فصل

قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب

نسبت: اگر a و b از یک جنس باشند (یعنی واحد اندازه‌گیری آن‌ها یکی باشد) آن‌گاه به $\frac{a}{b}$ یک نسبت می‌گوییم.

واضح است که در نسبت $\frac{a}{b}$ همواره $b \neq 0$ می‌باشد. مثلاً در شکل مقابل نسبت $\frac{AB}{BC}$ برابر $\frac{3}{5} = 0/6$ است.

تناسب: تساوی میان دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را با شرط $b, d \neq 0$ یک تناسب می‌گوییم. در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ به a و d طرفین و به c و b وسطین گفته می‌شود، زیرا:

وسطین

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \div b = c \div d$$

طرفین

ویژگی‌های تناسب

به کمک روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت:

① در هر تناسب، حاصل‌ضرب طرفین با حاصل‌ضرب وسطین برابر است:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc}$$

۴) اگر با تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ هر کاری کنیم که تساوی حاصل‌ضرب طرفین با حاصل‌ضرب وسطین یعنی $ad=bc$ به هم نریزد آن کار مجاز است. این کارهای مجاز عبارتند از:

- طرفین تناسب را می‌توان معکوس کرد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

- جای طرفین را با هم و جای وسطین را با هم می‌توان عوض کرد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

- ترکیب و تفضیل در صورت یا مخرج تناسب امکان‌پذیر است:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$

- در هر تناسب می‌توان صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع و تفریق کرد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$$

دقت کنید ویژگی فوق را می‌توان تعمیم داد:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=k\Rightarrow\frac{a_1+a_2+\cdots}{b_1+b_2+\cdots}=k$$

نکته: به‌طور کلی اگر در یک تناسب، هر کاری که روی صورت‌ها انجام می‌دهیم، همان کار را در مخرج‌ها نیز انجام دهیم، نسبت حاصل با نسبت‌های قبلی برابر است:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ax\pm cy}{bx\pm dy}$$

واسطهٔ هندسی

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد، مانند تناسب‌های $\frac{x}{c}=\frac{a}{x}$ یا $\frac{c}{x}=\frac{x}{a}$، با طرفین وسطین کردن تناسب به تساوی $x^2=ac$ می‌رسیم که در این صورت x را واسطهٔ هندسی a و c می‌گوییم.

مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۱۶ داشته باشیم، پاره‌خطی به طول ۸ واسطهٔ هندسی بین آن‌ها است، زیرا $16\times 4=8^2$ می‌باشد.

۱۱- اگر $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}=\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $x+2y+3z$ کدام است؟

۱) ۱۵/۶ ۲) ۱۶/۵ ۳) ۱۴/۶ ۴) ۱۶/۴

۲- اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲۴-a}{۱۸-b}$ باشد، حاصل $\frac{a-b}{a+b}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

۳- اگر $\frac{۲}{۳}=\frac{a}{b}$ باشد، $\frac{۲a+۲b}{a+۲b}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۵}{۴}$

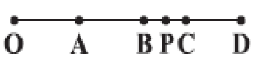
۴- از تناسب‌های $\frac{۱}{۴}=\frac{۲(c-۲b)}{۷}=\frac{۳b-c}{۶}=\frac{a+۲b}{۳}$، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۳/۷۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۳/۲۵

۵- نقطه‌های P و Q روی پاره‌خط AB و در یک طرف وسط AB قرار دارند. اگر $\frac{۲}{۳}=\frac{BP}{AP}$، $\frac{۳}{۴}=\frac{QB}{QA}$ و $PQ=۲$ باشد، طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۶۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

۶- در شکل مقابل $OA=۲$، $OB=۴$، $OC=۵$ و $OD=۷$ می‌باشد. نقطهٔ P بین B و C طوری قرار دارد که $\frac{BP}{PC}=\frac{AP}{PD}$، در این صورت طول OP کدام است؟

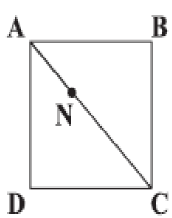


۱) ۴/۶ ۲) ۴/۲ ۳) ۴/۸ ۴) ۴/۵

۷- روی پاره‌خط $AB=۱۲$، دو نقطهٔ M و N را به قسمتی اختیار می‌کنیم که $۲=\frac{BN}{AN}=\frac{AM}{MB}$، در این صورت طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۸

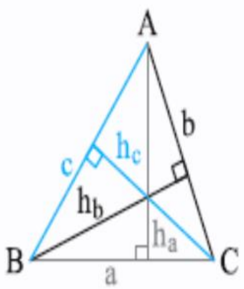
۸- در شکل مقابل، طول ضلع مربع ۶ و $\frac{۳}{۲}=\frac{NC}{AN}$ است. فاصلهٔ N از مرکز مربع کدام است؟



۱) $\frac{۶\sqrt{۲}}{۵}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $\frac{۱۲\sqrt{۲}}{۵}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۰}$

۹- اگر x واسطهٔ هندسی b و c باشد، کدام رابطه صحیح است؟

۱) $\frac{x+c}{x+b}=\frac{c}{x}$ ۲) $\frac{x-c}{x-b}=\frac{c}{x}$ ۳) $\frac{x+c}{x+b}=\frac{c}{b}$ ۴) $\frac{x-c}{x-b}=\frac{c}{b}$



رابطهٔ اضلاع و ارتفاع‌ها در مثلث

می‌دانیم مساحت هر مثلث از رابطهٔ «ارتفاع × قاعده × $\frac{1}{2}$» به‌دست می‌آید، یعنی:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c}$$

با تبدیل هر یک از برابری‌های فوق به یک تناسب، می‌توان گفت «در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آن‌ها برابر است.» مثلاً:

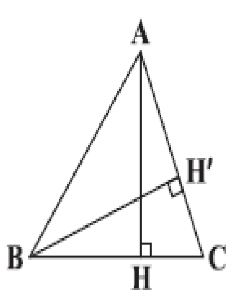
$$\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b \Rightarrow a.h_a=b.h_b \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}}$$

نتیجه: هر رابطهٔ هم‌درجه‌ای که بین اضلاع یک مثلث برقرار باشد (چه رابطهٔ مساوی، چه رابطهٔ نامساوی)، همان رابطه بین معکوس ارتفاع‌ها نیز برقرار است. مثلاً در یک مثلث قائم‌الزاویه که رابطهٔ $a^2=b^2+c^2$ در آن برقرار است، رابطهٔ $\frac{1}{h_a^2}=\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$ نیز در آن برقرار می‌باشد.

سوال:

۱۰- در مثلث ABC دو ارتفاع AH و BH' را رسم کرده‌ایم. نسبت $\frac{AH}{BH'}$ با کدام نسبت برابر است؟

۱) $\frac{AC}{BC}$ ۲) $(\frac{AC}{BC})^2$ ۳) $\frac{BC}{AC}$ ۴) $(\frac{BC}{AC})^2$



۱۱- در مثلث ABC با طول اضلاع $a=5$، $b=6$ و $c=9$، حاصل $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_c}{h_a}$ کدام است؟

۱) $\frac{78}{53}$ ۲) $\frac{45}{79}$

۳) $\frac{53}{78}$ ۴) $\frac{79}{45}$

۱۲- در مثلث ABC ، طول اضلاع $a=4$ ، $b=6$ و $c=8$ می‌باشد. حاصل $\frac{h_a^2}{h_b h_c}$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) $\frac{2}{3}$　　۴) ۴

۱۳- در مثلث ABC ، اگر $a<b<c$ باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $h_a<h_b<h_c$　　۲) $h_a>h_b>h_c$　　۳) $h_b>h_c>h_a$　　۴) $h_b>h_a>h_c$

۱۴- در مثلث ABC ، اگر $a=4$ ، $b=6$ و $h_c=h_a+h_b$ باشد، اندازهٔ ضلع c کدام است؟

۱) ۳/۲　　۲) ۳/۶　　۳) ۲/۸　　۴) ۲/۴

۱۵- در مثلثی اندازه‌های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع‌های وارد بر این دو ضلع، برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازهٔ ضلع سوم کدام است؟ تجربی خارج ۹۵

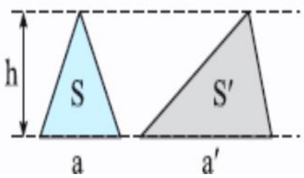
۱) ۶　　۲) ۷　　۳) ۷/۵　　۴) ۸

۱۶- در مثلث ABC ، اگر $h_a \times h_b=16$ باشد، مساحت مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{ab}$　　۲) $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$　　۳) $2\sqrt{ab}$　　۴) $4\sqrt{ab}$

مساحت مثلث‌های هم‌قاعده و هم‌ارتفاع

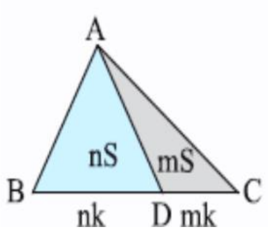
① با توجه به این‌که مساحت مثلث از رابطهٔ «ارتفاع × قاعده × $\frac{1}{2}$» به‌دست می‌آید، اگر ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد می‌شوند.



