

فصل اول

معادله درجه دوم

امام صادق علیه السلام فرمودند:

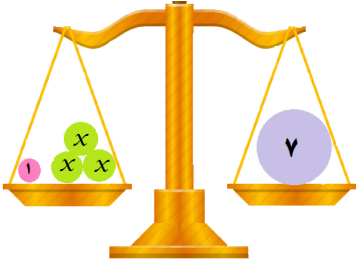
بنویسید، زیرا شما نمی‌توانید جز با نگارش

دانش را حفظ و از آن نگهداری کنید.

معادله و مسائل توصیفی



تمرین ۱: با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



تمرین ۲: عددی را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

هر معادله به صورت $ax + b = 0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند. تنها جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می آید.

تمرین ۳: احمد ۷۰۰۰ تومان پول داشت، که با آن ۴ عدد خودکار خرید و ۴۰۰ تومان نیز برایش باقی ماند. با استفاده از معادله حساب کنید احمد هر خودکار را چند تومان خریده است؟

تمرین ۴: مجموع چهار عدد طبیعی متوالی ۳۴ است آن اعداد را بدست آورید.

تمرین ۵ : به ۳ برابر عددی ۲ واحد اضافه کردیم حاصل برابر ۲۰ شد آن عدد را بدست آورید؟

تمرین ۶ : یک حواصیل خاکستری به دسته ای حواصیل سفید رسید و به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم. یکی از آنها پاسخ داد اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد:
(ما و ما نصف ما و نیمه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم))
معادله این معما را بنویسید و سپس آن را حل کنید.

تمرین ۷ : محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.

تمرین ۸ : عددی بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

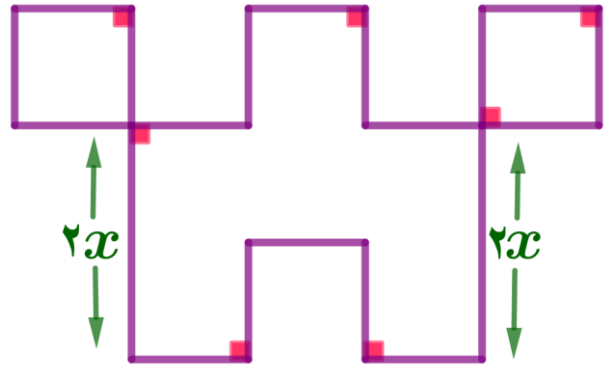
الف) معادله آن را بنویسید.

ب) از میان مقادیر روبرو کدام یک می تواند جواب معادله باشد؟ $x=0$ $x=1$ $x=-3$ $x=4$ $x=3$

پ) برای حل معادله بالا از روش تجزیه استفاده کنید.

معادله درجه دوم، معادله ای به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن $a \neq 0$ ضریب x^2 ، b ضریب x و c عدد ثابت است.

تمرین ۹: در شکل زیر طول تمام پاره خط ها به جز دو پاره خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.



تمرین ۱۰: نینا از پسر عمویش کیان، سه سال بزرگ تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسر عموی کوچک تر چند سال دارد؟

روش های حل معادلات درجه دوم

فرمول کلی (دلتا)

مربع کامل

تجزیه

حل معادله درجه دوم یعنی بدست آوردن مقادیری که به ازای آن ها تساوی برقرار باشد.



نکته : در صورتی که بتوانیم معادله ی درجه دوم را تجزیه کنیم به دو معادله درجه اول می رسیم که جواب دارند.

تمرین ۱۱ : معادله $x^2 + 6x = 0$ را حل کنید.

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow (x)(x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

تمرین ۱۲ : معادله $x^2 - 5x = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۳ : معادله $x^2 - 16 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۴ : معادله $4x^2 - 9 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۵ : معادله $x^2 + 25 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۱۶ : معادله $x^2 + 6x + 9 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۱۷ : معادلہ $x^2 - 10x + 25 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۱۸ : معادلہ $9x^2 + 42x + 49 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۱۹ : معادلہ $x^2 + 5x + 6 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۲۰ : معادلہ $x^2 + 3x - 4 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۲۱ : معادلہ $x^2 - 5x - 36 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۲۲ : معادلہ $x^2 + 6x - 40 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۲۳ : معادله $3x^2 - 12x - 63 = 0$ را حل کنید.

