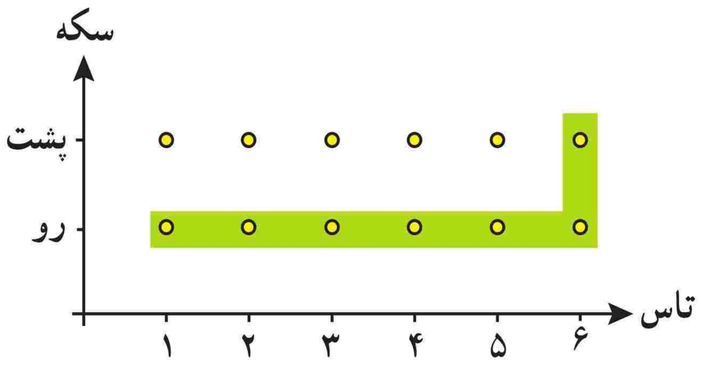
ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

درس ۴ پیشامدهای مستقل و وابسته

دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم، سرشار از وقایعی است که به یکدیگر وابسته‌اند؛ مثلاً سونامی‌های بزرگ پس از زلزله‌های عظیم در داخل دریا اتفاق می‌افتند. بسیاری از رفتارهای انسانی نیز به یکدیگر وابسته‌اند؛ به عنوان مثال، اخلاق نیکوی یک فرد و روابط اجتماعی او به یکدیگر وابسته‌اند. از سوی دیگر بعضی از رخدادها به یکدیگر وابسته نیستند و اصطلاحاً، مستقل از یکدیگرند. آیا گروه خونی شما به گروه خونی دوستتان وابسته است؟ البته تشخیص وابستگی و یا مستقل بودن خیلی از پیشامدها، واضح نیست و به ابزاری دقیق برای بررسی آنها نیاز داریم.

فعالیت

یک سکه و یک تاس را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشد.



۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را بنویسید.

$S=\{$(۱,ر) و (۲ور) و (۳ور) و (۴ور) و (۵ور) و (۶ور) و (۱پ) و (۲پ) و (۳پ) و (۴پ) و (۵پ) و (۶پ)$\}$

$A=\{$(۶پ) و (۶ور)$\}$

$B=\{$(۱ور) و (۲ور) و (۳ور) و (۴ور) و (۵ور) و (۶ور)$\}$

$A\cap B=\{$(۶ور)$\}$

۲ احتمال وقوع پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را تعیین کنید.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۲} \quad , \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۲} \quad ,$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۱۲}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید، یعنی $P(A|B)$ را به دست آورید.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۶}{۱۲}}=\frac{۱}{۶}$$

۳ با مقایسهٔ $P(A|B)$ و $P(A)$، آیا وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع پیشامد A داشته است؟

هر دو احتمال با هم برابر شده اند ، ظاهراً شرط B روی آن تاثیر نداشته است .

۴ اگر $P(A|B)=P(A)$، چه رابطه‌ای بین $P(A)$، $P(B)$ و $P(A\cap B)$ برقرار است؟

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

۵ در تساوی $P(A|B)=P(A)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $P(B|A)=P(B)$ را نتیجه بگیرید.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\cancel{P(A)}.P(B)}{\cancel{P(A)}}=P(B)$$

پیشامدهای A و B را **مستقل** می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، **وابسته** نامیده می‌شوند.

اگر $P(A)$ و $P(B)$ ناصفر باشند، برقراری تساوی $P(A|B)=P(A)$ و یا تساوی $P(B|A)=P(B)$ نیز مستقل بودن A و B را نتیجه می‌دهد. در فعالیت بالا، $P(A|B)=P(A)$، بنابراین، پیشامدهای A و B مستقل‌اند. مستقل بودن این دو پیشامد، یعنی رو آمدن سکه و ۶ آمدن تاس، بدون محاسبه احتمال‌ها نیز قابل مشاهده است، ولی مستقل بودن از پیشامدها چندان واضح نیست.

مثال ۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهدهٔ عدد ۳ در تاس اوّل و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن A و B را بررسی می کنیم.

برآمد هر تاس ۶ حالت دارد. بنابراین، فضای نمونه‌ای این آزمایش $n(S)=۶\times۶=۳۶$ عضو دارد. اکنون پیشامدهای A، B و $A\cap B$ و احتمال های آنها را به دست می‌آوریم.

