

چند ضلعي ها و ويژگي هايي از آنها

تعريف : چند ضلعي شكلي است شامل  $n$  ( $n \geq 3$ ) پاره خط متوالي كه :

۱- هر پاره خط دقيقاً دو پاره خط ديگر را در نقاط انتهائي خودش قطع كند .

۲- هر دو پاره خط كه در يك انتها مشتركند ، روي يك خط نباشند .

با توجه به شكل هاي مقابل مي توان گفت :

اشكال (۱) و (۲) چند ضلعي هستند ولي شكل ۳ چند ضلعي نيست .

قطر در چند ضلعي ها

در هر  $n$  ضلعي ، از هر رأس تعداد  $n-3$  قطر خارج شده بنا بر اين تعداد قطر ها برابر

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

مي باشد .

تعريف :  $n$  ضلعي را محدب گوييم هر گاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن ، بقيه نقاط

چند ضلعي در يك طرف آن خط واقع شوند .

هر (( چند ضلعي )) را كه محدب نباشد مقعر مي نامند .

نكته : در مثلث  $ABC$  داريم :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \times h_a \quad , \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} b \times h_b \quad , \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} c \times h_c$$

نكته : در هر مثلث نسبت اندازه هاي هر دو ضلع با نسبت ارتفاع وارد بر آنها رابطه معكوس

دارد به عبارتي مي توان نوشت :

$$\frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b} \quad \text{و} \quad \frac{c}{a} = \frac{h_a}{h_c} \quad \text{و} \quad \frac{c}{b} = \frac{h_b}{h_c}$$

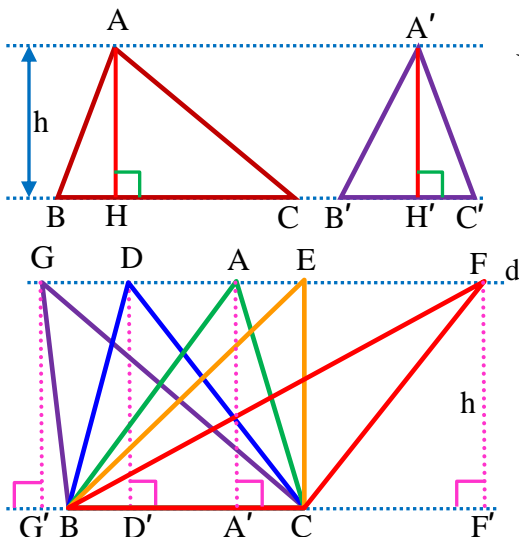
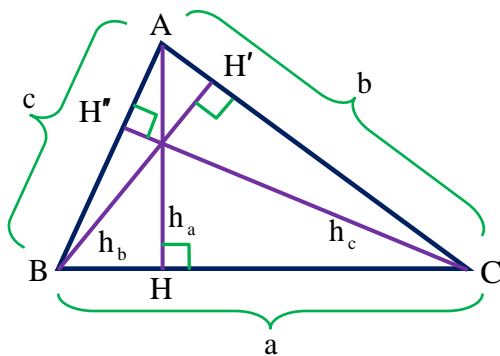
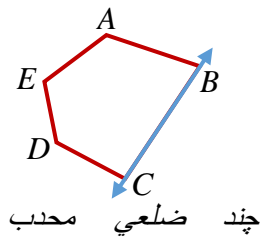
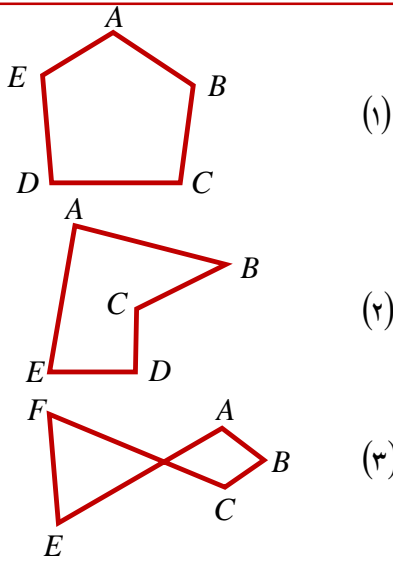
نكته: اگر اندازه هاي ارتفاع هاي دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت هاي اين دو مثلث برابر

نسبت اندازه هاي قاعده هايي است كه اين ارتفاع ها بر آنها وارد مي شود .

$$AH = A'H' = h \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} A'H' \times B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

مثال : در شكل مقابل خط  $d$  با  $BC$  موازي است .

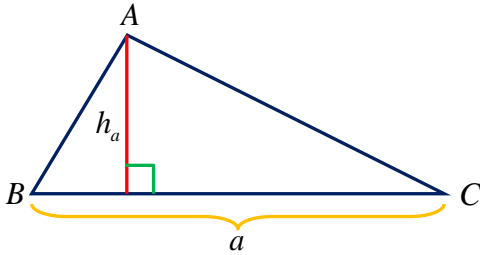
$$S_{GBC} = S_{DBC} = S_{ABC} = S_{EBC} = S_{FBC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} ha$$



نکته: مساحت هر مثلث را به یکی از سه حالت زیر می توان به دست آورد:

الف)

