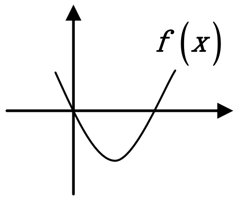
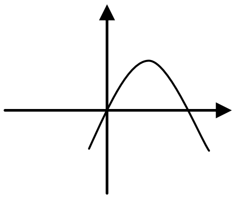
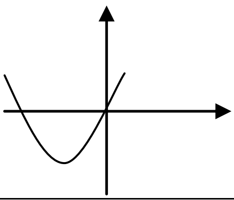
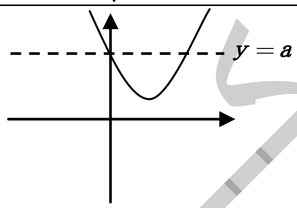
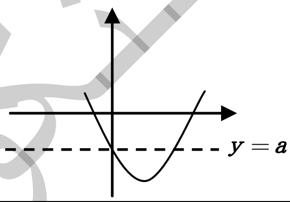
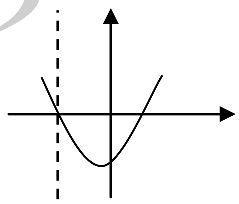
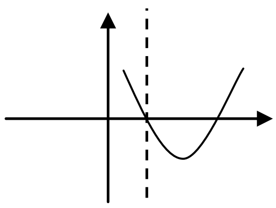
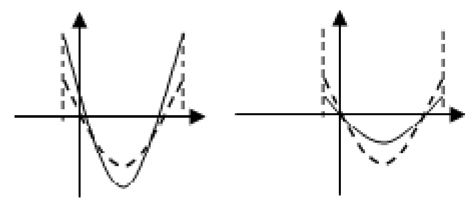
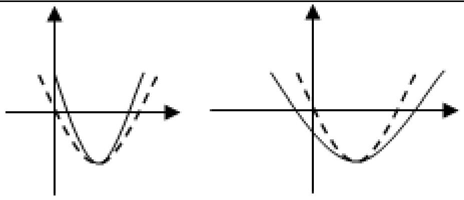
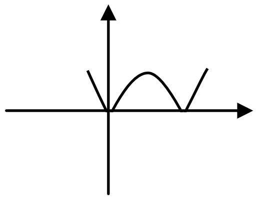
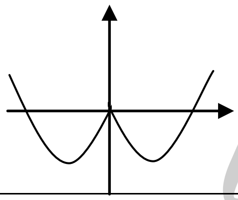
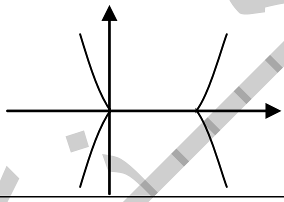
رسم توابع به کمک انتقال :

با فرض اینکه نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد داریم :

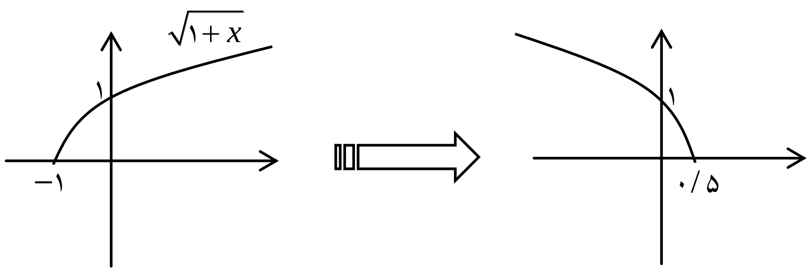


	تابع خواسته شده	شکل تابع	توضیح نحوه رسم کردن
۱	$y=-f(x)$		کافیست قرینه منحنی نسبت به محور x ها را رسم کنیم .
۲	$y=f(-x)$		کافیست قرینه منحنی نسبت به محور y ها را رسم کنیم .
۳	$y=f(x)+a$		کافیست منحنی تابع را در راستای محور y ها به اندازه a واحد به بالا منتقل کنیم .
۴	$y=f(x)-a$		کافیست منحنی تابع را در راستای محور y ها به اندازه a واحد به پایین منتقل کنیم .
۵	$y=f(x+a)$		کافیست منحنی تابع را در راستای محور x ها به اندازه a واحد به چپ منتقل کنیم .
۶	$y=f(x-a)$		کافیست منحنی تابع را در راستای محور x ها به اندازه a واحد به راست منتقل کنیم .

