

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس اول: تبدیل نمودار تابع

جلسه اول: صفحات ۲ تا ۱۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

در این درس می‌خواهیم عددی مانند a را در دامنه و بر تاج f اثر دهیم و تغییرات f را بررسی کنیم.

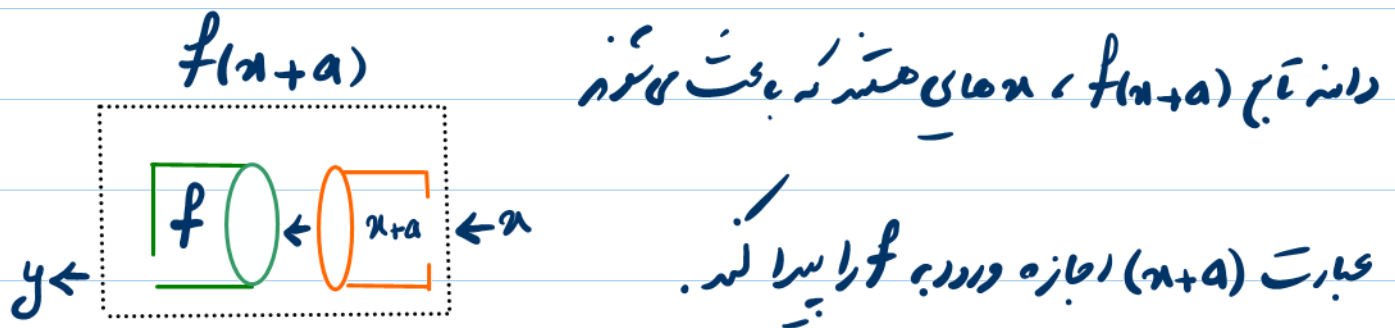
الف) انتقال افقی و عمودی:

۱- $f(x \pm a)$: برای رسم نمودار $y = f(x+a)$ نمودار f را در x ها

a واحد به سمت چپ و برای رسم نمودار $y = f(x-a)$ نمودار

f را در x ها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال افقی)

همچنین نقطه $(x_0 - a, y)$ از نمودار تاج $y = f(x+a)$ مشابه با نقطه (x_0, y) از نمودار $y = f(x)$ است.



$$h(x) = f(x+a) \Rightarrow h(x_0 - a) = f(x_0 - a + a) = f(x_0) = y.$$

۲- $f(x) \pm a$: برای رسم نمودار $y = f(x) + a$ نمودار f را در x ها

a واحد به سمت بالا و برای رسم نمودار $y = f(x) - a$ نمودار

f را روی محور y ها a واحد به سمت راست منتقل کنیم. (انتقال عمودی)

همچنین نقطه $(x_0 + a, y)$ از نمودار تابع $y = f(x) + a$ مشاطر با نقطه (x_0, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

ب) انقباض و انبساط (متی و عمودی):

۱- $f(ax)$: اگر $0 < a < 1$. باشد نمودار f را در راستای محور x ها با

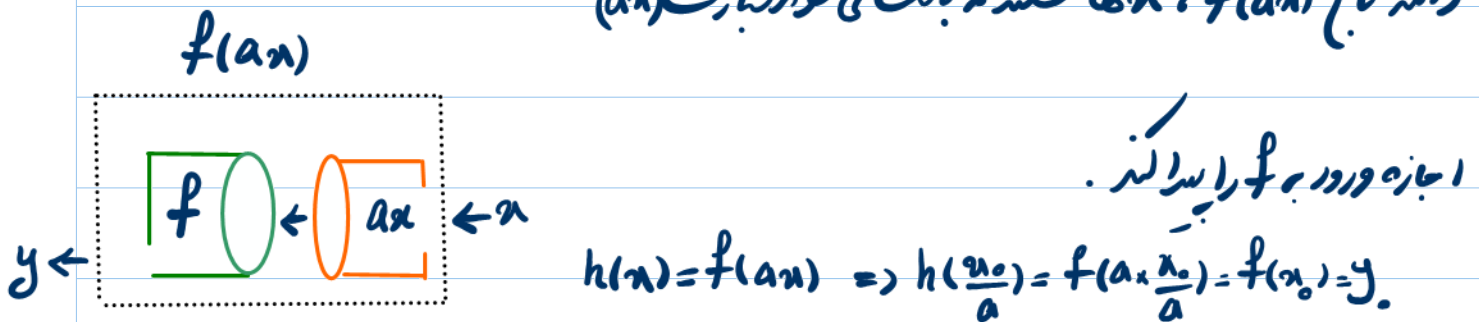
ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم. (دنبساط افقی)

اگر $a > 1$ باشد نمودار f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض

می کنیم. (انقباض افقی)

همچنین نقطه $(\frac{x_0}{a}, y)$ از نمودار تابع $y = f(ax)$ مشاطر با نقطه (x_0, y) از نمودار $y = f(x)$ است.

