

دیرستان
استعداد های ناب صالحین

ناحیه ۳ اهواز

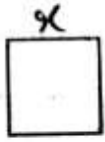
جزوه ی درس ریاضیات پایه نهم

فصل پنجم

عبارت‌های جبری

تعریف متغیر: نمادهایی هستند که برای بیان عددهای نامعلوم و یا مقادیر غیر مشخص به کار می روند

نکته: معمولاً متغیرها را با استفاده از حروف انگلیسی نمایش می دهند. به عنوان مثال اگر بخواهیم فرمولی برای محاسبه‌ی محیط یک مربع ارائه دهیم، می توانیم طول ضلع این مربع را با حرف x نمایش دهیم که x متغیر است، بنابراین:



$4x =$ محیط مربع \Rightarrow یک ضلع $x = 4x$ = محیط مربع

$4x =$ محیط یک مربع به ضلع x

تعریف عبارتهای جبری: هر عبارتی که شامل یک یا چند عدد و متغیر و عمل‌هایی مانند جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بین آنها باشد را عبارت جبری می نامند.

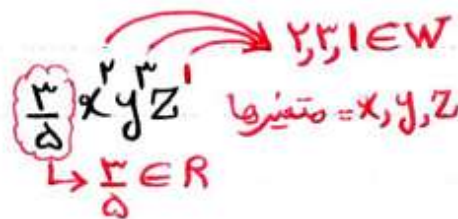
مثال: عبارتهای زیر جبری هستند

$a + 2b, \frac{x+y}{3}, 3x^2 - 5z, \frac{1}{3}xy^5, 15, x$

تعریف یک جمله ای: هر عبارتی را که به صورت حاصلضرب یک عدد حقیقی در توانهای صحیح و نامنتی یک یا چند متغیر باشد را یک جمله ای می گویند

... ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ = اعداد صحیح و نامنتی

مثال: عبارات زیر یک جمله ای هستند



مثال: عبارت مقابل یک جمله ای نیست.

$\frac{3}{5}x^2y^{-3}$

زیرا توان متغیرها باید صحیح و نامنتی باشد در صورتی که توان y منفی است (توان متغیرها باید عددی حسابی باشد)



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

شماره: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

صفحه

نکته‌ی مهم: هر یک جمله‌ای از دو قسمت تشکیل می‌شود.
الف) ضریب عددی ← همان عددی که در متغیرها ضرب می‌شود.
ب) قسمت حرفی ← همان متغیرها

مثال:

$$3x^2y^5 = 3 \times x^2y^5$$

متغیرها →
 ← ضریب

نکته‌ی مهم: هر عدد به تنهایی یک جمله‌ای محسوب می‌شود. مثلاً عدد ۷ یک جمله‌ای است زیرا می‌توانیم آن را به صورت مقابل بنویسیم.

$$7 = 7 \times x^0$$

البته می‌دانیم که x^0 برابر ۱ می‌باشد. و حاصل $7 \times x^0$ برابر همان ۷ می‌باشد. زیرا

$$7 \times x^0 = 7 \times 1 = 7$$

نکته‌ی مهم: هر عبارتی که به صورت یکی از موارد زیر باشد، یک جمله‌ای به حساب نمی‌آید.

الف) بیش از یک جمله داشته باشد، یعنی جمله‌ها با + و - از هم جدا شوند
 مثال: عبارات مقابل دو جمله‌ای هستند و یک جمله‌ای نیستند $\frac{3}{5}x - y$ و $3x^2 + 5y$

ب) متغیر در صخرج باشد و یا توان منفی داشته باشد
 مثال: عبارات مقابل یک جمله‌ای نیستند $\frac{5}{x}$ و $3x^{-2}$

ج) متغیر زیر رادیکال باشد.
 مثال: عبارات مقابل یک جمله‌ای نیستند $2\sqrt{xy}$ و $\frac{2}{\sqrt{m}}$

د) توان متغیرها عددی غیر صحیح باشد.
 مثال: عبارات مقابل یک جمله‌ای نیستند $2x^{\frac{1}{3}}$ و $-5x^2z^{3\pi}$

ه) متغیر در قدر مطلق باشد.
 مثال: عبارات مقابل یک جمله‌ای نیستند $|x+y|$ و $| -3x^2y^3 |$



ه) متغیر به عنوان توان نوشته شود.
مثال: عبارات مقابل یک جمله ای نیستند.

مثال: کدام یک از عبارات زیر یک جمله ای است.

الف) x^2 ✓

ب) $2\sqrt{5}$ ✓

پ) $5x^2y^3$ ✓

ت) 3^x ✗

ث) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ✗

ج) $5x^{-1}$ ✗

ز) $\sqrt{2} x^3 z^5$ ✓

ر) $|x + y|$ ✗

ک) $5x^4 - 3xy^2z$ ✗

هر عدد به تنهایی یک جمله ای به حساب می آید.

متغیر نباید در توان باشد.

متغیر نباید درخرج باشد.

توان متغیرها نباید منفی باشد.

اگر نقطه صریح رادیکالی باشد یک جمله ای به حساب می آید.

متغیرها نباید داخل تدرمطلق باشند.

دو جمله ای است.

نکته ی مهم: دو یک جمله ای به شرطی باهم متشابهند که قسمت حریفی آنها یکسان باشد، یعنی هم متغیرها و هم توان مربوط به هر متغیر در آنها یکسان باشد.

مثال: یک جمله ای های مقابل باهم متشابهند $\frac{1}{3}y^2x^5$, $\frac{2}{5}x^5y^2$, $-3x^5y^2$

مثال: یک جمله ای های مقابل باهم متشابه نیستند $\frac{2}{5}x^2y^3z^5$, $5x^2y^3z^5$

مثال: عبارت $-3xy^5$ با کدام عبارت متشابه است؟

- الف) $2x^5y$
- ب) $-3x + y$
- ج) $\frac{1}{5}xy^5$ ✓
- د) $\frac{xy}{3}$



مثال: عبارتهایی که با $2n^2m^3$ متشابه هستند را مشخص کنید.

$5nm$ $n^2 + m^2$ $-\frac{m^2 \cdot n^2}{11}$ $\frac{mn^2}{5}$ $12m^2n^2$ ✓

نکته: یک جمله ای های مشابه را می توانیم با هم جمع و تفریق کنیم.

مثال: $5x^2y^3 + 4x^2y^3 = 9x^2y^3$

$-1mn^2 + 4mn^2 = +3mn^2$

$-7x^2y^2z^4 + 4x^2y^2z^4 + 2x^2z^4y^2 - 1x^2y^2z^4 = -\Delta x^2y^2z^4 + 3x^2y^2z^4$

نکته مهم: عبارت $2x^3y^2 + 5x^4y^3$ از مجموع یک جمله ای های $2x^3y^2$ و $5x^4y^3$ تشکیل شده است بنابراین به آن دو جمله ای گفته می شود. با عنوان مثال می توان گفت که عبارت $3x^2 + 2x + 3$ عبارت سه جمله ای است زیرا از یک جمله ای های $3x^2$ و $2x$ و 3 تشکیل شده است.

تعریف چند جمله ای: به عبارتهایی که از جمع و تفریق یک جمله ای ها بدست می آیند را چند جمله ای می گویند.

مثال: عبارات معادل چند جمله ای هستند

$5xy^2 + 7x^2y^2$ و $-7 + 3m^2n^5 + 9xy$



نکته مهم: برای بدست آوردن تعداد جمله های یک چند جمله ای، ابتدا آن را تا حد امکان ساده می کنیم (جمله های مشابه را با هم جمع و تفریق می کنیم) و سپس تعداد جمله های عبارت بدست آمده را می شماریم.

مثال: تعداد جمله های چند جمله ای های زیر را بدست آورید.

ساجمله ای $5a + 4b - 5 \rightarrow$

$2x - 3y + 3x - 7y = \underbrace{5x - 10y}_{\text{دو جمله ای}}$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

الف) درجه‌ی یک جمله‌ای یک متغیره؛ در هر یک جمله‌ای یک متغیره، به توان آن متغیره، درجه‌ی آن یک جمله‌ای گفته می‌شود.

مثال: درجه‌ی یک جمله‌ای $3x^7$ برابر ۷ می‌باشد، زیرا توان x برابر عدد ۷ می‌باشد.