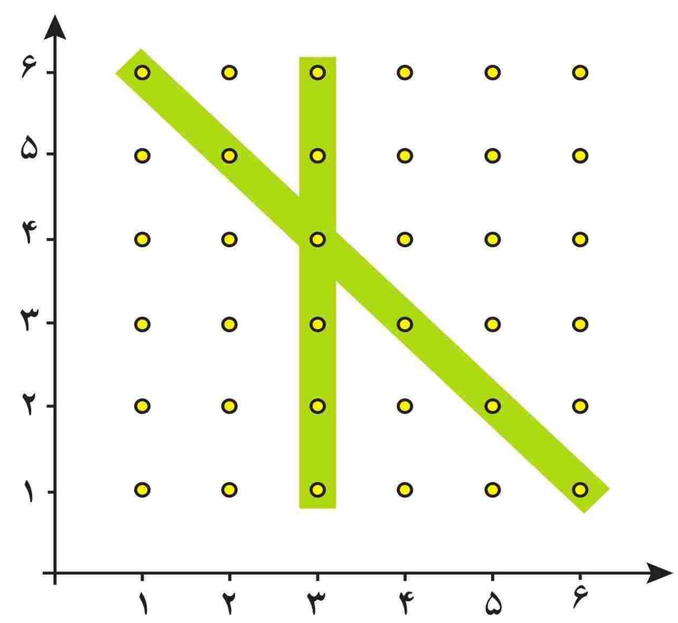
$$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶},$$

$$B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶},$$

$$A\cap B=\{(۳,۴)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$



پس $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ، بنابراین پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند.

مستقل بودن بسیاری از پیشامدها نیاز به بررسی ندارد؛ به عنوان مثال، قبولی در یک درس برای دو نفر، یا جنسیت فرزندان یک خانواده مستقل از یکدیگرند. از استقلال این پیشامدها می‌توانیم در حلّ مسائل استفاده کنیم.

مثال ۲) احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷۰ درصد است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود، را به دست می‌آوریم.

اگر $P(A)$ احتمال قبولی زهرا و $P(B)$ احتمال قبولی ریحانه در این درس باشد، احتمال قبولی حداقل یکی از آنها، همان $P(A\cup B)$ است و می‌دانیم که :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

با توجه به مستقل بودن A و B، $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ، پس

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=۰/۹+۰/۷-۰/۶۳=۰/۹۷$$

کار در کلاس

۱ سکهٔ سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهدهٔ فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید. پشت $=P$ و رو $=R$ بنابراین :

$$A=\{PRP,PRR,RRP,RRR\}\Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

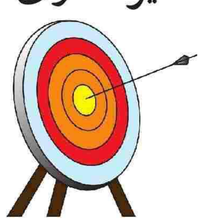
$$B=\{RRP,PRR\}\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴} \quad \text{و} \quad A\cap B=\{RRP,PRR\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A).P(B)\Rightarrow$ دو پیشامد مستقل نیستند .

۲ در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اوّل و B را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا A و B مستقل‌اند؟

$$\left.\begin{array}{l} A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶} \\ B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲} \quad \text{و} \quad A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$$

۳ در یک مسابقهٔ تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

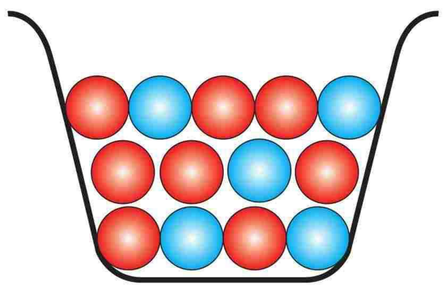


$$P(\text{محمد})=\frac{۵}{۷} \quad P(\text{مرتضی})=\frac{۷}{۱۰}\Rightarrow P(\text{مرتضی}\cap\text{محمد})=\frac{۵}{۷}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

انتخاب‌های با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

مثال ۳) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز است، دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جای‌گذاری، بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهرهٔ اوّل و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد،