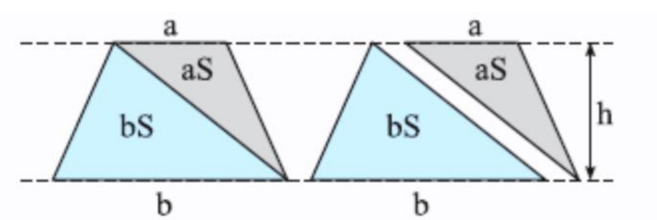
$$\frac{S}{S'}=\frac{a}{a'}$$

اثبات:

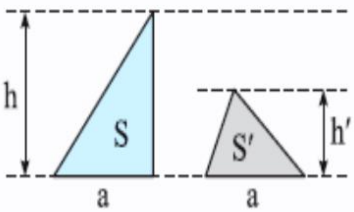
نتیجه: الف) اگر خطی از یک رأس مثلث طوری رسم شود که قاعده را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند، مساحت مثلث هم به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌شود.



ب) در ذوزنقه‌ها وقتی یک قطر رسم می‌شود، نسبت مساحت دو مثلث ایجاد شده برابر نسبت قاعده‌ها است.



۴) اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های وارد بر این قاعده‌ها است.

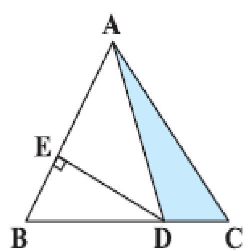


$$\boxed{\frac{S}{S'}=\frac{h}{h'}}$$

اثبات:

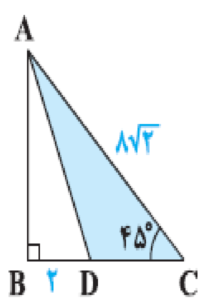
سوال:

۱۸- در شکل مقابل، $AB=8$ ، $DE=6$ و $2BD=3DC$ می‌باشد. مساحت قسمت رنگی کدام است؟



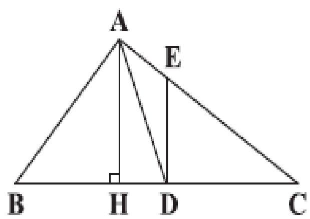
۱) ۱۸
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۲۰

۱۹- در شکل مقابل، مساحت ناحیهٔ رنگی کدام است؟



۱) ۱۸ ۲) ۲۴
۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۲۰- در شکل مقابل، $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{3}$ ، $CD=6$ و $AH=8$ می‌باشد. مساحت مثلث ADE کدام است؟



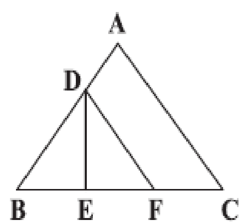
۱) ۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۹

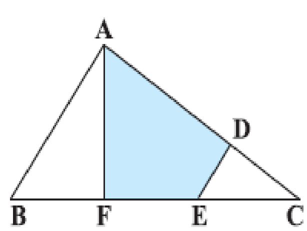
۲۱- در شکل مقابل، $BD=2AD$ و مساحت مثلث ABC برابر ۳۶ است. اگر $BE=EF=FC$ باشد، مساحت مثلث DEF کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۸

۳) ۱۲ ۴) ۹

۲۲- در شکل مقابل، $AD=2DC$ و $BF=FE=EC$ می‌باشد. اگر مساحت قسمت رنگی ۲۰ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟



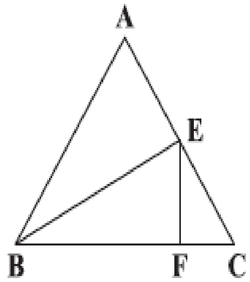
۱) ۶۰

۲) ۴۸

۳) ۴۰

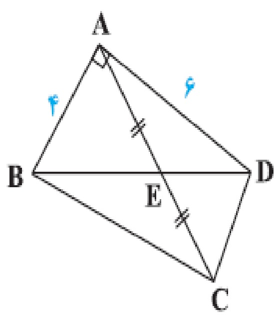
۴) ۳۶

۲۳- در شکل مقابل، E وسط ضلع AC و $BC = ۳CF$ می‌باشد. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۲ باشد، مساحت مثلث BEF کدام است؟



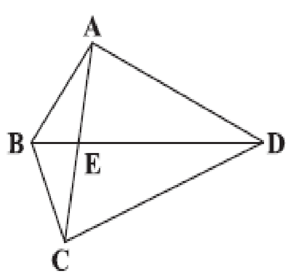
۱) ۱۴
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۱۶

۲۴- در شکل مقابل، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

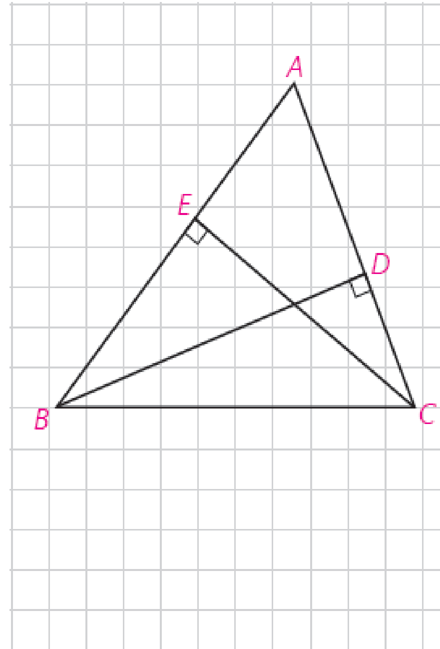


۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۲۷
۴) ۳۲

۲۵- در شکل مقابل، $ED = ۴BE$ می‌باشد. مساحت مثلث ABC چه کسری از مساحت چهارضلعی است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۲}{۷}$



فعالیت ۱

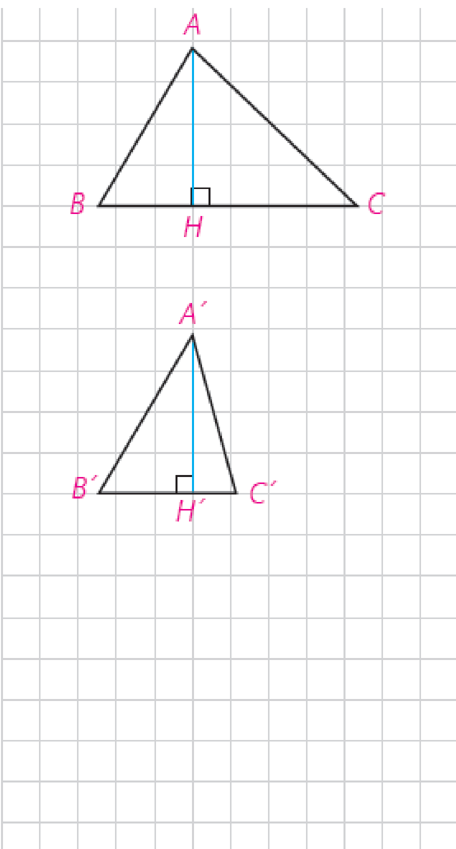
مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با درنظرگرفتن قاعدهٔ AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظرگرفتن قاعدهٔ AB بنویسید.