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

یک جمله‌ای	ضریب	متغیره	درجه‌ی یک جمله‌ای
$5x^3$	۵	x	۳
$-\sqrt{7} m^5$	$-\sqrt{7}$	m	۵
$0.3a$	۰.۳	a	۱

درجه‌ی یک جمله‌ای‌ها

۱- درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به هر یک از متغیره در هر یک جمله‌ای چند متغیره، توان هر متغیره را درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به آن متغیره می‌گوئیم.

مثال: در یک جمله‌ای $2x^3y^4$ داریم؛
الف) درجه نسبت به متغیره x برابر ۳ می‌باشد.
ب) درجه نسبت به متغیره y برابر ۴ می‌باشد.

ب) درجه‌ی یک جمله‌ای‌های چند متغیره

۲- درجه‌ی یک جمله‌ای نسبت به تمام متغیره در هر یک جمله‌ای چند متغیره، مجموع توان متغیره را درجه‌ی آن یک جمله‌ای نسبت به تمام متغیره می‌گوئیم.

مثال: در عبارت $2x^3y^4$ داریم؛
الف) درجه نسبت به متغیره x برابر ۳ می‌باشد.
ب) درجه نسبت به متغیره y برابر ۴ می‌باشد.
ج) درجه نسبت به متغیره xy برابر ۷ می‌باشد، زیرا $3+4=7$



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲ صفحه

ضرب یک جمله ای ها؛ برای ضرب یک جمله ای ها، مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم.

- الف) علامتها را در هم ضرب می کنیم.
- ب) ضریب عددی یک جمله ای ها را در هم ضرب می کنیم.
- ج) متغیرها و توان های متناظر با متغیرهای یک جمله ای ها را مطابق با قانون توانها، در هم ضرب می کنیم.

مثال: حاصل ضرب های مقابل را بدست آورید.

$$(-3x^4) \times (+2x^5) = -6x^9 \qquad x^4 \times x^5 = x^9$$

$$(-2x^3y^1) \times (-4x^1y^5) = +8x^4y^6 \qquad x^3 \times x^1 = x^4 \text{ و } y^1 \times y^5 = y^6$$

$$(-2x^2y^5)^3 = (-2x^2y^5) \times (-2x^2y^5) \times (-2x^2y^5) = -8x^6y^{15}$$

$$-\frac{2}{4}mn^2 \times 1mn^3 = -\frac{2}{3}m^2n^5 \qquad m^1 \times m^1 = m^2 \text{ و } n^2 \times n^3 = n^5$$

جمع و تفریق یک جمله ای ها؛ دو یا چند یک جمله ای را در صورتی می توان با هم جمع و یا از هم تفریق کرد که جمله ها مشابه باشند. برای این منظور ابتدا ضریب عددی یک جمله ای ها را با هم جمع و تفریق می کنیم و سپس بخش حرفی را که در تمام جمله ها مشابه هستند را در کنار ضریب عددی می نویسیم.

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$$-5x^3 + 9x^3 = +4x^3$$

$$-2x^2y^7 - 4x^2y^7 = -6x^2y^7$$

$$\underline{4x^2y} - \underline{3x^2y} - \underline{7x^2y} + \underline{10x^2y} = \underline{-3x^2y} + \underline{7x^2y}$$



مثال: مناسبه کنید.

$$-2x(-3x^2) - 5x^3 = +6x^3 - 5x^3 = +1x^3 = x^3$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی - همراه : ۰۲۲۵۲۰۲۷۳۷ - ۰۹۱۳۷۰۲۷۳۷ صفحه

(الف) درجای چند جمله ای نسبت به یک متغیر:

درجای یک چند جمله ای نسبت به یک متغیر برابر است با بزرگترین توان آن متغیر در چند جمله ای ساده شده.

مثال: درجای چند جمله ای $8 + 3x^2 + 5x^4 + 7x^4$ نسبت به متغیر x برابر 4 می باشد زیرا در این چند جمله ای بزرگترین توان x برابر 4 می باشد.

(ب) درجای چند جمله ای نسبت به چند متغیر:

درجای چند جمله ای نسبت به چند متغیر برابر است با درجای جمله ای که بزرگترین درجه را نسبت به آن متغیرها دارد.

مثال: درجای چند جمله ای $4 - x^2y^3 + 4x^5y^3 - 2xy^5$ را نسبت به متغیر x و y بیابید.

$$-2xy^5 \rightarrow \text{درجه نسبت به } x \text{ و } y = 1 + 5 = 6$$

$$-4x^5y^3 \rightarrow \text{درجه نسبت به } x \text{ و } y = 5 + 3 = 8$$

$$+x^2y^3 \rightarrow \text{درجه نسبت به } x \text{ و } y = 2 + 3 = 5$$

$$-4 \rightarrow \text{درجه نسبت به } x \text{ و } y = 0$$

الکون از بین اعداد 2 و 8 و 5 و 0 بزرگترین عدد یعنی 8 را انتخاب می کنیم. بنابراین درجای این چند جمله ای نسبت به متغیرهای x و y برابر 8 می باشد.

درجای چند جمله ای ها



$$-2m^5 - 2m^4n^2 + 4m^3n$$

مثال: در چند جمله ای مقابل:

(الف) درجه نسبت به متغیر m برابر 5 می باشد.

(ب) درجه نسبت به متغیر n برابر 4 می باشد.

(ج) درجه نسبت به همای متغیرها 7 می باشد.

چند جمله ای استاندارد:

آرتهای جمله های یک چند جمله ای را بر حسب توانهای نزولی یک متغیر (از بزرگ به کوچک) مرتب کنیم چند جمله ای بدست آمد. را نسبت به آن متغیر یک چند جمله ای استاندارد می گوئیم.

مثال: چند جمله ای $y^2 - 2y^5 + 4y^7$ یک چند جمله ای استاندارد است زیرا توان متغیر (y) از بزرگ به کوچک (وازیب به راست) نوشته شده است.

$$7 > 5 > 2$$

مثال: چند جمله ای های مقابل را بر حسب توانهای نزولی x مرتب کنید. (استاندارد کنید)

$$-3x^5 + x^7 - 5 + 2x^{11} \longrightarrow +2x^{11} + x^7 - 3x^5 - 5$$

$$-7 + 2x^4 - 5x^9 + 2x^1 \longrightarrow -5x^9 + 2x^4 + 2x^1 - 7$$

$$-2x + 4x^3 - 5x^2 + 7x^3 \xrightarrow{\text{ساده می کنیم}} -2x + 11x^3 - 5x^2$$

← مشابه

$$\xrightarrow{\text{استاندارد}} +11x^3 - 5x^2 - 2x$$

ضرب یک جمله ای در چند جمله ای:

برای ضرب یک جمله ای در چند جمله ای، باید یک جمله ای را در تک تک جمله های چند جمله ای ضرب و سپس جمله های مشابه را با هم جمع کرد. و تا حد ممکن ساده کنیم.

مثال: عبارات مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$-2x^2(-4xy + y^5 + 1) - 2xy(+4x^2) = +12x^3y - 2x^2y^5 - 2x^2 - 12x^3y$$

$$= -2x^2y^5 - 2x^2$$

$$-(2m^2n - n) - 5m(mn - 1) = -2m^2n + n - 5m^2n + 5m$$

$$= -7m^2n + n + 5m$$



مفهوم اتحاد؟ اگر دو عبارت جبری به گونه ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، در این صورت برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می نامیم.

مثال: عبارت $3x = x + x + x$ یک اتحاد می باشد. زیرا به ازای هر مقداری از x حاصل عبارت سمت چپ و سمت راست تساوی باهم برابر می شوند. به عنوان مثال:

$$x = 5 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ تساوی} = x + x + x = 5 + 5 + 5 = 15 \\ \text{سمت راست تساوی} = 3x = 3 \times 5 = 15 \end{cases}$$



$$x = -4 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ تساوی} = x + x + x = -4 + (-4) + (-4) = -12 \\ \text{سمت راست تساوی} = 3x = 3 \times (-4) = -12 \end{cases}$$

مثال: عبارت $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ یک اتحاد می باشد. (به جای x هر عددی قرار دهیم، حاصل عبارت سمت چپ و سمت راست تساوی باهم برابر می شوند، به عنوان مثال:

$$x = 7 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ تساوی} = (x-1)(x+1) = (7-1)(7+1) = 6 \times 8 = 48 \\ \text{سمت راست تساوی} = x^2 - 1 = 7^2 - 1 = 49 - 1 = 48 \end{cases}$$

$$x = -5 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ تساوی} = (x-1)(x+1) = (-5-1)(-5+1) = -6 \times (-4) = +24 \\ \text{سمت راست تساوی} = x^2 - 1 = (-5)^2 - 1 = +25 - 1 = +24 \end{cases}$$

نکته ی مهم: معادله یک تساوی جبری است که به ازای بعضی از متغیرها به تساوی عددی تبدیل می شود. ولی اتحاد به ازای تمام مقادیر برقرار است.

