فصل دوّم

درس اوّل : نسبت و تناسب در هندسه

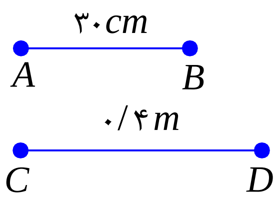
در این درس ، مفهوم نسبت و تناسب را معرفی می کنیم و سپس مسائلی از هندسه را که به کمک این مفهوم می توان حل کرد را نیز حل می کنیم.

مفهوم نسبت و تناسب

نسبت دو کمیت کسری است که صورت و مخرج آن اندازه‌های آن دو کمیت برحسب یک واحد باشند.

مثلاً : کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت a بر b گویند هرگاه b و a برحسب یک واحد باشند.

مثال : نسبت اندازه‌ی پاره خط AB بر اندازه‌ی پاره خط CD را با توجه به شکل مقابل بنویسید.



$$\frac{AB}{CD}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}$$

نتیجه : نسبت دو کمیت یک عدد حقیقی است و به واحد اندازه‌گیری آنها بستگی ندارد.

بیان تساوی دو نسبت را **تناسب** گویند.

مثلاً : تساوی دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، $b,d \neq 0$ را یک تناسب گویند.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

در یک تناسب مانند تناسب فوق جملات d و a را طرفین (جملات کناری) و c و b را وسطین (جملات میانی) می‌نامند.

جملات میانی $\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad$ جملات کناری

خاصیت اصلی تناسب

در هر تناسب حاصل ضرب دو جمله‌ی کناری با حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی آن برابر است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow ad=bc$$

اثبات: چون $b,d\neq 0$ پس $bd\neq 0$. حال کافی است دو طرف تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در bd ضرب کنیم. خواهیم داشت :

$$bd\,(\frac{a}{b})=bd\,(\frac{c}{d})\rightarrow ad=bc$$

خواص دیگر تناسب

۱ : در یک تناسب می‌توان جای دو جمله‌ی میانی و یا دو جمله‌ی کناری را عوض کرد و تناسب جدیدی به دست آورد. $(a,b,c,d\neq 0)$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{جابجایی جملات میانی}}\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{جابجایی جملات کناری}}\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow[\text{جابجایی جملات کناری}]{\text{جابجایی جملات میانی}}\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

نتیجه: در یک تناسب می‌توان هر دو نسبت را معکوس کرد و تناسب جدیدی به دست آورد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\qquad\qquad (a,b,c,d\neq 0)$$

۲ : در یک تناسب از ترکیب نسبت در صورت (یا در مخرج) تناسبی جدید به وجود می‌آید. $(b,d\neq 0)$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}}\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

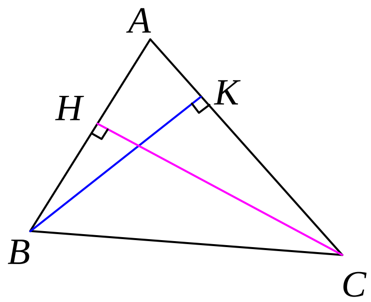
۳ : در یک تناسب ، نسبت مجموع صورتها به مجموع مخرجها برابر هر یک از نسبت‌های تناسب است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\rightarrow\frac{a+c}{b+d}=k\qquad\qquad (b,d\neq 0)$$

توجه : خاصیت ۳ برای چند نسبت مساوی نیز قابل تعمیم است.

تمرین ۱ : ثابت کنید که در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دوضلع، با عکس نسبت ارتفاع های وارد بر آنها برابر است.

حل :



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times CH$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AC \times BK$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲} AB \times CH = \frac{۱}{۲} AC \times BK \rightarrow AB \times CH = AC \times BK \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BK}{CH}$$

تمرین ۲ : ثابت کنید که اگر اندازه های ارتفاع های دو مثلث برابر باشند. نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت اندازه‌ی قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آنها عمود اند.

حل :

	قاعده	ارتفاع	مساحت
مثلث اوّل	a	h	$S_۱$
مثلث دوّم	b	k	$S_۲$

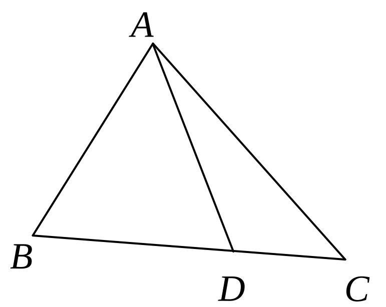
$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{\frac{۱}{۲}ah}{\frac{۱}{۲}bk} = \frac{ah}{bk} \xrightarrow{h=k} \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{a}{b}$$

تمرین ۳ : ثابت کنید که اگر اندازه های قاعده های دو مثلث برابر باشند. نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت اندازه‌ی ارتفاع هایی است که بر این قاعده ها عمود شده اند.

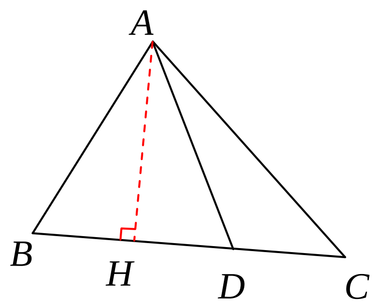
حل :

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{\frac{۱}{۲}ah}{\frac{۱}{۲}bk} = \frac{ah}{bk} \xrightarrow{a=b} \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{h}{k}$$

تمرین۴ : با توجه به شکل مقابل ثابت کنید که نسبت مساحت های دو مثلث ABD و ADC برابر با نسبت قاعده های آنها است.



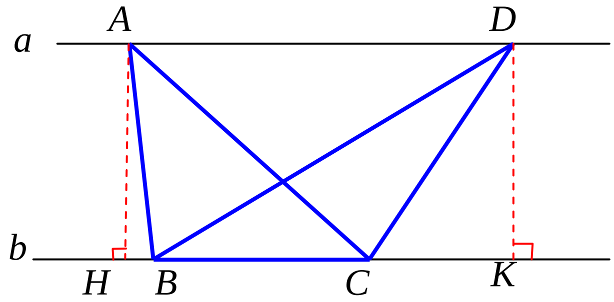
حل : ابتدا ارتفاع وارد بر دو قاعده‌ی دو مثلث را رسم می کنیم. واضح است این دو مثلث ارتفاع مشترک دارند.



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{۱}{۲}BD\times AH}{\frac{۱}{۲}DC\times AH}=\frac{BD}{DC}$$

تمرین ۵ : ثابت کنید که اگر دو مثلث قاعده‌ی مشترکی داشته باشند و رأس های روبروی این قاعده‌ی آنها، روی یک خط موازی با امتداد قاعده باشند، این مثلث ها هم مساحت اند. (**قضیه‌ی کاوالیری**)

حل :



$$a \parallel b \rightarrow AH = DK$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}DK\times BC=S_{DBC}$$

***

تمرین ۶ : اگر $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}$ مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ را به دست آورید.

حل :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{۳+۴}{۴}\rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{۷}{۴} \\ \frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{۳-۴}{۴}\rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{-۱}{۴} \end{array}\right\}\rightarrow\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{-۱}{۴}}\Longrightarrow\frac{a+b}{a-b}=-۷$$

تمرین برای حل :

۷ : در هر مورد مقدار مجهول را بیابید.

الف) $\frac{x}{۳}=\frac{۹}{۱۰}$ ب) $\frac{y}{y+۲}=\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{z+۱}{z}=\frac{۴}{z}$ د) $\frac{۲a+۱}{۱۸}=\frac{۳۵}{b}=\frac{۵}{۲}$

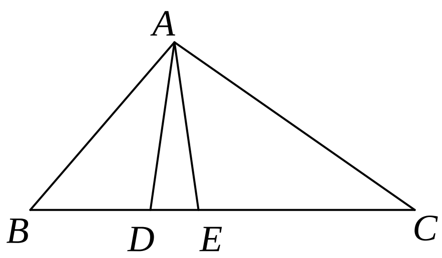
۸ : محیط مستطیلی ۲۱۰ سانتی‌متر و نسبت طول به عرض آن $\frac{۴}{۳}$ است. مساحت این مستطیل را به دست آورید.

۹ : متناظر با تساوی مقابل یک تناسب بنویسید. $۵x+y=۲x+۷y$

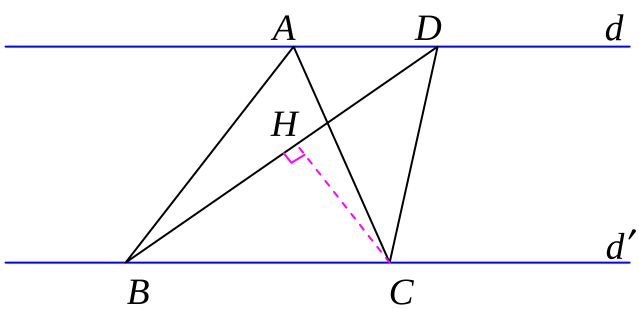
۱۰ : خواص ۳ و ۲ را ثابت کنید.

