فصل ۳ درس ۲: وارون یک تابع و تابع یک به یک

پیش نیاز های درس ۲:

- شناخت مؤلفه های اول و دوم در زوج مرتب
- شناخت نیمساز ربع اول و سوم $y = x$
- درک مفهوم دامنه و برد از روی نمودار

اهداف درس ۲:

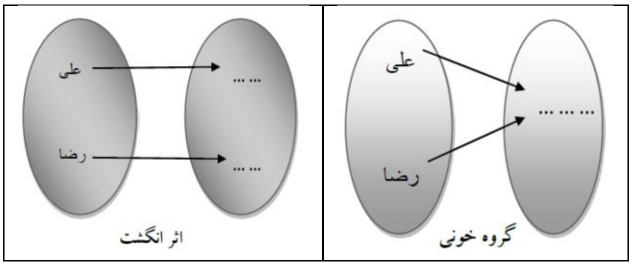
- محاسبه وارون یک تابع در نمایش زوج مرتب
- رسم وارون یک تابع از روی نمودار
- آشنایی با تعریف و مفهوم تابع یک به یک
- به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت
- محدود کردن دامنه یک تابع غیر یک به یک و تبدیل آن به تابع یک به یک

تابع یک به یک (یکتا):

❖ در نمایش پیکانی تابع یک به یک، به هر عضو از مجموعه دوم،یک پیکان وارد می شود.

(فعالیت ۲ ص ۵۹)

②کدامیک از دو تابع زیر یک به یک هستند؟



حل:تابع اثر انگشت تابع یک به یک است چون به هر عضو از مجموعه دوم ، یک پیکان وارد شده است

❖ در نمایش زوج مرتبی تابع یک به یک، مؤلفه های دوم تکراری نداریم.

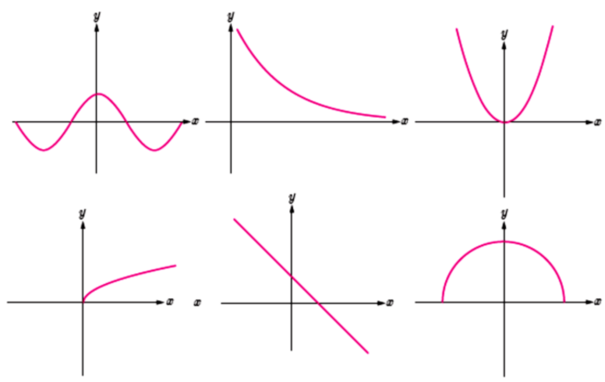
(فعالیت ۱ ص ۵۹)

ت)آیا تابع $f=\{(۱,۲),(-۲,۴),(۲,-۱),(-۱,۲)\}$ یک به یک است؟حل: خیر زیرا مؤلفه های دوم تکراری دارد.

- در نمایش مختصاتی تابع یک به یک، هر خط افقی(موازی محور x ها)، نمودار راحداکثر در یک نقطه قطع می کند

(فعالیت ۲ ص ۶۰)

②کدام یک از توابع زیر یک به یک است؟



- **نکته:توابع خطی غیر ثابت $\underset{a\neq ۰}{(y=ax+b)}$ ، توابع رادیکالی و توابع گویا ،تابع یک به یک هستند.**
- **توابع خطی ثابت $\underset{a=۰}{(y=ax+b)}$، توابع سهمی وتوابع قدر مطلقی،تابع یک به یک نیستند.**

وارون(معکوس) یک تابع در نمایش زوج مرتب:

در نمایش زوج مرتبی یک تابع ،اگر جای مولفه های اول و دوم را عوض کنیم ،دو حالت به وجود می آید:

۱)جواب، تابع است .در این صورت می گوییم تابع وارون پذیر است

(مثال ص ۵۷)

$$f=\{(۶,۴),(۵,۳),(۲,۱)\}\rightarrow f^{-1}=\{(۴,۶),(۳,۵),(۱,۲)\}$$

۲) جواب، تابع نیست .در این صورت می گوییم تابع وارون پذیر نیست

(کاردرکلاس ص ۵۷)

$$t=\{(۵,۱),(۱,۴),(۴,۳),(۲,۳)\}\rightarrow t^{-1}=\{(۱,۵),(۴,۱),(۳,۴),(۳,۲)\}$$

اگر تابع وارون پذیر باشد وارون آن را با f^{-1} نشان می دهیم.