سؤال: آیا عبارت مقابل یک اتحاد است؟ چرا؟

$$(x+3)^2 = x^2 + 9$$

جواب: خیر؛ زیرا به ازای $x = 5$ حاصل هر دو طرف تساوی باهم یکی نمی شوند.

$$\text{سمت چپ تساوی} = (x+3)^2 = (5+3)^2 = 8^2 = 8 \times 8 = 64$$

$$\text{سمت راست تساوی} = x^2 + 9 = 5^2 + 9 = 25 + 9 = 34$$

مثال: آیا عبارت $4x + 8 = 2x - 2$ اتحاد است؟

جواب: این تساوی در صورتی اتحاد است که به ازای هر مقدار دلخواهی برای x حاصل هر دو طرف تساوی با هم برابر باشد. عدد دلخواهی مثل 1 را امتحان می کنیم.

$$x = 1 \text{ سمت چپ تساوی به ازای } = 2x - 2 = 2 \times 1 - 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ سمت راست تساوی به ازای } = 4x + 8 = 4 \times 1 + 8 = 12$$



بنابراین چون حاصل عبارات طرفین تساوی به ازای عدد دلخواهی مثل 1 با هم برابر نیستند، می گوئیم عبارت داده شده یک اتحاد نیست و در واقع یک معادله است.

$$4x - 2 = 2x + 8$$

$$4x - 2x = +8 + 2$$

$$2x = +10$$

$$x = \frac{+10}{2} = 5$$

در واقع تنها عددی که می توانیم به جای x قرار دهیم تا تساوی برقرار باشد، عدد 5 می باشد و به غیر از عدد 5 هر عدد دیگری که به جای x قرار دهیم، حاصل هر دو طرف تساوی با هم برابر نمی شوند. بنابراین دوباره یاد آوری می شویم

که: معادله فقط به ازای بعضی از مقادیر برقرار است، ولی اتحاد به ازای جمیع مقادیر برقرار است.

مثال: آیا عبارت $(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$ اتحادی باشد؟ چرا؟

جواب: بله زیرا اگر حاصل $(x+2)(x+3)$ را بدست آوریم به عبارت $x^2 + 5x + 6$ می رسیم.

$$(x+2)(x+3) = x^2 + \underbrace{3x + 2x}_{\text{مشابه}} + 6 = x^2 + 5x + 6$$

که $x^2 + 5x + 6$ همان عبارت سمت راست تساوی می باشد.

مثال: آیا عبارت $3(2x-4) = 4x - 4$ یک اتحاد است؟ چرا؟

جواب: خیر زیرا؟

$$\text{حاصل عبارت سمت چپ} = 3(2x-4) = 4x - 12$$

که نشان می دهد با عبارت سمت راست تساوی برابر نیستند. در واقع

$$4x - 12 \neq 4x - 4$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۴

صفحه

اتحادهای خاص }
 (الف) اتحاد مربع
 (ب) اتحاد مزدوج
 (ج) اتحاد جمله‌ی مشترک

الف) اتحاد مربع

عبارت $3x + 5$ دو جمله‌ای و عبارت $(3x + 5)^2$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم، برای بدست آوردن حاصل عبارت $(3x + 5)^2$ می‌توان از روشی استفاده کرد.

روش اول: ضرب دو جمله‌ای

$$(3x + 5)^2 = (3x + 5) \cdot (3x + 5) = 9x^2 + 15x + 15x + 25 = 9x^2 + 30x + 25$$

روش دوم: استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای که به صورت مقابل می‌باشد.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x) \cdot (5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

$$\rightarrow (3x)^2 = 3x \cdot 3x = 9x^2$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مربع بدست آورید

$$\rightarrow (2x)^2 = 2x \cdot 2x = 4x^2$$

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$\rightarrow (3y)^2 = 3y \cdot 3y = 9y^2$$

$$(7 + 5m)^2 = 7^2 + 2(7) \cdot (5m) + (5m)^2 = 49 + 70m + 25m^2$$

$$\rightarrow (5m)^2 = 5m \cdot 5m = 25m^2$$



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{اتحاد مربع (مجموع دو جمله)}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{اتحاد مربع (تفاضل دو جمله)}$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مربع بدست آورید.

$$\begin{aligned} (3x+5)^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 \\ &= 9x^2 + 30x + 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta m - 3)^2 &= (\Delta m)^2 - 2(\Delta m)(3) + 3^2 \\ &= \Delta m^2 - 6\Delta m + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-4x+1)^2 &= (-4x)^2 + 2(-4x)(1) + 1^2 \\ &= 16x^2 - 8x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1-3a)^2 &= (-1)^2 - 2(-1)(3a) + (3a)^2 \\ &= +1 + 6a + 9a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &= (\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x})(\sqrt{y}) + (\sqrt{y})^2 \\ &= x + 2\sqrt{xy} + y \end{aligned}$$



مثال: با کمک اتحاد مربع، در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

$$(\dots + 3)^2 = a^2 + \dots + 9$$

$$(a+3)^2 = a^2 + 2(a)(3) + 9$$

$$(\dots + 3)^2 = 4x^2 + \dots + \dots$$

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2$$

$$(\dots + \dots)^2 = 2\Delta x^2 + 20xy + \dots$$

$$\begin{aligned} (\Delta x + 2y)^2 &= (\Delta x)^2 + 2(\Delta x)(2y) + (2y)^2 \\ &= \Delta x^2 + 4\Delta xy + 4y^2 \end{aligned}$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

همراه : ۰۹۱۳۷۰۷۲۵۲

صفحه

مثال: الف) حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$$(m^3 + 5)^2 = (m^3)^2 + 2(m^3)(5) + 5^2 = m^6 + 10m^3 + 25$$

$$(x^2 - 3y)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(3y) + (3y)^2 = x^4 - 6x^2y + 9y^2$$

ب) حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مربع بدست آورید.

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2(100)(1) + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$$

$$98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 - 2(100)(2) + 2^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$$

$$53^2 = (50 + 3)^2 = 50^2 + 2(50)(3) + 3^2 = 2500 + 300 + 9 = 2809$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$$(200)^2 - 250^2 - 50^2 = (250 - 50)^2 - 250^2 - 50^2$$

$$\rightarrow \cancel{250^2} - 2(250)(50) + \cancel{50^2} - 250^2 - 50^2$$

$$= -25000$$

$$(300)^2 - 250^2 - 50^2 = (250 + 50)^2 - 250^2 - 50^2$$

$$\rightarrow \cancel{250^2} + 2(250)(50) + \cancel{50^2} - 250^2 - 50^2$$

$$= 25000$$



ب) اتحاد مزدوج

دو عبارت $(a+b)$ و $(a-b)$ یا $(3x-2)$ و $(3x+2)$ را مزدوج هم‌دیگر می‌نامیم. برای بدست آوردن حاصل $(a-b)(a+b)$ به دو صورت می‌توانیم عمل کنیم.

روش اول: ضرب دو چند جمله‌ای

$$(a-b)(a+b) = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

روش دوم: استناد از اتحاد مزدوج که به صورت زیر است.

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید

$$(3x-5)(3x+5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$$

$$(v-2y)(v+2y) = v^2 - (2y)^2 = v^2 - 4y^2$$

$$(-5x-3y)(-5x+3y) = (-5x)^2 - (3y)^2 = 25x^2 - 9y^2$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$$

$$(m^3+v)(m^3-v) = (m^3)^2 - v^2 = m^6 - v^2$$



$$(-y+\Delta x)(-\Delta x-y) = (-y+\Delta x)(-y-\Delta x) = (-y)^2 - (\Delta x)^2 = y^2 - \Delta x^2$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحادها بدست آورید.