الف) احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟

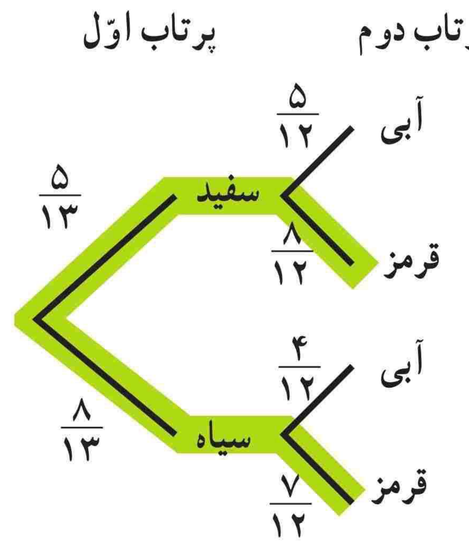
ب) پیشامدهای A و B مستقل‌اند یا وابسته؟

حل) با توجه به رابطهٔ $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ در احتمال شرطی داریم :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}$$

برای بررسی وابستگی یا استقلال این پیشامدها، $P(B)$ و $P(B|A)$ را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. برای محاسبهٔ $P(B)$ از قانون احتمال کلی استفاده کرده و نمودار درختی انتخاب مهره‌ها و تعیین حالت مطلوب را نیز محاسبه کرده‌ایم.

$$\begin{aligned} P(B)&=P(\text{مهرهٔ دوم قرمز}) \\ &=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A') \\ &=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲} \\ &=\frac{۸}{۱۳} \end{aligned}$$



از سوی دیگر $P(B|A)=\frac{۸}{۱۲}$ ، پس $P(B|A)\neq P(B)$ ، بنابراین A و B وابسته‌اند.

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

کار در کلاس

در مثال صفحهٔ قبل، اگر مهرهٔ دوم را پس از جای‌گذاری مهرهٔ اوّل در جعبه بیرون آوریم. با محاسبهٔ $P(B)$ و $P(B|A)$، مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید. **واضح است که** $P(B)=\frac{۸}{۱۳}$.

با توجه به جایگذاری مهره ی اول ، تعداد کل مهره ها ۱۳ مانده و درنتیجه $P(B|A)=\frac{۸}{۱۳}$. **بنابراین** $P(B)=P(B|A)$ **یعنی دو پیشامد مستقل از یکدیگرند .**

مستقل بودن پیشامدهای A و B در کار در کلاس بالا قابل حدس زدن است؛ زیرا با جای‌گذاری مهرهٔ اوّل انتخاب شده در جعبه، شرایط برای انتخاب مهرهٔ دوم، دقیقاً همانند انتخاب مهرهٔ اوّل است و در حقیقت آزمایش اوّل تکرار می‌شود. در حالت کلی، انتخاب‌هایی که با جای‌گذاری انجام می‌شوند، مستقل‌اند.

مفهوم استقلال برای بیش از دو پیشامد نیز تعریف می‌شود.

سه پیشامد A، B و C را مستقل می‌گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی، n پیشامد $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n را مستقل می‌گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل‌ضرب احتمال آنها برابر باشد.

مثال ۴) خانواده‌ای ۴ فرزند دارد.

الف) احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اوّل و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

حل الف) فرض کنید A پیشامد این باشد که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان، داریم :

$$P(A)=P(\text{دختر، دختر، دختر، دختر})$$
$$=P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$$
$$=\frac{۱}{۱۶}$$

حل ب) مشابه بالا، اگر B پیشامد دختر بودن فقط فرزند اوّل و آخر این خانواده باشد، سپس :

$$P(B)=P(\text{دختر، پسر، پسر، دختر})$$
$$=P(\text{دختر})\times P(\text{پسر})\times P(\text{پسر})\times P(\text{دختر})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$$
$$=\frac{۱}{۱۶}$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

اکنون فرض کنید C پیشامد وجود دو دختر در این خانواده باشد، یکی از حالت‌ها به صورت زیر است :

فرزند اوّل	فرزند دوم	فرزند سوم	فرزند چهارم
دختر	پسر	دختر	پسر

و احتمال پیشامد بالا عبارت است از :

$$P(\text{پسر، دختر، پسر، دختر}) = P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) = \frac{۱}{۱۶}$$