مساحت ABC $= \frac{۱}{۲} AC \times \ldots$

مساحت ABC $= \frac{۱}{۲} \ldots \times \ldots$

ـ عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین: $AC \times \ldots = \ldots \times \ldots$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟



فعالیت ۲

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A′H′ در دو مثلث ABC و A′B′C′ هم‌اندازه‌اند ($AH = A'H'$)

با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورید.

$S_{ABC} =$ مساحت ABC $= \frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots$

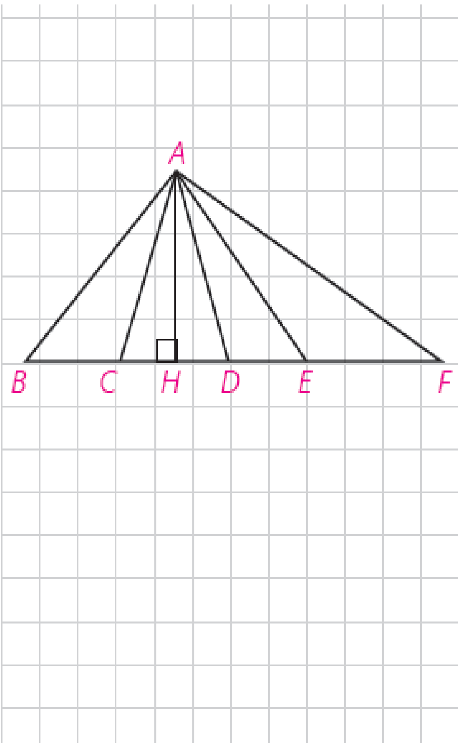
$S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots}{\frac{۱}{۲} \cdots \times \cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

نتیجه ۱

هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده‌است.

کاردرکلاس



در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همهٔ این مثلث‌ها کدام پاره‌خط است؟

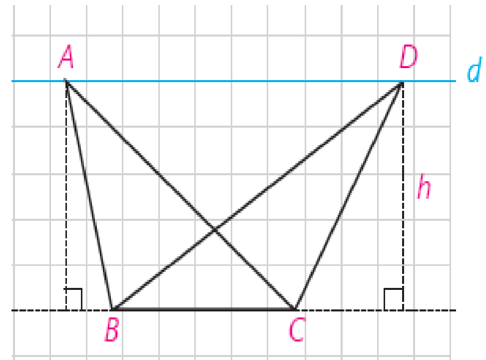
با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}}=\frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}}=\frac{\cdots}{\cdots} \qquad \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\cdots}{\cdots}$$

نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD}=\frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟

نتیجه ۳

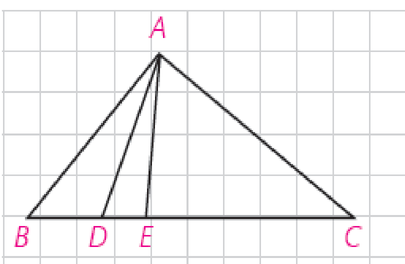
اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

تمرین

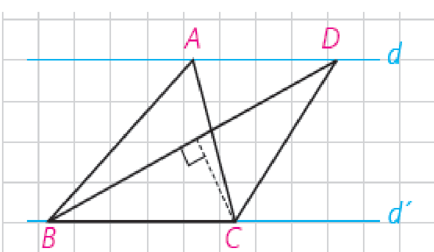
۱ــ اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ حاصل $x+y+z$ را به‌دست آورید.

۲ــ طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

۳ــ طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.



۴ــ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید.



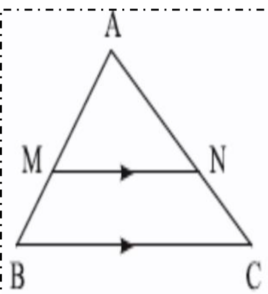
۵ــ در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $۸cm^۲$ است. اگر BD=۶cm باشد، فاصلهٔ نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید.

درس دوم

قضیهٔ تالس

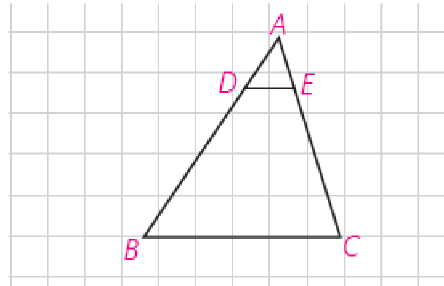
۱ـ قضیهٔ تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آن‌ها نسبت‌های مساوی پدید می‌آورند:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

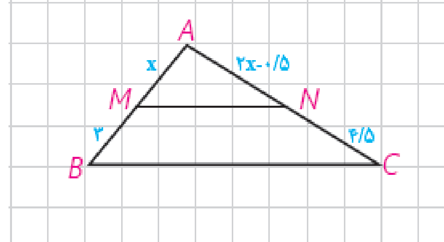


اثبات:

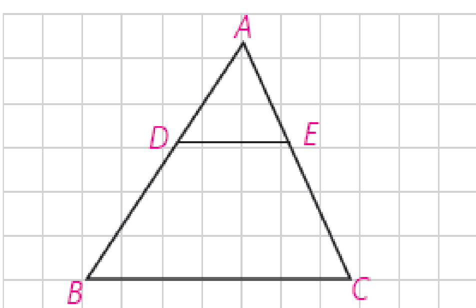
کاردرکلاس



۱ــ در شکل مقابل DE||BC و AD=۱ و DB=۳ و AE=۰/۸. به کمک قضیهٔ تالس طول AC را به‌دست آورید.



۲ــ در شکل مقابل MN||BC؛ به کمک قضیهٔ تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به‌دست آورید.



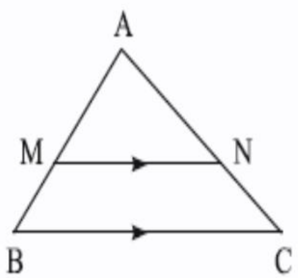
۳ــ در شکل مقابل DE||BC؛ تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطهٔ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطهٔ $\frac{DB}{AB}=\frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

نکته: به کمک خواص تناسب می‌توان قضیهٔ تالس را به‌صورت‌های زیر نیز بیان کرد:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow\boxed{\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{AM+MB}{MB}=\frac{AN+NC}{NC}\Rightarrow\frac{AB}{MB}=\frac{AC}{NC}\Rightarrow\boxed{\frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}}$$

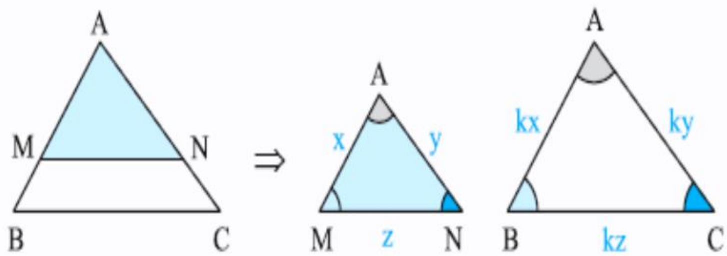
۲ـ تعمیم قضیهٔ تالس (تالس جزء به کل): اگر خطی موازی یک ضلع مثلث به‌گونه‌ای رسم شود که دو ضلع دیگر آن را قطع کند، آن‌گاه مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است. به‌طور کلی اگر طول پاره‌خط MN جزء داده‌ها یا خواسته‌های مسأله باشد، از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم:



$$\boxed{\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}}$$

اثبات:

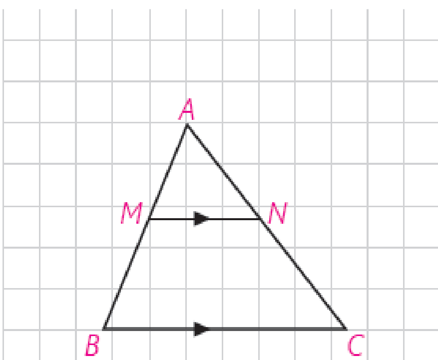
نتیجه: اضلاع مثلث AMN با اضلاع مثلث ABC نظیر به نظیر متناسب است و در ضمن زاویه‌های آن‌ها نیز برابر می‌باشد (دو مثلث متشابه‌اند).