اتحاد مربع (تفاضل دو جمله)
 $(3x - 1)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(1) + 1^2 = 9x^2 - 6x + 1$

اتحاد مزدوج
 $(5 - 2m)(5 + 2m) = 5^2 - (2m)^2 = 25 - 4m^2$

اتحاد مربع (مجموع دو جمله)
 $(\sqrt{x} + 1)^2 = (\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x})(1) + 1^2 = x + 2\sqrt{x} + 1$

مثال: حاصل ضرب های مقابل را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.

$$95 \times 105 = (100 - 5)(100 + 5) = 100^2 - 5^2 = 10000 - 25 = 9975$$

$$52 \times 48 = (50 + 2)(50 - 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$$

مثال: حاصل عبارت $45^2 - 35^2$ را به کمک اتحاد مزدوج بدست آورید.

جواب: در اتحاد مزدوج $a^2 - b^2$ حاصل ضرب عبارتهای $(a+b)$ و $(a-b)$ می باشد. در واقع داریم:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$45^2 - 35^2 = \underbrace{(45 - 35)}_{100} \cdot \underbrace{(45 + 35)}_{800} = 100 \times 800 = 80000$$



مثال: در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

$$(x + 3) \cdot (\dots) = x^2 - \dots$$

$$(x + 3) \cdot (x - 3) = x^2 - 3^2$$

$$(\dots) \cdot (\dots) = 49x^2 - 25 \quad ; \quad (7x - 5) \cdot (7x + 5) = 49x^2 - 25$$

نمونه سوالات امتحانی

۱- اگر $x+y=6$ و $xy=8$ باشد حاصل x^2+y^2 را بدست آورید.

جواب: به کمک اتحاد مربع داریم:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$6^2 = x^2 + 2(8) + y^2$$

$$36 = x^2 + 16 + y^2$$

$$36 - 16 = x^2 + y^2$$

$$20 = x^2 + y^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 6^2 = x^2 + 2(8) + y^2 \\ 36 = x^2 + 16 + y^2 \\ 36 - 16 = x^2 + y^2 \\ 20 = x^2 + y^2 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + y^2 = 20$$

۲- اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ را بدست آورید.

جواب: به کمک اتحاد مربع داریم:

$$\frac{2 \times x \times \frac{1}{x}}{2} = \frac{2x}{x} = 2$$

$$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2(x) \cdot (\frac{1}{x}) + (\frac{1}{x})^2$$

$$(\frac{1}{x})^2 = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$3^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$9 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$7 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \\ 3^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \\ 9 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ 7 = x^2 + \frac{1}{x^2} \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$



۳- اگر $x+y=7$ و $x-y=5$ باشد حاصل x^2-y^2 را بدست آورید.

$$\begin{array}{l} \overbrace{(x-y)}^5 \cdot \overbrace{(x+y)}^7 = x^2 - y^2 \\ 5 \times 7 = x^2 - y^2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x-y) \cdot (x+y) = x^2 - y^2 \\ 5 \times 7 = x^2 - y^2 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - y^2 = 35$$

جواب: به کمک اتحاد مزدوج داریم:

۴- حاصل عبارت متقابل را به کمک اتحاد ها بدست آورید.

$$\left(\frac{1}{3x} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{3x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3x}\right) \cdot (x) + x^2 = \frac{1}{9x^2} - \frac{2}{3} + x^2$$

$$\left(\frac{1}{3x}\right)^2 = \frac{1}{3x} \times \frac{1}{3x} = \frac{1}{9x^2}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3x} \times x = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 = x + 2\sqrt{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y}$$

$$(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

$$\frac{2 \times \sqrt{x}}{1} \times \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{y}} \times \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y^2}} = \frac{1}{|y|} = \frac{1}{y}$$

سؤال: چرا $|x| = x$ شد؟ از کجا بدایم علامت x مثبت بود. یا منفی؟
 اگر در صورت سؤال دقت کنید چون x زیر رادیکال رفته است پس حتماً نامنفی بوده است بنابراین $|x| = x$ می باشد (برای y هم به همین صورت عمل می کنیم)

۵- اگر $b = \sqrt{2} + 1$ باشد، حاصل b^2 کدام است؟ (نمونه دولتی ۹۶، کردستان - لرستان - همدان)

- (الف) $\sqrt{2b+1}$
- (ب) $b-1$
- (ج) $2b-1$
- (د) $b+1$

$$b^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(1) + 1^2$$

$$= 2 + 2\sqrt{2} + 1$$

$$= 2(1 + \sqrt{2}) + 1$$

$$= 2b + 1$$



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲ صفحه

(ج) اتحاد جمله‌ی مشترک

دو جمله‌ای‌های $(x + a)$ و $(x + b)$ دارای جمله‌ی مشترک x هستند، اگر دو پرانتز با صورت $(x + a)$ و $(x + b)$ داشته باشیم که نقطه یک جمله‌ی آنها مثل هم باشد (جمله‌ی مشترک) و جمله‌های دوم آنها متنوع باشد، حاصل ضرب این دو پرانتز را می‌توانیم به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک بدست آوریم:

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)x + a \cdot b$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$$(x + 3) \cdot (x + 4) = x^2 + 4x + 3x + 12 = x^2 + 7x + 12$$

$$(x + 3) \cdot (x + 4) = x^2 + (3 + 4)x + 3 \cdot 4 = x^2 + 7x + 12$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک بدست آورید.

$$(x + 4) \cdot (x + 5) = x^2 + 9x + 20$$

ضرب $5 + 4$ جمع $4 + 5$

$$(x + 7) \cdot (x + 4) = x^2 + 11x + 28$$

ضرب $7 + 4$ جمع $7 + 4$

$$(x + 8) \cdot (x - 3) = x^2 + 5x - 24$$

ضرب $8 - 3$ جمع $8 - 3$

$$(x - 5) \cdot (x - 3) = x^2 - 8x + 15$$

ضرب $-5 - 3$ جمع $-5 - 3$

$$(x + 1) \cdot (x - 5) = x^2 - 4x - 5$$

مثال: در جای خالی عدد مناسب بنویسید.



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

همراه: ۰۲۷۲۵۳۰۱۳۷۰۹ صفحه

مثال مهم: حاصل عبارات مقابل را با کمک اتحاد جمله‌ی مشترک بدست آورید.

$$(3x + 7) \cdot (3x + 2) = (3x)^2 + 9(3x) + 14 = 9x^2 + 27x + 14$$

← جمع ۷ و ۲
← ضرب ۷ و ۲

$$(5x - 3) \cdot (5x - 4) = (5x)^2 - 7(5x) + 12 = 25x^2 - 35x + 12$$

← جمع ۳ و ۴
← ضرب ۳ و ۴

$$(x^3 + 5) \cdot (x^3 + 4) = (x^3)^2 + 11(x^3) + 20 = x^6 + 11x^3 + 20$$

← جمع ۵ و ۴
← ضرب ۵ و ۴

$$(\sqrt{x} - 4) \cdot (\sqrt{x} + 3) = (\sqrt{x})^2 - 1(\sqrt{x}) - 12 = x - \sqrt{x} - 12$$

← جمع ۴ و ۳
← ضرب ۴ و ۳



مثال: در جای خالی عبارات مناسب بنویسید.

$$(x + 5) \cdot (x - 3) = x^2 + \dots x - \dots$$

$$(x + 5)(x - 3) = x^2 + 2x - 15$$

$$(x + \dots) \cdot (x + 4) = x^2 + 9x + \dots$$

$$(x + 5) \cdot (x + 4) = x^2 + 9x + 20$$

$$(x - \dots) \cdot (x + \dots) = x^2 + 2x - 35$$

$$(x - 5) \cdot (x + 7) = x^2 + 2x - 35$$

$$(x + \dots) \cdot (x - \dots) = x^2 - 34$$

$$(x + 4) \cdot (x - 4) = x^2 + 0x - 34 = x^2 - 34$$

$$(x - 1) \cdot (x + 8) = \dots + 7x - \dots$$

$$(x - 1) \cdot (x + 8) = x^2 + 7x - 8$$

سؤال: عبارت $(x+3)(x-5)$ با کدام یک از عبارات زیر برابر است.

الف) $x^2 + 8x + 15$

ب) $x^2 - 29x - 8$

ج) $x^2 - 15x - 2$

د) $x^2 - 2x - 15$ ✓

$$(x-5)(x+3) = x^2 - 2x - 15$$

منرب ۳+۵- →
جمع ۳+۵- →

سؤال: عبارت $x^2 - 5x + 6$ با کدام عبارت برابر است؟

الف) $(x-2)(x+3)$

ب) $(x+2)(x-3)$

ج) $(x-2)(x-3)$ ✓

د) $(x+2)(x+3)$

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$$

منرب ۲-۳- →
جمع ۲-۳- →



تجزیه کردن؛ یعنی تبدیل یک عبارت جبری به حاصلضرب چند عبارت جبری می باشد، که برای حل معادله ها و ساده کردن کسرها و... کاربرد فراوان دارد.