قرار گرفتن دو دختر در این خانواده، به $\binom{۴}{۲} = ۶$ حالت میسّر است و احتمال هر کدام از این حالت‌ها، همان $\frac{۱}{۱۶}$ است، بنابراین :

$$P(C) = ۶ \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

مثال ۵) ۸۰ درصد افراد شهری با سوادند. ۵ نفر از این شهر انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه هر ۵ نفر بی‌سواد باشند را به دست می‌آوریم. احتمال اینکه اوّلین نفر بی‌سواد باشد، ۲۰ درصد یا ۰/۲ است. با توجه به اینکه جای‌گذاری انجام نشده است، بی‌سواد بودن فرد دوم مستقل از بی‌سوادی فرد اوّل نیست، ولی چون انتخاب از یک جامعه پر جمعیت انجام می‌شود، می‌توان فرض کرد که بی‌سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی‌سواد بودن هر کدام از آنها ۰/۲ است. پس :

$$P(\text{هر پنج نفر بی‌سواد}) = P(\text{نفر اوّل بی‌سواد}) \times P(\text{نفر دوم بی‌سواد}) \times P(\text{نفر سوم بی‌سواد}) \times P(\text{نفر چهارم بی‌سواد}) \times P(\text{نفر پنجم بی‌سواد})$$

$$= (۰/۲)^۵$$

$$= ۰/۰۰۰۳۲$$

تمرین

۱ اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

۳ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

الف) A' و B

ب) A' و B'

۴ در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اوّل باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۵ از مجموعهٔ $\{۱، ۲، ۳، ...، ۱۰\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

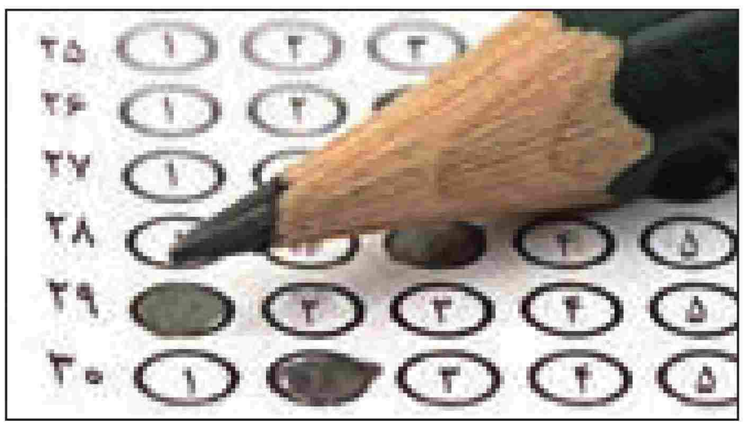
۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار ۰/۶ و روی بیمار دیگر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه :

الف) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

ب) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

۷ یک سکه و دو تاس به‌طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هردو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

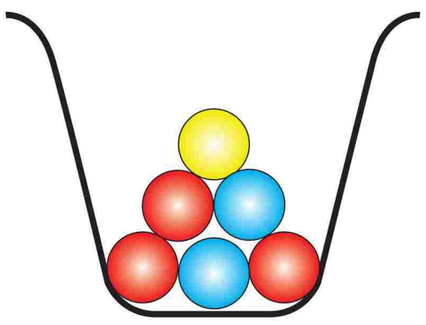


۸ در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به‌دست آورید که :

الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

ب) تنها به پنج سؤال اوّل پاسخ صحیح داده باشد.

پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.



۹ در یک جعبه که شامل ۳ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر دو مهره قرمز باشند.

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

پ) هر دو مهره همرنگ باشند.

۱۰ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که :

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

۱۱ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همهٔ افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

۱۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری که $P(A\cap B) = ۰/۱$ و $P(A\cap B') = ۰/۴$، حاصل $P(A\cup B')$ را به‌دست آورید.

پاسخ تمرین های صفحه ی ۷۱ و ۷۲ کتاب درسی

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۱- خیر دو پیشامد ناسازگار ، درصورتی مستقل از یکدیگرند که حداقل یکی از آنها تُهی باشد . **(بهتر است در کتاب قید می شد که پیشامدها متناهی و همشانس هستند)**

اثبات : فرض کنیم دو پیشامد A و B ناسازگار مستقل باشند ، بنابراین :

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=\circ \\ P(A\cap B)=P(A).P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A).P(B)=\circ \Rightarrow P(A)=\circ \ \vee \ P(B)=\circ$$

****

۲- خیر ، در نظر بگیرید $S=\{a,b,c,d\}$ فضای نمونه و $A=\{a,b\}$ و $B=\{a,c\}$ دو پیشامد از آن باشند .