۷	$y=kf\left(x\right)$		اگر $k>۱$ باشد منحنی در همان دامنه در جهت قائم کشیده تر می شود. (منبسط) اگر $۰<k<۱$ باشد منحنی در همان دامنه در جهت قائم بازتر می شود . (منقبض)
۸	$y=f\left(kx\right)$		اگر $k>۱$ دامنه تابع بسته تر می شود . اگر $۰<k<۱$ دامنه تابع بازتر می شود.
۹	$y=\left\|f\left(x\right)\right\|$		کافیست قسمتی از منحنی را که در زیر محور x ها واقع است را نسبت به محور x ها قرینه کنیم .
۱۰	$y=f\left(\left\|x\right\|\right)$		طبق تعریف قدر مطلق : $x\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad y=f\left(x\right)$ $x\leq ۰ \quad \Rightarrow \quad y=f\left(-x\right)$
۱۱	$\left\|y\right\|=f\left(x\right)$		طبق تعریف قدر مطلق : $y\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad y=f\left(x\right)$ $y\leq ۰ \quad \Rightarrow \quad y=-f\left(x\right)$

نکته مهم : در رسم تابع $y=f\left(ax+b\right)$ می دانیم عبارت های داخل پرانتز وابسته به x هستند و برعکس عمل می کنند ، حتی بین ضرب و جمع ، پس اول جمع انجام می شود بعد ضرب.

مثال : تابع $y=\sqrt{۱-۲x}$ را رسم کنید .



نکته:تابع درجه دوم را به صورت مربع کامل $y=a(x-\underbrace{\frac{b}{۲a}}_{x_0})^۲+f\left(x_0\right)$ در آورده سپس رسم می کنیم .

تست : نمودار تابع $y=\left|\log(x+1)\right|$ کدام است ؟

تست : نمودار تابع $|y|=x^2-2x$ به کدام صورت است ؟

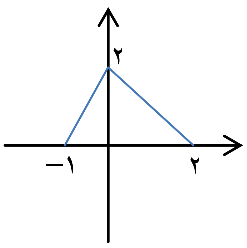
تست : نمودار تابع $|y|=\log|x|$ کدام است ؟

تست : منحنی تابع $y=|x-2|$ را ۳ واحد به چپ انتقال داده و قرینه شکل حاصل را نسبت به محور y ها تعیین و دو برابر منبسط می کنیم سپس انعکاس آن را نسبت به محور x ها پیدا می کنیم . معادله حاصل کدام است ؟

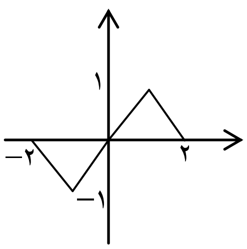
$$y=|x-2|\to y=|x+1|\to y=|-x+1|\to y=2|-x+1|\to y=-2|-x+1|$$

تست : اگر $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار تابع $y=-f(1-x)$ کدام است ؟

تست: : اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد نمودار تابع $y=-f(-|x|)$ کدام است ؟



تست : اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد ، برد تابع $y=\frac{1}{2}f(2x-1)-1$ کدام است ؟

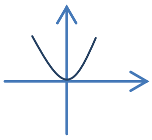
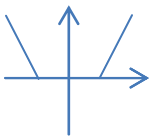


توابع زوج و فرد :

اگر تابع f دارای دامنه متقارن باشد :

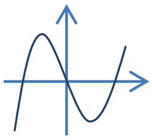
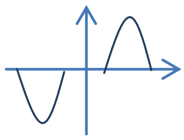
۱) تابع زوج است هرگاه $f(-x)=f(x)$

از نظر هندسی یعنی نمودار آن نسبت به محور y ها متقارن است .

۲) تابع فرد است هرگاه $f(-x)=-f(x)$

از نظر هندسی یعنی نمودار آن نسبت به مبدا متقارن است .

نکته ۱ : اگر تابع f فرد باشد و صفر در دامنه آن باشد آنگاه حتما $f(0)=0$.