مثال: اگر عبارت $3xy + 6x$ را به صورت $3x(y + 2)$ بنویسیم، در واقع عبارت $3xy + 6x$ را تجزیه کرده ایم.

$$3xy + 6x = 3x \cdot (y + 2)$$

مثال: عبارات مقابل را تجزیه کنید.

$$x^2 + 3xy = x \cdot (x + 3y)$$

$$12x + 4x^2 = 4x(3 + x)$$

$$5x^2y + 15xy = 5xy \cdot (x + 3)$$

$$x^5 + x^6 = x^5(1 + x)$$

$$12mn + 18n^3 = 6n(2m + 3n^2)$$

فکتهای مهم: هرگاه عبارتی به صورت $a^2 - b^2$ باشد، می توانیم آنرا با استفاده از اتحاد مزدوج به صورت $(a - b) \cdot (a + b)$ بنویسیم که با هر کدام از این پرانتزها عامل گفته می شود.

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

مثال: عبارات مقابل را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

$$x^2 - 5^2 = \overbrace{(x - 5)}^{\text{عامل}} \cdot \overbrace{(x + 5)}^{\text{عامل}}$$

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4) \cdot (x + 4)$$

$$25x^2 - 81 = (5x)^2 - 9^2 = (5x - 9) \cdot (5x + 9)$$

$$\frac{14}{9} - 81y^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - (9y)^2 = \left(\frac{2}{3} - 9y\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + 9y\right)$$



مثال: عبارات مقابل را تجزیه کنید.

$$x^6 - 81 = (x^3)^2 - 9^2 = (x^3 - 9)(x^3 + 9)$$

$$25x^2 - 49y^2 = (5x)^2 - (7y)^2 = (5x - 7y)(5x + 7y)$$

$$x^8 - 1 = (x^4)^2 - 1^2 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)$$

مثال: عبارت $x^4 - 1$ را با صورت مربع سا عامل بنویسید.

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

$$\rightarrow x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$$

بنابراین داریم:

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

مثال: عبارات مقابل را تجزیه کنید.

$$\frac{14}{25}x^2 - 4z =$$

$$\frac{r}{9} - m^2 =$$

$$1 - x^4 =$$

$$\frac{1}{y^2} - 9x^2 =$$

$$14 - 25x^2 =$$

$$x^4 - y^2 =$$

$$x^{10} - 100 =$$



می دانیم که اتحاد جمله‌ی مشترک به صورت مقابل می باشد.

$$(x+a) \cdot (x+b) = x^2 + (a+b)x + a \cdot b$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک بدست آورید.

$$(x+3) \cdot (x+5) = x^2 + (3+5)x + 3 \times 5 = x^2 + 8x + 15$$

حاصلضرب ۵ و ۳ + حاصل جمع ۵ و ۳ +

الکون اربع عبارت $x^2 + 8x + 15$ را داشته باشیم و بخواهیم آنرا تجزیه کنیم. به این صورت عمل می کنیم.

الف) دو پرانتز بازی کنیم و جمله‌ی مشترک (یعنی x) را در ابتدای هر دو پرانتز می نویسیم.

$$(x \quad) \cdot (x \quad)$$



ب) اکنون باید دو عدد را چنان در نظر بگیریم که مجموع آنها ۸ + و حاصلضرب آنها ۱۵ + باشد. البته واضح است که این دو عدد ۵ + و ۳ + می باشند.

ج) اعداد مشخص شده را در پرانتزها بعد از جمله‌ی مشترک می نویسیم. (فرقی نمی کند که کدام عدد را در پرانتز سمت چپ یا راست بنویسیم. بنابراین

$$x^2 + 8x + 15 = (x+3) \cdot (x+5) \quad \text{یا} \quad x^2 + 8x + 15 = (x+5) \cdot (x+3)$$

مثال: عبارات مقابل را به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک تجزیه کنید.

$$x^2 + 4x + 8 = (x+2) \cdot (x+4) \quad \text{باید دو عدد بیابیم که جمع آنها ۴ + و حاصلضرب آنها ۸ + باشد}$$

$$x^2 + 13x + 36 = (x+4) \cdot (x+9) \quad \text{باید دو عدد بیابیم که حاصل جمع آنها ۱۳ + و حاصلضرب آنها ۳۶ + باشد}$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3) \cdot (x-4) \quad \text{باید دو عدد بیابیم که حاصل جمع آنها ۷ - و حاصلضرب آنها ۱۲ + باشد}$$

$$(-3) + (-4) = -3 - 4 = -7 \quad \quad -3 \times (-4) = +12$$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

فیروز محمودی

مقده

۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: عبارات مقابل را تجزیه کنید.

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$$

جمع ضرب

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

جمع ضرب

$$x^2 + 1x - 12 = (x + 4)(x - 3)$$

جمع ضرب

$$9x^2 + 21x + 10 = (3x)^2 + 7(3x) + 10 = (3x + 2)(3x + 5)$$

لازم به ذکر است که در این عبارت جمله‌ی مشترک $3x$ می‌باشد.

سؤال مهم: کدام عامل در تجزیه‌ی $x^4 - y^4$ وجود ندارد؟

$$x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

$$= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$$

مزدوج $\rightarrow x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

- (الف) $x - y$
- (ب) $x + y$
- ✓ (ج) $x^2 - y$
- (د) $x^2 + y^2$

سؤال مهم: عبارات مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$\frac{m^2 + 7m + 12}{m^2 - 9} = \frac{(m + 3)(m + 4)}{(m - 3)(m + 3)} = \frac{(m + 4)}{(m - 3)}$$

اتحاد جمله‌ی مشترک

اتحاد مزدوج

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{4x + 8} = \frac{(x + 1)(x + 4)}{4(x + 2)} = \frac{x + 4}{4}$$

اتحاد جمله‌ی مشترک



سوالات امتحانی

۱- حاصل عبارات مقابل را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$(-3x + 5)^2 =$$

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 =$$

$$(3y - 2x) \cdot (2x + 3y) =$$

$$(2x + 3) \cdot (2x + 4) =$$

$$(x - 3) \cdot (x + 2) =$$

۲- عبارات مقابل را تجزیه کنید.

$$\frac{1}{25}x^2 - 14 = \left(\frac{1}{5}x\right)^2 - 14 = \left(\frac{1}{5}x - 4\right) \cdot \left(\frac{1}{5}x + 4\right)$$

$$m^2 - 36a^2 =$$

$$m^2 - 100 = (m^2)^2 - 10^2 = (m^2 - 10) \cdot (m^2 + 10)$$

$$x^2 + 2x - 15 =$$

$$m^2 - 1m - 12 =$$

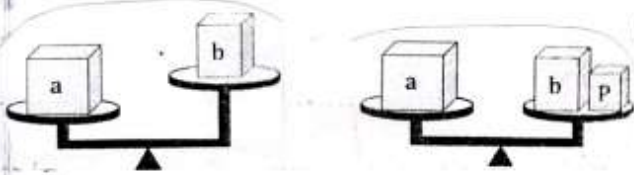


نا برابری ها و نامساوی ها

فرض کنید a, b دو عدد حقیقی دلخواه باشند. در این صورت سه حالت ممکن است رخ دهد.

- الف) a از b کمتر است. که در این صورت می نویسیم $a < b$
- ب) a با b مساوی است. که در این صورت می نویسیم $a = b$
- ج) a از b بیشتر است. که در این صورت می نویسیم $a > b$

نکته ی مهم؛ اگر a, b دو عدد حقیقی باشند که $a > b$ باشد، آنگاه مقداری حقیقی و مثبت مانند p چنان وجود دارد که: $a = b + p$



مثال؛ می دانیم که $7 > 3$ می باشد، بنابراین مقداری حقیقی و مثبت (مثل ۴) چنان وجود دارد که:

$$7 = 3 + 4$$

مثال: با توجه به ستاره های زیر یک نابرابری برای هر مورد بنویسید.