مرحله ۱ : تمام معادله را بر ضریب x^2 (در اینجا ۳) تقسیم می کنیم.

$$3x^2 - 12x - 63 = 0 \Rightarrow \frac{3}{3}x^2 - \frac{12}{3}x - \frac{63}{3} = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

مرحله ۲ : مجهول را در یک طرف تساوی نگه می داریم و عدد ثابت را به طرف دیگر می بریم.

$$x^2 - 4x = 21$$

مرحله ۳ : نصف ضریب x را به توان ۲ می رسانیم که در اینجا $(-2)^2 = 4$ است را به دو طرف معادله اضافه می کنیم.

$$x^2 - 4x + 4 = 21 + 4$$

مرحله ۴ : در طرف چپ معادله صورت اتحاد مربع دو جمله ای به صورت $(x-2)^2$ (نصف ضریب $x+x$) بوجود می آید. و درست

$$(x-2)^2 = 25$$

راست نیز یک عدد بدست می آید.

اگر آن عدد منفی باشد معادله جواب حقیقی نخواهد داشت. اگر آن عدد مثبت باشد مرحله بعد را انجام می دهیم.

مرحله ۵ : از دو طرف معادله جذر می گیریم. دو معادله درجه اول بدست می آید آنها را حل می کنیم.

$$(x-2)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x-2=5 \Rightarrow x=5+2 \Rightarrow x=7 \\ x-2=-5 \Rightarrow x=-5+2 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

پس جواب این معادله ۷ و -۳ است.

تمرین ۲۴ : معادله $x^2 + 20x + 30 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۲۵ : معادله $2x^2 - 6x - 1 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۲۶ : معادله $x^2 - 4x + 6 = 0$ را حل کنید.



♦ ۱ در هر معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا باید مقدار عبارت $b^2 - 4ac$ را که با Δ نشان می دهند، بدست آوریم. که سه حالت بوجود می آید.

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ باشد آنگاه معادله دو جواب حقیقی دارد، که از فرمول های بدست می آید.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

مثال حالت اول: معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ را حل کنید.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -3, c = 1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5$$

چون $\Delta > 0$ است پس دو جواب حقیقی دارد:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2(1)} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2(1)} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد آنگاه معادله یک جواب حقیقی دارد، که از فرمول $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می آید.

مثال حالت دوم: معادله $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را حل کنید.

$$9x^2 - 12x + 4 = 0 \Rightarrow a = 9, b = -12, c = 4 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(9)(4) = 144 - 144 = 0$$

چون $\Delta = 0$ است پس یک جواب حقیقی دارد:

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-12)}{2(9)} \Rightarrow x = \frac{12}{18} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد آنگاه معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال حالت سوم: معادله $3x^2 + 7x + 5 = 0$ را حل کنید.

$$3x^2 + 7x + 5 = 0 \Rightarrow a = 3, b = 7, c = 5 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(3)(5) = 49 - 60 = -11$$

چون $\Delta < 0$ است پس جواب حقیقی ندارد.

تمرین ۲۷: معادله $7x^2 + 14x - 28 = 0$ را حل کنید.

تمرین ۲۸: معادله $2x^2 - 7x + 6 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۲۹: معادله $x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ را حل کنید.



تمرین ۳۰: طول ضلع مربعی را پیدا کنید که عدد مربوط به محیط آن مساوی عدد مربوط به مساحت آن باشد.

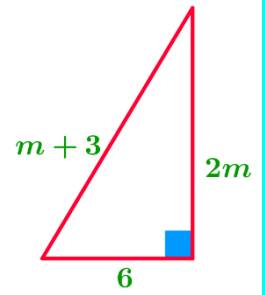


تمرین ۳۱: عدد طبیعی بیابید که اگر در عدد بعد از خودش ضرب شود حاصل ۱۲ شود.



تمرین ۳۲: عدد صحیحی که مجموع مربعش با خودش برابر ۳۰ باشد.

تمرین ۳۳: با توجه به مثلث قائم الزاویه روبرو مقدار n را بدست آورید. آیا چنین مثلثی وجود دارد؟



تمرین ۳۴: جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$ax^2 + bx + c = 0$	ریشه x_1	ریشه x_2	جمع ریشه ها	ضرب ریشه ها	a	b	c	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$4x^2 - 3x - 7 = 0$	-1	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	4	-3	-7	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$
$3x^2 - 5x + 2 = 0$									
$5x^2 + 6x - 8 = 0$									

اگر x_1 و x_2 جواب های یک معادله درجه دوم باشد در این صورت داریم:

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{و} \quad S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

تمرین ۳۵: معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن ۳ و -۴ باشد.

۱۳

تمرین ۳۶ : معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن ۸ و ۵ باشد.

تمرین ۳۷ : معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن $3 \pm \sqrt{5}$ باشد.

اگر S و P حاصل جمع و حاصل ضرب جواب های یک معادله درجه دوم باشد،

شکل این معادله درجه دوم به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

تمرین ۳۸ : معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن $7 \pm \sqrt{2}$ باشد.

تمرین ۳۹ : معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که ریشه های آن ۱۱- و ۷- باشد.

معادله های شامل عبارت های گویا

برای حل معادله های شامل عبارت های گویا ابتدا با توجه به خاصیت معادله و مخرج مشترک گیری، معادله ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می آید. به شرط اینکه $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ است، سپس ریشه های این معادله را به دست می آوریم. از بین ریشه های به دست آمده، آنهایی را قبول می کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند.

تمرین ۴۰: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

تمرین ۴۱: معادله $\frac{x-2}{x-5} - \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

تمرین ۴۲ : معادله $1 + \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x}$ را حل کنید.



تمرین ۴۳ : معادله $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$ را حل کنید.



تمرین ۴۴ : معادله $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$ را حل کنید.

تمرین ۴۵ : معادله $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$ را حل کنید.

$$\frac{y+4}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y} \Rightarrow$$

$$\frac{y+4}{y+3} - \frac{y^2}{(y+3)(y-3)} - 1 + \frac{y-1}{-(y-3)} = 0$$

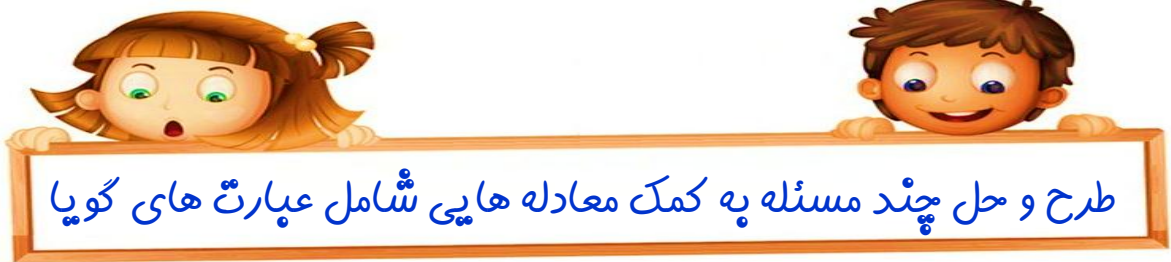
$$\Rightarrow \frac{(y+4) \times (y-3)}{(y+3) \times (y-3)} - \frac{y^2}{(y+3)(y-3)} - \frac{1 \times (y+3)(y-3)}{1 \times (y+3)(y-3)} - \frac{(y-1) \times (y+3)}{(y-3) \times (y+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 - 3y + 4y - 12 - y^2 - y^2 + 3y - 3y + 9 - y^2 - 3y + y + 3}{(y+3)(y-3)} = 0 \Rightarrow \frac{-2y^2 - y}{(y+3)(y-3)} = 0$$

$$\Rightarrow -2y^2 - y = 0 \Rightarrow -y(2y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 2y+1 = 0 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

تمرین ۴۶ : به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است.

تمرین ۴۷: به ازای چه مقدار a معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است.



تمرین ۴۸: گلدانی نقره ای داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است.



تمرین ۴۹: دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پر می کند. چنانچه دو شیر را باهم بازکنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پر می شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می شود؟

تمرین ۵۰: یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها را تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

تکلیف خانه ۱: پمپ A به تنهایی یک چاه را در ۵۰ دقیقه تخلیه می‌کند و پمپ‌های A و B با هم همان چاه را در ۳۰ دقیقه تخلیه می‌کنند. پمپ B به تنهایی در چه مدتی آن چاه را تخلیه می‌کند؟

ریاضی و آمار ۱

تکلیف خانه ۲: آقای صالحی می‌خواهد خانه خود را رنگ آمیزی کند. نقاش اول گفته است می‌تواند خانه او را در ۱۵ روز رنگ آمیزی کند و نقاش دوم گفته است می‌تواند خانه او را در ۱۰ روز رنگ آمیزی کند. اگر آقای صالحی از این دو نقاش بخواهد با هم خانه را رنگ آمیزی کنند، این رنگ آمیزی چند روز طول می‌کشد؟