۱۱ : اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ ، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

۱۲: در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



۱۳ : در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC برابر ۸ سانتی متر مربع است. اگر اندازه‌ی ضلع BD برابر۶ سانتی متر باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی C از BD را به دست آورید.



واسطه‌ی هندسی (میانگین هندسی)

عدد x را میانگین هندسی بین دو عدد b و a گویند، هرگاه $x^{۲} = ab$

مثال : واسطه‌ی هندسی بین ۴ و ۹ را می توان به شکل زیر محاسبه نمود.

$$x^{۲} = (۴)(۹) \rightarrow x^{۲} = ۳۶ \rightarrow x = \pm ۶$$

تمرین برای حل :

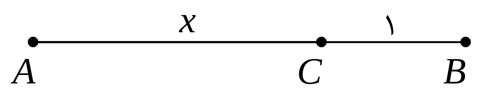
۱۴ : واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $۱۶\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۲}$ را تعیین کنید.

۱۵ : طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه‌ی هندسی بین دو پاره خط به طول های ۸ و۱۰ سانتی متر است.

۱۶ : اگر $\frac{a-c}{b-a} = \frac{c}{a}$. ثابت کنید که a واسطه‌ی هندسی بین دو عدد c و b است.

۱۷ : اگر داشته باشیم $\frac{۳}{۴} = \frac{x-۱}{۲۰} = \frac{۲۱}{y+۳}$ واسطه‌ی هندسی بین y و x را بیابید.

۱۸ : در شکل زیر AC واسطه‌ی هندسی بین AB و BC است. مقدار x را به دست آورید.



***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

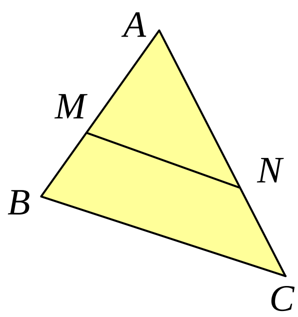
فصل دوّم

درس دوّم : قضیه ی تالس

یکی از قضیه های مهم در ریاضی و هندسه ، که کاربرد های زیادی نیز دارد، قضیه‌ی تالس می باشد. در این درس قضیه‌ی تالس را معرفی و اثبات می کنیم.

***

قضیه (قضیه‌ی تالس) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند روی آنها پاره خطهای متناسب بوجود می‌آورد.

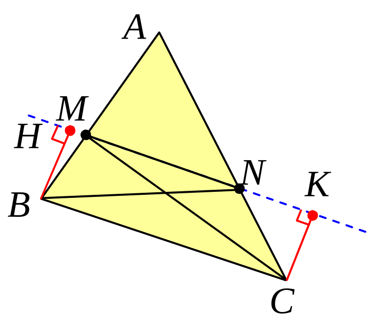


فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

اثبات :

مرحله‌ی اوّل :

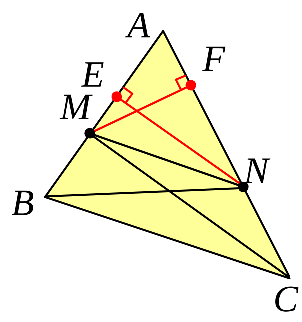


نقطه ی N را به B و همچنین نقطه ی M را به C وصل می‌کنیم. دو مثلث MNB و MNC حاصل می‌شود که ارتفاع نظیر ضلع MN در هر دو یکسان است. زیرا چهـارضلعی $BHKC$ مستطیل می‌باشد و در مستطیل اضلاع روبرو مساویند ($BH = CK$) . لذا طبق آنچه گفته شد داریم :

$$S_{\underset{MNB}{\Delta}} = \frac{۱}{۲} MN.BH = \frac{۱}{۲} MN.CK = S_{\underset{MNC}{\Delta}}$$

مرحله‌ی دوّم : از نقطه‌ی N بر ضلع AB پاره خط NE را عمود می‌کنیم. پس

$$\frac{S_{\underset{AMN}{\Delta}}}{S_{\underset{MNB}{\Delta}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AM.NE}{\frac{۱}{۲} MB.NE} = \frac{AM}{MB}$$



مرحله‌ی سوّم : از نقطه‌ی M بر ضلع AC پاره خط MF را عمود می‌کنیم پس

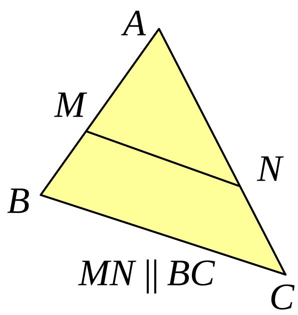
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}AN.MF}{\frac{۱}{۲}NC.MF}=\frac{AN}{NC}$$

مرحله‌ی چهارم : طبق دو مرحله دوّم و سوّم داریم

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}}=\dfrac{AM}{MB}\\[2ex]\dfrac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}}=\dfrac{AN}{NC}\end{array}\right\}\xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{MNB}}=S_{\overset{\Delta}{MNC}}}\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

***

نتیجه : رابطه‌ی تالس را می‌توان به صورت زیر نوشت.



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

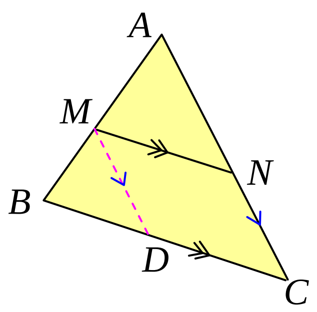
اثبات : کافی است نسبت را در مخرج ترکیب کنیم.

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\to\frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\to\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

توجه : اگر رابطه‌ی تالس را به صورت $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ بنویسیم، می‌گوییم، رابطه به صورت جزء به جزء نوشته شده است. در حالی که در حالت $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ رابطه را جزء به کل گویند.

***

قضیه (قضیه‌ی کلی تالس) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلث دیگری بوجود می‌آورد که اضلاع آن با اضلاع متناظر از مثلث اصلی متناسبند.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

اثبات : تناسب $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ (۱) طبق قضیه‌ی تالس بدیهی است. از طرفی اگر از نقطه‌ی M پاره‌خط MD را موازی AC رسم کنیم. با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم :

$$MD \parallel AC \rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{BD}{BC} \rightarrow \frac{-BM}{AB} = \frac{-BD}{BC}$$

و با ترکیب نسبت در صورت می توان نوشت:

$$\frac{AB - BM}{AB} = \frac{BC - BD}{BC} \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

ولی چهارضلعی $MNCD$ متوازی الاضلاع است پس $MN = DC$ و لذا

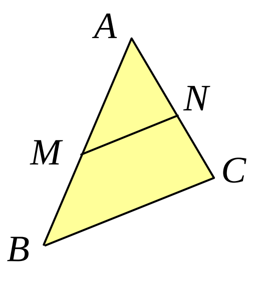
$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \qquad (۲)$$

حال طبق نتایج ۱ و ۲ به دست آمده می‌توان نوشت:

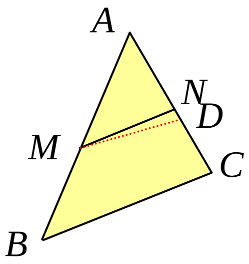
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

***

قضیه (عکس قضیه‌ی تالس) : اگر خطی دو ضلع مثلثی (یا امتداد آنها) را قطع کند و روی آنها پاره‌خط‌های متناسب پدید آورد، آن خط با ضلع سوّم مثلث موازی است.



فرض : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ حکم : $MN \parallel BC$



اثبات : (به کمک برهان خلف) گیریم که MN موازی BC نباشد. پس از نقطه ی M خط MD را چنان رسم می‌کنیم که موازی BC باشد و AC (یا امتداد آن را در نقطه ی D) قطع کند. حال طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AD}{AC}$$

و با مقایسه با فرض می توان نوشت:

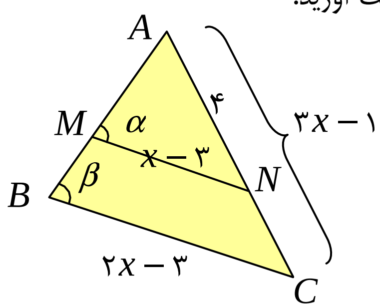
$$\frac{AN}{AC}=\frac{AD}{AC}$$

لذا :

$$AN=AD$$

و این وقتی ممکن است که نقـــطه‌ی D بر N منطبق باشد پس پاره‌خط MD بر MN منطبق می‌شود و چون $MD \parallel BC$ پس $MN \parallel BC$ و حکم ثابت است.