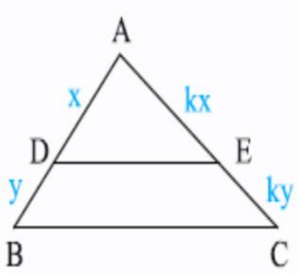
کاردرکلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \| BC$، طبق قضیهٔ تالس داریم : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیهٔ تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

$\dots\dots\dots \Rightarrow \dots\dots\dots$



۳ـ عکس قضیهٔ تالس: اگر در یک مثلث خطی دو ضلع مثلث را به گونه‌ای قطع کند که روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط با نسبت‌های مساوی پدید آورد، آن‌گاه آن خط، موازی ضلع سوم مثلث است.

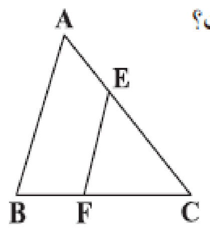


$$\boxed{\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \| BC}$$

اثبات:

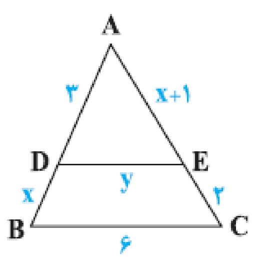
سوال:

۲۹- در شکل مقابل $AB \parallel FE$ ، $BF = m + ۱$ ، $AE = ۳m + ۱$ و $\frac{EC}{FC} = \frac{۵}{۳}$ می‌باشد. طول پاره‌خط AE کدام است؟



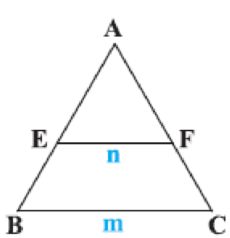
۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۳

۳۰- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ است. $x + y$ کدام است؟



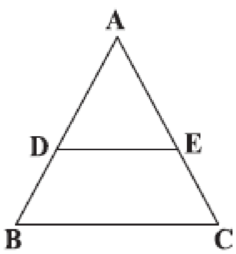
۱) ۵/۶
۲) ۶
۳) ۴/۶
۴) ۵

۳۱- در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ ، $AB = ۱۲$ ، $BC = m$ و $EF = n$ می‌باشد. اگر $۲m^۲ - mn - ۳n^۲ = ۰$ باشد، طول پاره‌خط AE کدام است؟



۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۶
۴) ۹

۳۲- در شکل مقابل، $BC \parallel DE$ ، $DE = ۳$ و $BC = ۴$ است. حاصل $\frac{AD + AE}{DB + EC}$ کدام است؟



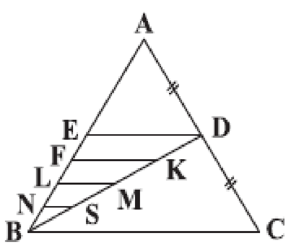
۱) ۳

۲) ۲

۳) $\frac{۲}{۵}$

۴) $\frac{۲}{۷}$

۳۳- در شکل مقابل، تمام پاره‌خط‌های افقی موازی قاعدهٔ BC می‌باشند. اگر $EF = FL = LN = NB$ ، $NS = ۲$ و D وسط ضلع AC باشد، طول ضلع BC کدام است؟



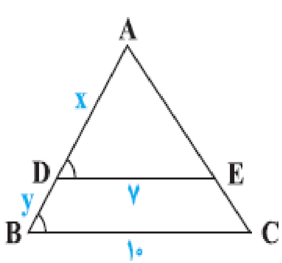
۱) ۸

۲) ۱۲

۳) ۱۶

۴) ۱۴

۳۴- در شکل مقابل، $\hat{B} = \hat{D}$ می‌باشد. حاصل $\frac{x}{y}$ کدام است؟



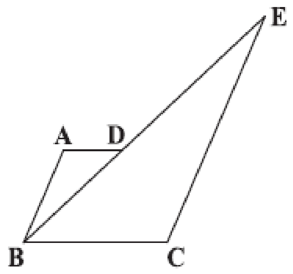
۱) $\frac{۷}{۱۰}$

۲) ۲

۳) $\frac{۷}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۷}$

۳۵- در شکل مقابل، $BC \parallel AD$ و $CE \parallel AB$ می‌باشد. اگر $AD = ۴$ ، $AB = ۶$ و $EC = ۱۵$ باشد، طول BC کدام است؟



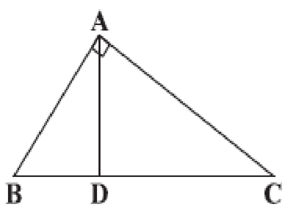
۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۷

۳۶- در شکل مقابل، $AD = ۴$ ، $BD = ۲$ و $DC = ۶$ می‌باشد. طول ضلع AC کدام است؟



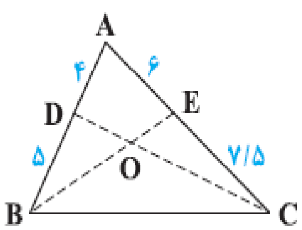
۱) ۶

۲) $۲\sqrt{۶}$

۳) $۴\sqrt{۲}$

۴) $۲\sqrt{۱۰}$

۳۸- در شکل مقابل، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟ تجربی خارج ۸۷



۱) $\frac{۲}{۳}$

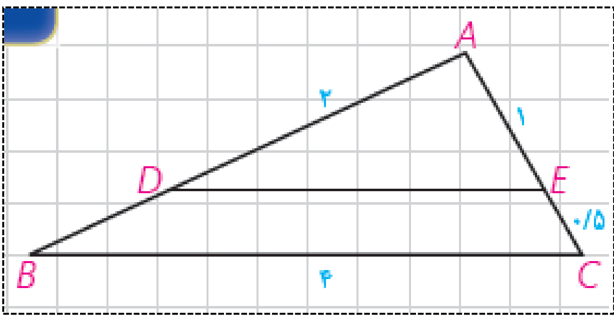
۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۵}{۶}$

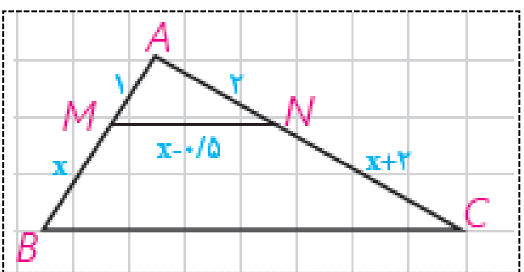
۴) ۱

تمرین

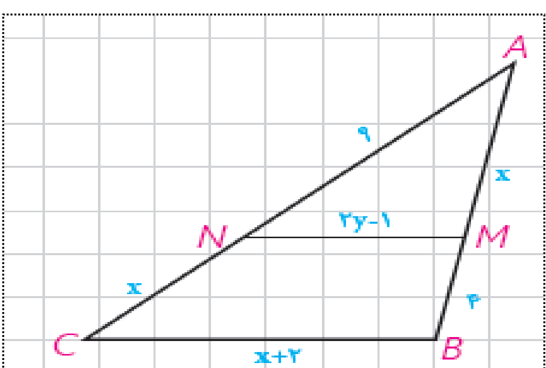
۱ــ در شکل مقابل DE||BC؛ با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.

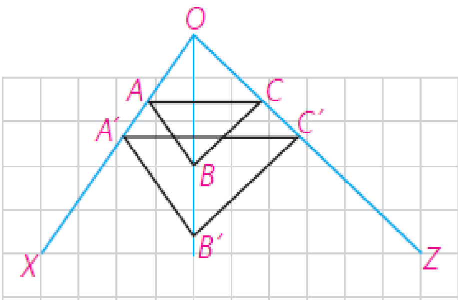


۲ــ در شکل مقابل، اگر MN||BC؛ مقدار x را به‌دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

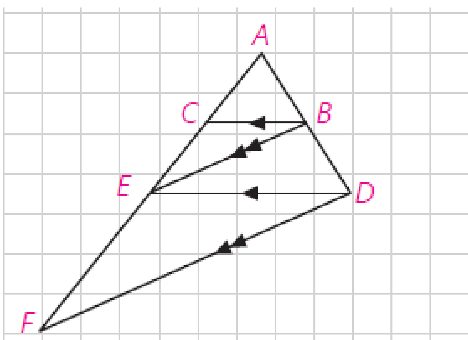


۳ــ در شکل مقابل MN||BC؛ مقادیر x و y را به‌دست آورید.