تست : اگر تابع $f=\{(1,a^4+1),(-2,a^6),(b^2+2,d+1),(-a^2,c-1)\}$ زوج باشد ، مقدار $a^2+b^4+d^2+c$ کدام است ؟

حل : در تابع زوج دامنه متقارن است و چون $1,-2\in D$ پس حتما $-1,2\in D$ لذا :

$$-a^2=-1\Rightarrow a^2=1 \quad , \quad b^2+2=2\Rightarrow b^2=0$$

از طرفی در تابع زوج $f(-x)=f(x)$ لذا :

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=f(1)\longrightarrow c-1=a^4+1=2\Rightarrow c=3 \\ f(-2)=f(2)\longrightarrow d+1=a^6=1\Rightarrow d=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a^2+b^4+d^2+c=4$$

تست : اگر تابع $f=\{(0,a^3-8),(a,b),(c,a^2)\}$ فرد باشد ، مقدار abc کدام است ؟

تست : اگر مبدا مختصات مرکز تقارن تابع f باشد و $f(x)=\log(ax+\sqrt{9x^2+1})$ باشد ، a کدام است ؟

$$f(-1)=-f(1)\Rightarrow \log(-a+\sqrt{10})=-\log(a+\sqrt{10})\Rightarrow \cancel{\log}(-a+\sqrt{10})=\cancel{\log}(a+\sqrt{10})^{-1}$$

$$\Rightarrow(-a+\sqrt{10})(a+\sqrt{10})=1\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=\pm 3$$

تست : نمودار کدام تابع نسبت به مبدا مختصات متقارن است ؟

۱) $y=\log\frac{1-x}{1+x}$ ۲) $y=x^4+\sin x$ ۳) $y=x^3+\cos x$ ۴) $y=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$

تست : اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2+2x}+4x+1 & x>0\\ \sqrt[3]{ax^2+bx}+cx+d & x<0\end{cases}$ فرد باشد ، $a+b+c-d$ چقدر است ؟

حل : چون تابع فرد است پس $f(-x)=-f(x)$:

$$f(-x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2-2x}-4x+1 & x<0\\ \sqrt[3]{ax^2-bx}-cx+d & x>0\end{cases}$$

$$-f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{-x^2-2x}-4x-1 & x>0\\ \sqrt[3]{-ax^2-bx}-cx-d & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=-1,-b=-2,-c=-4,d=-1\Rightarrow a=-1,b=2,c=4,d=-1$$

تست : تابع حقیقی f با شرط $f(0)=1$ برای هر x,y حقیقی در رابطه $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)$ صدق می کند ، تابع f تابعی است : ($x=1,y=-1$)

۱) زوج ۲) فرد ۳) نه زوج و نه فرد ۴) هم زوج و هم فرد

نکته ۲ : توابع چند جمله ای با شرط آنکه فقط جملات توان زوج داشته باشند ، تابع زوج هستند. و با شرط آنکه فقط جملات توان فرد داشته و فاقد جمله ثابت باشند ، تابع فرد هستند .

تست : m,n چه اعدادی باشند تا ، تابع $f(x)=x^3+(m-1)x^2-2nx+n+4$ فرد باشد ؟

نکته ۳ : توابع گلدانی و سرسره ای با شرط آنکه ریشه داخل قدر مطلق ها قرینه هم باشند به ترتیب تابع زوج و فرد هستند .

تست : اگر تابع $y=|x+a|+|x+b|+|x+c+۱|$ زوج باشد ، حاصل $a+b+c$ کدام است ؟

تست : اگر تابع $y=|x+a|-|x+۲|+\mathrm{b}|x+۱|$ تابعی فرد باشد ، $a+b$ کدام است ؟

تست : اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x+۳ & x\ge ۴ \\ ۲|x+۳|+a|x+b| & -۴<x<۴ \\ cx^۲+dx+e & x\le -۴ \end{cases}$ زوج باشد ، $a+b+c+d+e$ کدام است ؟

نکته ۴ : تابع ثابت $y=۰$ تنها تابع هم زوج و هم فرد است .

تست : کدام تابع هم زوج و هم فرد است ؟

۱) $y=|x-۱|-|x+۱|$ ۲) $y=|x-۱|+|x+۱|$

۳) $y=\sqrt{x^۴-x^۲}-|x|\sqrt{x^۲-۱}$ ۴) $y=\sqrt{x^۳-x}-\sqrt{x}\times\sqrt{x^۲-۱}$

حل : فقط در گزینه های ۳و ۴ تابع $y=۰$ است که در گزینه ۴ دامنه متقارن نیست پس گزینه ۳ درست است .