تمرین ۱ : در شکل زیر زاویه های α و β مساویند. مقدار x را به دست آورید.



حل : چون زاویه های α و β لذا خطوط MN و BC موازیند. لذا قضیه‌ی تالس را می توان به صورت زیر نوشت:

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

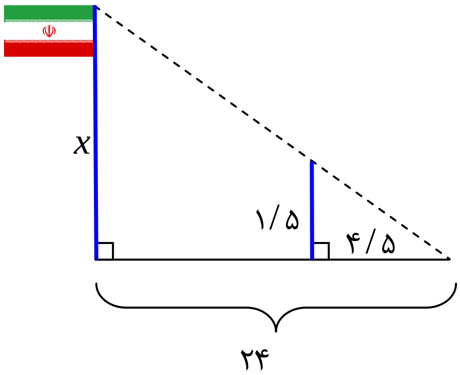
و چون اندازه های اضلاع AM و AB را نداریم. تناسب را به صورت زیر می نویسیم.

$$\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \rightarrow \frac{۴}{۳x-۱}=\frac{x-۳}{۲x-۳} \rightarrow (x-۳)(۳x-۱)=۴(۲x-۳)$$

$$\rightarrow ۳x^۲-x-۹x+۳=۸x-۱۲ \rightarrow ۳x^۲-۱۸x+۱۵=۰ \xrightarrow{\div ۳} x^۲-۶x+۵=۰$$

$$\rightarrow (x-۵)(x-۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۵ \\ x=۱ \end{cases}$$

که با توجه به داده های مسئله جواب $x=۱$ قابل قبول نیست.



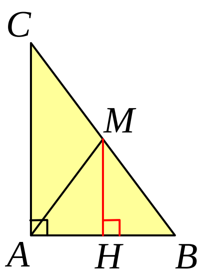
تمرین۲ : حامد برای تعیین ارتفاع پرچم مدرسه (که به آن دسترسی ندارد) . میله ای به ارتفاع ۱/۵ متر را طوری روی زمین گذاشت که انتهای سایه ی میله و سایه ی پرچم روی هم منطبق شوند. اگر طول سایه ی پرچم ۲۴ متر و طول سایه ی میله ۴/۵ متر باشد. ارتفاع پرچم را به دست آورید.

حل : چون پرچم و میله هر دو بر زمین عمودند، لذا موازی می باشند. پس طبق قضیه‌ی تالس می توان نوشت :

$$\frac{x}{۱/۵}=\frac{۲۴}{۴/۵}\rightarrow x=\frac{۲۴\times ۱/۵}{۴/۵}=۸\ m$$

***

تمرین۳ : به کمک قضیه‌ی تالس، ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است.



حل : در مثلث قائم الزاویه ی مقابل AM میانه‌ی وارد بر وتر BC می باشد.

بنابر تعریف میانه واضح است که $MB=MC$

اکنون از نقطه‌ی M واقع بر ضلع AB خط MH را به صورت عمود رسم می کنیم.چون دو خط عمود بر یک خط موازیند، پس $MH \parallel AC$

حال قضیه‌ی تالس را به صورت زیر می نویسیم.

$$\frac{BH}{AH}=\frac{BM}{CM}\xrightarrow{BM=CM}\frac{BH}{AH}=۱\rightarrow BH=AH$$

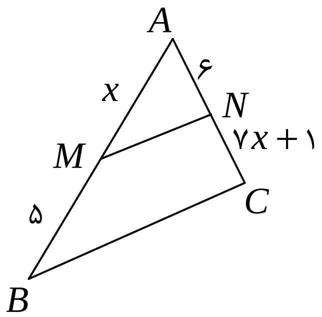
پس MH ضلع AB را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند و چون برآن نیز عمود است، لذا MH عمود منصف ضلع AB می باشد. حال چون نقطه‌ی M روی عمود منصف قرار دارد، پس از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است. یعنی $AM=MB$

و این به معنی آن است که $AM=\frac{BC}{۲}$

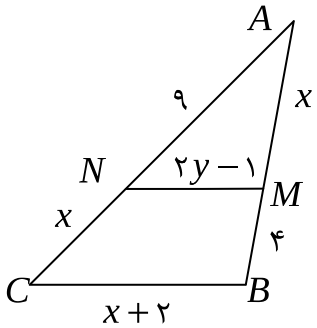
***

تمرین برای حل :

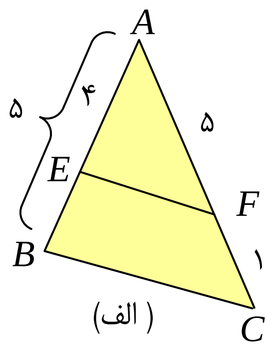
۴ : در شکل زیر $MN \parallel BC$ ، مقدار x را به دست آورید.



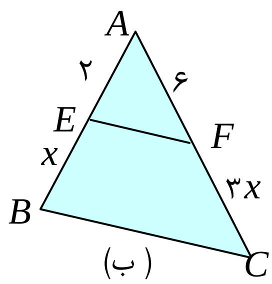
۵ : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را به دست آورید.



۶ : در کدام مورد $EF \parallel BC$ است؟

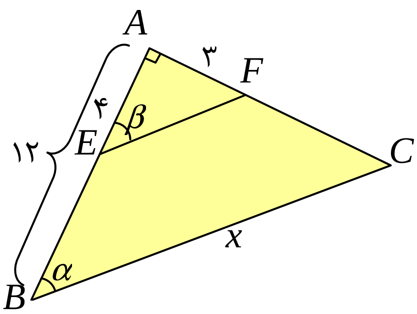


(الف)



(ب)

۷ : در شکل مقابل $(\angle\alpha = \angle\beta)$ ، مقدار x را به دست آورید.



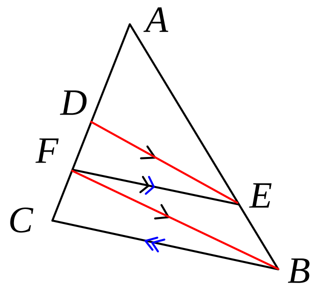
۸ : ثابت کنید که اگر وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم، پاره خطی بوجود می‌آید که موازی ضلع سوّم و برابر نصف آن است.

۹ : ثابت کنید که در یک مثلث اگر از وسط یک ضلع خطی موازی ضلع دیگر رسم شود، این خط از وسط ضلع سوّم می‌گذرد.

۱۰: ثابت کنید که اگر وسطهای اضلاع یک چهارضلعی محدب را به طور متوالی به هم وصل کنیم، چهارضلعی جدیدی به دست می‌آید که

اولاً : متوازی الاضلاع است.   ثانیاً : مساحت آن نصف مساحت چهارضلعی اصلی است.

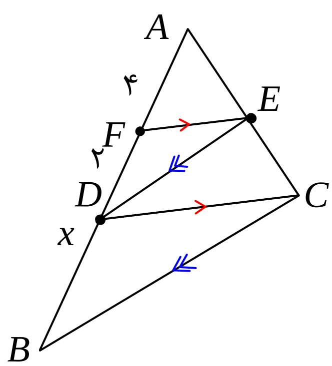
۱۱ : در شکل زیر $DE \parallel FB$ و $FE \parallel BC$ ثابت کنید که $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$



۱۲ : با توجه به شکل مقابل اگر $FE \parallel DC$ و $DE \parallel BC$

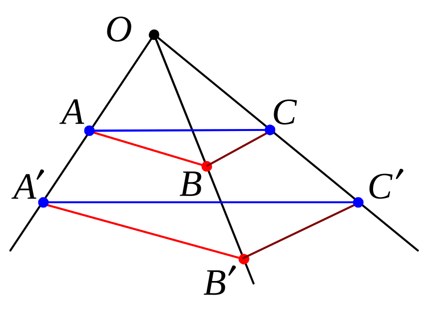
اولاً : ثابت کنید که $AD^{۲} = AF.AB$

ثانیاً : مقدار x را به دست آورید.

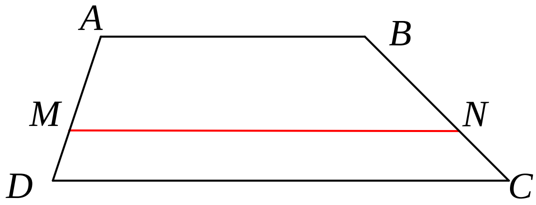


۱۳ : در شکل زیر $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیه‌ی تالس و عکس آن ثابت کنید:

$$AC \parallel A'C'$$



۱۴ : در ذوزنقه‌ی زیر $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید، $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$. (قضیه‌ی تالس در ذوزنقه)



۱۵ : یک پاره خط به طول۵ سانتی متر رسم کنید و سپس به کمک قضیه‌ی تالس آن را به سه پاره خط مساوی تقسیم کنید. آیا می توان این پاره خط را به دو قسمت طوری تقسیم کرد که یکی دو برابر دیگری باشد؟ توضیح دهید.