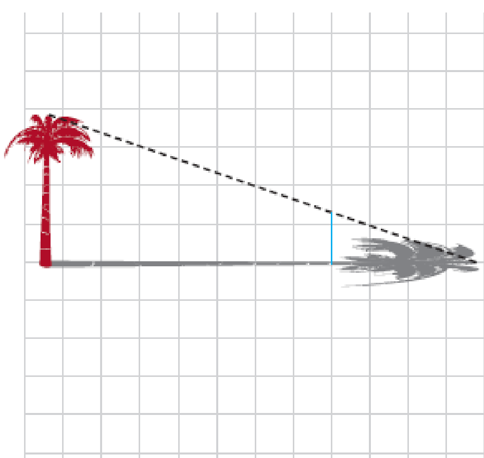




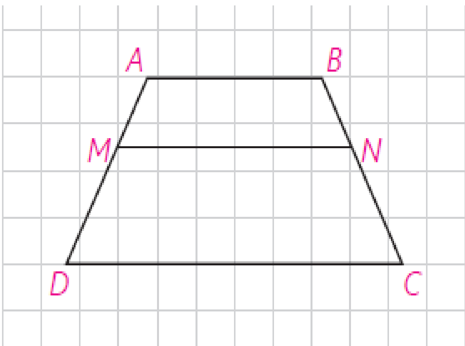
۴ــ در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید : $AC \parallel A'C'$



۵ــ در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$، به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید : $AE^{2}=AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



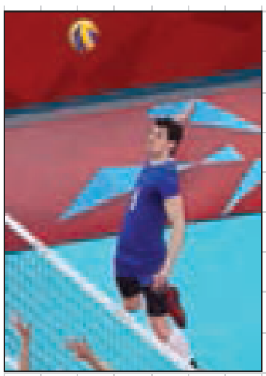
۶ــ یکی ازکاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود؛ به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟



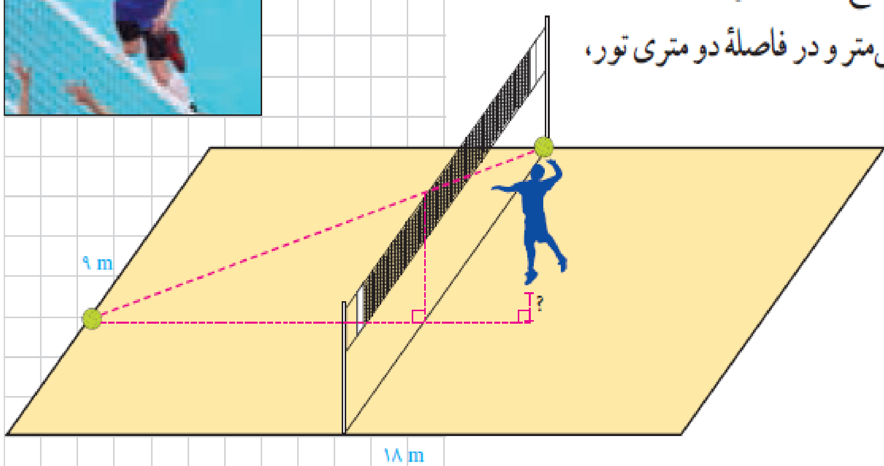
۷ــ در ذوزنقه مقابل $MN \| AB \| CD$ ، ثابت کنید :

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$ (قضیه تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



۸ــ ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹×۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصب شده‌است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده‌است؟



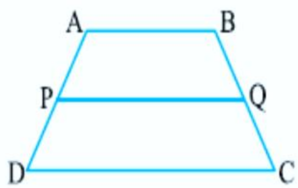
قضیهٔ میان خط در ذوزنقه

اگر وسط دو ساق یک ذوزنقه را به هم وصل کنیم، پاره‌خطی به دست می‌آید که با قاعده‌ها موازی است و طول آن برابر میانگین طول دو قاعده است.

اثبات:

مثال ثابت کنید دو قطر ذوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود، پاره‌خطی جدا می‌کنند که اندازهٔ آن مساوی نصف تفاضل اندازه‌های دو قاعده است.

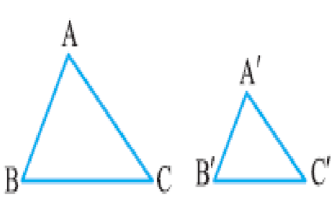
مثال در ذوزنقهٔ شکل روبه‌رو، پاره‌خط PQ موازی قاعده‌هاست. اگر $\frac{AP}{PD}=\frac{m}{n}$، نشان دهید $PQ=\frac{n.AB+m.CD}{m+n}$.



درس سوم

تشابه مثلث‌ها

شما خیلی خوب معنای تشابه مثلث‌ها را می‌دانید. دو مثلث متشابه دارای سه زاویهٔ دوبه‌دو برابر و اضلاعِ متناسب هستند.



$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}',\ \hat{B}=\hat{B}',\ \hat{C}=\hat{C}' \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

اثبات:

توجه 1:

ما سه حالت داریم که در آن‌ها دو مثلث متشابه‌اند. یعنی هر کدام از سه حالت تشابه که اتفاق بیفتد ما می‌توانیم دو مثلث را در شرایط قضیهٔ اساسی تشابه قرار دهیم. این سه حالت به صورت زیر هستند:

۱ حالت دو زاویهٔ برابر

۲ حالت سه ضلع متناسب

۳ حالت دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر

توجه 2:

وقتی دو مثلث متشابه می‌شوند، بین آن‌ها می‌توانیم یک تناسب بنویسیم که مقدار تناسب همان نسبت تشابه است. مثلاً اگر $\overset{\Delta}{A'B'C'} \sim \overset{\Delta}{ABC}$ باشد، تناسب $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ را داریم که عدد k و طبیعتاً $\frac{1}{k}$ نسبت تشابه دو مثلث است.

چند نکته

۱ اضلاع یک کسر در نسبت تشابه باید روبه‌روی زاویه‌های برابر باشند.

۲ در دو مثلث متشابه، نسبت هر دو جزء فرعی برابر k است. فقط باید دقت کنید که دو جزء فرعی باید متناظر هم باشند. مثلاً ارتفاع‌های AH و $A'H'$، نیمسازهای AD و $A'D'$، میانه‌های AM و $A'M'$ که معنایش تناسب $\frac{AH}{A'H'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{AM}{A'M'}=\cdots=k$ است.

۳ نسبت محیط دو مثلث متشابه k و نسبت مساحت آن‌ها برابر k^2 است.

مثال در مثلث ABC، نقاط M، N و P نقاط وسط سه ضلع مثلث هستند:

الف) نشان دهید $\overset{\Delta}{MNP} \sim \overset{\Delta}{ABC}$.

ب) نشان دهید محیط مثلث MNP، نصف محیط مثلث ABC و مساحت مثلث MNP، یک چهارم مساحت مثلث ABC است.

مثال یک نقطهٔ دلخواه داخل مثلثی با مساحت S در نظر بگیرید. از این نقطه خطوطی موازی اضلاع مثلث رسم می‌کنیم تا مثلث به شش ناحیه تقسیم شود. مساحت سه مثلث ایجادشده را S_1، S_2 و S_3 می‌نامیم. نشان دهید: $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$.

قضایای تشابه مثلث ها:

قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\hat{B}=\hat{B'},\hat{C}=\hat{C'}\Rightarrow \Delta ABC\sim \Delta A'B'C'\right)$$

اثبات:

قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A=\angle A',\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}\Rightarrow \Delta ABC\sim \Delta A'B'C'$$

اثبات:

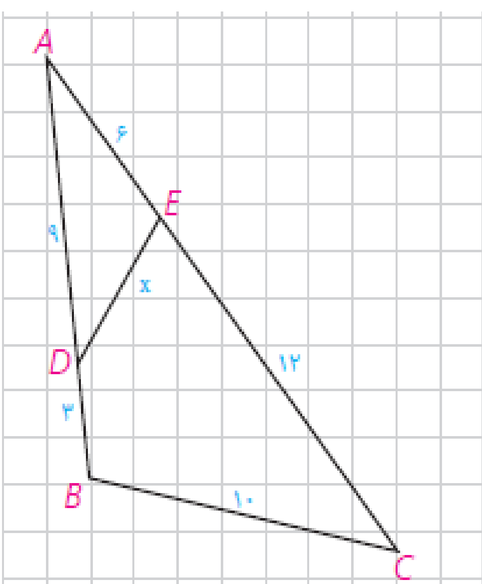
قضیهٔ ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات:

مثال : در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط AC، زاویهٔ NMC را مساوی زاویهٔ B جدا کرده‌ایم. اگر NC=۲ و NB=۴، طول AC را به دست آورید.