الف) $x + 5 = y \Rightarrow x < y$

ب) $m - 2 = n \Rightarrow m > n$

ج) $3a = 1b \Rightarrow a = \frac{1}{3}b \Rightarrow a > b$

$(a, b > 0)$



د) $m + 1 = n + 3$
 $m = n + 3 - 1$
 $m = n + 2 \Rightarrow m > n$

ت) $m - 5 = n + 2$
 $m = n + 2 + 5$
 $m = n + 7 \Rightarrow n < m$

ه) $a - b = -2$
 $a + 2 = b \Rightarrow a < b$

ث) $a + 4 = b + 4$
 $a = b + 4 - 4$
 $a = b - 2 \Rightarrow b > a$

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۲۷۲۵۲۰۱۳۷۰۹ صفحه

نکته مهم: اگر a, b دو عدد حقیقی باشند، در این صورت:

الف) اگر a از b بیشتر نباشد، آنگاه می توانیم نتیجه بگیریم که a یا مساوی b است و یا از b کمتر است بنابراین می نویسیم « a کوچکتر یا مساوی b است» و می نویسیم:

$$a \leq b$$

ب) اگر a از b کمتر نباشد، آنگاه می توانیم نتیجه بگیریم که a یا مساوی b است و یا از b بیشتر است بنابراین می نویسیم « a بزرگتر یا مساوی b است» و می نویسیم:

$$a \geq b$$

الف) اگر a عددی حقیقی و نامنفی باشد (یعنی منفی نباشد)، در این صورت می توانیم نتیجه بگیریم که a یا مثبت است و یا صفر است. یعنی « a بزرگتر مساوی صفر است» و می نویسیم:

$$a \geq 0$$

ب) اگر a عددی حقیقی و ناممثبت باشد (یعنی مثبت نباشد)، در این صورت می توانیم نتیجه بگیریم که a یا منفی است و یا صفر است، به این معنی که « a کوچکتر مساوی صفر است» و می نویسیم:

$$a \leq 0$$

نکته مهم



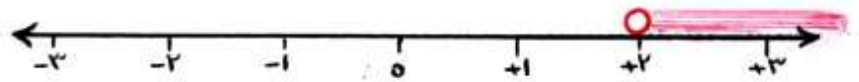
نکته مهم

حالت	نمایش به صورت مجموعه A نمایش به صورت محور اعداد حقیقی
$a < x < b$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$a \leq x < b$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$a < x \leq b$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$a \leq x \leq b$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

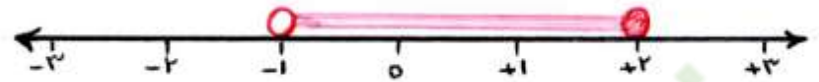
حالت	نمایش به صورت مجموعه A نمایش به صورت محور اعداد حقیقی
$x > a$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$x \geq a$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
$x < a$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
$x \leq a$	$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

مثال: مرتب از مجموعه‌های مقابل را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

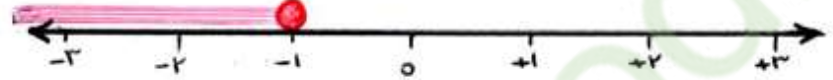
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$



$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$$



$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$$



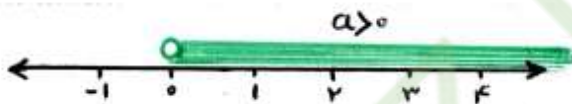
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$$



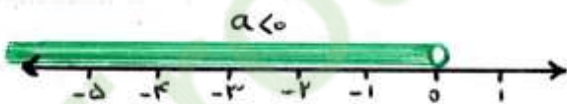
$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < +1\}$$



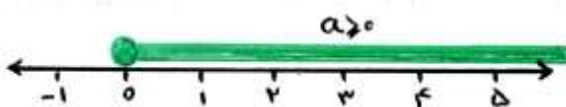
الف) اگر a مثبت باشد، در این صورت: $a > 0$



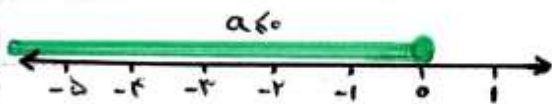
ب) اگر a منفی باشد، در این صورت: $a < 0$



ج) اگر a منفی باشد، در این صورت: $a \geq 0$



د) اگر a مثبت نباشد، در این صورت: $a \leq 0$



برای هر عدد حقیقی a



الف) اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع (یا تفریق) کنیم، نابرابری همچنان برقرار است، یعنی:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} a + c > b + c \\ a - c > b - c \end{cases} \quad \text{عدد } c \text{ می تواند مثبت یا منفی باشد}$$

مثال: نابرابری $5 > 1$ را در نظر بگیرید. اگر به دو طرف این نابرابری، یکبار عدد ۳ و بار دیگر عدد ۴- را اضافه کنیم داریم:

$$5 > 1 \Rightarrow \begin{cases} 5 + 3 > 1 + 3 \Rightarrow 8 > 4 \quad \checkmark \\ 5 - 4 > 1 - 4 \Rightarrow 1 > -3 \quad \checkmark \end{cases}$$

ب) اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند c ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، نابرابری همچنان برقرار است. ولی اگر عدد c منفی باشد، جهت نامساوی عوض می شود.

قوانین نامساوی ها

$$a > b \xrightarrow{c > 0} \begin{cases} a \cdot c > b \cdot c \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases} \quad a > b \xrightarrow{c < 0} \begin{cases} a \cdot c < b \cdot c \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$$

مثال: نابرابری $18 > 12$ را در نظر بگیرید و عددی مثبت مانند ۳ را نیز در نظر بگیرید. در این صورت:

$$18 > 12 \xrightarrow{3 > 0} \begin{cases} 18 \times 3 > 12 \times 3 \Rightarrow 54 > 36 \quad \checkmark \\ \frac{18}{3} > \frac{12}{3} \Rightarrow 6 > 4 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$18 > 12 \xrightarrow{-3 < 0} \begin{cases} 18 \times (-3) < 12 \times (-3) \Rightarrow -54 < -36 \quad \checkmark \\ \frac{18}{-3} < \frac{12}{-3} \Rightarrow -6 < -4 \quad \checkmark \end{cases}$$



نامعادله؛

نامعادله یک نامساوی شامل مجهول است که به ازای بعضی از مقادیر برای مجهول برقرار است.

منظور از جواب یک نامعادله چیست؟ مقدارهایی از مجهول نامعادله هستند که به ازای آنها نامساوی برقرار می شود.

منظور از مجموعه جواب نامعادله چیست؟ به مجموعه ای که شامل همای جوابهای یک نامعادله باشد را مجموعه جواب آن نامعادله می گویند

مثال: عبارت مقابل یک نامعادله است

$$3x + 1 > 13$$

(الف) عدد ۵ یکی از جوابهای این نامعادله است زیرا اگر در این نامعادله به جای x عدد ۵ را قرار دهیم، نامساوی برقرار است.

$$3 \times (5) + 1 > 13 \Rightarrow 16 > 13 \quad \checkmark$$

(ب) عدد ۲ جواب این نامعادله نیست. زیرا اگر در این نامعادله، به جای x عدد ۲ را قرار دهیم، این نامساوی برقرار نمی باشد.

$$3 \times (2) + 1 > 13 \Rightarrow 7 > 13 \quad \times$$

حال سؤال این است که همای جوابهای این نامعادله را چگونه بیابیم؟ روش کار به این صورت است.

$$3x + 1 > 13$$

$$3x + 1 - 1 > 13 - 1$$

$$3x > 12$$

$$\frac{3x}{3} > \frac{12}{3} \Rightarrow x > 4$$



ابتدا هر دو طرف نامساوی را با عدد ۱- جمع می کنیم. قابله نامساوی $3x > 12$ برسیم، سپس هر دو طرف این نامساوی را بر عدد ۳ تقسیم می کنیم، که با انجام این کار به نامساوی $x > 4$ می رسیم. (لازم به ذکر

است که چون هر دو طرف نامساوی را بر عددی مثبت تقسیم کردیم، جهت نامساوی عوض نمی شود). بنابراین « هر عدد حقیقی بزرگتر از ۴ را که در نظر بگیریم، یکی از جوابهای این نامعادله است»

$$\text{مجموعه جواب این نامعادله} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل را بدست آورید.

$$-2x + 7 < -3$$

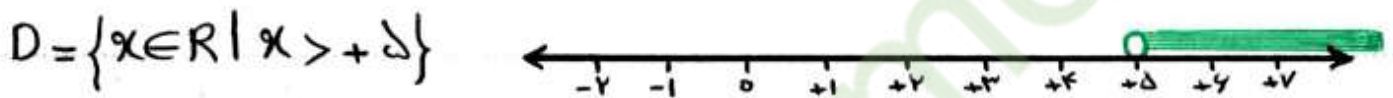
$$-2x + 7 - 7 < -3 - 7 \Rightarrow -2x < -10 \Rightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{-10}{-2} \Rightarrow x > +5$$

در این مرحله چون هر دو طرف نامساوی را بر عددی منفی تقسیم کردیم جهت نامساوی عوض می‌شود.