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \times h_a \Rightarrow \left\{ a = \frac{2S}{h_a} \right. \quad \text{یا} \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} b \times h_b \Rightarrow \left\{ b = \frac{2S}{h_b} \quad \text{یا} \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2} c \times h_c \Rightarrow \left\{ c = \frac{2S}{h_c} \right.$$

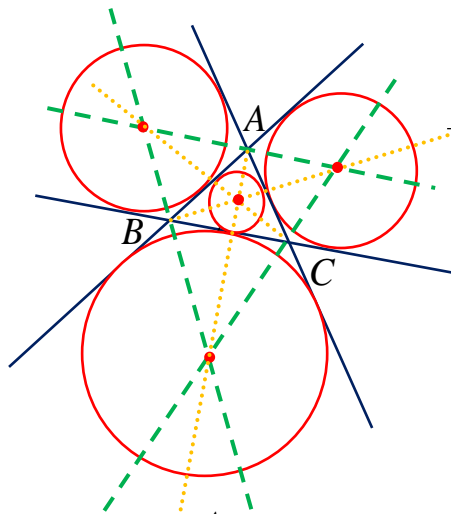


ب)  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin C$

۳- قضیه هرون: در هر مثلث با طول اضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$  اگر  $p = \frac{a+b+c}{2}$  آنگاه

مساحت مثلث برابر است با:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

**تذکر:** با توجه به نکات فوق می توان گفت رابطه زیر همواره برقرار است.



$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{a+b+c}{p} = \frac{P}{p} = \frac{2P}{P} = 2$$

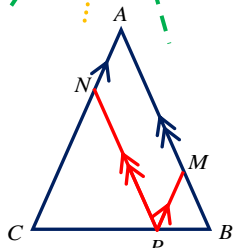
نکته: اگر  $r_a$ ،  $r_b$  و  $r_c$  شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و  $r$  شعاع دایره محاطی داخلی باشد، داریم:

$$r_c = \frac{S}{P-c} \quad \text{و} \quad r_b = \frac{S}{P-b} \quad \text{و} \quad r_a = \frac{S}{P-a}$$

و از این رابطه نتیجه می شود:

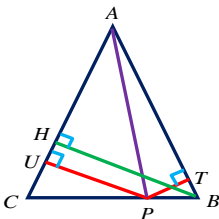
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین به موازات دو ساق مثلث خطوطی رسم کنیم، مطابق شکل مجموع طول دو پاره خط ایجاد شده، برابر طول ساق مثلث می باشد.



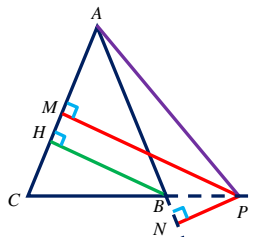
$$PM + PN = AB$$

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین، به دو ساق مثلث عمودهایی رسم کنیم، مجموع طول دو پاره خط برابر طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث می باشد.



$$PT + PU = BH$$

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی امتداد قاعده یک مثلث متساوی الساقین، به دو ساق مثلث عمودهایی رسم کنیم، قدرمطلق تفاضل طول دو پاره خط برابر طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث می باشد.



$$|PM - PN| = BH$$

نکته: مجموع فواصل نقطه دلخواه  $M$  داخل مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$ ، از اضلاع آن برابر طول ارتفاع این مثلث است.

$$MH + MH' + MH'' = AA'$$

نکته: میانه هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند.

$$S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

اگر در مثلث  $ABC$  ضلع  $BC$  را از طرف رأس  $C$  به اندازه خودش تا نقطه  $D$  امتداد دهیم، مساحت مثلث  $ACD$  برابر مساحت مثلث  $ABC$  بوده و مساحت مثلث  $ABD$  دو برابر مساحت مثلث  $ABC$  است.

$$S_{ACD} = S_{ABC} \quad , \quad S_{ABD} = 2S_{ABC}$$

اگر در مثلث  $ABC$  ضلع  $BC$  را از طرف رأس  $B$  به اندازه خودش تا نقطه  $D$  امتداد دهیم، مساحت مثلث  $ABD$  برابر مساحت مثلث  $ABC$  بوده و مساحت مثلث  $ADC$  دو برابر مساحت مثلث  $ABC$  است.

$$S_{ABD} = S_{ABC} \quad , \quad S_{ADC} = 2S_{ABC}$$

اگر در مثلث  $ABC$  ضلع  $BC$  را از طرف رأس  $B$  به اندازه  $k$  برابر خودش تا نقطه  $D$  امتداد دهیم، مساحت مثلث  $ABD$  ،  $k$  برابر مساحت مثلث  $ABC$  بوده و مساحت مثلث  $ADC$  ،  $(k+1)$  برابر مساحت مثلث  $ABC$  است.

$$S_{ABD} = k \times S_{ABC} \quad , \quad S_{ADC} = (k+1) \times S_{ABC}$$

مثال: اگر در مثلث  $ABC$  ضلع  $BC$  را از طرف رأس  $C$  به اندازه خودش تا نقطه  $C'$  و ضلع  $AC$  را از طرف رأس  $A$  به اندازه خودش تا نقطه  $A'$  و ضلع  $AB$  را از طرف رأس  $B$  به اندازه خودش تا نقطه  $B'$  امتداد دهیم، مساحت مثلث  $A'B'C'$  چند برابر مساحت مثلث  $ABC$  است.