تست : تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{[x]-x}}{x}$ از نظر زوج یا فرد بودن چگونه است ؟

نکته ۵ : در **اعمال جبری** بین توابع با فرض منفی برای تابع فرد و مثبت به جای تابع زوج می توان به راحتی زوج یا فرد بودن تابع حاصل را مشخص کرد . و در **ترکیب توابع** اگر حداقل یک تابع زوج حضور داشته باشد تابع مرکب زوج است.

تست : اگر تابع حقیقی f فرد باشد تابع $(f \times f)of$ چگونه است ؟

تست : تابع $y=\cos(\sin x)+\sin(\cos x)$ از نظر زوج یا فرد بودن چگونه است ؟

نکته ۶ : هر تابع با دامنه متقارن را می توان به صورت حاصل جمع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت .

$$f(x)=\frac{۱}{۲}(f(x)+f(-x))+\frac{۱}{۲}(f(x)-f(-x))$$

⇐ با شرط $(a>۱)$ تابع $y=\frac{a^{۲x}+۱}{a^x}$ زوج و تابع $y=\frac{a^{۲x}-۱}{a^x}$ فرد است . (در واقع $y=a^x \pm a^{-x}$)

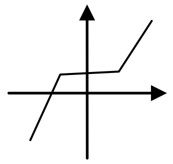
تست : اگر f تابعی فرد و g تابعی زوج باشد که $f(x)+g(x)=۳^x$ ، ضابطه f کدام است ؟

تست : تابع $f(x)=\frac{۲^{۲x}+۱}{۲^x}$ را به صورت مجموع تابع زوج $g(x)$ و تابع فرد $h(x)$ نوشته ایم. مقدار $h(۱۳۹۴)$ کدام است ؟

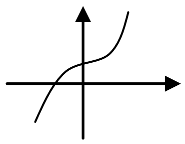
تست : اگر $f(x)=\frac{۴^x-۱}{۲^x}$ مقدار $f(\log ۲)+f\left(\log \frac{۱}{۲}\right)$ کدام است ؟

تابع یکنوا :

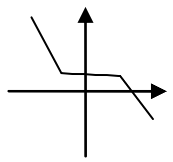
۱) تابع f را صعودی می گویند اگر $a<b \xrightarrow{f(x)} f(a)\le f(b)$



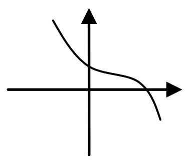
۲) تابع f را اکیداً صعودی می گویند اگر $a<b \xrightarrow{f(x)} f(a)<f(b)$



۳) تابع f را نزولی می گویند اگر $a<b \xrightarrow{f(x)} f(a)\ge f(b)$



۴) تابع f را اکیداً نزولی می گویند اگر $a<b \xrightarrow{f(x)} f(a)>f(b)$



⇐ فقط توابع ثابت هم نزولی و هم صعودی هستند .

⇐ اگر تابع صعودی بر نامساوی اثر کند یا اثر آن برداشته شود ، جهت را تغییر نمی دهد ولی نزولی جهت را تغییر می دهد البته باید به دامنه تابع نیز توجه کرد :

$\log x<\log ۲ \xrightarrow{x>۰} x<۲ \Rightarrow ۰<x<۲$, $\cot^{-۱} x<\cot^{-۱} ۲ \Rightarrow x>۲$

تست : کدام تابع در دامنه اش اکیداً صعودی است ؟

۱) $f(x)=|x|$ ۲) $f(x)=x|x|$ ۳) $f(x)=\frac{۱}{x}$ ۴) $f(x)=\frac{x}{|x|}$

تست : تابع $f(x)=(m^۲-۲)x^۲+۲mx+۱$ در بازه $(۱,+\infty)$ نزولی و در بازه $(-\infty,۱)$ صعودی است . مقدار m کدام است ؟

حل : تابع درجه دوم در راس، تغییر نوع یکنوایی می دهد پس : $\frac{-b}{۲a}=۱ \Rightarrow m=۱,-۲$ از طرفی باید $a<۰$ باشد تا تابع در سمت چپ راس صعودی و در سمت راست آن نزولی باشد .پس فقط $m=۱$ قابل قبول است.

تست : تابع $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\sqrt{2}$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

تست : اگر f اکیداً نزولی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد ، دامنه تابع $y=\sqrt{f\left(|x-2|\right)-f\left(|2x-1|\right)}$ کدام است ؟

حل:

$$f\left(|x-2|\right)-f\left(|2x-1|\right)\geq 0\Rightarrow f\left(|x-2|\right)\geq f\left(|2x-1|\right)\Rightarrow |x-2|<|2x-1|\Rightarrow x^2-4x+4<4x^2-4x+1\Rightarrow x>1,x<-1$$

تشخیص یکنوایی توابع به کمک مشتق :

تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم در هر بازه :

✓ اگر $f'(x)>0$ باشد تابع اکیداً صعودی است .