$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > +5\}$$

حال اگر بخواهیم مجموعه جواب این نامعادله را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهیم داریم:



مثال: مجموعه جواب هر کدام از نامعادله‌های زیر را مشخص کنید.

$$-2(-3x + 1) \leq +4x + 8$$

$$+6x - 2 \leq +4x + 8$$

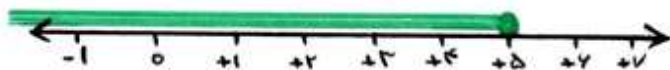
$$+6x - 4x \leq +8 + 2$$

$$+2x \leq +10$$

$$\frac{+2x}{+2} \leq \frac{+10}{+2} \Rightarrow x \leq +5$$

در این مرحله چون هر دو طرف نامساوی باید بر عددی مثبت (+2) تقسیم شوند، جهت نامساوی را عوض نمی‌کنیم.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$



نکته: $x \leq 5$ یعنی: اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی با 5

$$-2(-3x + 1) \leq +8x + 4$$

$$+6x - 2 \leq +8x + 4$$

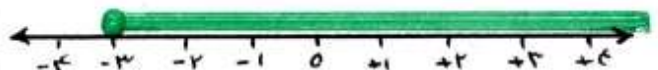
$$+6x - 8x \leq +4 + 2$$

$$-2x \leq +6$$

$$\frac{-2x}{-2} \geq \frac{+6}{-2} \Rightarrow x \geq -3$$

در این مرحله چون هر دو طرف نامساوی باید بر عددی منفی (-2) تقسیم شوند، باید جهت نامساوی را عوض کنیم.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$$



نکته: $x \geq -3$ یعنی: اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی با -3

مثال : مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$\frac{x}{2} + \frac{3x}{5} < 22$$

$$\frac{x \times 5}{2 \times 5} + \frac{3x \times 2}{5 \times 2} < \frac{22}{10} \rightarrow$$

در این مرحله باید همی‌ها را به عدد یکسان ۱۰ تبدیل کنیم. سپس همی‌های کسرها را حذف می‌کنیم و فقط صورت ۱۰ این کسرها را می‌نویسیم.

$$5x + 6x < 22 \Rightarrow 11x < 22$$

$$x < \frac{22}{11} \Rightarrow x < 2$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$$



مثال : مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$\frac{y-1}{4} - 2 > \frac{y}{3}$$

$$\frac{3 \times (y-1)}{4 \times 3} - \frac{2 \times 12}{1 \times 12} > \frac{y \times 4}{3 \times 4}$$

ابتدا به عدد ۱۲ همی‌های کسرها را به عدد ۱۲ تبدیل می‌کنیم. سپس همی‌های کسرها را حذف می‌کنیم و فقط صورت این کسرها را می‌نویسیم.

$$3(y-1) - 24 > 4y$$

$$3y - 24 - 24 > 4y$$

$$3y - 4y > 24 + 24$$

$$-1y > +48$$

$$y < \frac{+48}{-1} \Rightarrow y < -48$$

$$D = \{y \in \mathbb{R} \mid y < -48\}$$



نکته : همانطور که در مثال قبل مشاهده کردید روی محور اعداد بیازی به مشخص کردن محل دقیق عدد -۴۸ نبود و ما فقط به صورت تقریبی جایی را در سمت چپ صفر برای -۴۸ مشخص کردیم. بنابراین اگر مثلاً مجموعه جواب یک نامعادله به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{11}{3}\}$ باشد، آنرا به صورت زیر

روی محور اعداد نمایش می‌دهیم، بیازی نیست که محل دقیق عدد $\frac{11}{3}$ را روی محور مشخص کنیم.



مثال : مجموعه جواب نامعادلات مقابل را مشخص کنید.

$$4 - 2x \geq -5x + 21$$

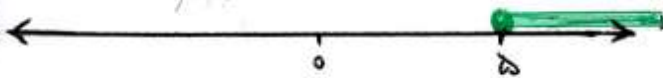
$$-2x + 5x \geq +21 - 4$$

$$+3x \geq +17$$

$$x \geq \frac{+17}{+3}$$

$$x \geq +5$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$$



$$-2x + 4 < +3x + 24$$

$$-2x - 3x < +24 - 4$$

$$-5x < +20$$

$$x > \frac{+20}{-5}$$

$$x > -4$$

نوعت نامساوی عوض شد

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$$



$$\frac{y}{3} - \frac{1}{5} < \frac{2y-1}{3}$$

ابتدا باید مخرج های کسرها را با عدد ۱۵ تبدیل کنیم

$$\frac{y \times 5}{3 \times 5} - \frac{1 \times 3}{5 \times 3} < \frac{5 \times (2y-1)}{3 \times 5}$$

$$5y - 3 < 5(2y-1)$$

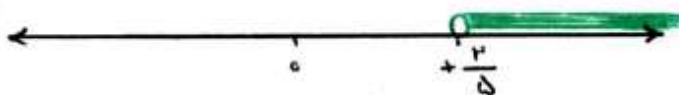
$$5y - 3 < 10y - 5$$

$$5y - 10y < -5 + 3$$

$$-5y < -2$$

$$y > \frac{-2}{-5} \Rightarrow y > +\frac{2}{5}$$

$$D = \{y \in \mathbb{R} \mid y > +\frac{2}{5}\}$$



$$2(-3x+5) \geq -5+2(x+9)$$

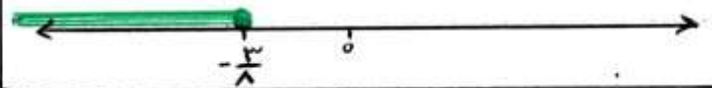
$$-2x+10 \geq -5+2x+18$$

$$-2x-2x \geq -5+18-10$$

$$-4x \geq +3$$

$$x \leq \frac{+3}{-4} \Rightarrow x \leq -\frac{3}{4}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{4}\}$$



$$-2(x-3) < 5-4x$$

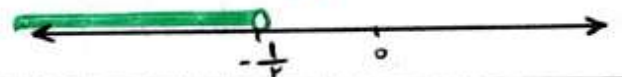
$$-2x+6 < 5-4x$$

$$-2x+4x < 5-6$$

$$+2x < -1$$

$$x < \frac{-1}{+2} \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\}$$



مثال: نامعادلات معادل را حل کنید. و مجموعه جواب آنها را روی محور اعداد مشخص کنید.

$$\frac{m-8}{3} - \frac{1}{4} \leq \frac{m}{2}$$

$$-2 - \frac{9}{5} \leq \frac{3-9}{2}$$

مثال: علامت اعداد حقیقی a ، b و c را طوری تعیین کنید که نابرابری های زیر برقرار باشند.

$$\frac{bc}{a} < 0 \Rightarrow \begin{cases} b < 0, c < 0, a < 0 \\ b < 0, c > 0, a > 0 \\ b > 0, c < 0, a > 0 \\ b > 0, c > 0, a < 0 \end{cases}$$

$$abc < 0 \Rightarrow \begin{cases} a, b, c < 0 \\ a, b > 0, c < 0 \\ a, c > 0, b < 0 \\ b, c > 0, a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{b^2}{ac} > 0 \Rightarrow \begin{cases} b > 0, a > 0, c > 0 \\ b < 0, a < 0, c < 0 \\ b < 0, a > 0, c > 0 \\ b > 0, a < 0, c < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{bc} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0, b, c < 0 \\ a > 0, b, c > 0 \end{cases}$$

نکته: مقدار a نمی تواند منفی باشد چون زیر رادیکال است.



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

فیروز محمودی

همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

صفحه

سؤال امتحانی :

۱- اگر $x^2 > y^2$ باشد، آیا همواره می توان نتیجه گرفت که $x > y$ می باشد؟ چرا؟

جواب: خیر. با یک مثال نقض می توان نشان داد که اگر $x^2 > y^2$ باشد، دلیل نداد که حتماً باید $x > y$ باشد.