حل: مساحت مثلث  $ABC$  را برابر  $S$  در نظر می گیریم. در مثلث  $A'CC'$ ، داریم  $CC' = BC$  و  $A'C = 2AC$  و زاویه  $A'\hat{C}C'$  مکمل زاویه  $A\hat{C}B$  است، پس داریم:

$$S_{A'CC'} = 2S_{ABC} = 2S$$

و به همین ترتیب داریم:

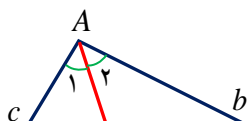
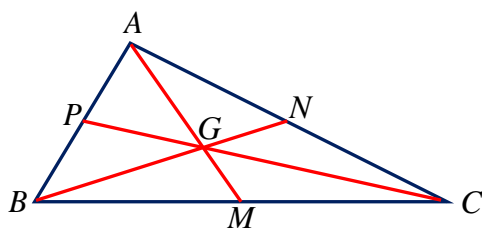
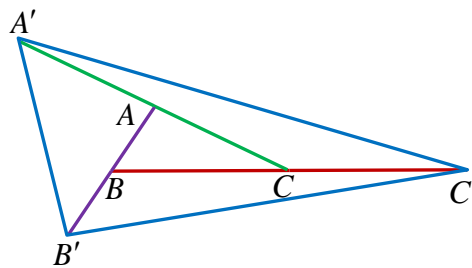
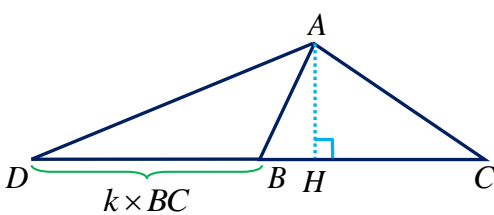
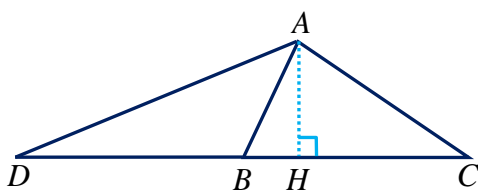
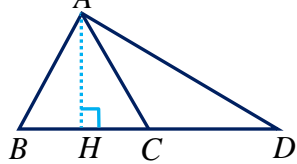
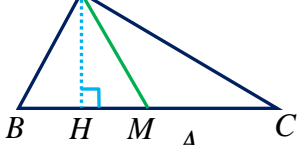
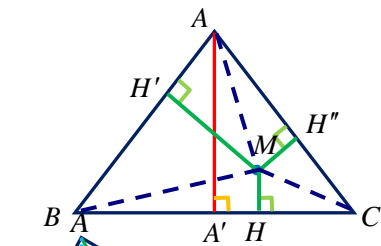
$$S_{B'BC'} = 2S_{ABC} = 2S \quad \text{و} \quad S_{A'AB'} = 2S_{ABC} = 2S$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$S_{A'B'C'} = S_{ACC'} + S_{B'BC'} + S_{A'AB'} + S_{ABC} = 2S + 2S + 2S + S = 7S$$

نکته: با رسم سه میانه یک مثلث، تعداد 6 مثلث هم مساحت به وجود می آید که مساحت هر کدام از آنها  $\frac{1}{6}$  مثلث اولیه است.

$$S_{\triangle AGP} = S_{\triangle BGP} = S_{\triangle BGM} = S_{\triangle CMG} = S_{\triangle CNG} = S_{\triangle ANG} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$$



نکته: در مثلث  $ABC$ ، نیمساز یک زاویه، مثلث را به دو مثلث تقسیم می کند به طوری که نسبت مساحت های آنها متناسب با دو ضلع آن زاویه است.

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times AD \times \sin \hat{A}}{\frac{1}{2}AC \times AD \times \sin \hat{A}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

**نکات مربوط به مربع محاط در مثلث قائم الزاویه**

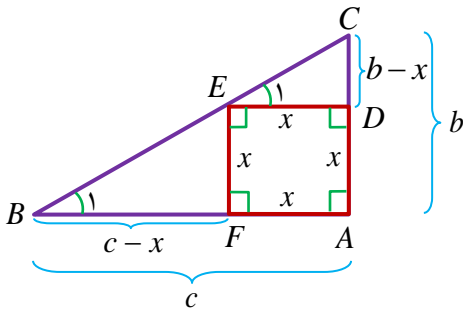
نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$  مربعی به ضلع  $x$  را طوری محاط کنیم که

یک زاویه مربع، همان زاویه قائمه مثلث باشد، در این صورت داریم:  $x = \frac{bc}{b+c}$

$$ED \parallel AB \text{ مورب } BC \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \tan \hat{E}_1 = \tan \hat{B}_1$$

$$\Rightarrow \frac{b-x}{x} = \frac{x}{c-x} \Rightarrow bc - bx - cx + x^2 = x^2 \Rightarrow x = \frac{bc}{b+c}$$

(  $AE$  نیمساز زاویه  $A$  است و تمام روابط طولی نیمساز برقرار است.)



