

۱- صورت کلی معادله برابر $y = ax + b$ می باشد، که در آن عدد a شیب خط و عدد b عرض از مبدأ می باشد.
مثال: در معادله خط $y = 2x - 3$ عدد ۲ شیب خط و عدد -۳ عرض از مبدأ خط می باشد.

تعریف عرض از مبدأ: محل برخورد خط با محور عرض را عرض از مبدأ خط نامند.

۲- خط $y = ax + b$ محور عرض را در نقطه ای به مختصات $[b]$ قطع می کند.
به عبارتی دیگر نقطه ای که طولش صفر است، عرضش همان عرض از مبدأ می باشد.

مثال: معادله خطی را بنویسید، که شیب آن -۳ و از نقطه $[5]$ بگذرد.

حل: شیب خط (a) برابر -۳ و چون خط از نقطه $[5]$ می گذرد پس عرض از مبدأ (b) آن ۵ می باشد پس معادله آن برابر است با:

$$y = -3x + 5$$

۳- صورت کلی معادله خطی که از مبدأ مختصات می گذرد برابر است با: $y = ax$

تذکر! برای پیدا کردن شیب خط های که مبدأ مختصات می گذرند کافیست عرض نقطه داده شده را بر طول آن تقسیم کنیم،

$$\text{چون: } y = ax \rightarrow a = \frac{y}{x}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقاط $[3]$ و $[0]$ بگذرد.

$$\text{حل: } a = \frac{y}{x} \rightarrow a = \frac{-6}{3} = -2 \quad \text{پس معادله خط برابر است با: } y = -2x$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات و نقطه $[5]$ بگذرد؟

$$\text{حل: } a = \frac{y}{x} \rightarrow a = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} \quad \text{پس معادله خط برابر است با: } y = \frac{2}{5}x$$

۴- برای اینکه نشان دهیم نقطه ای روی یک قرار دارد یا ندارد، کافیست طول و عرض نقطه داده شده را در معادله خط داده شده به جای x و y قرار دهیم و با انجام محاسبات اگر دو عدد بدست آمده با هم برابر شدند، گوییم آن نقطه روی خط قرار دارد و اگر دو عدد بدست آمده برابر نشدند می گوییم قرار ندارد.

مثال: آیا نقطه $A = [-3]$ روی خط $y = -2x + 1$ قرار دارد؟ چرا؟

حل: مختصات نقطه A را در معادله به جای x و y قرار می دهیم خواهیم داشت:

$$-3 = -2(2) + 1 \rightarrow -3 = -4 + 1 \rightarrow -3 = -3 \quad \checkmark$$

مثال: آیا نقطه $B = [-3]$ روی خط $y = -\frac{1}{2}x + 3$ قرار دارد؟ چرا؟

حل: مختصات نقطه B را در معادله به جای x و y قرار می دهیم خواهیم داشت:

$$-3 = -\frac{1}{2}(-2) + 3 \rightarrow -3 = +1 + 3 \rightarrow -3 \neq +4 \quad \times$$

۵- در بعضی سوالات طول یا عرض نقطه و معادله خط را می دهند و مختصات نقطه را می خواهند، برای حل اینگونه سوالات کفایت طول نقطه داده شده را در معادله خط به جای x قرار داده و اگر عرض را داده باشند به جای y قرار دهیم و با حل معادله بدست آمده مقدار x و یا y را بدست آوریم.

مثال: مختصات نقطه ای از خط $y = -3x + 2$ را پیدا کنید که طول آن ۲- باشد.

حل: برای حل کفایت طول نقطه داده شده یعنی ۲- را در معادله خط به جای x قرار دهیم و مقدار y یعنی عرض نقطه را بدست آوریم یعنی:

$$y = -3(-2) + 2 \rightarrow y = +6 + 2 = +8 \rightarrow y = +8$$

پس مختصات نقطه خواسته شده برابر با $\begin{bmatrix} -2 \\ +8 \end{bmatrix}$ است.

مثال: مختصات نقطه ای از خط $y = 2x - 5$ را پیدا کنید که عرض آن ۳ باشد.

حل: برای حل کفایت عرض نقطه داده شده یعنی ۳ را در معادله خط به جای y قرار دهیم و مقدار x یعنی طول نقطه را بدست آوریم یعنی:

$$2x - 5 = 3 \rightarrow 2x = 3 + 5 = 8 \rightarrow x = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow x = 4$$

پس مختصات نقطه خواسته شده برابر با $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ است.