رابطه تابع $f(ax)$ ، x ها هستند که باعث می شود عبارت $f(ax)$



نکته: در حالت دنبساط و انقباض افقی x با طول نقاط f بر a تقسیم می شوند.

۲- $af(x)$: اگر $1 < a < \infty$ باشد نمودار f را در راستای محور y ها با

ضریب a منقبض می‌کنیم. (انقباض عمودی)

اگر $0 < a < 1$ باشد نمودار f را در راستای محور y ها با ضریب a منبسط

می‌کنیم. (انبساط عمودی)

همچنین نقطه (a_0, y_0) از نمودار تابع $y = af(x)$ و مشاغل با نقطه (x_0, y_0) از نمودار $y = f(x)$ است.

نکته: در حالت انبساط و انقباض عمودی y با عرض نقاط f در a ضرب می‌شوند.

پایان بخش:

۱- $-f(x)$: نمودار f را نسبت به محور x ها قمرینه می‌کنیم.

۲- $f(-x)$: نمودار f را نسبت به محور y ها قمرینه می‌کنیم.

نکته: در انبساط و انقباض a ها اگر a منفی باشد ابتدا a را مثبت می‌گیریم و انبساط یا انقباض

لازم را در پی می‌دهیم، پس در بخش را احتمال می‌کنیم.

ت، ترکیبی:

اگر خواهیم نمودار تابعی به صورت $y = a f(bx + c) + d$ را رسم کنیم،

اولویت تأثیرها را به صورت زیر رعایت می‌کنیم:

$c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow d$

یعنی اول داخل پرانتز تغییرات روی x را اعمال می‌کنیم بعد بیرون پرانتز

تغییرات روی y . وقت کنید باز هم داخل پرانتز اعمال کنیم حال کاری داریم

می‌شوند یعنی اول انتقال افقی (c) و بعد انبساط یا انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{b}$.

در حالیکه در بیرون پرانتز اول انبساط یا انقباض با ضریب a و بعد انتقال عمودی (d)

اعمال می‌شود (به یاد دارید در اولویت اعمال اولویت ضرب و تقسیم از جمع و تفریق

بالاتر بود)

ث) تأثیر قدر مطلق:

۱- $|f|$: نمودار f را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که زیر محور x ها قرار

دارد را مثبت به محور x ها قدرتی می‌کنیم.

۲- $f(|x|)$: قسمتی از نمودار f را که سمت چپ محور y است حذف می‌کنیم و

قدرتی قسمتی را که سمت راست محور y است مثبت به محور x رسم می‌کنیم.

نکته: برای رسم نمودارهای تبدیل یافته کانی است تأثیرات را در دو چند نقطه (نقاط شکستگی یا

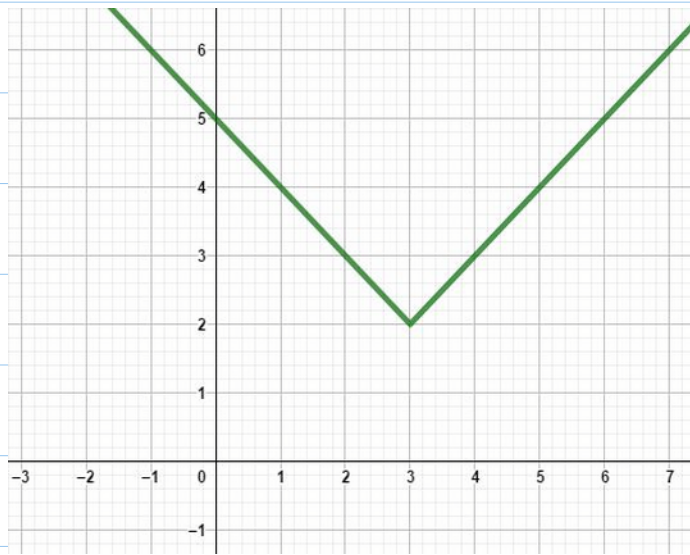
نقاط استبداد آنها یا تغییرات یا اصل بر ضرر با محور x) اعمال کنید و با هم چند نقطه نمودار را رسم کنید.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$|A| = 1 - A \quad \text{یا در سری} \quad f(x) = |x - 3| + 2 \quad \text{دو اف}$$