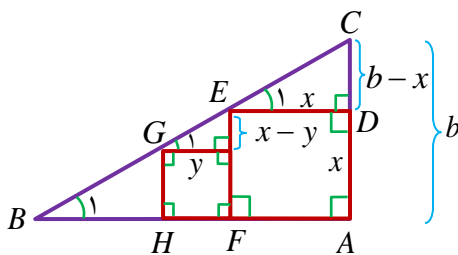
نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ،  $(\hat{A} = 90^\circ)$  دو مربع به اضلاع  $x$  و  $y$  مطابق شکل رسم

کنیم در این صورت داریم:  $x^2 = by$

اثبات:

$$AB \parallel GI \parallel ED \text{ مورب } BC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{G}_1 = \hat{E}_1 \Rightarrow \tan \hat{G}_1 = \tan \hat{E}_1$$

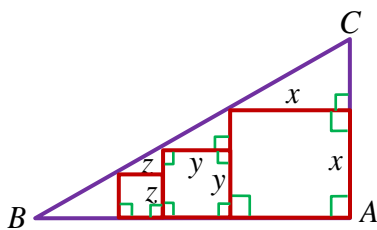
$$\Rightarrow \frac{x-y}{y} = \frac{b-x}{x} \Rightarrow x^2 - xy = by - xy \Rightarrow x^2 = by$$



نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ،  $(\hat{A} = 90^\circ)$  سه مربع به اضلاع  $x$  و  $y$  و  $z$  مطابق شکل

رسم کنیم در این صورت داریم:  $y^2 = xz$

اثبات مشابه مسئله قبل است.

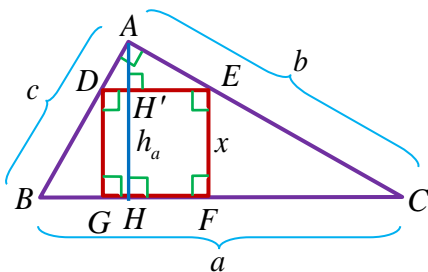


نکته: اگر در مثلث قائم الزاویه  $ABC$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$  مربعی به ضلع  $x$  را طوری محاط کنیم که

یک ضلع مربع، موازی وتر مثلث باشد، در این صورت داریم:  $x = \frac{abc}{a^2 + bc}$

اثبات:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{1}{2}a \times h_a = \frac{1}{2}bc \Rightarrow h_a = \frac{bc}{a}$$



$$ED \parallel AB \Rightarrow \triangle ADE = \triangle ABC \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{h_a - x}{h_a} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{bc}{a} - x}{\frac{bc}{a}} = \frac{x}{a} \Rightarrow bc - ax = \frac{bcx}{a} \Rightarrow abc - a^2x = bcx \Rightarrow x = \frac{abc}{a^2 + bc}$$

نکته: اگر در مثلث  $ABC$  سه مربع به اضلاع  $x$  و  $y$  و  $z$  را مانند شکل مقابل رسم کنیم داریم:  $x = y + z$

اگر  $\hat{B} = \alpha$  و  $\hat{C} = \beta$  با استفاده از خطوط موازی و مورب نتیجه می شود:

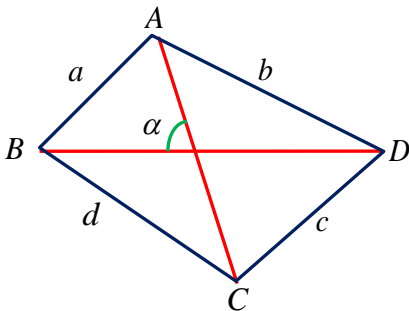
$$\hat{I}_1 = \hat{D}_1 = \alpha \text{ و } \hat{L}_1 = \hat{E}_1 = \beta$$

و از آنجاییکه مجموع زوایای داخلی مثلث برابر  $180^\circ$  است نتیجه می شود:  
 $\hat{D}_2 = \beta$  ,  $\hat{E}_2 = \alpha$

$$\left. \begin{matrix} \hat{I}_1 = \hat{E}_2 = \alpha \\ \hat{D}_2 = \hat{L}_1 = \beta \end{matrix} \right\} \xrightarrow{zz} \triangle DIH \approx \triangle EML \Rightarrow \frac{IH}{EM} = \frac{DH}{ML} \Rightarrow \frac{y}{x-z} = \frac{x-y}{z}$$

$$\Rightarrow yz = x^2 - xy - xz + yz \Rightarrow x(x - y - z) = 0 \xrightarrow{+x} x = y + z$$

نکته: مساحت هر چهار ضلعی برابر است بانصف حاصلضرب دوقطر در سینوس زاویه بین دوقطر.



$$S_{\text{مربع}} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha$$

قضیه هرون در چهار ضلعی: مساحت چهار ضلعی  $ABCD$  با محیط  $2P$ ، از رابطه زیر محاسبه می شود:

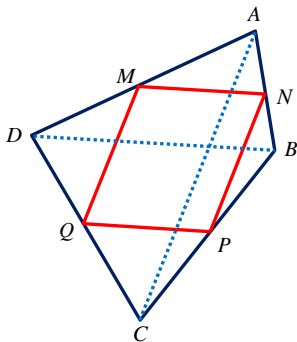
$$S_{ABCD} = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d) - abcd \times \cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}$$

نکته: از به هم وصل کردن وسط های اضلاع هر چهار ضلعی محدب، یک متوازی الاضلاع بوجود می آید که محیط آن برابر با جمع طول قطر های چهار ضلعی اولیه می باشد و زاویه بین اضلاع آن با زاویه بین قطر های چهار ضلعی اولیه برابر است.