$(-2)^2 > (-3)^2$ می باشد ولی نمی توان نتیجه گرفت که $-2 > -3$ می باشد.

۲- اگر $m > n$ و $m^2 > n^2$ باشد، نشان دهید که $m > n$ می باشد.

جواب: $m > 0, n > 0 \Rightarrow m + n > 0$

$m^2 > n^2 \Rightarrow m^2 - n^2 > 0$



الکون از اتحاد مزدوج کمک می گیریم.

$(m-n) \cdot (m+n) = m^2 - n^2 \Rightarrow m-n > 0 \Rightarrow m > n$

۳- عبارات کلامی زیر را به زبان ریاضی بیان کنید.

الف) مجموع دو عدد، حداکثر ۵ می باشد.

$x + y \leq 5$

ب) دو برابر عددی منهای ۵ بزرگتر از سه برابر همان عدد است.

$2x - 5 > 3x$

ج) مجموع سه سه نفر حداقل ۱۲ سال می باشد.

$x + y + z \geq 12$

د) سه برابر عددی از هفت کوچکتر است.

$3x < 7$

ه) عدد چهار از قرینه‌ی سه برابر عددی بزرگتر است.

$4 > -3x$

ت) مربع هر عدد، همواره نامنفی است.

$x^2 \geq 0$

« منظور از مربع یک عدد یعنی این که آن عدد را به توان ۲ برسانیم مثال: $7^2 = 7 \times 7 = 49$ مربع ۷ »

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

فیروز محمودی

همراه : ۰۲۷۲۵۲۰۱۳۷۰۹

صفحه

ک چند عدد طبیعی وجود دارد که اتر از دو برابر آنها ۵ واحد کم کنیم، حاصل کمتر از ۱۱ شود؟
(آزمون ورودی نمونه دولتی ۹۷ مازندران)

$$x = \text{عدد مورد نظر} \Rightarrow 2x - 5 < 11$$

$$2x < 11 + 5$$

$$2x < 16$$

$$x < \frac{16}{2} \Rightarrow x < 8$$

پس باید تمام اعداد طبیعی کمتر از ۸ را در نظر بگیریم:
که تعداد این اعداد لا قاعی باشد.

جواب سؤال = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷

۵- نامعادلات مقابل را حل کنید و مجموعه جواب آنها را روی محور اعداد مشخص کنید.

$$+5x + 1 > +3x + 7$$

$$+3x + 4 \leq +5x + 10$$



۶- نامعادلهی مقابل را حل کنید و مجموعه جواب آن را روی محور اعداد مشخص کنید.

$$-2(-3x + 1) \leq +9x + 14$$

$$+6x - 2 \leq +9x + 14$$

$$+6x - 9x \leq +14 + 2$$

$$-3x \leq +18$$

منفی شد

$$x \geq \frac{+18}{-3}$$

$$x \geq -6$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$$



۷- مجموعه جواب نامعادلهی مقابل کدام است؟ (نمونه دولتی ۹۲ - اصفهان و یاسوج)

$$\frac{x}{2} - 3 \geq 3x - \frac{3}{2}$$

الف) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \leq \frac{3}{5}\}$

$$\frac{x \times 1}{2 \times 1} - \frac{3 \times 2}{1 \times 2} \geq \frac{3 \times x \times 2}{1 \times 2} - \frac{3 \times 1}{2 \times 1}$$

ب) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \leq -\frac{3}{5}\}$ ✓

$$x - 6 \geq 6x - 3$$

$$x - 6x \geq -3 + 6$$

$$-5x \geq +3$$

$$x \leq \frac{+3}{-5} \Rightarrow x \leq -\frac{3}{5}$$



۸- مجموعه جواب نامعادلهی مقابل چند عضو حسابی دارد؟ (نمونه دولتی ۹۲ - بوئسهر - خوزستان)

$$\frac{x-3}{5} + 2 \geq \frac{x}{2}$$

$$\frac{2x(x-3)}{5 \times 2} + \frac{2 \times 10}{1 \times 10} \geq \frac{x \times 5}{2 \times 5}$$

$$2(x-3) + 20 \geq 5x$$

$$2x - 6 + 20 \geq 5x$$

$$2x - 5x \geq -20 + 6$$

$$-3x \geq -14$$

$$x \leq \frac{-14}{-3} \Rightarrow x \leq +\frac{14}{3} \Rightarrow x \leq 4,6$$

الکون واضح است که اعداد حسابی کمتر از ۴٫۶ عبارتند از: ۴، ۳ و ۲ واره که تعداد این اعداد پنج تا می باشد.

الف) سه تا
ب) چهار تا
ج) پنج تا ✓
د) بی شمار

۹- مجموعه جواب نامعادلهی مقابل کدام است؟ (نمونه دولتی ۹۲ - گیلان)

$$x(x-1) \leq 2x + x^2 - 3$$

الف) $x \leq 2$
ب) $x \leq 1$
ج) $x \geq 1$ ✓
د) $x > 2$

$$+x^2 - x \leq 2x + x^2 - 3$$

$$-x \leq 2x - 3$$

$$-x - 2x \leq -3$$

$$-3x \leq -3$$

$$x \geq \frac{-3}{-3} \Rightarrow x \geq +1$$



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

فیروز محمودی

صفحه

۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

۱۰- مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل کدام است؟ (نمونه دولتی ۹۷-۹۸-۹۹)

$$(x+2)(x+3) > (x+4)(x-1)$$

- الف) $x < -5$ ج) $x > -5$
 ب) $x > 5$ د) $x < 5$

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &> x^2 + 3x - 4 \\ +5x + 6 &> +3x - 4 \\ +5x - 3x &> -4 - 6 \\ +2x &> -10 \\ x &> \frac{-10}{+2} \Rightarrow x > -5 \end{aligned}$$

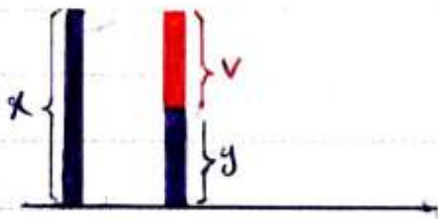


لازم به ذکر است که عبارات $(x+2)(x+3)$ و $(x+4)(x-1)$ اتحاد جمله‌ی مشترک می‌باشند

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

$$(x+4)(x-1) = x^2 + 3x - 4$$

۱۱- اگر $x = y + 7$ باشد می‌توان گفت که



- الف) $x > y$ ج) $x = y$
 ب) $x < y$ د) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

۱۲- اگر $x + 1 = y + 3$ باشد می‌توان گفت که:

$$\begin{aligned} x + 1 &= y + 3 \\ x &= y + 3 - 1 \\ x &= y + 2 \Rightarrow x > y \end{aligned}$$

- الف) $x > y$ ج) $x = y$
 ب) $x < y$ د) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

۱۳- با توجه به عبارات داده شده، یکی از عبارات داخل پرانتز را که مناسب است انتخاب کنید

الف) اگر $2m = -5m$ باشد، آنگاه ... ($m < n$, $m > n$)

ب) اگر $\frac{a^2}{b} < 0$ باشد، می‌توان گفت که ... ($b < 0$, $b > 0$)

ج) اگر $a + 7 = b - 4$ باشد، می‌توان گفت که: ($a < b$, $a > b$)

۱۴- حاصل عبارات معادل را به کمک اتحادها بدست آورید.

$$(3x + 5)^2 =$$

$$(x - 3y)^2 =$$

$$(-2x + 4y)^2 =$$

$$(x - 4y) \cdot (x + 4y) =$$

$$(3x + 5) \cdot (3x - 5) =$$

$$(x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) =$$

$$(x + 5) \cdot (x + 7) =$$

$$(x + 3) \cdot (x - 8) =$$

$$(x - 7) \cdot (x - 1) =$$

$$(3x + 5) \cdot (3x - 9) =$$



۱۵- عبارات جبری مقابل را تفکیک کنید.

$$x^2 + 3x - 10 =$$

$$x^2 + 5x - 24 =$$

$$x^2 - 4y^2 =$$

$$25m^2 - \frac{1}{9}n^2 =$$

$$9x^2 - 11y^2 =$$

$$x^3 + 8x^2 + 15x = x \cdot \underbrace{[x^2 + 8x + 15]}_{\text{اتحاد جمله‌ای مشترک}} = x(x+3)(x+5)$$

۱۶- مجموعه جواب نامعادلات مقابل را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$3(2x+1) \geq x+7$$

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \geq \frac{x-1}{3}$$

