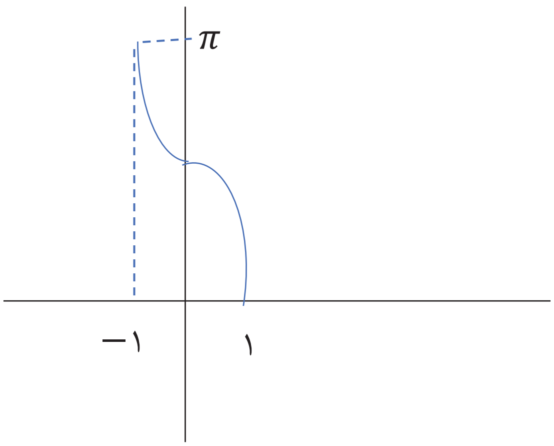
نمودار و تابع $y \; = \cos^{-۱} x$



$Df = [۰,\pi]$

$Rf = [-۱,۱]$

$y = cos^{-۱}\, x$



$Df^{-۱} = [-۱,۱]$

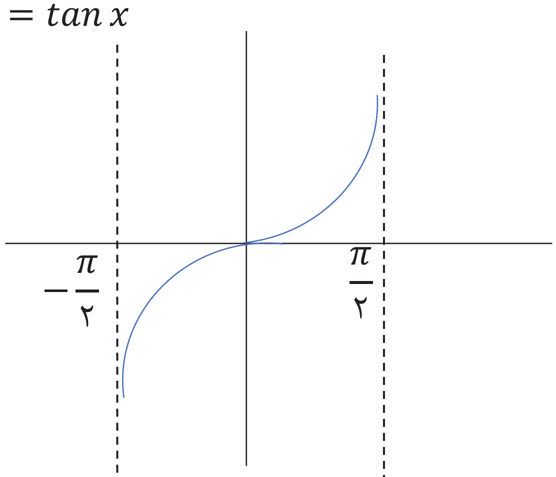
$Rf^{-۱} = [۰,\pi]$

$y = cos^{-۱}(x)$ $\quad$ $Dy = \{x| -۱ \leq x < ۱\}$

$y = cos^{-۱}(g(x))$ $\quad$ $Dy = \{x| -۱ \leq g(x) < ۱\}$

نمودار و تابع $y \ = \tan^{-۱} x$ $\quad$ $y \ = Arc\tan x$

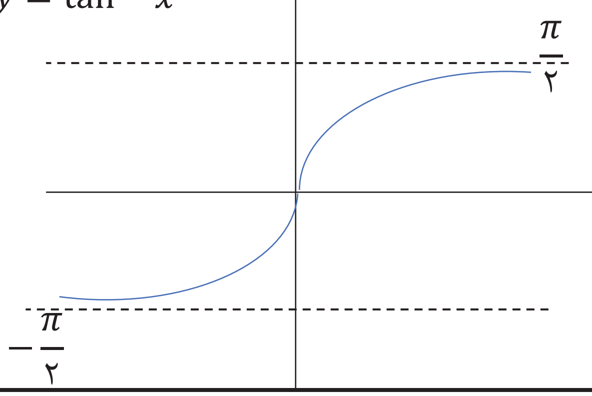
$y = tan\, x$



$Df = \left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$

$Rf = \mathbb{R}$

$y = \tan^{-۱} x$

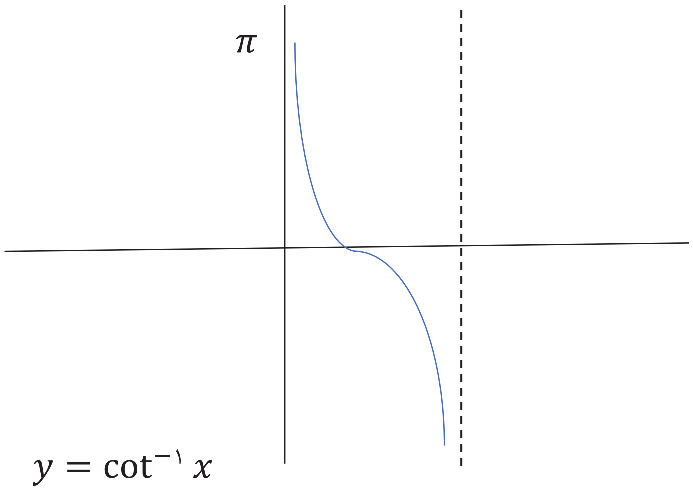


$Df^{-۱} = \mathbb{R}$

$Rf^{-۱} = \left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$

نمودار و تابع $y = cot^{-۱} x$ $\quad y = Arc\cot x$

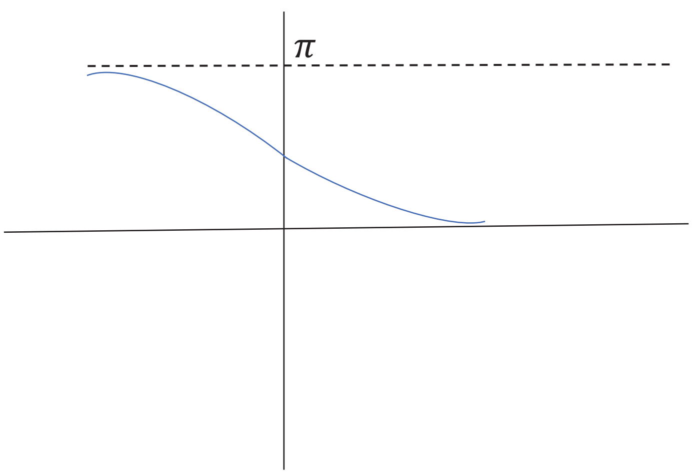
$y = cot\, x$



$Df = [۰, \pi]$

$Rf = \mathbb{R}$

$y = \cot^{-۱} x$



$Df^{-۱} = \mathbb{R}$

$Rf^{-۱} = [۰, \pi]$

$y = tan^{-۱}(g(x)) \longrightarrow Dy = Dg$

$\cos^{-۱}(-۱^{-۱})$

$y = cot^{-۱}(g(x)) \longrightarrow Dy = Dg$

حاصل عبارت های زیر را بیابید.

$\cot^{-۱}(۱) =$ $\quad \tan^{-۱} x =$ ، $x \to -\infty$ $\quad \cos^{-۱}(-۱^{-۱})=$

$\cot^{-۱}(-۱) =$ $\quad \tan^{-۱} x =$ ، $x \to +\infty$ $\quad \cos^{-۱}(۰)=$

$\cot^{-۱}(۰) =$ $\quad \tan^{-۱}(-\sqrt{۳}) =$ $\quad \cos^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=$

برد توابع زیر را بیابید .

$$f(x) = ۳\tan^{-۱} x + \frac{\pi}{۲} \qquad -\frac{\sqrt{۳}}{۲} < x \leq ۱$$

$$f(x) = \cos^{-۱} x \qquad -\frac{\sqrt{۳}}{۲} < x \leq \frac{۱}{۲}$$

دامنه ی توابع زیر را بیابید.

$$y = \tan^{-۱}\left(\frac{\sqrt{x} - ۲}{\sqrt{۵ - x}}\right)$$

$$y = \cot^{-۱}\left(\frac{۱}{x + |x|}\right)$$

مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$\sin\left(\frac{۳}{۴}\cot^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)\right) + \cos(۲\cot^{-۱}(۰)) =$$

به یاد پدرم

که تنها خاطراتش با من است ..