مثال : در شکل مقابل اندازهٔ هر پاره‌خط روی آن نوشته شده است. اندازهٔ x را به‌دست آورید.



اثبات قضیهٔ فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزاویه

سوال1:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

حل:

سوال2:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

۱) $AB^2=BC.BH$

۲) $AC^2=BC.CH$

۳) $AB^2+AC^2=BC^2$

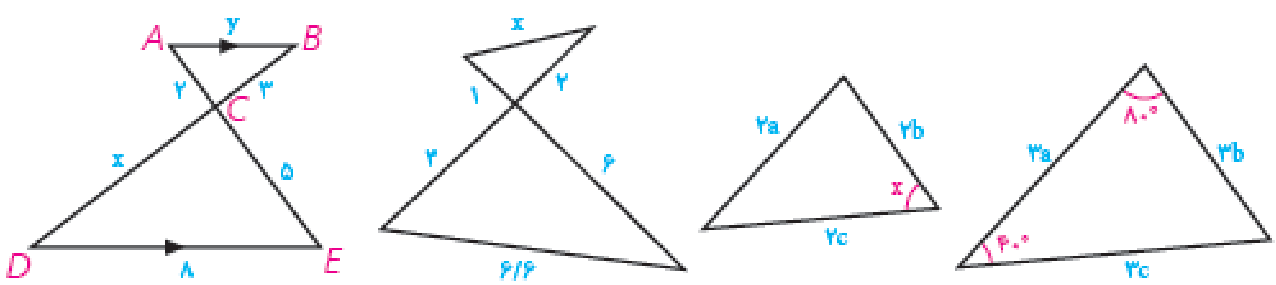
۴) $AH^2=BH.CH$

۵) $AH\times BC=AB\times AC$

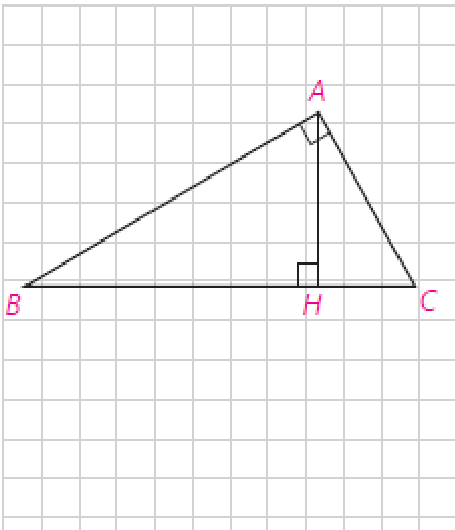
حل:

تمرین

۱ــ در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x , y را مشخص کنید :



۲ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



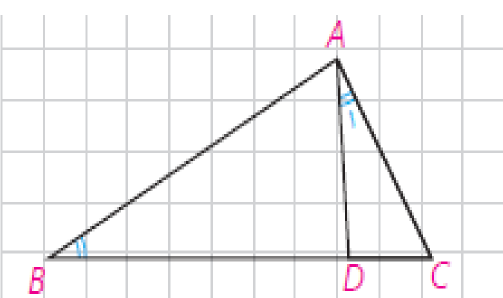
۱) BH=۹ , CH=۴ , AH=? , AB=? , AC=?

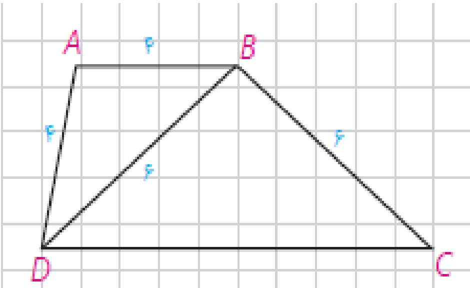
۲) AB=۱۰ , BC=۱۲ , AC=? , AH=?

۳) AB=۸ , AC=۶ , BH=? , CH=?

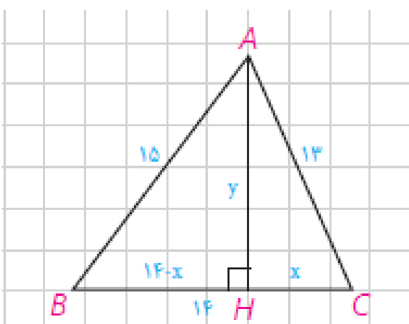
۴) AB=۸ , AH=۴ , BC=? , AC=?

۳ــ در شکل روبه‌رو $\angle A_1=\angle B$ و AC=۴ و BD=۶، طول BC را به‌دست آورید.

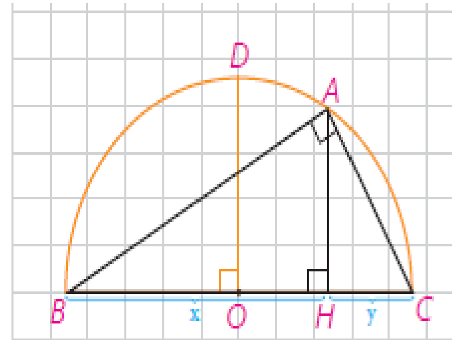




۴ــ در شکل روبه‌رو ABCD ذوزنقه است. طول قاعدهٔ CD را به‌دست آورید.



۵ــ در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



۷ــ در شکل مقابل نیم‌دایره‌ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطهٔ دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است.

الف) چرا زاویهٔ A قائمه است؟

ب) برای نقطهٔ A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است.
اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

AH $\square$ OD

پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟

۸ــ با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A'} = ۹۰^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$

۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازهٔ پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

۴) توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = ۹۰^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن‌را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- اگر $\frac{a_۱}{۱}=\frac{a_۲}{۲}=\cdots=\frac{a_n}{n}$، آن‌گاه حاصل $a_۱+a_۲+\cdots+a_n$ چند برابر $a_۱$ است؟

۱) n　　۲) $n(n+۱)$　　۳) $\frac{n(n+۱)}{۲}$　　۴) $۲n$

۲- اگر b واسطهٔ هندسی بین a و c باشد، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $\frac{a+b}{b+c}=\frac{a}{b}$　　۲) $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$　　۳) $\frac{b-c}{a-b}=\frac{b}{c}$　　۴) $\frac{b+c}{a+b}=\frac{c}{b}$

۳- اگر $\frac{a}{b}=\frac{۲c}{۳d}=k$، آن‌گاه حاصل $\frac{\sqrt{a^۴+۸a^۲c^۲+۱۶c^۴}}{b^۲+۹d^۲}$ کدام است؟

۱) k　　۲) $۲k$　　۳) $k^۲$　　۴) $۴k^۲$

۴- اگر $\frac{a}{۲b}=\frac{۳c}{d}=\frac{۳e}{۲f}=k>۰$، حاصل $\frac{\sqrt{a^۲+۹c^۲+۹e^۲}}{\sqrt{۴b^۲+d^۲+۴f^۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{k}$　　۲) k　　۳) $۲\sqrt{k}$　　۴) $۴k$

۵- اگر $AB=a$ و $\frac{MA}{MB}=k$ $(k>۱)$، طول پاره‌خط MB کدام است؟ (M بین A و B)

۱) $\frac{ka}{k+۱}$　　۲) $\frac{a}{k+۱}$　　۳) $\frac{a}{k-۱}$　　۴) $\frac{ka}{k-۱}$

۶- اگر $AB=a$ و $\frac{NA}{NB}=k$ $(k>۱)$، طول NA کدام است؟ (N روی امتداد AB)

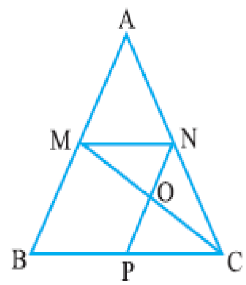
۱) $\frac{ka}{k+۱}$　　۲) $\frac{a}{k+۱}$　　۳) $\frac{a}{k-۱}$　　۴) $\frac{ka}{k-۱}$