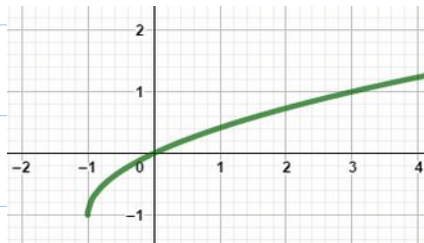
$$f(x) = |x - 3| + 2 = |-(3 - x)| + 2$$

دفعه اول انتی ۳ واحد سمت راست
دفعه دوم خبری ۲ واحد است به بالا

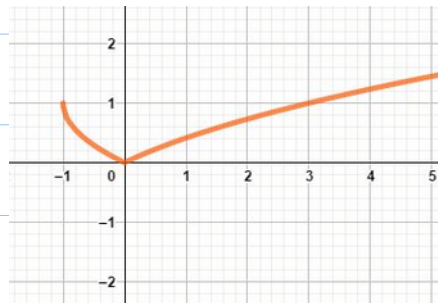


ب) $y = -|\sqrt{x+1} - 1|$

انتقال از یک واحد سمت چپ و انتقال عمودی یک واحد به پایین $y = \sqrt{x+1} - 1$

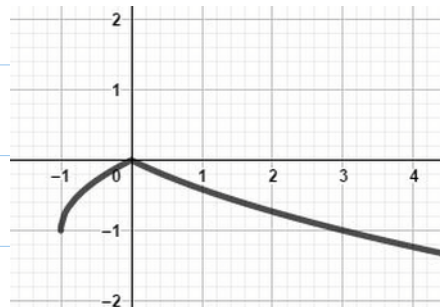


$y = |\sqrt{x+1} - 1|$



تا اثر قدر مطلق :
قسمتی که زیر محور است
بیشتر به محور ما قدرتی می‌دهد

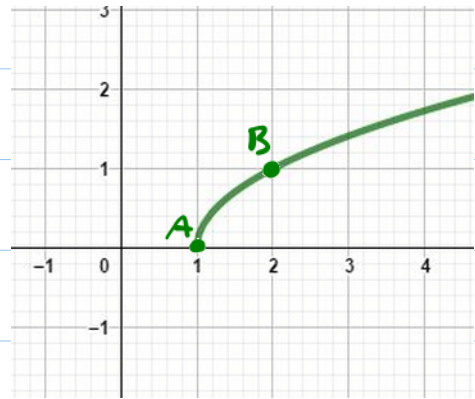
$y = -|\sqrt{x+1} - 1|$



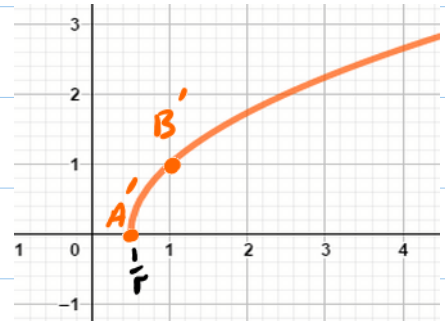
انعکاس :
بندار را نسبت به محور ما
قدرتی می‌کنیم.

ب) $y = \sqrt{2x-1} + 1$

انتقال از ربع یک واحد است



انتقال از ربع با ضرب $\frac{1}{2}$

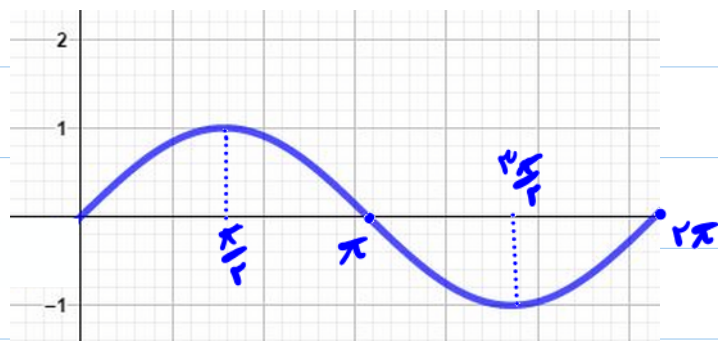


انتقال عمودی یک واحد است

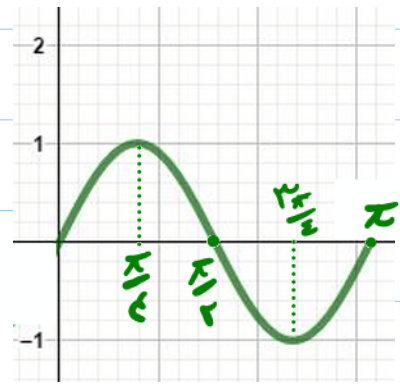


ب) $y = |\sin 2x - 1|$ $[\pi, 2\pi]$

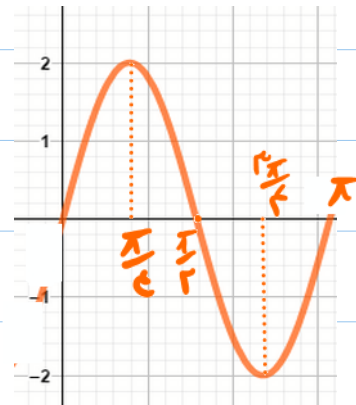
$y = \sin x$



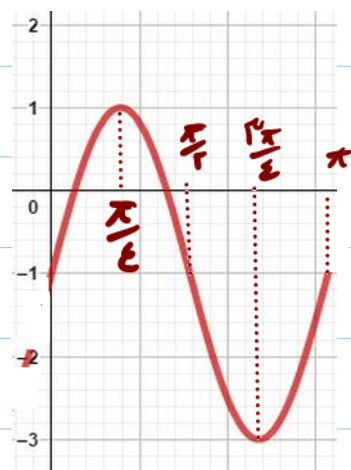
انقباض افقی با ضرب $\frac{1}{2}$
 $y = \sin 2x$



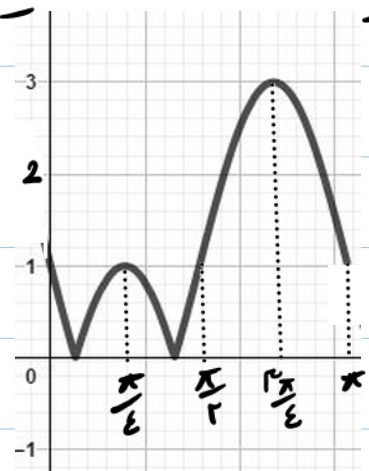
انبساط عمودی با ضرب 2
 $y = 2 \sin 2x$



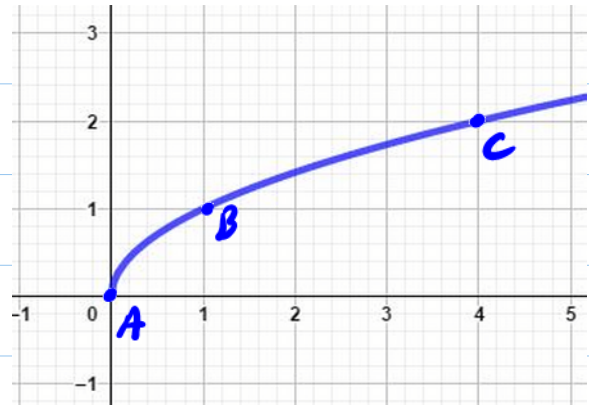
انتقال عمودی با اضافه یا کم کردن
 $y = 2 \sin 2x - 1$



تأثیر قدر مطلق: قسمتی که زیر محور است را قوی می‌کند.
 $y = |2 \sin 2x - 1|$

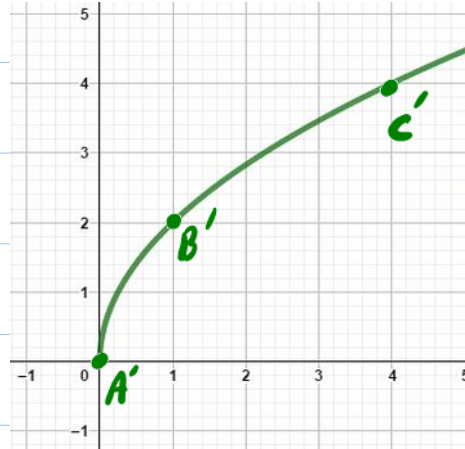


ث) $f(x) = -\sqrt{x} + 1$

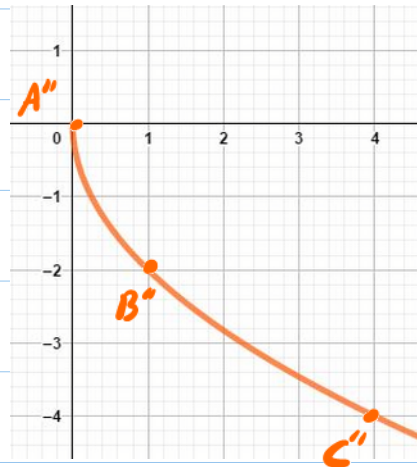


$y = \sqrt{x}$

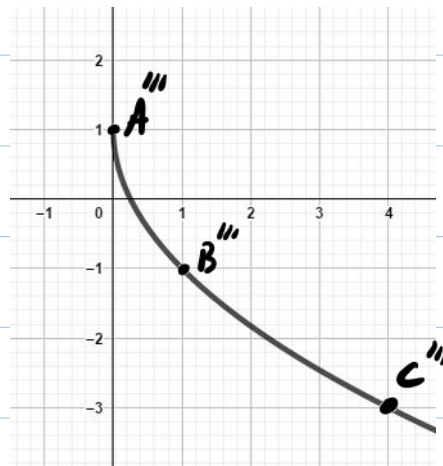
$y = 2\sqrt{x}$ انبساط پذیری با ضرب ۲



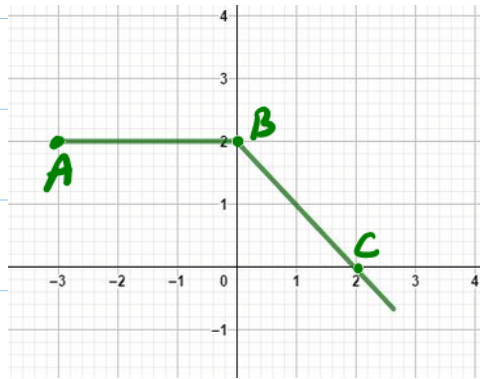
$y = -2\sqrt{x}$ انقباض پذیری با ضرب ۲



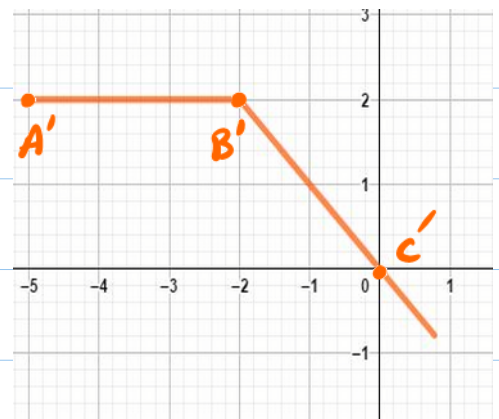
انتقال عمودی یک واحد به بالا $f(x) = -\sqrt{x} + 1$