(کاردرکلاس ص ۵۷ و تمرین ۱ ص ۶۳)

وارون تابع های داده شده را حساب کنید.

$$s=\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۳),(۲,۵)\}\rightarrow s^{-1}=$$

$$u=\{(۲,۳),(۵,۲),(۴,۱),(۳,۴)\}\rightarrow u^{-1}=$$

$$f=\{(۲,۳),(-۲,۱),(-۱,۲)\}\rightarrow f^{-1}=$$

- **نکته:وارون هر تابع یک به یک ،خود یک تابع است به عبارتی شرط وارون پذیری یک تابع ،یک به یک بودن آن است.**
- **دامنه و برد f, f^{-1} عکس هم هستند:**

$$D_f=R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f=D_{f^{-1}}$$

رسم وارون یک تابع از روی نمودار:

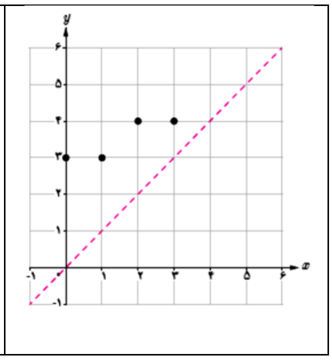
نمودار تابع (f) و تابع وارون آن (f^{-1}) نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم)قرینه اند.

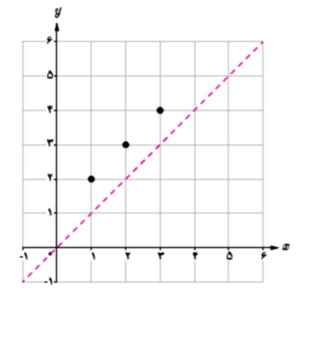
برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است مختصات نقاطی را که روی (f) مشخص است پیدا کنیم و جای x,y را عوض کنیم و تابع وارون را رسم کنیم یعنی:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

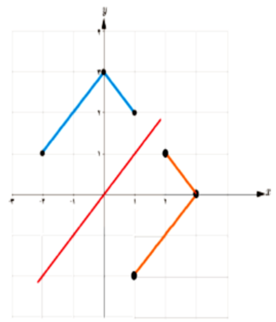
(فعالیت ۱و۲و۳ ص۵۸ وتمرین ۲ ص ۶۳)

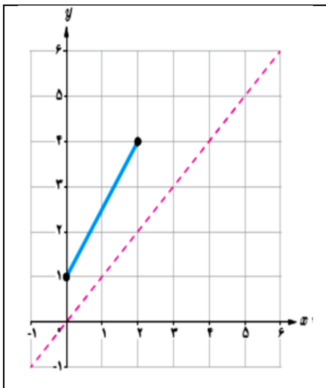
نمودار وارون توابع داده شده را رسم کنید.





حل تمرین:





به دست آوردن ضابطه تابع وارون:

اگرتابع یک به یک باشد برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون ابتدا xرا بر حسب y محاسبه می کنیم (یعنی xرا تنها می کنیم)سپس جای x,yرا عوض می کنیم و ضابطه $f^{-1}(x)$را می یابیم. ودامنه و برد تابع و وارون تابع را مشخص می کنیم.

- توجه : در این کتاب فقط ضابطه تابع وارون توابع خطی غیر ثابت را به دست می آوریم

(فعالیت ص ۶۲)

ضابطه وارون تابع $f(x)=2x+1$ را بیابید.

$$\underbrace{f(x)=2x+1}_{D_{f^{-1}}=R\ ,\ R_{f^{-1}}=R}$$

$$y=2x+1\to y-1=2x\to x=\frac{y-1}{2}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\frac{x-1}{2}$$

$$\to\underbrace{f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}}_{D_{f^{-1}}=R\ ,\ R_{f^{-1}}=R}$$

(کاردرکلاس ص ۶۲)

1 ضابطه وارون هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=x+5$

ب) $g(x)=4x$

پ) $u(x)=2x+3$

ت) $v(x)=\frac{2}{3}x-4$

Homework:(تمرین ۳ص ٦٤)

۳)ضابطه وارون هر یک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

الف) $f(x)=5x-2$

ب) $f(x)=\frac{3}{5}x+4$

پ) $f(x)=\frac{-7x+3}{5}$

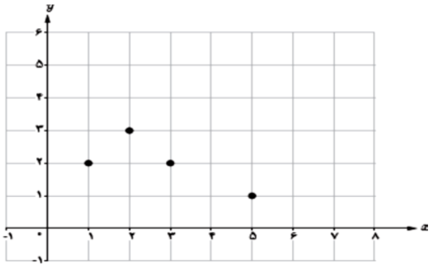
محدود کردن دامنه یک تابع غیریک به یک و تبدیل آن به تابع یک به یک:

اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست .اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد.