✓ اگر $f'(x)<0$ باشد تابع اکیداً نزولی است .

✓ اگر $f'(x)=0$ باشد تابع ثابت است .

نکته : در توابع کسری ، اگر مخرج دارای ریشه باشد تابع یکنوا نیست . و آزمون فوق فقط نوع یکنوایی در اطراف ریشه مخرج را مشخص خواهد کرد .

مثال : صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را بررسی کنید .

۱) $f(x)=x^3+x-1\xrightarrow{D_f=\mathbb{R}}f'(x)=3x^2+1>0\Rightarrow$ تابع در R اکیداً صعودی است .

۲) $f(x)=x-\sin x\Rightarrow f'(x)=1-\cos x\xrightarrow{-1\leq\cos x\leq 1}f'(x)\geq 0$

در این مثال چون مشتق در نقاط قابل شمارش صفر است پس تابع در جایی ثابت نیست و تابع اکیداً صعودی است .

۳) $y=\tan x\Rightarrow y'=1+\tan^2 x>0$

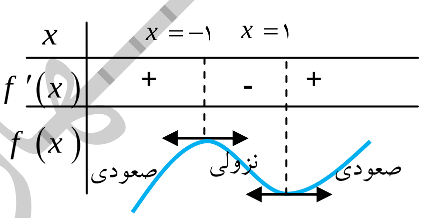
تابع کسری است و در اطراف ریشه های $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ اکیداً صعودی است .

$$۴)\quad y = \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \Rightarrow y = \frac{x}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0$$

تابع کسری است و در اطراف ریشه $x = 1$ اکیداً نزولی است .

مثال : مشخص کنید توابع زیر در چه نواحی صعودی و در چه نواحی نزولی هستند .

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



تست : کدام تابع صعودی اکید است ؟

۱) $y = x + \tan x$ ۲) $y = x - \cot x$ ۳) $y = \frac{x}{x+1}$ ۴) $y = x - \sin x$

حل : توابع سه گزینه اول دارای ریشه مخرج هستند و نمی توانند یکنوا باشند . گزینه آخر جواب است .

تست : تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ همواره صعودی است . تغییرات a کدام است ؟

تست : تابع $y = x + 1 + \frac{4}{x^2}$ در کدام بازه نزولی است ؟ (توجه : در نا معادله طرفین وسطین نداریم)

تست : عدد a را در کدام بازه در نظر بگیریم که تابع $x>1$, $f(x)=\frac{ax-2}{x+a-3}$ اکیداً صعودی باشد ؟

حل : ریشه مخرج باید در دامنه داده شده نباشد پس $x=3-a\le 1\Rightarrow a\ge 2$ از طرفی :

$$y=\frac{a^2-3a+2}{(x+a-3)^2}>0\Rightarrow a^2-3a+2>0\Rightarrow a>2 \text{ یا } a<1$$

از اشتراک محدوده بدست آمده در بالا و پایین داریم : $a>2$ (در ضمن توجه شود به ازای $a=2$ تابع ثابت است)

تست : اگر f صعودی و g نزولی باشد هر یک از توابع $f+g$ و $f-g$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

$(f+g)'=\underbrace{f'}_{\ge 0}+\underbrace{g'}_{\le 0}\longrightarrow$ نامعلوم　　　$(f-g)'=\underbrace{f'}_{\ge 0}-\underbrace{g'}_{\le 0}\ge 0\longrightarrow$ صعودی

تست : اگر f تابعی اکیداً نزولی و مثبت باشد . کدام تابع زیر الزاماً صعودی اکید است ؟ (گزینه ۲)

۱) $\sqrt[3]{f}$　　۲) $\frac{1}{f}$　　۳) f^3　　۴) $\sqrt{f}$

تست : اگر f صعودی و g نزولی باشد، تابع $gofog$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

$(gofog)'=\underbrace{g'(\ )}_{\le 0}\times\underbrace{f'(\ )}_{\ge 0}\times\underbrace{g'(\ )}_{\le 0}\ge 0$　　صعودی

تست : تابع $y=\tan^{-1}\left(x^3+\sqrt{x^3+1}\right)$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

حل : توابع $x^3,\sqrt{x}$ صعودی اکید است پس $x^3+\sqrt{x^3+1}$ صعودی اکید است و چون $\tan^{-1}x$ نیز صعودی اکید است
پس ترکیب آنها نیز صعودی اکید است . (با توجه به تست قبل $+\times+=+$)

تست : تابع $a>1$ $y=\log_a\frac{1-x}{1+x}$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

حل : دامنه تابع $(-۱,۱)$ است که تابع درونی در این بازه شامل ریشه مخرج نیست و نزولی است و چون لگاریتم با مبنای بزرگتر از ۱ صعودی است پس تابع مرکب نزولی می باشد . ($- = - \times +$)

تابع یک به یک

۱) تابع زوج مرتبی : اگر دارای مولفه های دوم یکسان نباشد مگر آنکه مولفه های اول نیز یکسان باشند.

تست : چند تابع ۱-۱ از مجموعه $A = \{۱,۲,۳\}$ به مجموعه $B = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ می توان نوشت ؟

تست : اگر $\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲ - a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ یک به یک باشد ، (a,b) کدام است ؟

۲) تابع نموداری : اگر هر خط افقی تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند .

تست : کدام تابع یک به یک است ؟ گزینه ۱

۱) $y = |x+۲| + ۴x$ ۲) $y = |x+۲| + |۴x|$ ۳) $y = x + |x+۲|$ ۴) $y = |x+۲| + |x|$

تست : کدام تابع زیر یک به یک است ؟

۱) $y = \dfrac{|x-۱|}{x^۲+۳}$ ۲) $y = \dfrac{x^۲ - x}{(x-۱)^۲}$ ۳) $y = \dfrac{۲x}{(x-۱)^۲}$ ۴) $y = \tan x$

حل : گزینه۲ : $y = \dfrac{x}{x-۱}$ یک به یک است. توجه شود گزینه های ۱و۳ دارای ریشه های زوج هستند که باعث غیر یکنوا شدن شکل تابع می شوند .

۳) تابع ضابطه ای : اگر به ازای هر y یک x بدهد .

نکته۱ : توابع اکیداً یکنوا یک به یک هستند .

نکته۲ : تابع $y=ax\pm|bx|$ با شرط $|a|>|b|$ یک به یک است .

نکته۳ : اگر دو تابع یک به یک باشند ، ترکیب آنها نیز حتماً یک به یک است .

تست : کدام تابع یک به یک است؟

۱) $y=x^{5}-x+1$ ۲) $y=|x|+\sqrt[3]{x}$ ۳) $y=|x-2|+\sqrt{x}$ ۴) $y=|x+2|+\sqrt{x-1}$

گزینه ۴ صحیح است .دامنه تابع $[1,+\infty)$ است لذا $y=x+2+\sqrt{x-1}$ که توابع $x+2,\sqrt{x-1}$ اکیداً صعودی هستند پس مجموعشان نیز صعودی است .

تست : کدام تابع یک به یک است ؟

۱) $y=x-\left[\frac{x}{3}\right]$ ۲) $y=x+\left[\frac{-x}{3}\right]$ ۳) $y=x-\left[\frac{-x}{3}\right]$ ۴) $y=x-\sqrt{x}$

تست : به ازای چه مقادیر ی از m تابع $y=x^{3}+mx+7$ یک به یک است ؟

حل : تابع چند جمله ای پیوسته است پس ۱-۱ است اگر و تنها اگر یکنوا باشد .پس باید مشتق همواره مثبت یا منفی باشد
پس : $y'=3x^{2}+m>0\Rightarrow m\geq 0$

تست : محدوده a برای آنکه تابع $y=ax+|x|$ یک به یک باشد ، کدام است ؟

تست : کدام گزینه تابع یک به یک است ؟ (گزینه ۴)

۱) $y=۳|x|+x+۱$ ۲) $y=|x|-x+۱$ ۳) $y=|x|-x+۱$ ۴) $y=|x|-۳x+۱$

تابع معکوس :

اگر تابع یک به یک باشد وارون آن نیز تابع خواهد بود و می گوییم تابع وارون پذیر است .

۱) در تابع زوج مرتبی : وارون تابع از عوض کردن جای مولفه های اول با مولفه های دوم بدست می آید . $D_{f^{-۱}}=R_f$

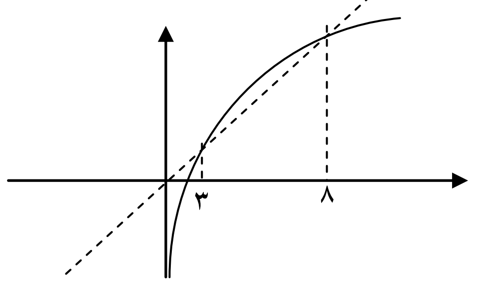
نکته : $f^{-۱}(a)=x \Leftrightarrow f(x)=a$ در نتیجه حتی بسیاری از تست ها را می توان با جایگذاری یک عدد حل کرد.

تست : دو تابع $g=\{(۲,۵),(۳,۴),(۱,۶),(۴,۷),(۸,۱)\}$ و $f(x)=۲x-۵$ مفروضند . اگر $(f^{-۱}og)(a)=۶$ باشد ، مقدار a کدام است ؟

تست : اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ ، آنگاه حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است ؟

۲) در تابع نموداری : برای رسم وارون تابع کافیست قرینه تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم .

تست : شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ است . دامنه تابع $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$ کدام است ؟



۳) در تابع ضابطه ای : برای نوشتن ضابطه تابع وارون ابتدا x را بر حسب y می یابیم و سپس جای x و y را عوض می کنیم و برد تابع اصلی دامنه آن خواهد بود .

روش تستی : با قرار دادن نقطه می توان ضابطه درست را یافت .

تست : تابع وارون $x>0$; $f(x)=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$ کدام است ؟

تشریحی : تابع اکیداً صعودی است (چون x و $-\frac{1}{x}$ صعودی هستند)پس : $0<x<+\infty \Rightarrow f(0)<y<f(+\infty) \Rightarrow y\in R$

$$2y=x-\frac{1}{x}\to 2yx=x^2-1\to x^2-2yx-1=0\to (x-y)^2-y^2-1=0$$

$$\Rightarrow x-y=\sqrt{y^2+1}\Rightarrow x=y+\sqrt{y^2+1}\quad \Rightarrow \quad y=x+\sqrt{x^2+1}\ ;x\in R$$

تست : ضابطه وارون تابع $y=2-\sqrt{x-1}$ کدام است ؟

۱) $y=x^2-4x+5 : x\le 2$ ۲) $y=-x^2+4x-5 : x\le 2$

۳) $y=x^2-4x+5 : x\ge 1$ ۴) $y=-x^2+4x-5 : x\ge 1$

روش تستی : داریم $(5,0)\in f$ پس $(0,5)\in f^{-1}$ لذا ۱) باید ۰ در دامنه تابع وارون باشد ۲) مقدار تابع وارون ۵ شود.
گزینه ۱

تست : نمودار تابع $y=|2x-6|-|x+4|+x$ در یک بازه اکیداً نزولی است . ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است ؟

۱) $-x+6 : x<-4$ ۲) $-x+5 : x>2$ ۳) $\frac{-1}{2}x+1 : -4<x<3$ ۴) $\frac{-1}{2}x+1 : -4<x<10$

$$y=\begin{cases}2x-10 & x\ge 3\\ -2x+2 & -4\le x\le 3\\ 10 & x\le -4\end{cases}\Rightarrow y=-2x+2\quad \Rightarrow (-4,10)\in f\Rightarrow (10,-4)\in f^{-1}\to 4$$ گزینه

تست : در تابع با ضابطه $x^2\ne 1$, $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{1-x^2}$ و $f(0)=0$ ضابطه تابع وارون برابر است با :

۱) $f(x)$　　　۲) $-f(x)$　　　۳) $xf(x)$　　　۴) $-xf(x)$

حل : $(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵})\in f$ پس $(\frac{۴}{۵},\frac{۳}{۵})\in f^{-۱}$ که در گزینه ۱ صادق است.

نکته : در توابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر جای a,d را عوض و قرینه کنیم ، تابع وارون بدست می آید .

نکته : نقاط برخورد $f^{-۱}$ با $y=x$ همان نقاط برخورد f با $y=x$ است .

نکته : تمام نقاط برخورد تابع صعودی و وارونش را می توان از معادله $f(x)=x$ بدست آورد . ولی اگر تابع صعودی نباشد باید معادله $f^{-۱}=f$ را حل کرد .