۷- اگر $AB=a$ و N نقطه‌ای روی امتداد AB باشد به گونه‌ای که $\frac{NA}{NB}=k$ $(k<۱)$، طول NB کدام است؟

۱) $\frac{ka}{۱+k}$　　۲) $\frac{a}{۱+k}$　　۳) $\frac{a}{۱-k}$　　۴) $\frac{ka}{۱-k}$

۸- اگر MN و AB دو پاره‌خط باشند که روی یک خط قرار دارند، $\frac{NA}{NB}=\frac{MA}{MB}=k$ و طول پاره‌خط $AB=a$، آن‌گاه طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) $\frac{ak}{k^{۲}-۱}$ ۲) $\frac{۲ak}{k^{۲}-۱}$ ۳) $\frac{ak}{۱-k^{۲}}$ ۴) $\frac{۲ak}{|۱-k^{۲}|}$



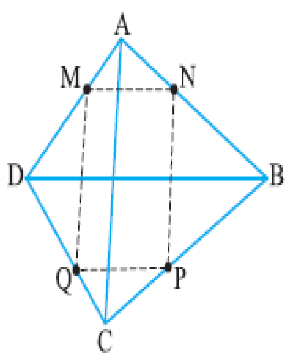
۹- در شکل مقابل، MNPB متوازی‌الاضلاع است. اگر مساحت مثلث OMN، ۶۰ درصد مساحت مثلث AMN باشد، نسبت PC به MN کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۰- وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی الزاماً رئوس کدام چهارضلعی هستند؟

۱) لوزی ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) مستطیل ۴) مربع



۱۱- در شکل مقابل، MNPQ یک لوزی است که اضلاع آن موازی قطرهای ABCD است. اگر $\frac{AM}{MD}=\frac{۳}{۵}$، نسبت قطرِ AC به BD کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۱۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^{\circ})$، مربعی چنان محاط کرده‌ایم که یک رأس آن روی وتر مثلث و یک رأس آن روی رأس A قرار دارد. اگر ضلع مربع x باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{AC}$ کدام است؟

۱) x ۲) $\frac{۱}{x}$ ۳) ۲x ۴) $\frac{۲}{x}$

۱۳- در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط ضلع BC، خطی به موازات نیمساز داخلی A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. اگر $AC=۹$ و $BE=۸$، طول CF کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

درس چهارم

کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها

۱ـ قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض : $\angle A_1 = \angle A_2$

حکم : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

اثبات:

مثال : در مثلث ABC ، $AB=7$ ، $AC=5$ و $BC=8$ طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

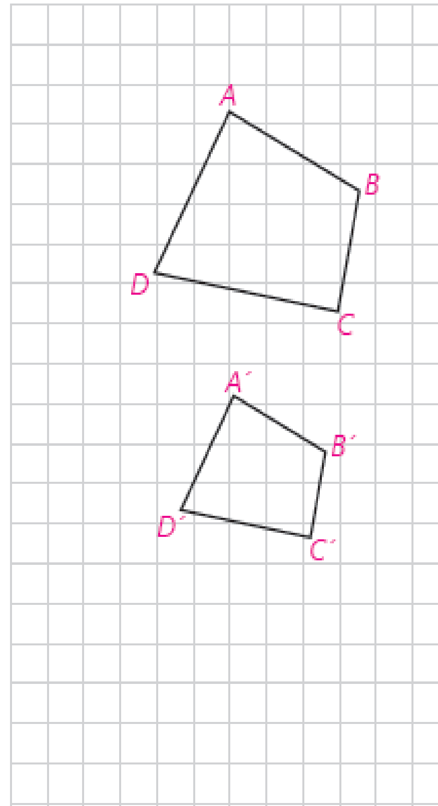
مثال اگر در مثلث ABC، AD و AD' به ترتیب نیمساز زوایای داخلی و خارجی A باشند، طول پاره‌خط‌های BD، CD، CD' و DD' را برحسب اضلاع مثلث بیابید.

پاسخ:

۲ــ نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

اثبات:



کاردرکلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱ــ اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

۲ــ قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید :

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳ــ جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \cdots , \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \cdots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \cdots \Rightarrow \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \cdots$$

توجه:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

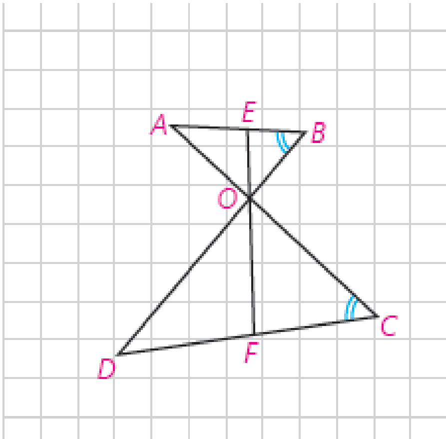
هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

کاردرکلاس

۱ــ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

۲ــ نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳ــ اندازه‌های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟



فعالیت

در شکل روبه‌رو $EF=10cm$ نیمساز دو زاویهٔ متقابل به رأس O است و $\angle B=\angle C$.

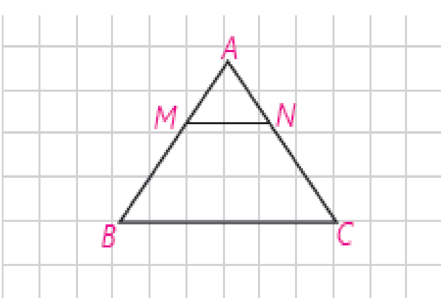
الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

ب) اگر $\frac{OB}{OC}=\frac{2}{3}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

ج) طول‌های OE و OF را به‌دست آورید.

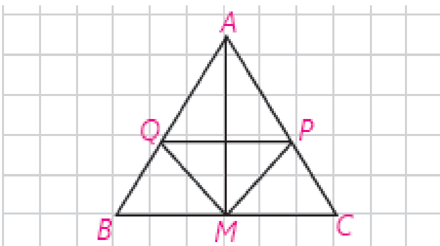
تمرین

۱ــ طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.



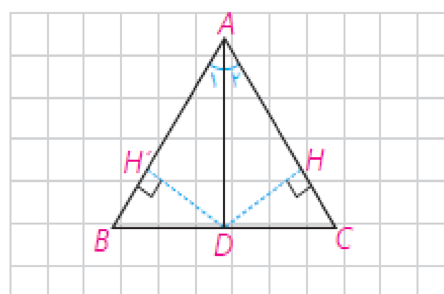
۲ــ در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقهٔ MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.

۳ــ در مثلث ABC ، AB=۷ و AC=۵ و BC=۱۰ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.



۴ــ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید :

PQ ∥ BC



۵ــ در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویهٔ A است و عمودهای DH و DH′ نیز رسم شده‌اند.

الف) با توجّه به نتیجهٔ (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.

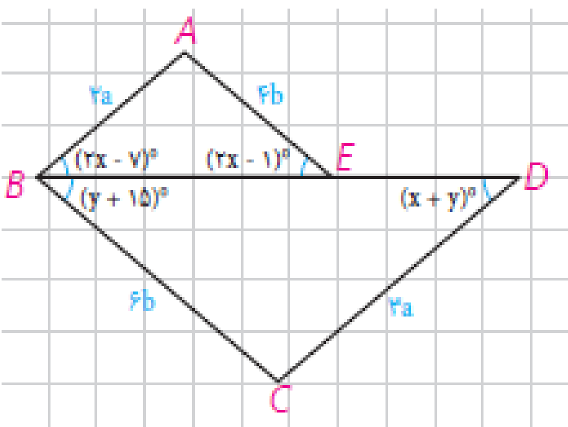
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

ب) چرا DH=DH′ ؟ با توجّه به این موضوع و نتیجهٔ (۱) از درس اوّل بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید :

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیهٔ نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

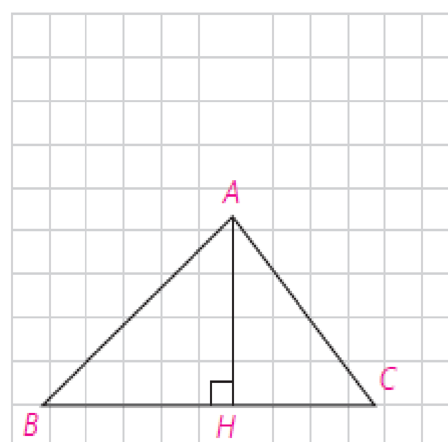
۶ــ در شکل روبه‌رو می‌دانیم BE=۲DE است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