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir
کانال تلگرام : @mathameri
کانال ایتا : @mathtower

درس سوّم : تشابه مثلث ها

در این درس ابتدا مفهوم تشابه برای چند ضلع های را بیان و سپس موضوع تشابه را فقط برای مثلث ها ادامه می دهیم.

تشابه چند ضلعی ها

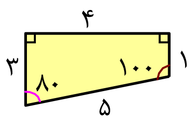
هرگاه دو چند ضلعی، طوری باشند که با حفظ اندازه‌ی زاویه ها، اندازه‌ی اضلاع با یک نسبت تغییر کننـد، در این صورت این دو چند ضلعی را متشابه می گویند.

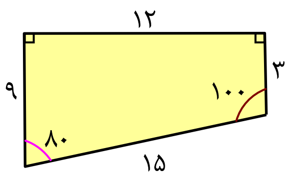
نتیجه : دو چندضلعی را متشابه گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

الف : تعداد اضلاع آنها برابر باشند.

ب : زاویه‌های متناظر آنها مساوی باشند.

ج : اضلاع متناظر آنها متناسب باشند.





مثال ۱ : با توجه به تعریف فوق ، دو چهارضلعی شکل مقابل متشابهند.

مثال ۲ : دو لوزی ممکن است متشابه نباشند، زیرا زاویه‌های متناظر آنها ممکن است مساوی نباشند.

مثال ۳ : دو مستطیل ممکن است متشابه نباشند، زیرا اضلاع متناظر آنها ممکن است متناسب نباشند.

تعریف : نسبت اندازه های اضلاع متناظر، از دو چندضلعی متشابه را **نسبت تشابه** گویند.

در مثال شماره‌ی ۱ نسبت تشابه می‌تواند $۳=\frac{۱۲}{۴}$ یا $\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}$ باشد که می‌نویسند:

$$k=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳} \quad \text{یا} \quad k=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

نتیجه :

۱ : هر چند ضلعی با خودش متشابه است.

۲ : اگر دو چند ضلعی با یک چند ضلعی دیگر متشابه باشند، خود با هم متشابهند.

۳ : هر دو چند ضلعی همنهشت متشابهند و نسبت تشابه آنها برابر یک است.

مثال ۴ : هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابهند.

مثال ۵ : هر دو مربع متشابهند.[1]

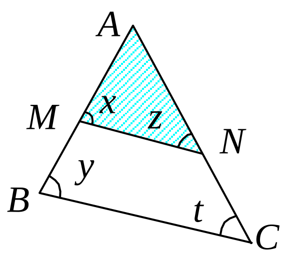
---

[1] . و به طور کلی هر دو چند ضلعی منتظم متشابهند.

تشابه مثلث ها

برای ورود به بحث تشابه مثلث ها ، لازم است ابتدا با قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث آشنا شویم. توجه کنید که در دو مثلث متشابه، دو ضلع را متناظر گویند، هرگاه روبرو به زاویه های مساوی باشند.

قضیه (قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث ها) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود به طوری که دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلثی بوجود می‌آورد که با مثلث اصلی متشابه است.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

اثبات : کافی است که نشان دهیم ، شرط های مربوط به تعریف تشابه را برقرارند.

شرط اوّل : برابری تعداد اضلاع دو مثلث که بدیهی است.

شرط دوّم : تساوی زاویه‌های متناظر

زاویه ی A در دو مثلث مشترک است. از طرفی چون $MN \parallel BC$ پس $\angle z = \angle t$ و $\angle x = \angle y$

پس زاویه های نظیر مساویند.

شرط سوّم : تناسب اضلاع متناظر

چون $MN \parallel BC$ پس طبق قضیه‌ی تالس داریم $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}$. در نتیجه اضلاع متناسبند.

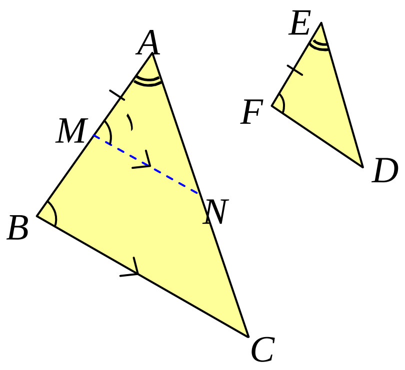
***

حال با توجه به قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث ، می توان سه قضیه‌ی اصلی برای حالت های مختلف تشابه دو مثلث بیان کرد.

قضایای اصلی تشابه دو مثلث

قضیه‌ی ۱ : اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند آن دو مثلث متشابهند.

(حالت تساوی دو زاویه)



فرض : $\angle A=\angle E$ و $\angle B=\angle F$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{EFD}$

اثبات : نقطه ی M را روی ضلع AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AM=EF$ باشد و از آن پاره‌خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ی N قطع کند.

پس $\angle B=\angle M_۱$. لذا با توجه به فرض می‌توان نوشت $\angle F=\angle M_۱$

حال داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{E}\\ AM=EF\\ \hat{M}_۱=\hat{F}\end{array}\right\}\rightarrow \underset{(\text{ز ض ز})}{\overset{\Delta}{AMN}\cong\overset{\Delta}{EFD}}\rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{EFD}\quad (۱)$$

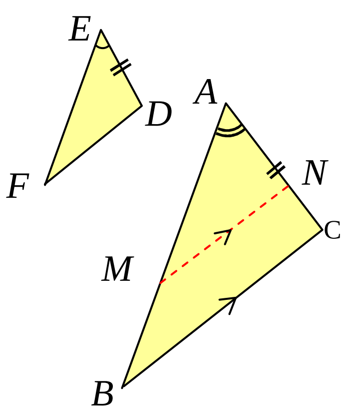
و چون $BC\,||\,MN$ پس طبق قضیه‌ی اساسی تشابه : (۲) $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{AMN}$

و از نتایج ۱ و ۲ داریم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{EFD}$

***

قضیه‌ی ۲ : اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابهند.

(حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه های بین آنها)



فرض : $\angle A=\angle E$ و $\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{ED}{AC}$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{EFD}$

اثبات : نقطه‌ی N را روی ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم که $AN=ED$ سپس از نقطه‌ی N خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه‌ی M قطع کند. بنابر قضیه‌ی تالس

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

حال ضلع مساوی AN یعنی ED را در رابطه فوق جایگزین می‌کنیم پس

$$\frac{AM}{AB}=\frac{ED}{AC}$$

و در مقایسه با فرض داریم $AM=EF$ و در نتیجه دو مثلث EFD و AMN بنا به حالت (ض‌زض)

همنهشت هستند یعنی $\Delta(AMN)\cong\Delta(EFD)\to\Delta(AMN)\sim\Delta(EFD)$ (۱)

از طرفی چون $MN \parallel BC$ پس طبق قضیه اصلی تشابه $\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$ (۲)

و از نتایج (۱) و (۲) داریم : $\Delta(ABC)\sim\Delta(EFD)$

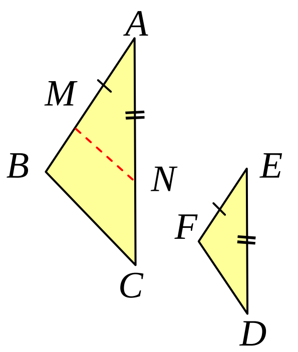
***

قضیه‌ی ۳ : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

(حالت تناسب سه ضلع)

فرض : $\frac{EF}{AB}=\frac{ED}{AC}=\frac{FD}{BC}$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{EFD}$



اثبات : پاره خط AM را به اندازه‌ی EF روی AB و پاره خط AN به اندازه‌ی ED روی AC جدا کرده آنگاه داریم :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

و طبق عکس قضیه تالس می‌توان نوشت: $MN \parallel BC$

پس طبق قضیه‌ی اساسی تشابه $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ و با مقایسه با فرض داریم $MN=FD$ لذا

دو مثلث AMN و EFD بنا به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند یعنی :

$\overset{\Delta}{AMN}\cong\overset{\Delta}{EFD}\to\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{EFD}$ (۱)

از طرفی چون $MN \parallel BC$ پس بنا به قضیه‌ی اساسی تشابه

$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \qquad (۲)$$

و از نتایج (۱) و (۲) داریم : $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EFD}$

توصیه : هنگام نوشتن نسبت اضلاع متناظر از دو شکل متشابه لازم است به دو نکته‌ی زیر توجه نمود.