**تذکره:** از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک چهار ضلعی به وجود می آید که محیط آن برابر مجموع طول قطر های چهار ضلعی اولیه می باشد.

**تذکره:** شرط آنکه از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک مستطیل به وجود می آید آن است که قطر های چهار ضلعی اولیه بر هم عمود باشند.

**تذکره:** شرط آنکه از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک چهار ضلعی یک لوزی به وجود می آید آن است که قطر های چهار ضلعی اولیه با هم برابر باشند.



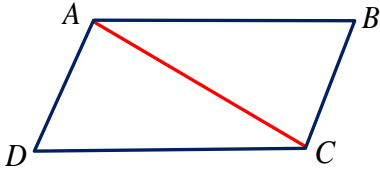
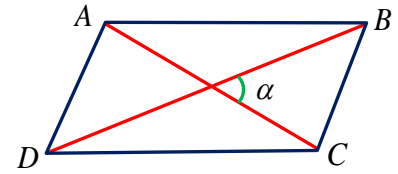
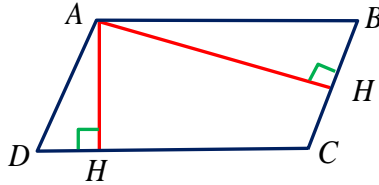
**نکات مربوط به متوازی الاضلاع**

نکته: مساحت یک متوازی الاضلاع را می توان به یکی از سه حالت زیر تعیین کرد:

الف)  $S_{ABCD} = AH \times DC = AH' \times BC$

ب)  $S_{ABCD} = AB \times AD \times \sin A = AD \times DC \times \sin D$

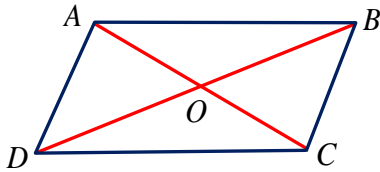
ج)  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha$



نکته: هر قطر متوازی الاضلاع، آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند که مساحت هر یک از آنها نصف مساحت متوازی الاضلاع است.

$$S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

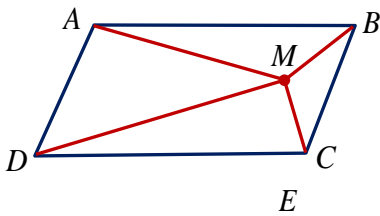
نکته: با رسم دو قطر متوازی الاضلاع، چهار مثلث هم مساحت به وجود می آید که مساحت هر یک از آنها  $\frac{1}{4}$  مساحت متوازی الاضلاع است.



$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle DOC} = S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

نکته: مجموع مربعات قطرهای برابر است با مجموع مربعات اضلاع:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$$

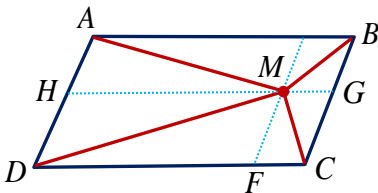


نکته: اگر از نقطه دلخواه M درون متوازی الاضلاع به چهار رأس آن وصل کنیم آنگاه چهار مثلث به وجود می آید که مجموع مساحت های دو مثلث مقابل با مجموع مساحت های دو مثلث مقابل دیگر با یکدیگر برابرند.

$$S_{\triangle AMD} + S_{\triangle BMC} = S_{\triangle AMB} + S_{\triangle DMC}$$

اثبات:

از نقطه M پاره خط های EF و GH را موازی اضلاع مثلث رسم می کنیم.



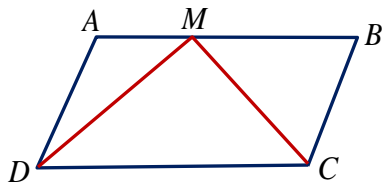
می دانیم قطر متوازی الاضلاع آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند. بنابراین می توان نوشت:

$$S_{\triangle DMF} = S_{\triangle DMH} \text{ و } S_{\triangle CMG} = S_{\triangle CMF} \text{ و } S_{\triangle BME} = S_{\triangle BMG} \text{ و } S_{\triangle AME} = S_{\triangle AMH}$$

و در نتیجه داریم:

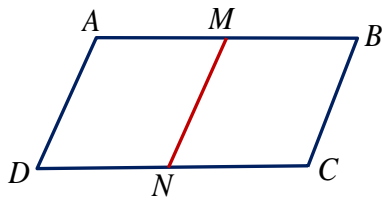
$$\begin{aligned} S_{\triangle AMD} + S_{\triangle BMC} &= S_{\triangle AMH} + S_{\triangle DMH} + S_{\triangle BMG} + S_{\triangle CMG} = S_{\triangle AME} + S_{\triangle DMF} + S_{\triangle BME} + S_{\triangle CMF} \\ &= S_{\triangle AMB} + S_{\triangle DMC} \end{aligned}$$

نکته: اگر از یک نقطه دلخواه روی یک ضلع متوازی الاضلاع به دو رأس مقابل وصل کنیم، مثلثی به وجود می آید که مساحت آن نصف مساحت متواری الاضلاع است.