(کاردرکلاس ۲ص ۶۳)

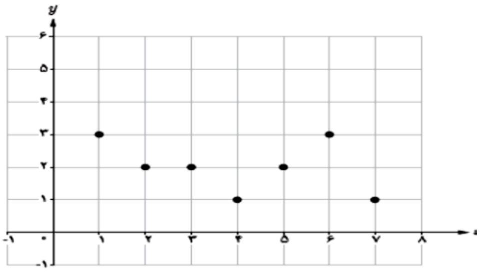
②الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک به یک نیست؟حل:زیرا اگر خط افقی $(y=2)$ را رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کند

ب)با حذف تنها یک نقطه، نمودارمقابل را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید.مسئله چند جواب دارد؟حل: یکی از نقاط $(1,2),(3,2)$ را حذف می کنیم.مسئله ۲ جواب دارد.



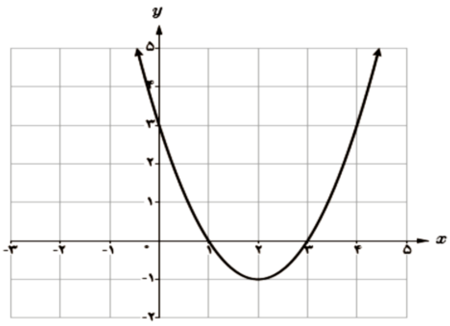
Homework:(تمرین ۴ص ۶۴)

④می خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک به یک تبدیل کنیم .حداکثر چند نقطه می تواند باقی بماند؟



(کاردرکلاس ص ۶۳)

الف)به نمودار $f(x)=x^2-4x+3$ دقت کنید



با محدود کردن دامنه این تابع روی کدام بازه های زیر می توان یک تابع یک به یک ساخت؟ $[0,2]$ $\qquad$ $[1,4)$

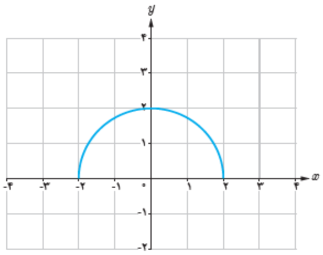
حل: بازه $[0,2]$

ب)آیا هر تابع درجه۲، تابعی یک به یک است؟ چرا؟

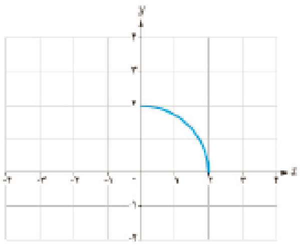
حل:خیر زیرا زیرا در حالت کلی هرخط افقی نمودار را در دو نقطه قطع می کند

(تمرین ۶ص ۶۴)

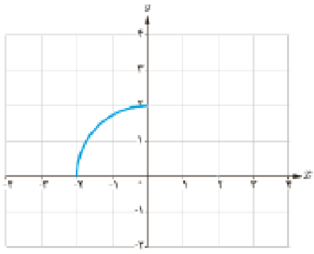
⑥ باحذف بخشی از نمودار نیم دایره داده شده، نمودار یک تابع یک به یک رامشخص کنید.



حل:قسمتی از نمودار را بهگونه ای حذف می کنیم که هر خط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کندبنابراین دامنه نیم دایره را به بازه های زیرمحدود می کنیم.



$[0,2]$



$[-2,0]$

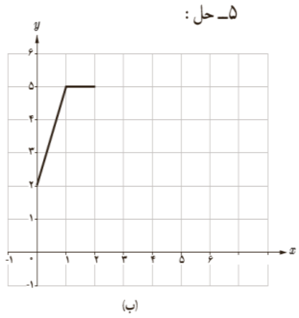
(تمرین ۵ص ۶۴)

⑤نمودار تابعی با دامنه $[0,2]$ و برد $[2,5]$ را رسم کنید:

الف)به شرطی که این تابع یک به یک باشد.

ب)به شرطی که این تابع یک به یک نباشد.

۵_حل:



(ب)

(الف)

بی شمار تابع خطی یا غیر خطی می توان در هر دو قسمت (الف)و(ب)رسم کرد.