۱ : صورت‌ها مربوط به یک شکل و مخرج‌ها مربوط به شکل دیگر باشند.

۲ : دو ضلع در یک نسبت (کسر) قرار می‌گیرند، هرگاه روبرو به زاویه های مساوی باشند.

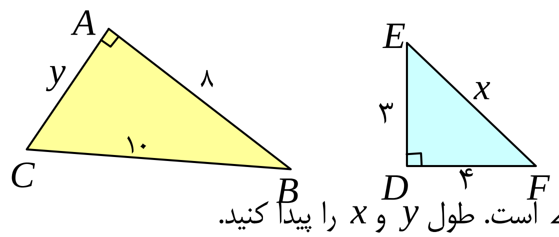
تمرین برای حل :

۱ : در مورد هر یک از موارد زیر بحث کنید.

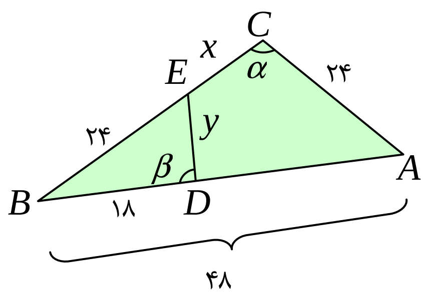
الف : اگر یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه با یک زاویه‌ی حاده از مثلث قائم الزاویه‌ی دیگری مساوی باشند، آیا آن دو مثلث متشابهند؟

ب : اگر یک زاویه از یک مثلث متساوی الساقین با یک زاویه از مثلث متساوی الساقین دیگری مساوی باشند، آیا آن دو مثلث متشابهند؟

۲ : آیا دو مثلث قائم الزاویه‌ی زیر متشابهند؟ چرا؟

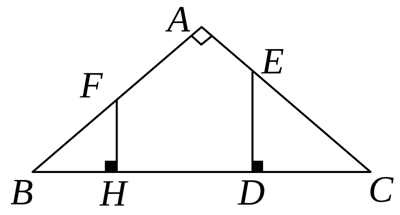


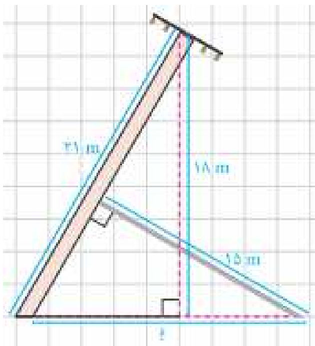
۳ : در شکل زیر $\angle\alpha = \angle\beta$ است. طول y و x را پیدا کنید.



۴ : ثابت کنید که دو مثلث BHF و CDE متشابهند و نتیجه بگیرید که :

$$BH \times DC = FH \times DE$$

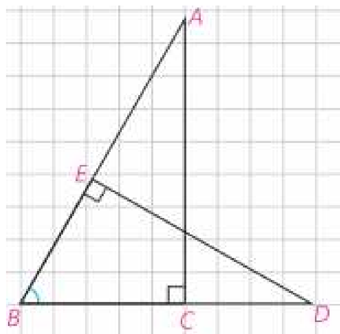




۵ : مطابق شکل روبرو ، یک دکل انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر ، عمود بر آن ، آن را به طور موقت سرپا نگه داریم. پای تیر فلزی را باید در چه فاصله ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟

حل : با توجه به شکل زیر واضح است که دو مثلث ABC و BDE به حالت تساوی دو زاویه ، متشابهند.

لذا می توان نوشت:



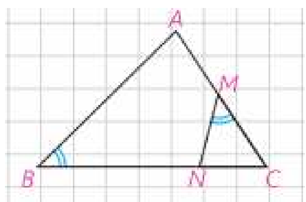
$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \rightarrow \frac{۱۵}{۱۸} = \frac{BD}{۲۱}$$

$$\rightarrow BD = \frac{۲۱ \times ۱۵}{۱۸} = ۱۷/۵ \ cm$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصله‌ی ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

۶ : در مثلث ABC ، از نقطه‌ی M وسط AC ، زاویه‌ی NMC را مساوی زاویه‌ی B جدا کـرده ایـم.

اگر $NC = ۲$ و $NB = ۴$ ، طول AC را به دست آورید.



حل : با کمی دقت مشاهده می کنید که مثلث های MNC و ABC ، دو زاویه‌ی هـم انـدازه دارنـد و در نتیجه متشابه اند. از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم.

$$\frac{MC}{BC}=\frac{MN}{AB}=\frac{NC}{AC}$$

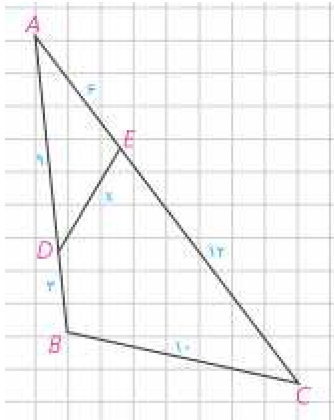
و چون $MC=\frac{AC}{۲}$ می توان نوشت:

$$\frac{AC}{۲BC}=\frac{NC}{AC}\to AC^{۲}=۲NC.BC=۲NC(NC+NB)$$

$$\to AC^{۲}=۲\times ۲(۲+۴)=۲۴\to AC=۲\sqrt{۶}$$

***

۷ : در شکل مقابل ، اندازه‌ی هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه‌ی x را به دست آورید.



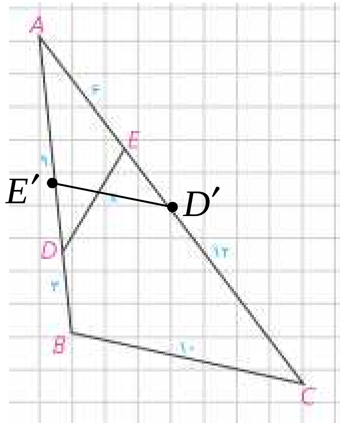
حل : ابتدا ثابت می کنیم که دو مثلث ADE و ABC متشابهند.

$$\left.\begin{array}{c}\frac{AE}{AB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\\ \angle A=\angle A\\ \frac{AD}{AC}=\frac{۹}{۱۸}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\to \Delta(ABC)\approx\Delta(ADE)\to\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

$$\to\frac{۶}{۱۲}=\frac{x}{۱۰}\to x=۵$$

۸ : در شکل تمرین قبل، اگر روی AC ، AD' را هم اندازه‌ی AD و روی AB، AE' را هم اندازه‌ی AE جدا کنیم. ثابت کنید که $D'E' \parallel BC$

حل :

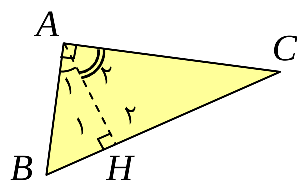


$$\Delta(ABC) \approx \Delta(ADE) \rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{AE'}{AB} = \frac{AD'}{AC} \rightarrow D'E' \parallel BC$$

***

اثبات قضیه‌ی فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه‌ی دیگر تبدیل می کند. این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابهند.



$$\left.\begin{array}{l} \Delta(ABH): \angle A_۱ + \angle B = ۹۰^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = ۹۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_۱ = \angle C \\ \angle H_۱ = \angle A = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ABC) \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta(ACH): \angle A_۲ + \angle C = ۹۰^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \angle A_۲ = \angle B$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_۲ = \angle B \\ \angle H_۲ = \angle A = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \Delta(ACH) \approx \Delta(ABC) \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \Delta(ABH) \approx \Delta(ACH)$$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

اثبات:

$$\Delta(ABH) \approx \Delta(ACH) \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \rightarrow AH^۲ = BH \times CH$$

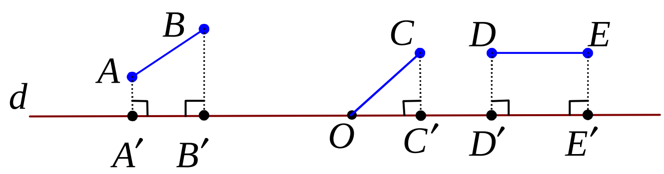
قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر، با حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث برابر است.

اثبات : کافی است مساحت مثلث قائم الزاویه را به دو شکل متفاوت محاسبه کنیم.

$$\left.\begin{aligned} S(ABC)&=\frac{۱}{۲}(AB)(AC)\\ S(ABC)&=\frac{۱}{۲}(AH)(BC)\end{aligned}\right\}\rightarrow \frac{۱}{۲}(AH)(BC)=\frac{۱}{۲}(AB)(AC)$$

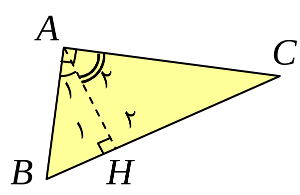
$$\rightarrow (AH)(BC)=(AB)(AC)$$

توجه : اگر AB پاره خط غیرمنطبق بر خط d باشد.تصویر پاره خط AB روی خط d پاره خطی است مانند $A'B'$ می‌باشد هرگاه $BB'\perp d$ و $AA'\perp d$ باشد.



قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازه‌ی هر ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب اندازه‌ی وتر در اندازه‌ی تصویر همان ضلع بر وتر برابر است.

اثبات :



$$\Delta(ABH)\approx\Delta(ABC)\rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AH}{AC}=\frac{BH}{AB}$$

$$\rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\rightarrow AB^{۲}=BC\times BH$$

$$\Delta(ACH)\approx\Delta(ABC)\rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}=\frac{AH}{AB}$$

$$\rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}\rightarrow AC^{۲}=BC\times CH$$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است (قضیه‌ی فیثاغورس).

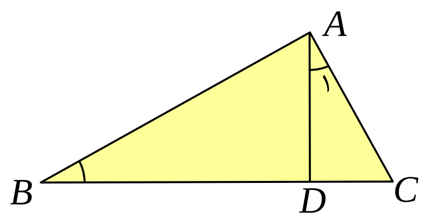
اثبات :

$$\left.\begin{aligned} AB^{۲} &= BC\times BH \\ AC^{۲} &= BC\times CH \end{aligned}\right\} \rightarrow AB^{۲}+AC^{۲}=BC\times BH+BC\times CH$$

$$\rightarrow AB^{۲}+AC^{۲}=BC(BH+CH)=BC\times BC=BC^{۲}$$

***

تمرین۹: در شکل روبرو $\angle A_{۱}=\angle B$ و $AC=۴$ و $BD=۶$. طول BC را به دست آورید.



حل : قرار می دهیم $BC=x$

$$\left.\begin{aligned} \angle A_{۱} &= \angle B \\ \angle C &= \angle C \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta(ADC)\approx\Delta(ABC)\rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{AC}$$

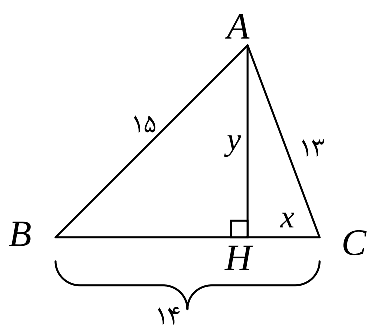
$$\rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AC}\rightarrow \frac{۴}{x}=\frac{x-۶}{۴}\rightarrow x^{۲}-۶x=۱۶\rightarrow x^{۲}-۶x-۱۶=۰$$

$$\rightarrow (x-۸)(x+۲)=۰\rightarrow x=۸\ ,\ x=-۲$$

جواب $x=-۲$ غیر قابل قبول است.

***

تمرین۱۰: در شکل روبرو، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث های ABH و ACH ، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



حل : واضح است که $BH=۱۴-x$

لذا می توان نوشت :

$$\Delta(ACH): x^۲ + y^۲ = ۱۳^۲ \to x^۲ + y^۲ = ۱۶۹ \quad (۱)$$

$$\Delta(ABH): (۱۴ - x)^۲ + y^۲ = ۱۵^۲ \to ۱۹۶ - ۲۸x + x^۲ + y^۲ = ۲۲۵ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۱۹۶ - ۲۸x + ۱۶۹ = ۲۲۵ \to -۲۸x = -۱۴۰ \to x = ۵$$

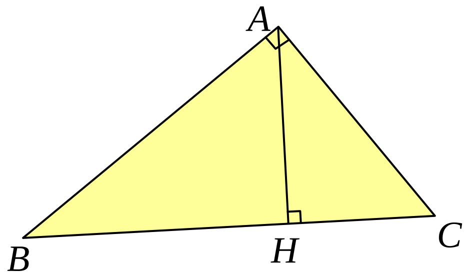
حال به کمک رابطه‌ی (۱) می توان مقدار y را نیز به دست آورد.

$$(۵)^۲ + y^۲ = ۱۶۹ \to ۲۵ + y^۲ = ۱۶۹ \to y^۲ = ۱۴۴ \to y = ۱۲$$

***

تمرین برای حل :

۱۱ : در مثلث قائم الزاویه زیر، در هر حالت، اندازه‌ی پاره خط خواسته شده را به دست آورید.



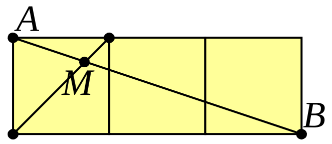
الف) $BC = ۱۰$ و $BH = ۹$ و $AH = ?$ و $AB = ?$ و $AC = ?$

ب) $AC = ۵$ و $CH = ۲$ و $BC = ?$ و $AH = ?$ و $AB = ?$

پ) $AB = ۸$ و $AC = ۶$ و $BC = ?$ و $AH = ?$

ت) $AB = ۱۲$ و $AH = ۶$ و $BH = ?$ و $BC = ?$ و $AC = ?$

۱۲ : در شکل مقابل سه مربع به اضلاع واحد کنار هم قرار دارند. اندازه‌ی پاره خط MA را به دست آورید.



***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان باوی

www.mathtower.ir

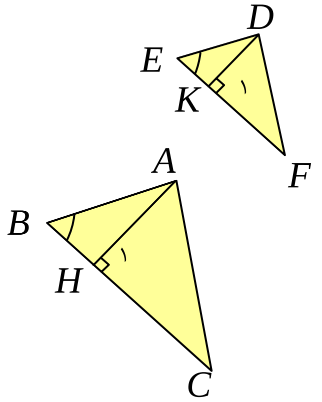
@mathameri

درس چهارم : کاربردهایی از قضیه ی تالس و تشابه مثلث ها

در این درس کاربرد هایی از قضیه‌ی تالس و تشابه دو مثلث را بیان می کنیم.

☑ قضایای پاره خطهای متناسب در دو مثلث متشابه

قضیه : نسبت ارتفاع‌های متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض: $\Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$ و $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}=k$

حکم : $\dfrac{AH}{DK}=k$

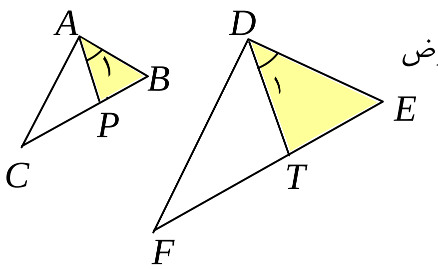
اثبات : چون دو مثلث ABC و DEF متشابهند، پس $\angle B=\angle E$

از طرفی $\angle H_۱ = \angle K_۱ = ۹۰^\circ$ لذا

$$\Delta(ABH) \sim \Delta(DEK) \Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{BH}{EK}=\frac{AH}{DK}$$

و چون $\dfrac{AB}{DE}=k$ پس $\dfrac{AH}{DK}=k$

قضیه : نسبت نیمسازهای متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض: $\Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$ و $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}=k$

حکم : $\dfrac{AP}{DT}=k$

اثبات : چون دو مثلث ABC و DEF متشابهند

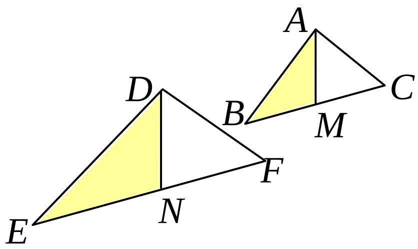
پس $\angle B=\angle E$ و $\angle A=\angle D$ از طرفی چون AP و DT

نیمساز هستند، لذا $\angle A_۱ = \angle D_۱$ در نتیجه :

$$\Delta(ABP) \sim \Delta(DET) \Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{AP}{DT}=\frac{BP}{ET}$$

و چون $\dfrac{AB}{DE}=k$ پس $\dfrac{AP}{DT}=k$

قضیه : نسبت میانه‌های متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض: $\Delta(ABC)\sim\Delta(DEF)$ و $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}=k$

حکم : $\frac{AM}{DN}=k$

اثبات : چون دو مثلث ABC و DEF متشابهند،

پس $\angle B=\angle E$ و $\frac{AB}{DE}=k$ و $\frac{BC}{EF}=k$ از طرفی چون $BC=۲BM$ و $EF=۲EN$ پس:

$$\frac{BC}{EF}=\frac{۲BM}{۲EN}=\frac{BM}{EN}=k$$

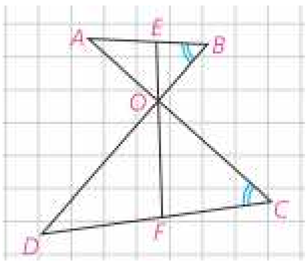
و در نتیجه $\Delta(ABM)\sim\Delta(DEN)$ در نتیجه

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE}=\frac{BM}{EN}=\frac{AM}{DN}$$

و چون $\frac{AB}{DE}=k$ لذا $\frac{AM}{DN}=k$

***

تمرین برای حل :



۱ : در شکل مقابل، $\angle B=\angle C$

الف: چرا دو مثلث OAB و OCD متشابه اند؟

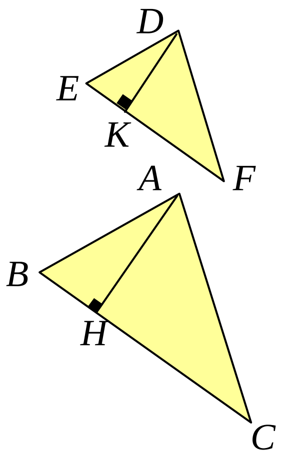
ب : اگر $\frac{OB}{OC}=\frac{۲}{۳}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

ج : اگر $EF=۱۰\ cm$ نیمساز دو زاویه‌ی متقابل به رأس O است. طول هـای OE و OF را بـه دسـت آورید.