۶- برای پیدا کردن نقطه برخورد خط با محورهای مختصات کفایت در معادله خط یک بار به جای x صفر قرار داده و مقدار y را بدست آوریم.

و در بار دوم بجای y صفر قرار داده و مقدار x را بدست آوریم.

مثال: نقطه برخورد خط $y = -3x + 2$ با محورهای مختصات را حساب کنید.

حل: ابتدا در معادله خط بجای x صفر قرار داده و y را حساب می کنیم، یعنی:

$$x = 0 \rightarrow y = -3(0) + 2 \rightarrow y = 0 + 2 = 2 \rightarrow y = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حال در معادله خط بجای y صفر گذاشته و x را بدست می آوریم، یعنی:

$$y = 0 \rightarrow -3x + 2 = 0 \rightarrow -3x = -2 \rightarrow x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

۷- دو خط با موازی اند، اگر دارای شیب مساوی باشند. یعنی دو خط $y = ax + b$ و $y = ax + b$ با هم موازیند.

مثال: دو خط $y = -5x - 1$ و $y = -5x + 7$ موازی اند، زیرا شیب هر دو خط برابر ۵- است.

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $y = 3x - 5$ موازی بوده و عرض از مبدأ آن ۲ باشد.

حل: چون دو خط با هم موازی اند پس شیب هر دو برابر ۳ می باشد و از طرفی چون عرض از مبدأ آن ۲ می باشد، پس معادله آن برابر است با:

$$y = 3x + 2$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $y = -\frac{2}{3}x + 1$ موازی باشد، و از نقطه $(-6, 0)$ بگذرد.

حل: چون دو خط موازی اند پس شیب هر دو $-\frac{2}{3}$ می باشد. و از طرفی چون طول نقطه داده شده صفر است پس عرض آن یعنی -6 همان عرض از مبدأ است. پس معادله خط برابر است با:

$$y = -\frac{2}{3}x - 6$$

۸- روش نوشتن معادله خطی که شیب و یک نقطه آن را داریم:

ابتدا در صورت کلی معادله خط یعنی $y = ax + b$ به جای a شیب داده شده را قرار می دهیم و پیدا کردن b یا همان عرض از مبدأ کافیست طول و عرض نقطه داده شده را در معادله بدست آمده بجای x و y قرار داده و مقدار b را حساب کنیم و در پایان با توجه به عرض از مبدأ بدست آمده معادله خط خواسته شده را نوشت.

مثال: معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۲ و از نقطه $M = (\frac{5}{3})$ بگذرد.

حل: چون شیب خط خواسته شده ۲ می باشد پس معادله خط به صورت $y = 2x + b$ می باشد. حال برای پیدا کردن b یا همان عرض از مبدأ طول و عرض نقطه M را در معادله $y = 2x + b$ بجای x و y قرار داده و مقدار b را بدست می آوریم، یعنی:

$$2(\frac{5}{3}) + b = 3 \rightarrow 10 + b = 3 \rightarrow b = 3 - 10 = -7 \rightarrow b = -7$$

بنابراین معادله خط خواسته شده برابر است با:

$$y = 2x - 7$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $y = -5x + 1$ موازی بوده و از نقطه $N = (-3, -1)$ بگذرد.

حل: چون خط خواسته شده با خط $y = -5x + 1$ موازی است پس شیب آن خط نیز -5 می باشد. بنابراین معادله آن برابر است با:

$$y = -5x + b$$

و حال برای پیدا کردن b بجای x و y طول و عرض نقطه N را قرار داده و مقدار b را بدست می آوریم، یعنی:

$$-5(-3) + b = -1 \rightarrow 15 + b = -1 \rightarrow b = -1 - 15 \rightarrow b = -16$$

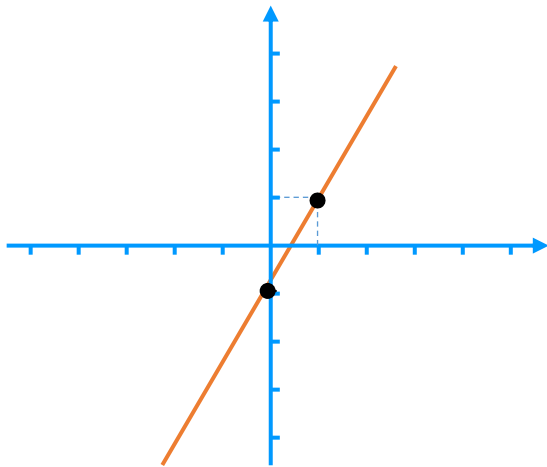
بنابراین معادله خط خواسته شده برابر است با:

$$y = -5x - 16$$

۹- رسم خط: برای رسم کردن خطی که معادله اش را داریم کافیست دو نقطه از خط را در جدول پیدا کنیم و چون از دو نقطه فقط یک خط راست می گذرد، خط مفروض را رسم کنیم.

تذکر! برای پیدا کردن نقطه ها بهتر است برای نقطه اول بجای متغیر x عدد صفر را گذاشته و با توجه به معادله داده شده مقدار y را بدست آوریم.

و هم چنین برای نقطه دوم بهتر است بجای x عدد یک را قرار دهیم و مقدار y را بدست آوریم، تا نقطه دوم نیز بدست آید. و در پایان دو نقطه بدست آمده را در دستگاه مختصات پیدا کرده و خطی که از آن دو نقطه می گذرد را رسم کنیم.



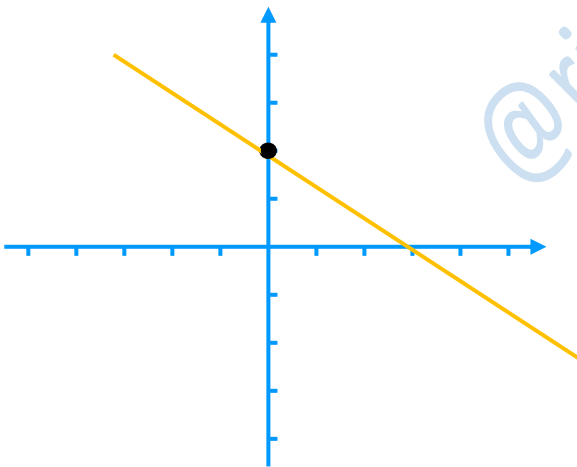
مثال: خط $y = 2x - 1$ را رسم کنید.

x	0	1
y	$2(0) - 1 = -1$	$2(1) - 1 = 1$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

تذکر! اگر ضریب x در معادله خط کسری باشد برای پیدا کردن نقطه دوم بهتر است بجای x مخرج کسر را قرار دهیم تا در محاسبه با مخرج ساده شود و راحت تر بتوان نقطه را بدست آورد.

مثال: خط $y = -\frac{2}{3}x + 2$ را رسم کنید.

حل: چون ضریب x کسری است پس برای بدست آوردن نقطه دوم در جدول بجای x عدد 3 را قرار می دهیم تا با 3 مخرج ساده شود.



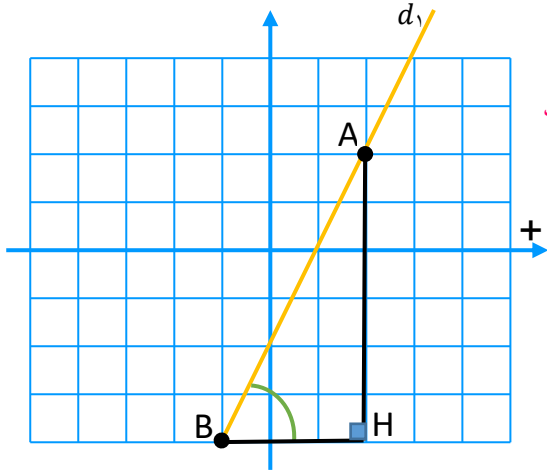
x	0	3
y	$-\frac{2}{3}(0) + 2 = 2$	$-\frac{2}{3}(3) + 2 = -2 + 2 = 0$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

۱۰- روش پیدا کردن شیب خط از روی خطی که رسم شده است.

تذکر! اگر زاویه ای که خط با جهت مثبت محور طول ها (x ها) می سازد، تند باشد شیب خط مثبت است. و اگر زاویه ای که خط با جهت مثبت محور طول ها (x ها) می سازد، باز باشد شیب خط منفی است.

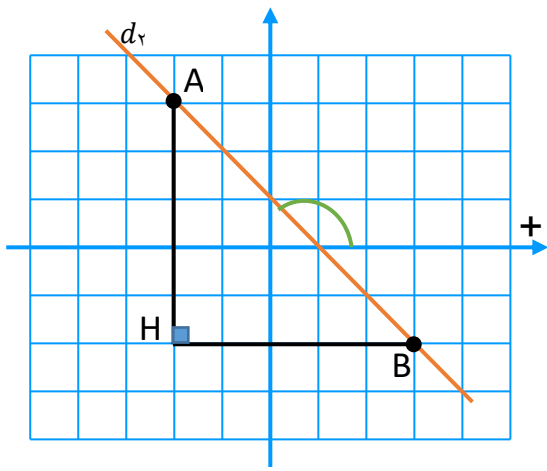
تذکر! برای پیدا کردن عدد شیب باید با دو نقطه ای که روی خط داده شده می گیریم، یک مثلث قائم الزاویه بسازیم. در این صورت نسبت بلندا مثلث به پهنای مثلث همان عدد شیب خط می باشد.

مثال: شیب خط های رسم شده را پیدا کنید.



حل: چون زاویه ای که خط d_1 با جهت مثبت محور طول می سازد تند است، پس شیب مثبت است.
حال برای پیدا کردن عدد شیب دو نقطه دلخواه روی خط در نظر می گیریم.

$$\text{شیب} = +\frac{AH}{BH} = +\frac{6}{3} = +2$$



حل: چون زاویه ای که خط d_2 با جهت مثبت محور طول می سازد باز است، پس شیب منفی است.

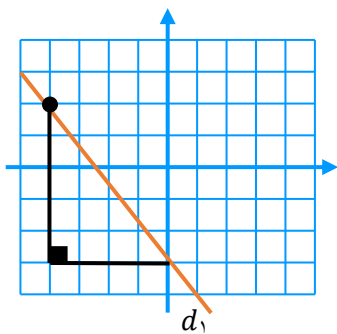
$$\text{شیب} = -\frac{AH}{BH} = -\frac{5}{5} = -1$$

تذکره! محل برخورد خط با محور عرض را عرض از مبدأ نامند.

۱۱- روش نوشتن معادله خط با توجه به خطی که رسم شده است

برای نوشتن معادله خط با توجه به خط رسم شده شیب و عرض از مبدأ خط را با توجه به نکات قبلی پیدا کرده و در صورت کلی معادله خط $y = ax + b$ به جای a و b قرار داده و معادله خط را می نویسیم.

مثال: معادله خط زیر را بنویسید.



$-3 =$ عرض از مبدأ

چون زاویه ای که خط با جهت محور طول ها می سازد، باز است. پس شیب منفی است.
پس برای پیدا کردن عدد شیب دو نقطه روی خط در نظر گرفته و مثلث قائم الزاویه مربوطه را رسم می کنیم و عدد شیب را بدست می آوریم. یعنی:

$$\text{شیب خط} = -\frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{5}{4}x - 3$$

پس معادله خط d_1 برابر است با:

۱۲- اگر $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط باشند، در این صورت شیب خط برابر است با:

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{اختلاف عرض ها}}{\text{اختلاف طول ها}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط هستند، شیب خط را بدست آورید.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - (-2)}{1 - (-3)} = \frac{8}{4} = 2$$

مثال: $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ دو نقطه از یک خط هستند، معادله خط را بنویسید.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{-1 - 2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

پس معادله خط برابر $y = -\frac{1}{3}x + b$ می باشد، و برای پیدا کردن عرض از مبدأ یعنی b کفایت مختصات یکی از نقاط داده شده در صورت سوال را در معادله $y = -\frac{1}{3}x + b$ به جای x و y قرار دهیم تا مقدار b را بدست آوریم یعنی:

$$-\frac{1}{3}(3) + b = 2 \rightarrow -1 + b = 2 \rightarrow b = 2 + 1 \rightarrow b = 3$$

پس معادله خط خواسته شده برابر است با:

$$y = -\frac{1}{3}x + 3$$

۱۳- معادله خطی را بنویسید که شیب آن -3 و از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

حل: با توجه به شیب خط داده شده معادله خواسته شده برابر است با:

$$y = -3x + b$$

و برای پیدا کردن b یعنی عرض از مبدأ باید مختصات نقطه داده شده را در معادله $y = -3x + b$ به جای x و y قرار می دهیم. یعنی:

$$-3(3) + b = 4 \rightarrow -9 + b = 4 \rightarrow b = 4 + 9 \rightarrow b = 13$$

پس معادله خواسته شده برابر است با:

$$y = -3x + 13$$

۱۴- معادله خط های موازی با محورها:

(الف) هر خط به صورت $x = a$ موازی با محور عرض ها (y ها) و عمود بر محور طول ها (x ها) است.

(ب) هر خط به صورت $y = b$ موازی با محور طول ها (x ها) و عمود بر محور عرض ها (y ها) است.

مثال: خط $x = 3$ موازی محور عرض ها و عمود بر محور طول هاست.