$$\left.P(A)=\frac{۱}{۲}, P(B)=\frac{۱}{۲}, A\cap B=\{a\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}\right)\rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow$$ A و B مستقلند

پیشامد های $E=\{a\}$ و $F=\{c\}$ به ترتیب زیر مجموعه های A و B را در نظر می گیریم :

$$\left.P(E)=\frac{۱}{۴}, P(F)=\frac{۱}{۴}, E\cap F=\varnothing\Rightarrow P(E\cap F)=\circ\right)\rightarrow P(E\cap F)\neq P(E)P(F)\Rightarrow$$ E و F مستقل نیستند

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۳- فرض کنیم دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S مستقل باشند در نتیجه $P(A\cap B)=P(A).(B)$.

الف) با توجه به فرض ، نشان می دهیم $P(B\cap A')=P(B).\mathrm{P}(\mathrm{A}')$:

$$P(B\cap A')=\mathrm{P}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{B})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{B})-P(A).\mathrm{P}(\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{B})\big(۱-P(A)\big)=P(B).\mathrm{P}(\mathrm{A}')$$

نتیجه : اگر دو پیشامد مستقل باشند ، آنگاه هر کدام از آنها مستقل از متمم دیگری است .

ب) **روش اول :** طبق قسمت قبل A' و B مستقل هستند ، از طرفی بنا به نتیجه ی آن ، هر کدام از پیشامد ها مستقل از متمم دیگری است ، یعنی A' مستقل از متمم B خواهد بود ، پس A' و B' مستقلند .

روش دوم : با توجه به قسمت الف ، نشان می دهیم $P(A'\cap B')=\mathrm{P}(\mathrm{A}').P(\mathrm{B}')$:

$$P(A'\cap B')=\mathrm{P}(A'-B)=\mathrm{P}(A')-\mathrm{P}(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B})=P(A')-P(A')P(B)=\mathrm{P}(\mathrm{A}')\big(۱-P(B)\big)=\mathrm{P}(\mathrm{A}').\mathrm{P}(\mathrm{B}')$$

روش سوم : بدون استفاده از قسمت الف ، به کمک فرض سوال اثبات می کنیم $P(A'\cap B')=\mathrm{P}(\mathrm{A}').P(\mathrm{B}')$:

$$P(A'\cap B')=۱-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=۱-\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=۱-\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{B})+P(A).P(B)$$
$$=۱-\mathrm{p}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{B})\big(۱-P(A)\big)=P(A')-P(B).P(A')=\mathrm{P}(\mathrm{A}')\big(۱-P(B)\big)=P(A').P(B')$$

****

۴-

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}\Rightarrow P(A)=\frac{۱۰}{۳۶}$$

$$B=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}\Rightarrow P(B)=\frac{۶}{۳۶}$$

$$A\cap B=\{(۳,۲),(۳,۴)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۳۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{۳۶}\times\frac{۶}{۳۶}\neq\frac{۲}{۳۶}\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A).P(B)\Rightarrow$$. دو پیشامد مستقل از هم نیستند

۵- $B=\{۳,۶,۹\}\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۱۰}$ و $A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۰}$

$$A\cap B=\{۶\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰}\neq\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A).P(B)\Rightarrow$$. دو پیشامد مستقل از هم نیستند

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۶- پیشامد موفقیت عمل پیوند کلیه روی بیمار اول را با A و بیمار دوم را با B نمایش می دهیم . با توجه به مستقل بودن آنها داریم :

الف) $P(A)=۰/۶\quad,\quad P(B)=۰/۸\quad\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)=۰/۶\times۰/۸=۰/۴۸$

ب) طبق آنچه در تمرین ۳ ثابت شد ، هر گاه دو پیشامد مستقل باشند ، متمم آنها نیز مستقلند ، بنابراین :

$$P(A')=۰/۴\quad,\quad P(B')=۰/۲\quad\Rightarrow P(A'\cap B')=P(A').P(B')=۰/۴\times۰/۲=۰/۰۸$$

پ) طبق تمرین ۳ ، هر گاه دو پیشامد مستقل از هم باشند ، هر کدام از آنها مستقل از متمم دیگری است . بنابراین :

$$P(A')=۰/۴\quad,\quad P(B)=۰/۸\quad\Rightarrow P(A'\cap B)=P(A').P(B)=۰/۴\times۰/۸=۰/۳۲$$