۷ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجه به این موضوع،

الف) ثابت کنید :

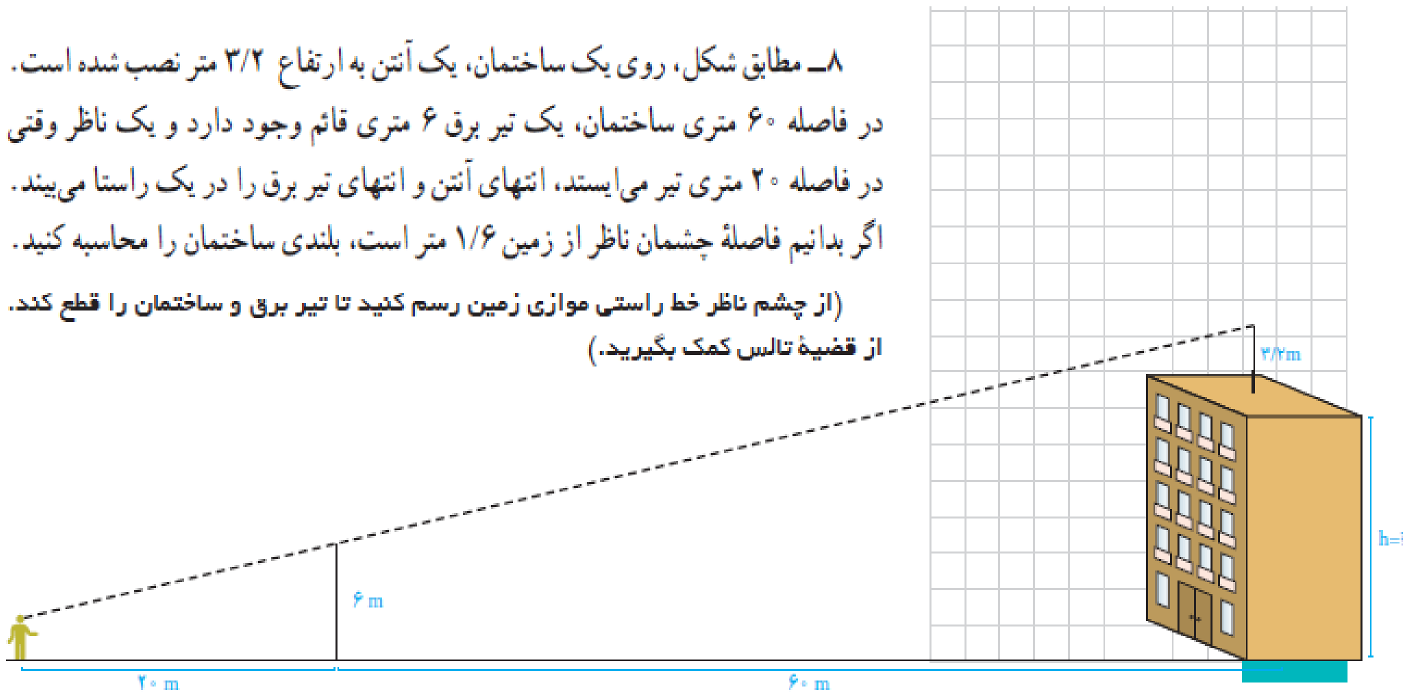
$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \quad , \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$



ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامهٔ کار، درستی قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

۸ــ مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بینند. اگر بدانیم فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیهٔ تالس کمک بگیرید.)



۱-جاهای خالی را کامل کنید . ۱

الف)مثالی که نشان می دهد ، یک حکم کلی نادرست است را .... می نامند .

ب)ارتفاع وارد بر وتر در هر مثلث قائم الزاویه ، آن را به دو مثلث .... تقسیم می کند .

ج)اگر نقطه ای روی .... یک پاره خط قرار داشته باشد ، آن نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است .

د)در هر مثلث اندازه ی زاویه ی خارجی از هر زاویه ی داخلی غیر مجاورش .... است .

۲-عکس قضیه ی زیر را نوشته و سپس آن را به صورت یک قضیه ی دو شرطی بنویسید . ۱

اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد ، قطرهایش همدیگر را نصف می کند .

۳-روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای خارجآن را توضیح دهید و شکل دقیق آن را رسم کنید . ۱/۵

۴-متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع هایش ۳ و ۵ سانتی متر و طول یک قطر آن ۶ سانتی متر می باشد . طریقه ی رسم را توضیح دهید . ۱/۵

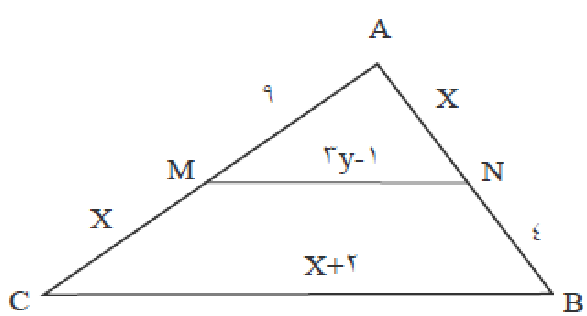
۵-طول های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی متر است . بلند ترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$ سانتی متر می باشد . طول های دو ارتفاع دیگر مثلث را بیابید . ۱/۵

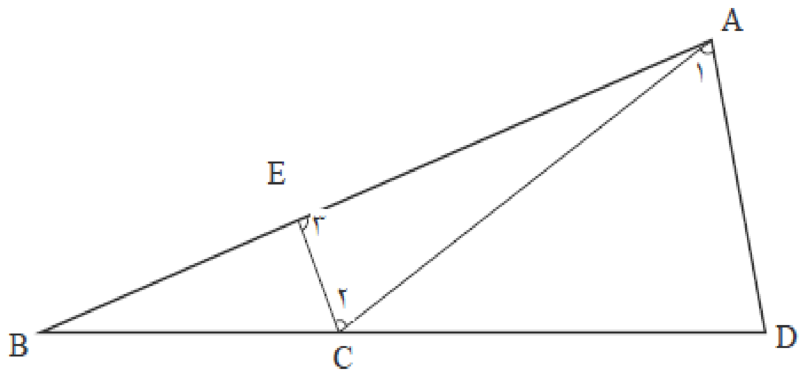
۶-به روش برهان خلف ثابت کنید . اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند ضلع مقابل به زاویه ی بزرگتر از ضلع مقابل به زاویه ی کوچکتر ، بزرگ تر است . ۱

۷-ثابت کنید ارتفاع های هر مثلث همرسند . ۱/۵

۸-اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ باشد حاصل $x+y+z$ را بیابید . ۱

۹-در شکل زیر MN ∥ BC ، مقادیر x و y را بیابید . ۱/۵



۱۰-در ذوزنقه ی ABCD ، $(BC \parallel AD)$ امتداد ساق ها یکدیگر را در نقطه ی O قطع می کنند از c خطی به موازات قطر BD رسم کرده تا امتداد AB را در E قطع کند . ثابت کنید :	۱/۵
۱۱- در شکل مقابل زوایای $\hat{۳} = \hat{۲} = \hat{۱}$ اگر AB=۱۵ و AC=۶ باشد $\frac{BD}{CD}$ را بیابید . 	۱
۱۲-قضیه : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابه اند .	۱/۵
۱۳-ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطه ی هندسی است بین دو قطعه ی ایجاد شده روی وتر .	۱/۵
۱۴-اندازه ی سه ضلعمثلثی ۱۶ و ۲۲ و ۱۹ سانتی متر هستند . اندازه ی پاره خط هایی که نیمساز درونی زاویه متوسط بر ضلع مقابل آن پدید می آورد را تعیین کنید .	۱/۵
۱۵-اندازه های اضلاع مثلثی ۶ و ۸ و ۱۰ می باشد . اگر این مثلث با مثلثی به محیط ۷۲ متشابه باشد آن گاه مساحت مثلث دوم را بیابید .	۱/۵

موفق باشید