تست : اگر تابع $f(x)=(a+۱)x^۴+(a+۲)x^۳-۳x$ وارون پذیر باشد ، نمودار تابع وارون آن خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می کند ؟

تست : اگر $f(x)=x+\sin(\frac{\pi x}{۴})$ دو تابع $f,f^{-۱}$ در $[-۱,۹]$ چند نقطه مشترک دارند ؟

حل :تابع اکیداً صعودی است : $y'=۱+\frac{\pi}{۴}\cos(\frac{\pi}{۴}x)\xrightarrow{\cos x\geq -۱}y'\geq ۱-\frac{\pi}{۴}>۰$

$$x+\sin(\frac{\pi x}{۴})=x\Rightarrow\sin(\frac{\pi x}{۴})=۰\Rightarrow x=۴k\Rightarrow x=۰,۴,۸$$

تست : معکوس تابع $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}-۱$ خود تابع را در چند نقطه قطع می کند ؟ (تابع صعودی نیست)

حل : با مخرج مشترک گیری تابع $y=\frac{x+۲}{x-۱}$ خواهد بود که خود معکوس است و تابع و وارونش بر هم منطبقند و در بی نهایت نقطه همدیگر را قطع می کنند .

تست : منحنی معکوس تابع $y=-(x+۲)^۳-۲$ تابع را در چند نقطه قطع می کند ؟

حل : چون تابع صعودی نیست پس :

$$y+2=-(x+2)^3 \Rightarrow x=-\sqrt[3]{y+2}-2 \Rightarrow y=-\sqrt[3]{x+2}-2 \xrightarrow{f=f^{-1}} -(x+2)^3-2=-\sqrt[3]{x+2}-2$$
$$\Rightarrow (x+2)^9=x+2 \Rightarrow x+2=0,-1,1 \Rightarrow x=-2,-1,-3$$

نکته : اگر f تابع فرد باشد ، وارون آن نیز فرد است . (توجه شود که تابع زوج اصلاً وارون پذیر نیست)

نکته : اگر تابع f پیوسته و در بین a,b نزولی (صعودی) باشد ، وارون آن در بین $f(a),f(b)$ نزولی (صعودی) است.

تست : تابع وارون تابع $a>1$ ، $y=\log_a \frac{1+x}{1-x}$ چگونه است ؟

۱) فرد　　۲) زوج　　۳) نه فرد و نه زوج　　۴) نزولی

حل : تابع فوق فرد است پس وارون آن نیز فرد است .

تست : وارون کدام تابع صعودی است ؟

۱) $y=-x+1$　　۲) $y=\frac{x+1}{x-1}:x>1$　　۳) $y=x+\sqrt{x}$　　۴) $y=x^2-2x+3:x<1$

تست : وارون تابع $f(x)=x^3-3x+1$ در کدام بازه نزولی است ؟

حل : مشتق را تعیین علامت می کنیم و تابع فوق در بازه $[-1,1]$ نزولی است.پس وارون آن در بازه $[-1,3]$ نزولی است.

ترکیب توابع f,f^{-1} :

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(x)=x & ;x\in D_f\\ (fof^{-1})(x)=x & ;x\in R_f\end{cases}$$

نکته : توابع $f^{-1}of$, fof^{-1} زمانی با هم برابر هستند که دامنه و برد تابع f مساوی باشند .

نکته : وارون توابع مرکب به صورت مقابل بدست می آید : $(\text{fog})^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$

تست : در کدام مورد زیر تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ برابرند ؟

۱) $y=x^{۲}-x-۱$ ۲) $y=\sqrt{x-۱}+۱$ ۳) $y=۲^{x}+۲^{-x}$ ۴) $y=\sqrt[۴]{x}+۱۷$

تست : اگر $f(x)=۱+\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{۲}$ و $x>۰$ ، آنگاه $g^{-1}of^{-1}$ کدام است ؟

تست : اگر $f^{-1}(x)=۱+\sqrt{x}$ و $g^{-1}(x)=x^{۲}$ و $x\geq ۰$ آنگاه ضابطه $(fog)(x)$ کدام است ؟

حل : $(fog)^{-1}$ را حساب می کنیم ، سپس وارون آن را می یابیم :

$$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}=\left(۱+\sqrt{x}\right)^{۲}\Rightarrow y=\left(۱+\sqrt{x}\right)^{۲}\Rightarrow \sqrt{y}-۱=\sqrt{x}\Rightarrow x=\left(\sqrt{y}-۱\right)^{۲}\Rightarrow (fog)(x)=\left(\sqrt{x}-۱\right)^{۲}$$