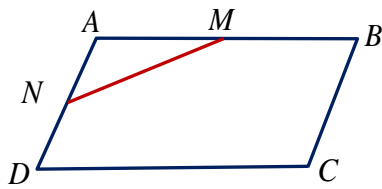
$$S_{\triangle MDC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

نکته: پاره خطی که وسط یک ضلع متوازی الاضلاع را به وسط ضلع مقابل به آن وصل می کند، متوازی الاضلاع را به دو متوازی الاضلاع یکسان تبدیل می کند که مساحت هر قسمت، نصف مساحت متواری الاضلاع است.



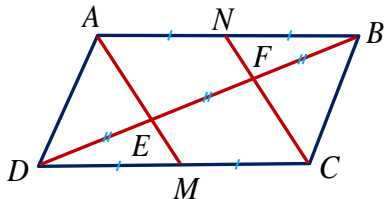
$$S_{AMND} = S_{MBCN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

نکته: پاره خطی که وسط یک ضلع متوازی الاضلاع را به وسط ضلع مجاور به آن وصل می کند، مثلثی با مساحت  $\frac{1}{8}$  مساحت متواری الاضلاع به وجود می آورد.



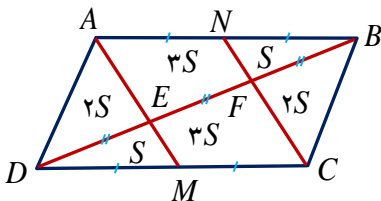
$$S_{AMND} = S_{MBCN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

نکته: در هر متوازی الاضلاع، پاره خطهایی که از دو رأس مقابل به وسط اضلاع مقابلشان وصل می شود، قطر مقابل راه به سه قسمت مساوی تقسیم می کنند. یعنی در شکل مقابل داریم:



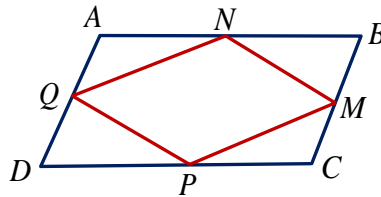
$$\left. \begin{matrix} AN = BN \\ DM = CM \end{matrix} \right\} \Rightarrow DE = EF = BF$$

مساحت هر بخش مانند شکل مقابل است.



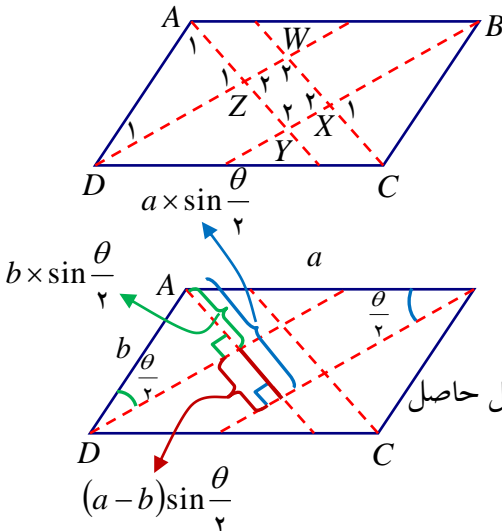
$$S_{\triangle BMF} = S_{\triangle DME} = S \Rightarrow S_{\triangle ADE} = S_{\triangle BCF} = 2S, S_{\triangle AEFN} = S_{\triangle CFEM} = 3S$$

نکته: از به هم وصل کردن وسط های اضلاع یک متوازی الاضلاع، یک متوازی الاضلاع به وجود می آید که مساحت آن نصف مساحت متواری الاضلاع اولیه است.



نکته: با رسم نیمساز های داخلی هر متوازی الاضلاع یک مستطیل بوجود می آید.

نکته: شکل حاصل از برخورد نیمساز های یک متوازی الاضلاع به اضلاع  $a, b$  و زاویه  $\theta$  مستطیلی است به اضلاع،



$$|a-b| \text{ پس قطر این مستطیل برابر است با: } (a-b)\cos\frac{\theta}{2}, (a-b)\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\text{قطر مستطیل حاصل} = \sqrt{(a-b)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (a-b)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{(a-b)^2 \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)} = |a-b|$$

نسبت مساحت مستطیل حاصل به مساحت متوازی الاضلاع، به زوایای داخلی متوازی الاضلاع ارتباطی ندارد زیرا اگر مساحت مستطیل را  $s$  و مساحت متوازی الاضلاع را  $s'$  بنامیم داریم:

$$\frac{s}{s'} = \frac{(a-b)\sin\frac{\theta}{2} \times (a-b)\cos\frac{\theta}{2}}{ab\sin\theta} = \frac{(a-b)^2 \times \sin\theta}{2ab\sin\theta} = \frac{(a-b)^2}{2ab}$$

### نکات مربوط به مستطیل

نکته: اگر از نقطه دلخواه  $M$  درون مستطیل به چهار رأس آن وصل کنیم آنگاه داریم:

$$AM^2 + MC^2 = BM^2 + DM^2$$

از آنجاییکه مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است تمام نکات متوازی الاضلاع در مورد مستطیل نیز صدق می کند.