***

☑ قضایای محیط و مساحت مثلث های متشابه

قضیه : نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با توان دوّم نسبت تشابه آنها برابر است.



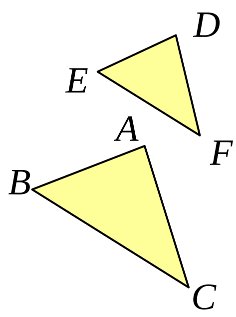
فرض : $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ و $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=k$

حکم : $\frac{S_{\Delta(ABC)}}{S_{\Delta(DEF)}}=k^۲$

اثبات : با توجه به قضیه‌ی قبل داریم :

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEF}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BC.AH}{\frac{۱}{۲}EF.DK}=\frac{BC}{EF}\cdot\frac{AH}{DK}=k.k=k^۲$$

قضیه : نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آنها برابر است.



فرض : $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF}$ و $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=k$

حکم : $\frac{P_{\Delta(ABC)}}{P_{\Delta(DEF)}}=k$

اثبات : با توجه به خواص تناسب داریم :

$$\frac{P_{\overset{\Delta}{ABC}}}{P_{\overset{\Delta}{DEF}}}=\frac{AB+BC+AC}{DE+EF+DF}=\frac{k(DE)+k(EF)+k(DF)}{DE+EF+DF}$$

$$=\frac{k(DE+EF+DF)}{(DE+EF+DF)}=k$$

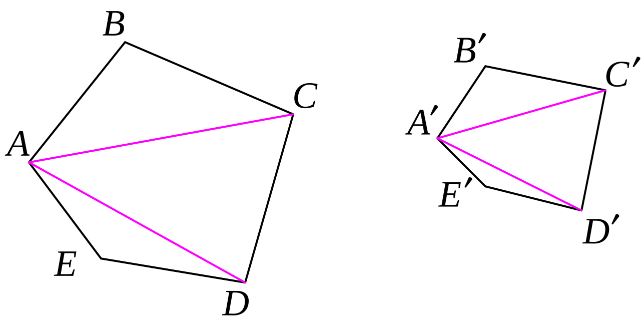
***

تعمیم قضیه های مساحت و محیط دو چند ضلعی متشابه

قضیه های مساحت و محیط دو مثلث متشابه را می توان برای هر دو چند ضلعی متشابه، نیز تعمیم داد. به قضیه های زیر توجه کنید.

قضیه : نسبت مساحت‌های دو چند ضلعی متشابه با توان دوّم نسبت تشابه آنها برابر است.

اثبات : با رسم قطرهای گذرنده از یک رأس در چند ضلعی، می توان آن را به چند مثلث تقسیم کرد. حال اگر قطرهای گذرنده از رأس متناظر در چند ضلعی دیگر را رسم کنیم. تمامی مثلث بدست آمده در هر دو چهارضلعی، نظیر به نظیر متشابهند. لذا با توجه به نسبت مساحت های مثلث ها می توان نتیجه گرفت که نسبت مساحت های چند ضلعی ها با توان دوّم نسبت تشابه آنها برابر است.



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^{۲}=k^{۲} \\ \dfrac{S_{ACD}}{S_{A'C'D'}}=\left(\dfrac{CD}{C'D'}\right)^{۲}=k^{۲} \\ \dfrac{S_{ADE}}{S_{A'D'E'}}=\left(\dfrac{ED}{E'D'}\right)^{۲}=k^{۲} \end{array}\right\}\rightarrow\dfrac{S_{ABC}+S_{ACD}+S_{ADE}}{S_{A'B'C'}+S_{A'C'D'}+S_{A'D'E'}}=k^{۲}$$

$$\rightarrow\frac{S_{ABCDE}}{S_{A'B'C'D'E'}}=k^{۲}$$

قضیه : نسبت محیط‌های دو چند ضلعی متشابه با نسبت تشابه آنها برابر است.

اثبات : از متشابه بودن چند ضلعی ها می توان نوشت :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{ED}{E'D'}=\frac{AE}{A'E'}=k$$

$$\rightarrow \frac{AB+BC+CD+ED+AE}{A'B'+B'C'+C'D'+E'D'+A'E'}=k$$

$$\rightarrow \frac{P_{ABCDE}}{P_{A'B'C'D'E'}}=k$$

***

تمرین برای حل :

۲ : نسبت اضلاع متناظر از دو مثلث متشابه برابر $\frac{۵}{۶}$ می‌باشد.

الف : اگر اندازه‌ی یک ضلع از مثلث کوچک ۷/۵ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی ضلع متناظر آن را از مثلث بزرگتر به دست آورید.

ب : اگر اندازه‌ی یک ضلع از مثلث بزرگ۱۲ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی ضلع متناظر آن را از مثلث کوچکتر به دست آورید.

ج : اگر اندازه‌ی ضلع یکی از این دو مثلث۶۰ سانتی متر باشد، اندازه‌ی ضلع متناظر آن را از مثلث دیگر را به دست آورید.

د : نسبت میانه‌ها، ارتفاع ها و نیمسازهای متناظر از این دو مثلث را بنویسید.

هـ : نسبت مساحت‌ها و محیط‌های این دو مثلث را بنویسید.

۳ : نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{۸۱}{۲۵}$ است، نسبت محیط‌های این دو مثلث را پیدا کنید.

۴ : طول های اضلاع یک مثلث ۹ و ۱۲ و ۱۵ سانتی متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن ، ۱۰ سانتی متر است. محیط مثلث دوّم را به دست آورید.

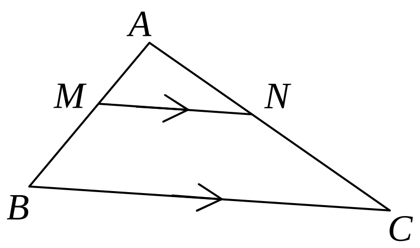
۵ : مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند. اگر طول ضلع‌های مثلث ABC برابر ۵ و ۸ و۱۱ سانتی‌متر و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر۶۰ سانتی‌متر باشد. طول ضلع‌های مثلث $A'B'C'$ را به دست آورید.

۶ : دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های مثلث ABC و $A'B'C'$ برابر $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد اگر اضلاع مثلث ABC برابر ۶ و ۸ و۱۰ باشد،

الف : طول اضلاع مثلث $A'B'C'$ را بیابید. ب : نسبت محیط‌های دو مثلث را به دست آورید.

۷ : اگر مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ با مثلثی دیگر به محیط ۱۸ متشابه باشد. مساحت مثلث دوّم را بدست آورید.

۸ : در شکل روبرو $MN \| BC$ است و مساحت ذوزنقه‌ی $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.



حل : با توجه به صورت مسئله می توان نوشت :

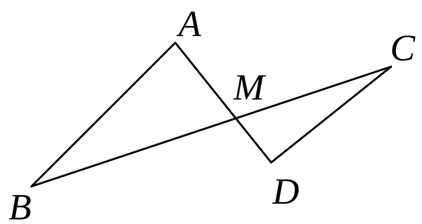
$$\frac{S_{MNCB}}{S_{ABC}} = ۸$$

$$\rightarrow \frac{S_{MNCB} + S_{AMN}}{S_{AMN}} = \frac{۸+۱}{۱} \rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = ۹ \rightarrow k^{۲} = ۹ \rightarrow k = ۳$$

از طرفی :

$$\frac{AB}{AM} = ۳ \rightarrow \frac{AB - AM}{AM} = \frac{۳-۱}{۱} \rightarrow \frac{MB}{AM} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

۹ : در شکل مقابل $AB \| CD$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{۳}{۵}$. نسبت مساحت های دو مثلث را به دست آورید.