مثال: خط $y = -5$ موازی با طول ها و عمود بر محور عرض هاست.

۱۵- اگر نقاط داده شده دارای طول یا عرض ثابت باشند، در این خط های که از این نقاط می گذرد موازی با محور هاست.

اگر طول نقاط ثابت باشد موازی محور عرض ها و اگر عرض نقاط ثابت باشد، موازی محور طول هاست.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ می گذرد.

حل: چون طول نقاط داده شده ثابت و برابر -2 می باشد، پس خط داده شده موازی محور عرض هاست. یعنی معادله آن برابر

$$\text{است با: } x = -2$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

حل: چون عرض نقاط داده شده ثابت و برابر ۳ می باشد، پس خط داده شده موازی محور طول هاست. یعنی معادله آن برابر است با:

$$y = 3$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد، و با محور عرض ها موازی باشد؟

حل: چون خط خواسته شده باید موازی محور عرض ها باشد، پس طول آن ثابت و برابر ۵- است یعنی معادله آن برابر است با:

$$x = -5$$

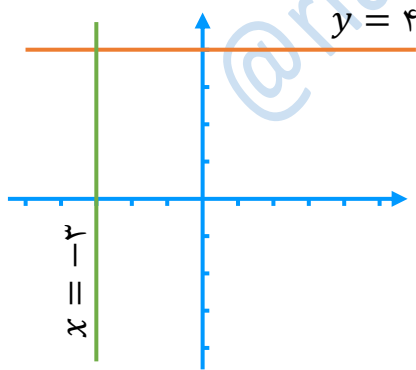
مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد، و با محور طول ها موازی باشد؟

حل: چون خط خواسته شده باید موازی محور طول ها باشد، پس عرض آن ثابت و برابر ۲ است یعنی معادله آن برابر است با:

$$y = 2$$

۱۶- برای رسم معادله خط های موازی با محورها یعنی $x = a$ و $y = b$ نیاز به رسم جدول و پیدا کردن نقطه نیست. بلکه کافیت، طول یا عرض داده شده را روی محور مربوطه پیدا کنیم و موازی با محور مخالف با نام خط داده شده رسم کنیم.

مثال: خط های $x = -3$ و $y = 4$ را رسم کنید.



۱۷- صورت دیگر معادله خط:

هر خط به صورت $ax + by = c$ را صورت دیگر معادله خط گویند. زیرا به صورت کلی $y = ax + b$ نمی باشد.

تذکر! برای پیدا کردن شیب و عرض از مبدأ خط $ax + by = c$ باید با تغییراتی که روی آن انجام می دهیم، آن را به صورت کلی $y = ax + b$ بنویسیم. تا بتوانیم شیب و عرض از مبدأ آن را بنویسیم.

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $2x - 3y = 6$ را بنویسد.

حل: برای نوشتن شیب و عرض از مبدأ این خط باید آن را به صورت $y = ax + b$ بنویسیم. یعنی:

$$2x - 3y = 6 \rightarrow -3y = -2x + 6 \rightarrow \frac{-2}{-3}y = \frac{-2}{-3}x + \frac{6}{-3} \rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$$

پس:

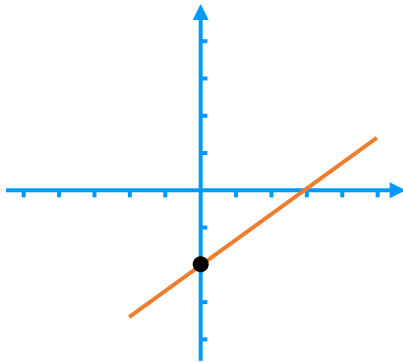
$$-2 = \text{عرض از مبدأ}, \quad \frac{2}{3} = \text{شیب}$$

۱۸- رسم خط $ax + by = c$ با صورت کلی خط نیز کمی تفاوت دارد. یعنی در جدول برای پیدا کردن دو نقطه برای رسم

کردن مثل صورت کلی ابتدا به جای x عدد صفر قرار داده و مقدار y را بدست می آوریم.

اما برای نقطه دوم برخلاف صورت کلی این بار به جای y عدد صفر را قرار داده و مقدار x را حساب می کنیم. و سپس با دو نقطه پیدا شده خط مربوطه را رسم می کنیم.

مثال: خط $2x - 3y = 6$ را رسم کنید.



x	\circ	$2x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$
y	$-3y = 6 \rightarrow y = \frac{6}{-3} = -2$	\circ
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$