نکته: با رسم نیمسازهای داخلی هر مستطیل یک مربع بوجود می آید. در صورتی که طول و عرض مستطیل به ترتیب  $a$  و  $b$  باشند مساحت مربع از رابطه مقابل به دست می آید:

$$S = \frac{1}{4}(a-b)^2$$

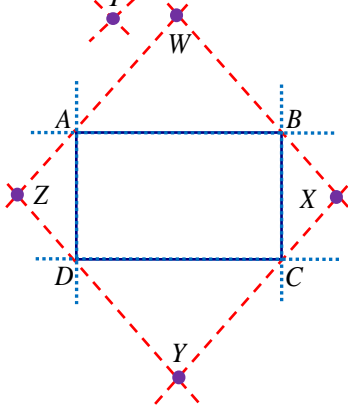
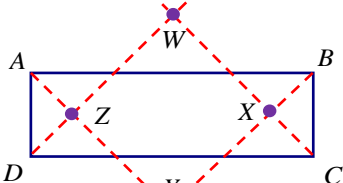
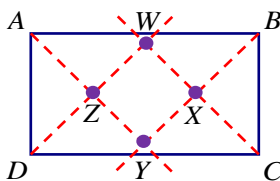
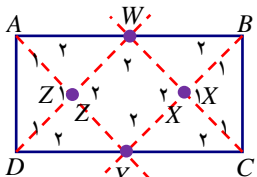
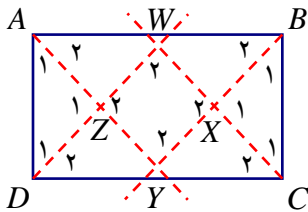
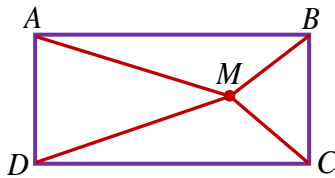
نکته: اگر طول مستطیل دقیقاً دو برابر عرض آن باشد، آنگاه دو رأس از چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمسازهای مستطیل، در وسط طول مستطیل قرار دارند.

اگر طول مستطیل از دو برابر عرض آن کمتر باشد، آنگاه هر چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمسازهای مستطیل، در داخل مستطیل قرار دارند.

اگر طول مستطیل از دو برابر عرض آن بیشتر باشد، آنگاه دو رأس از چهار رأس مربع حاصل از برخورد نیمسازهای مستطیل، در خارج از مستطیل قرار دارند.

با رسم نیمسازهای خارجی هر مستطیل یک مربع بوجود می آید. در صورتی که طول و عرض مستطیل به ترتیب  $a$  و  $b$  باشند مساحت مربع از رابطه مقابل به دست می آید:

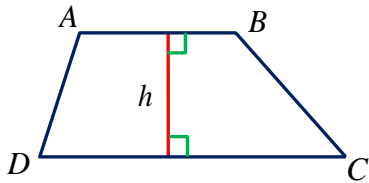
$$S = \frac{1}{4}(a+b)^2$$





**نکات مربوط به دوزنقه**

مساحت یک دوزنقه به صورت زیر تعیین می شود:

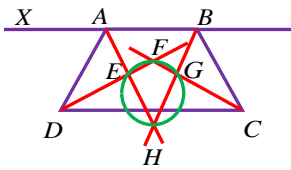


$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}h(AB + DC)$$

نکته: در دوزنقه متساوی الساقین زوایای مجاور به هر قاعده با یکدیگر برابرند و بلعکس.

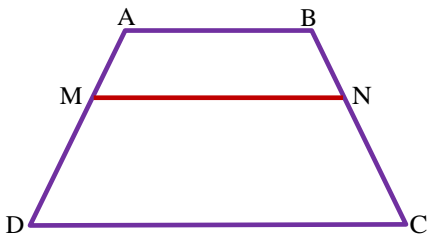
نکته: در دوزنقه متساوی الساقین قطرها با یکدیگر برابرند و بلعکس.

نکته: با رسم نیمسازهای داخلی هر دوزنقه یک چهارضلعی محاطی بوجود می آید زیرا دو زاویه قائمه دارد.



در شکل مقابل دوزنقه متساوی الساقین بوده و زوایای  $\hat{E}$  و قائمه هستند و چهار ضلعی  $EFGH$  یک کایت است و در نتیجه  $FH$  عمود منصف  $EG$  و همچنین نیمساز زوایای  $\hat{H}$  و  $\hat{F}$  است.

نکته: در دوزنقه مقابل  $MN \parallel AB \parallel CD$  داریم:



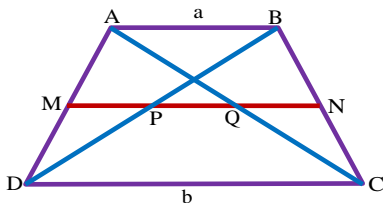
$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \quad (\text{قضیه تالس در دوزنقه})$$

عکس رابطه فوق نیز برقرار است یعنی اگر  $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$  آنگاه نتیجه می گیریم  $MN$  موازی  $AB$  است.

نکته: اگر  $AB = a$  و  $DC = b$  و  $MN \parallel AB \parallel CD$  و  $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \frac{m}{n}$  در این صورت طول

$$MN = \frac{na + mb}{m + n}$$

نکته: در شکل مقابل  $M$  وسط  $AD$  و  $N$  وسط  $BC$  است. در این حالت داریم:



$$MN \parallel AB \parallel DC \quad MN = \frac{a+b}{2}, \quad PQ = \frac{|b-a|}{2}$$

نکته: در متوازی الاضلاع  $ABCD$  اگر نقطه تلاقی قطرها را  $M$  بنامیم در این صورت داریم:

$$S_{\triangle AMD} = S_{\triangle BMC} \quad (\text{الف})$$

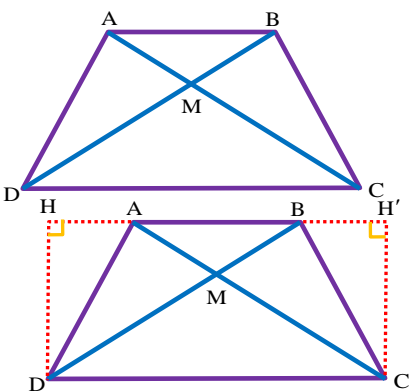
$$\left( S_{\triangle AMD} \right)^2 = S_{\triangle AMB} \times S_{\triangle DMC} \quad \text{یا} \quad S_{\triangle AMD} \times S_{\triangle BMC} = S_{\triangle AMB} \times S_{\triangle DMC} \quad (\text{ب})$$

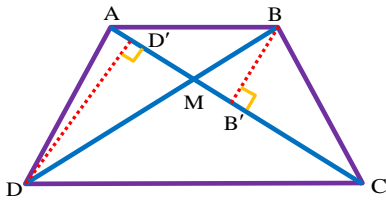
اثبات الف:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle DAB} &= \frac{1}{2} DH \times AB \\ S_{\triangle CAB} &= \frac{1}{2} CH' \times AB \end{aligned} \right\} \xrightarrow{DH=CH'} S_{\triangle DAB} = S_{\triangle CAB}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle DAB} - S_{\triangle MAB} = S_{\triangle CAB} - S_{\triangle MAB} \Rightarrow S_{\triangle AMD} = S_{\triangle BMC}$$

اثبات ب:





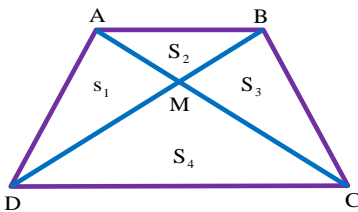
$$\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle MBC}} = \frac{\frac{1}{2} BB' \times AM}{\frac{1}{2} BB' \times MC} = \frac{AM}{MC}$$

و به طور مشابه داریم:

$$\frac{S_{\triangle MAD}}{S_{\triangle MDC}} = \frac{\frac{1}{2} DD' \times AM}{\frac{1}{2} DD' \times MC} = \frac{AM}{MC}$$

و در نتیجه می توان نوشت:

$$\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle MBC}} = \frac{S_{\triangle MAD}}{S_{\triangle MDC}} \Rightarrow S_{\triangle MAB} \times S_{\triangle MDC} = S_{\triangle MAD} \times S_{\triangle MBC}$$



به طور خلاصه در متوازی الاضلاع مقابل داریم:

$$S_1 = S_3 \quad (\text{الف})$$

$$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_4^2 \quad \text{یا} \quad S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4 \quad (\text{ب})$$

نکته: در یک شش ضلعی منتظم به ضلع  $a$ :

(۱) هر زاویه داخلی  $120^\circ$  است.

(۲) با رسم تمام قطر ها از یک رأس (دو قطر کوچک و یک قطر بزرگ) تعداد ۴ زاویه  $30^\circ$  به وجود می آید.

(۳) طول قطر کوچک برابر  $\sqrt{3}a$  و طول قطر بزرگ (نیمساز زاویه) برابر  $2a$  است.

(۴) مساحت این شش ضلعی برابر است با:  $S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$  است.

(۵) شعاع دایره محیطی برابر  $a$  است.

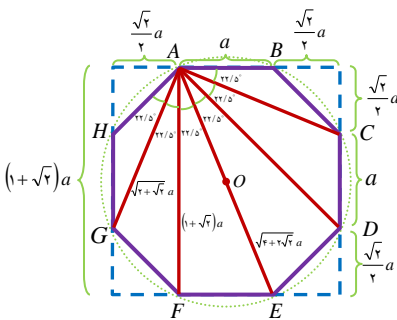
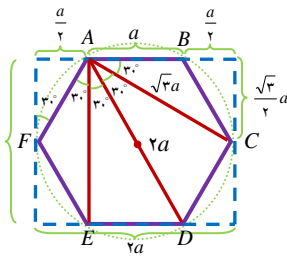
(۶) این شش ضلعی منتظم دارای مستطیل محیطی به طول  $2a$  و به عرض  $\sqrt{3}a$  است.

نکته: در یک هشت ضلعی منتظم به ضلع  $a$ :

(۱) هر زاویه داخلی  $135^\circ$  است.

(۲) با رسم تمام قطر ها از یک رأس (دو قطر کوچک دو قطر متوسط و یک قطر بزرگ) تعداد ۶ زاویه  $22.5^\circ$  به وجود می آید.

(۳) طول قطر کوچک برابر  $\sqrt{2} + \sqrt{2}a$  و طول قطر متوسط برابر  $(1 + \sqrt{2})a$  طول قطر بزرگ (نیمساز زاویه) برابر  $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}a$  است.



(۴) مساحت این هشت ضلعی برابر است با:  $S = (1 + 2\sqrt{2})a^2$  است.

(۵) شعاع دایره محیطی برابر  $a \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$  است.

(۶) این هشت ضلعی منتظم دارای مربع محیطی به ضلع  $(1 + \sqrt{2})a$  است.