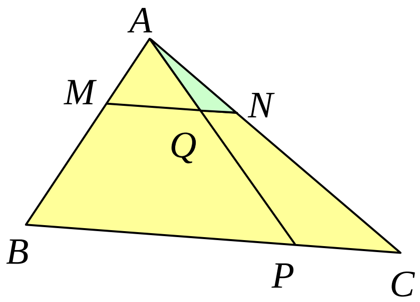
۱۰ : اندازه های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می کنیم. بدون اینکه زاویه ها را تغییر دهیم، مساحت هفت ضلعی چند برابر می شود. چرا؟

***

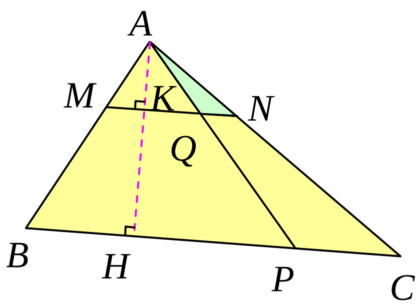
حل چند تمرین :

۱: در مثلث ABC ، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}$ است. تعیین کنید

که $S(AQN)$ و $S(MQPB)$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



حل : ارتفاع AH را رسم می کنیم.



با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۲}\rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{۱}{۱+۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}\rightarrow\frac{PC}{PC+PB}=\frac{۱}{۱+۳}=\frac{۱}{۴}$$

از آنجا که $BC \parallel MN$ نتیجه می شود که :

$$\Delta(AMN)\approx\Delta(ABC)\rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۳}\quad(۱)\quad,\quad\frac{AK}{AH}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Delta(AQN)\approx\Delta(APC)\rightarrow\frac{AQ}{AP}=\frac{QN}{PC}=\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۳}\quad(۲)$$

$$\frac{S(AQN)}{A(ABC)}=\frac{\frac{۱}{۲}AK\times QN}{\frac{۱}{۲}AH\times BC}=\frac{AK}{AH}\times\frac{QN}{BC}\xrightarrow{\frac{AK}{AH}=\frac{۱}{۳}}\frac{S(AQN)}{A(ABC)}=\frac{۱}{۳}\times\frac{QN}{BC}$$

$$\xrightarrow{\frac{QN}{PC}=\frac{۱}{۳}} \frac{S(AQN)}{A(ABC)}=\frac{۱}{۳}\times\frac{\frac{۱}{۳}PC}{BC}=\frac{۱}{۹}\times\frac{PC}{BC}$$

$$\xrightarrow{\frac{PC}{BC}=\frac{۱}{۴}} \frac{S(AQN)}{A(ABC)}=\frac{۱}{۹}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۳۶}$$

$$\frac{MQ}{MN}=\frac{۳}{۴}\to MQ=\frac{۳}{۴}MN \xrightarrow{\frac{MN}{BC}=\frac{۱}{۳}} MQ=\frac{۳}{۴}(\frac{۱}{۳}BC)=\frac{۱}{۴}BC$$

با توجه به شکل می توان نوشت:

$$S(MQPB)=A(ABP)-S(AMQ)$$

$$S(ABP)=\frac{۱}{۲}(BP\times AH)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}BC\times AH=\frac{۳}{۴}S(ABC)$$

$$S(AMQ)=\frac{۱}{۲}MQ\times AK=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۴}BC\times\frac{۱}{۳}AH)=\frac{۱}{۱۲}(\frac{۱}{۲}BC\times AH)=\frac{۱}{۱۲}S(ABC)$$

در نهایت نتیجه می شود:

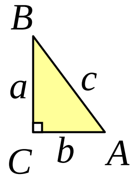
$$S(MQPB)=\frac{۳}{۴}S(ABC)-\frac{۱}{۱۲}S(ABC)=\frac{۸}{۱۲}S(ABC)$$

$$\to\frac{S(MQPB)}{S(ABC)}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

***

۲: سه چند ضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم الزاویه می سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت های ساخته شده روی ضلع های زاویه‌ی قائمه است.

حل :



با توجه به مثلث قائم الزاویه‌ی روبرو داریم:

$$a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}\xrightarrow{\div c^{۲}}\frac{a^{۲}}{c^{۲}}+\frac{b^{۲}}{c^{۲}}=۱\quad (*)$$

چند ضلعی ساخته شده روی ضلع c با چند ضلعی ساخته شده روی ضلع a متشابه است و نسبت تشابه آنها $\frac{a}{c}$ است. لذا

$$\frac{S_a}{S_c}=(\frac{a}{c})^{۲}=\frac{a^{۲}}{c^{۲}}$$

چند ضلعی ساخته شده روی ضلع c با چند ضلعی ساخته شده روی ضلع b متشابه است و نسبت تشابه آنها $\frac{b}{c}$ است. لذا

$$\frac{S_b}{S_c}=(\frac{b}{c})^{۲}=\frac{b^{۲}}{c^{۲}}$$

اکنون با توجه به رابطه‌ی (*) می توان نوشت:

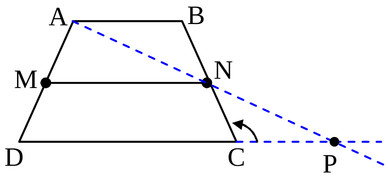
$$\frac{S_a}{S_c}+\frac{S_b}{S_c}=۱\xrightarrow{\times S_c}S_a+S_b=S_c$$

***

جهت مطالعه :

قضیه : پاره‌خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به هم وصل کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع آنها است.

$$MN \| AB \| DC \quad \text{و} \quad MN = \frac{AB+DC}{۲} : \text{حکم}$$



اثبات : نقطه ی A را به نقطه ی N وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا خط AN امتداد قاعده ی CD را در نقطه ی P قطع کند. در این صورت مثلث‌های ABN و PCN به حالت (زض‌ز) همنهشت هستند لذا $AN = NP$ و $AB = PC$

بنابراین MN پاره‌خطی است که وسطهای دو ضلع AD و AP از مثلث ADP را به هم وصل می‌کند

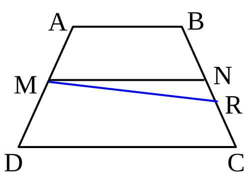
پس : $MN \| DP$

و چون $AB \| DP$ پس $MN \| AB \| DC$

همچنین

$$MN = \frac{DP}{۲} = \frac{PC+DC}{۲} \xrightarrow{AB=PC} MN = \frac{AB+DC}{۲}$$

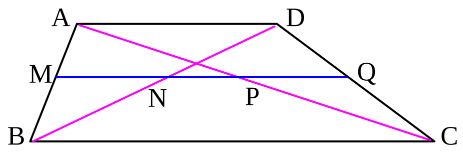
قضیه : خطی که از وسط یک ساق ذوزنقه موازی دو قاعده رسم می‌شود از وسط ساق دیگر می‌گذرد و جزئی از آن که در داخل ذوزنقه می‌افتد نصف مجموع دو قاعده است.



اثبات (به روش برهان خلف) : گیریم که N وسط BC نباشد، نقطه ی M را به R وسط BC وصل می‌کنیم پس $MR \| DC$ از طرفی $MN \| DC$ پس باید MR بر MN منطبق باشد در این صورت نقطه ی R بر نقطه ی N منطبق خواهد بود پس نقطه ی N وسط BC است.

لذا $$MN = \frac{AB+CD}{۲}$$

تمرین : ثابت کنید که دو قطر ذوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود، پاره‌خطی جدا می‌کنند که اندازه‌ی آن مساوی نصف تفاضل دو قاعده است.



حکم : $NP = \dfrac{BC - AD}{۲}$

حل : با توجه به قضیه‌های قبل داریم

$$\overset{\Delta}{ABC}:(AM = MB \text{ و } MP \parallel BC) \rightarrow MP = \frac{BC}{۲} \text{ و } AP = PC \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ACD}:(AP = PC \text{ و } PQ \parallel AD) \rightarrow PQ = \frac{AD}{۲} \quad (۲)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD}:(MA = MB \text{ و } MN \parallel AD) \rightarrow MN = \dfrac{AD}{۲} \\ \overset{\Delta}{ADC}:(PA = PC \text{ و } PQ \parallel AD) \rightarrow PQ = \dfrac{AD}{۲} \end{array}\right\} \rightarrow PQ = MN \quad (۳)$$

حال با توجه به روابط (۳) و (۲) و (۱) داریم :

$$NP = MP - MN \rightarrow NP = MP - PQ$$

$$\Rightarrow \; NP = \frac{BC}{۲} - \frac{AD}{۲} = \frac{BC - AD}{۲}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri