۱ فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a , b , c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

حاکم   نوکر   کوچیکه

$ab=cd \longrightarrow ab=c(d) \rightarrow c\mid ab$

$ab=d(c) \rightarrow d\mid ab$

$cd=a(b) \rightarrow a\mid cd$

$cd=b(a) \rightarrow b\mid cd$

$ab=cd(1) \rightarrow cd\mid ab \quad , \quad cd=ab(1) \rightarrow ab\mid cd$

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

$a\mid b \xrightarrow{\exists q\in\mathbb{Z}} b=aq \xrightarrow{\times(-1)} -b=a(-q) \rightarrow a\mid -b$

$b=aq \longrightarrow b=(-a)(-q) \rightarrow -a\mid b$

$b=aq \xrightarrow{\times(-1)} -b=-a(q) \rightarrow -a\mid -b$

۳ اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

$a\mid 9k+4 \xrightarrow{\times 5 \text{ حاکم}} a\mid 45k+20$

$a\mid 5k+3 \xrightarrow{\times 9} a\mid 45k+27$

حاکم‌ها را از هم کم می‌کنیم

$\longrightarrow a\mid (45k+27)-(45k+20) \rightarrow a\mid 7 \rightarrow a=\pm 1$ غ ق ق ، $a=-7$ غ ق ق

$\boxed{a=7}$ ق ق و عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $5|4k+1$، ثابت کنید : $25|16k^2+28k+6$

$5\mid 4k+1 \xrightarrow{\text{هر دو به توان ۲}} 25\mid 16k^2+8k+1$

$5\mid 4k+1 \xrightarrow{\times 5 \text{ هر دو}} 25\mid 20k+5$

حاکم‌ها را جمع می‌زنیم

$\longrightarrow 25\mid 16k^2+28k+6$ ▨

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

خیر. مثال نقض می‌زنیم

$1\mid 2$

$3\mid 3 \rightarrow 1+3\mid 2+3 \rightarrow 4\mid 5$ ✗

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(راهنمایی : فرض کنید $d=(m, m+1)$ و ثابت کنید $d|1$ و نتیجه بگیرید $d=1$).

الف) اعداد صحیح و متوالی $\rightarrow m, m+1$ حکم: $(m,m+1)=1$

$(m,m+1)=d \rightarrow d\mid m$

$\searrow d\mid m+1$ ⊖

$d\mid 1 \longrightarrow d=\pm 1 \xrightarrow{\text{ب.م.م همواره مثبت}} d=1 \longrightarrow (m,m+1)=1$ ▨

ب) اعداد صحیح و فرد متوالی $2n+1 , 2n+3$ $(2n+1,2n+3)=d \rightarrow d\mid 2n+1$

$\searrow d\mid 2n+3$ ⊖

$d\mid 2 \rightarrow d=\pm 1 , d=\pm 2$

منفی‌ها غیرقابل قبول هستند برای ب.م.م، و عدد ۲ هم غ ق ق است زیرا هر دو عدد ما فرد هستند و عدد ۲ شمارندهٔ آنها نیست

$d=1$ می‌ماند ▨

۷ اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=1$.

ثابت می‌کنیم $d=1$

$$(p,q)=d \to d|p^{*} \to d=1 \checkmark \;,\; d=p \text{ غ ق ق}$$
$$d|q^{**} \to d=1 \checkmark \;,\; d=q \text{ غ ق ق}$$

اگر $d=p$ باشد و آن را در رابطه ** قرار دهیم $p|q$ و این یعنی $p=q$ که خلاف فرض اصلی مسئله است. پس $d=p$ غ ق ق

اگر $d=q$ باشد و آن را در رابطه * قرار دهیم $q|p$ و این یعنی $q=p$ که این هم خلاف فرض اصلی مسئله است پس $d=q$ غ ق ق

پس $d=1$

۸ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید:

$$m\leq n\,,\, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

اگر $m\leq n$ باشد آنگاه $p\in\mathbb{Z}$ و $p\geq 0$ وجود دارد که $n=m+p$

$$a|b \xrightarrow{\exists q\in\mathbb{Z}} b=aq \xrightarrow{\text{طرفین به توان } n} b^n=a^n q^n \xrightarrow{n=m+p} b^n=a^{m+p}q^n \Rightarrow b^n=a^m.a^p.q^n$$
$$\Rightarrow b^n=a^m(a^p q^n) \Rightarrow a^m|b^n$$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

$$a=7q+5 \xrightarrow{\times 8} 8a=56q+40$$
$$a=8q'+7 \xrightarrow{\times 7} 7a=56q'+49 \quad -$$
$$8a-7a=56q-56q'+40-49$$
$$a=56(q-q')\underbrace{-9+56}_{+47}-56 \Rightarrow a=56(q-q')-56+47$$
$$a=56(q-q'-1)+47$$

باقی مانده

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

$$a \text{ فرد} \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} a=2n+1 \quad,\quad b|a+2 \to b|2n+1+2 \to b|2n+2+1 \to b|\underbrace{2(n+1)+1}_{\text{فرد}}$$

پس b هم عددی فرد است و نمی‌تواند زوج باشد $b=2m+1$

$$a^2+b^2+3=(2n+1)^2+(2m+1)^2+3=\underbrace{4n^2+4n}_{\underbrace{4n(n+1)}_{2k}}+1+\underbrace{4m^2+4m}_{\underbrace{4m(m+1)}_{2k'}}+1+3=$$

* می‌دانیم که ضرب دو عدد متوالی بر ۲ بخش‌پذیر است

$$8k+8k'+5=8(k+k')+5$$

باقی مانده ✓

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=3k$ و $n=3k+1$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3-n$.)

حالت اول $n=3k \to n^3-n=(3k)^3-3k=27k^3-3k=3(9k^3-k) \to 3|n^3-n$ ✓

حالت دوم $n=3k+1 \to n^3-n=(3k+1)^3-(3k+1)=27k^3+27k^2+9k+\cancel{1}-3k-\cancel{1}=3(9k^3+9k^2+2k) \to 3|n^3-n$ ✓

حالت سوم $n=3k+2 \to n^3-n=(3k+2)^3-(3k+2)=27k^3+54k^2+36k+8-3k-2=27k^3+54k^2+33k+6$
$=3(9k^3+18k^2+11k+2) \to 3|n^3-n$ ✓

مقسوم علیه
مقسوم
$a=bq+r$
$n|a \rightarrow a=nk$
$n|b \rightarrow b=nk'$

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

$$nk=nk'q+r \rightarrow r=nk-nk'q=n(\overbrace{k-k'q}^{k''}) \rightarrow r=nk'' \rightarrow n|r \checkmark$$

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

برای a سه حالت داریم:

$a=۳k \rightarrow ۳|a \checkmark$

$a=۳k+۱ \rightarrow a+۲=۳k+۱+۲=۳k+۳=۳\overbrace{(k+۱)}^{k'} \rightarrow a+۲=۳k' \rightarrow ۳|a+۲ \checkmark$

$a=۳k+۲ \rightarrow a+۴=۳k+۲+۴=۳k+۶=۳(k+۲) \rightarrow a+۴=۳k' \rightarrow ۳|a+۴ \checkmark$

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

دو عدد صحیح و متوالی را n و $n+1$ در نظر می‌گیریم. حکم: $(n+1)^۳-n^۳$ فرد است.

برای $n\in\mathbb{Z}$ دو حالت داریم، n یا فرد است و یا زوج.

$n=۲k \rightarrow (n+1)^۳-n^۳=(۲k+۱)^۳-(۲k)^۳=\cancel{۸k^۳}+۱۲k^۲+۶k+۱-\cancel{۸k^۳}=۲(۶k^۲+۳k)+۱=۲k'+۱$

در این حالت $(n+1)^۳-n^۳$ فرد است.

$n=۲k+۱ \rightarrow (n+1)^۳-n^۳=(۲k+۲)^۳-(۲k+۱)^۳=۸k^۳+۲۴k^۲+۲۴k+۸-(۸k^۳+۱۲k^۲+۶k+۱)$

$=۱۲k^۲+۱۸k+\underbrace{۷}_{۶+۱}=۲(۶k^۲+۹k+۳)+۱=۲k'+۱$

در این حالت هم فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

سه عدد صحیح و متوالی را $n-1, n, n+1$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که حاصل ضرب دو عدد متوالی همواره بر ۲ بخش‌پذیر است.

طبق تمرین ۱۱، $n^۳-n$ بر ۳ بخش‌پذیر است. $n(n-1)(n+1)=n^۳-n$

پس حاصل ضرب سه عدد متوالی بر ۳ و بر ۲ بخش‌پذیر است پس بر ۶ که همان !۳ است بخش‌پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید: $(m\in\mathbb{Z})$

الف) $([\overbrace{m^۲,m}^{m^۲}],m^۵)=m^۲$

ب) $(۲m,۶m^۳)=۲m$

پ) $(۳m+۱,۳m+۲)=۱$ ← اعداد متوالی

ت) $[m^۷,(\overbrace{m^۲,m^۳}^{m^۲})]=m^۷$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]=[۲۴,۱۲۰]=۲^۳\times۳\times۵=۱۲۰$

$۷۲=۲^۳\times۳^۲$
$۴۸=۲^۴\times۳ \qquad (۷۲,۴۸)=۲^۳\times۳=۲۴$
$۱۲۰=۲^۳\times۳\times۵$

با احترام
علی‌پور