****

۷- پیشامد رو بودن سکه را با A و پیشامد ۶ آمدن هر دو تاس را با B نمایش می دهیم . واضح است که این دو پیشامد مستقل از یکدیگرند بنابراین احتمال اینکه سکه رو و هر دو تاس ۶ بیایند : $P(A)=\frac{۱}{۲}\quad,\quad P(B)=\frac{۱}{۳۶}\quad\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۷۲}$

****

۸- الف) احتمال اینکه هر سوال را صحیح پاسخ دهد $\frac{۱}{۵}$ است . از طرفی پیشامد های پاسخ دادنِ به هر سوال مستقل از سوال دیگر است . بنابراین احتمال پاسخ صحیح دادن تمام سوال ها برابر است با : $\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\cdots\times\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۵^{۱۰}}$

ب) احتمال اینکه به هر سوال پاسخ صحیح دهد $\frac{۱}{۵}$ و پاسخ غلط دهد $\frac{۴}{۵}$ است . بنابر این :

$$\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴^{۵}}{۵^{۱۰}}=(۰/۴)^{۱۰}$$

پ) این سوال مشابه قسمت ب حل می شود با این تفاوت که باید از بین ۱۰ سوال ۵ سوال را برای پاسخ صحیح دادن برگزید یعنی $\binom{۱۰}{۵}$ حالت وجود دارد ، در نتیجه احتمال آن برابر است با :

$$\binom{۱۰}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴^{۵}}{۵^{۱۰}}=\binom{۱۰}{۵}(۰/۴)^{۱۰}$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۹- الف) با در نظر گرفتن اینکه بیرون آوردن مهره ها با جایگذاری است ، پیشامد برای هر مهره مستقل از مهره ی دیگر است .

احتمال قرمز بودن هر مهره $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ است . بنابراین احتمال قرمز بودن دو مهره $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$ است .

ب) **روش اول :**

$$P(\text{مهره اول آبی و دومی غیر آبی})=\frac{۲}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۸}{۳۶}$$

$$P(\text{مهره اول غیرآبی و دومی آبی})=\frac{۴}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۸}{۳۶}$$

$$P(\text{مهره اول آبی و دومی نیز آبی})=\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۴}{۳۶}$$

بنابراین احتمال اینکه حداقل یکی آبی باشد برابر است با $\frac{۸}{۳۶}+\frac{۸}{۳۶}+\frac{۴}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$ است .

روش دوم : احتمال اینکه هیچکدام آبی نباشد $\frac{۴}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۱۶}{۳۶}$ متمم حداقل یک مهره آبی بودن ، است .

بنابراین احتمال حداقل یک مهره آبی بودن برابر است با : $۱-\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۵}{۹}$

پ) مهره ها هر دو قرمز یا هر دو آبی اند . احتمال هر دو قرمز باشند $\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۹}{۳۶}$ و احتمال هر دو آبی باشند $\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۴}{۳۶}$ است .

و احتمال هر دو زرد باشند $\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۳۶}$ است در نتیجه احتمال هر دو مهره همرنگ باشند برابر است با : $\frac{۹}{۳۶}+\frac{۴}{۳۶}+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱۴}{۳۶}$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۱۰- الف)

$$P(\text{لامپ اول معیوب باشد})\times P(\text{لامپ دوم معیوب باشد})\times P(\text{لامپ سوم معیوب باشد})=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۱}{۱۰}=\frac{۱}{۲۲۰}$$

ب)

$$P(\text{حداقل یک لامپ معیوب باشد})=۱-P(\text{تمام لامپ ها سالم باشند})=۱-\frac{۹}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۳۴}{۵۵}$$

****

۱۱- احتمال عدم موفقیت دارو روی هر شخص $۱-۰/۹=۰/۱$ است .

با توجه به مستقل بودن افراد از یکدیگر ، احتمال اینکه روی همه ی افراد جواب منفی داشته باشد برابر است با :

$$۰/۱\times۰/۱\times۰/۱\times\cdots\times۰/۱=(۰/۱)^{۱۰}$$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۱۲-

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۴=P(A)-۰/۱\Rightarrow P(A)=۰/۵$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\Rightarrow ۰/۱=۰/۵\times P(B)\Rightarrow P(B)=۰/۲$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=۰/۵+(۱-۰/۲)-۰/۴=۰/۹$$