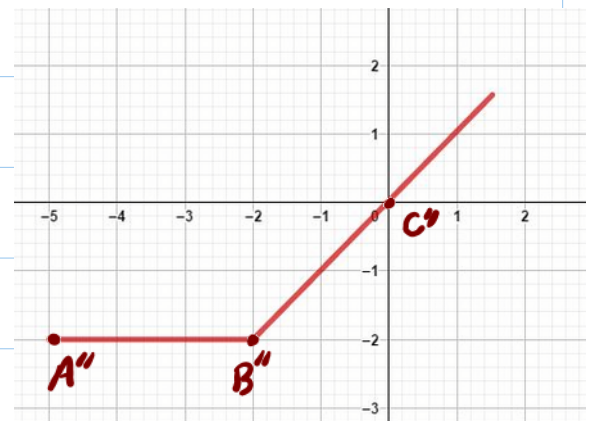
مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = 1 - f(x+2)$ را رسم کنید.



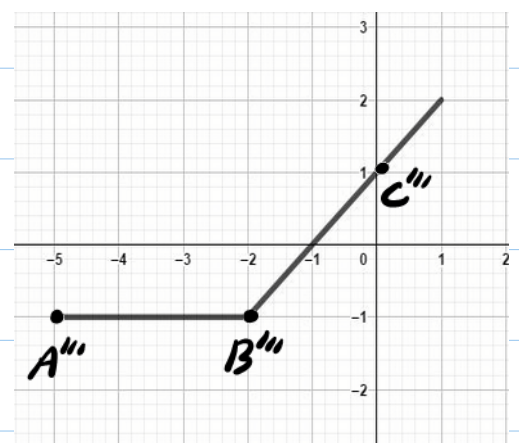
انتقال افقی ۲ واحد چپ
 $y = f(x+2)$



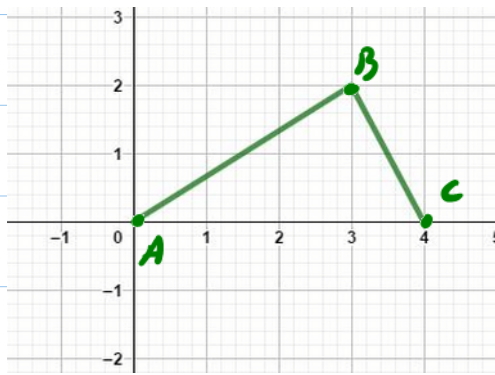
انعکاس نسبت به محور x ها
 $y = -f(x+2)$



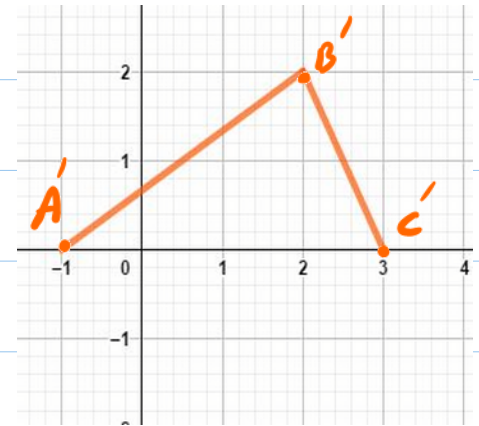
انتقال عمودی یک واحد به بالا
 $y = 1 - f(x+2)$



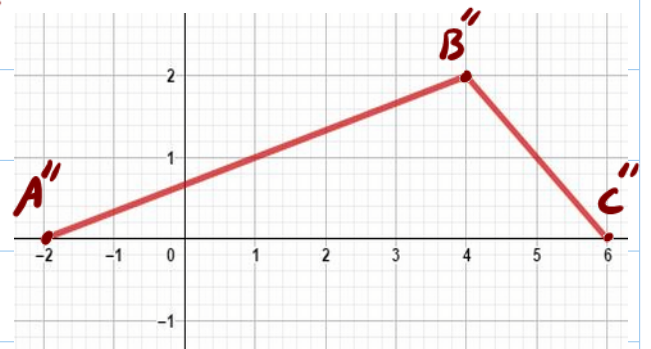
مثال: نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر است. نمودار $y = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ را رسم کنید.



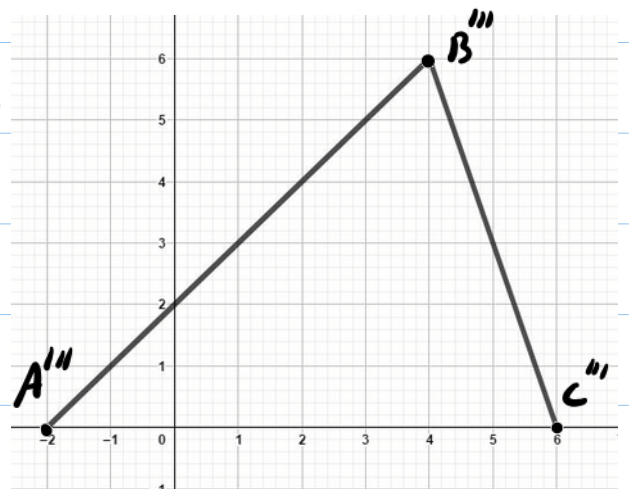
انتقال اینی یک واحد چپ
 $y = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$



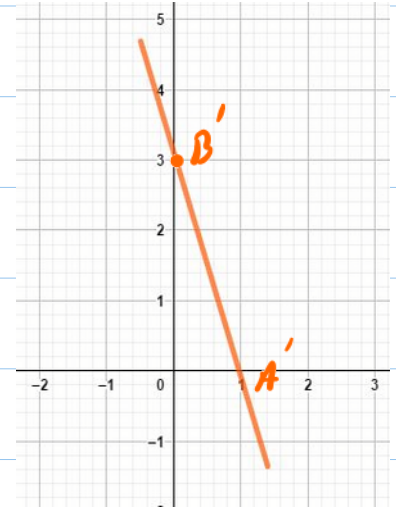
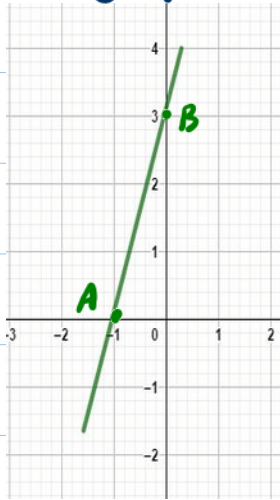
اینجا اینی با ضرب $\frac{1}{2} = 2$
 $y = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$



اینجا محور را با ضرب 2
 $y = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

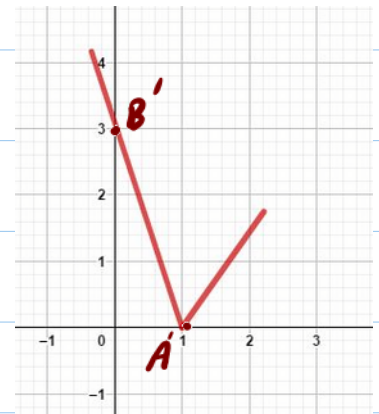


مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = |f(-x)| - 2$ را رسم کنید.

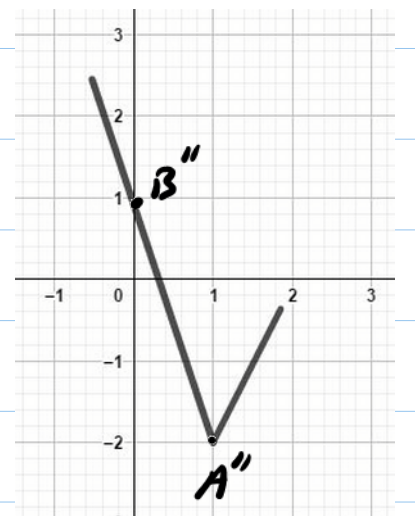


انعکاس: قرینه‌بندی به محور y ها $y = f(-x)$

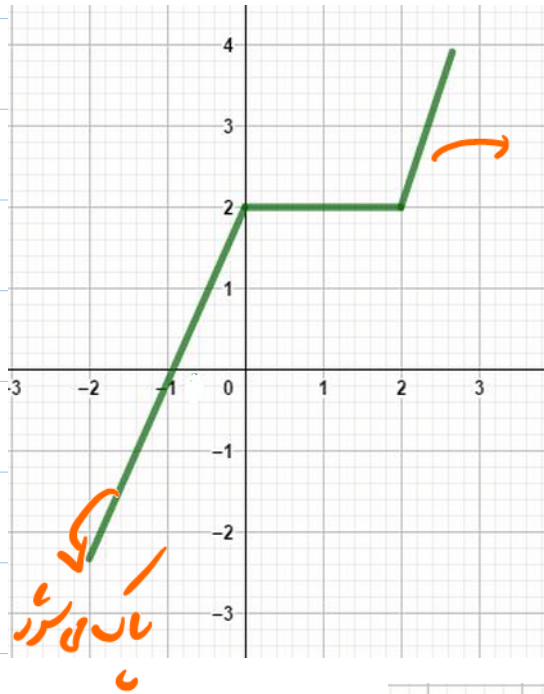
تأثیر قدر مطلق: قسمت‌های که زیر محور x است قرینه می‌شوند. $y = |f(-x)|$



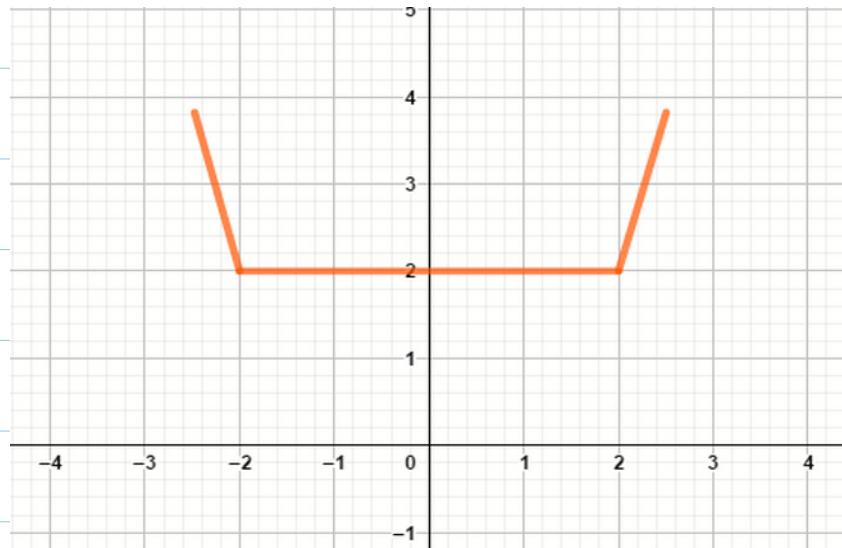
انتقال عمودی: واحد پایین $y = |f(-x)| - 2$



مثال: نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = f(|x|)$ را رسم کنید.



$$y = f(|x|)$$



مثال: طول نقاط نمودار تابع f را در دو برابر می‌کنیم. پس نمودار جدید رسمه را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. منبسطه تابعی که نمودار آن رسم شده را بیابید.

ی‌کنیم. منبسطه تابعی که نمودار آن رسم شده را بیابید.

$$f\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow f\left(\frac{x+1}{2}\right) \Rightarrow y = f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

مثال: نمودار تابع $g(x) = 2f(3x)$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم.

پس طول عرض نقاط این نمودار را نصف می‌کنیم. ضابطه تابعی که نمودار آن بدست

آمده است را بنویسید.

$$2f(3(x-1)) = 2f(3x-3)$$

$$\rightarrow 2f(3x-3) + 2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(2f(3x-3) + 2) = f(3x-3) + 1$$

$$\Rightarrow h(x) = f(3x-3) + 1$$

مثال: منحنی تابع $y = |x-2|$ را سه واحد به چپ انتقال داده و قدرش ثقل حاصل را ثبت

به کرد و حاصلش می‌کنیم و با ضرب ۲ انبساط عمودی می‌دهیم. پس قدرش آن را ثبت

به کرد و حاصلش می‌کنیم، حاصلش منحنی جدید را بدست آوریم.

$$f(x+3) : y = |x+3-2| = |x+1|$$

$$f(1-x+2) : y = |1-x+1|$$

$$2f(1-x+3) : y = 2|1-x+1|$$

$$-2f(1-x+4) : y = -2|1-x+1| = -2|1-x|$$

سؤال: با اعمال مدارر کدام گزینیم، نمودار $y = f(x)$ تبدیل به نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}(1-x)$ شود؟

۱) انتقال یک واحد به راست، قدریم ثبت به محور y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای x می

۲) انتقال یک واحد به چپ، قدریم ثبت به محور y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای x می

۳) انتقال یک واحد به چپ، قدریم ثبت به محور y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای x می

۴) انتقال یک واحد به راست، قدریم ثبت به محور y ها، انقباض $\frac{1}{4}$ واحد در راستای x می

گزینه ۲

انقباض عمودی با نسبت $\frac{1}{4}$

قدریم ثبت به محور y ها

انتقال x می یک واحد چپ

قدریم ثبت به محور x ها

$$y = -\frac{1}{4}(1-x)$$

مشق: کنگر ریاضی ۹۹

قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟

$x = 2,5$ (۴)

$x = 2$ (۳ ✓)

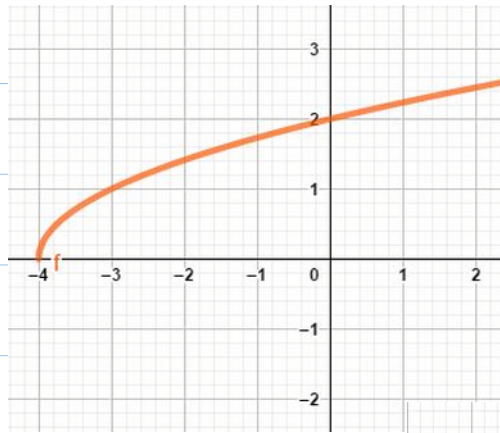
$x = 1,5$ (۲)

$x = 1$ (۱)

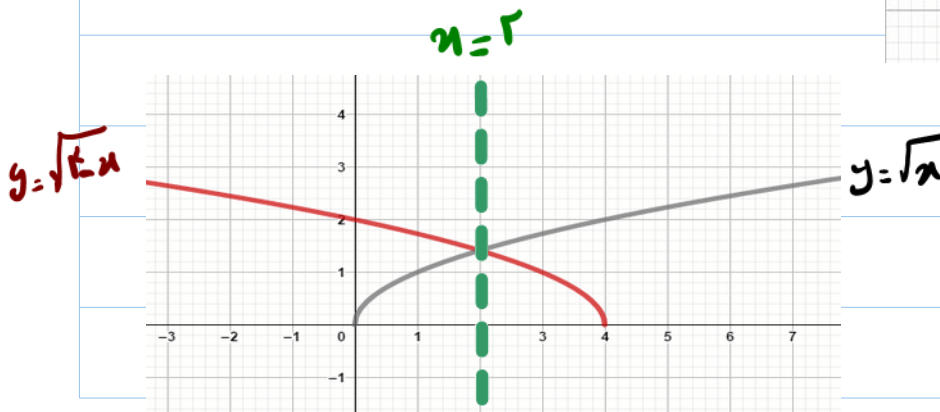
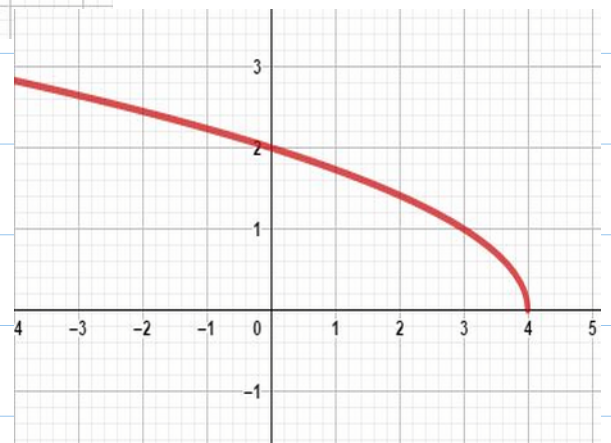
$f(-x) : y = \sqrt{-x}$

$f(-(x-4)) : y = \sqrt{-(x-4)} = \sqrt{-x+4} = \sqrt{4-x}$

$y = \sqrt{4+x}$
۴ واحد به چپ



نکته: قرینه نسبت به محور y ها $y = \sqrt{4-x}$



نگرین ۱۴

مثال: کثرت ریاضی ۹۹ (خارج)

ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

$$-2, 1 \quad (4)$$

$$-1, 2 \quad (3)$$

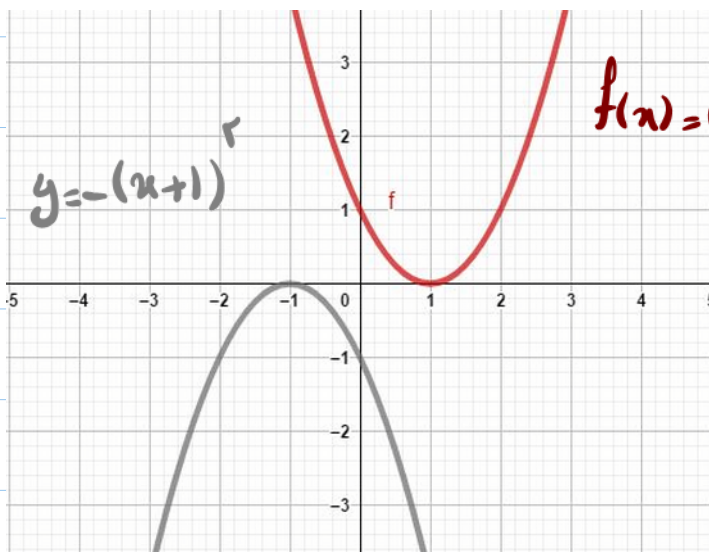
$$-1, 1 \quad (2)$$

$$0, 2 \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{cases}$$

$$-y = (-x-1)^2 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow y = -(x+1)^2 + \epsilon \quad g(x) = -(x+1)^2 + \epsilon$$



$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 = -(x+1)^2 + \epsilon \rightarrow (x-1)^2 + (x+1)^2 = \epsilon$$

$$\begin{aligned} \text{اوج تقریبی} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = \epsilon \rightarrow 2x^2 + 2 = \epsilon \rightarrow 2x^2 = \epsilon - 2 \end{aligned}$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

تقریب ۲ : طول نقاط تلاقی

مسئله: کندر تجوی ۹۹

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۶√۱۰ (۴)

۴√۱۷ (۳)

۶√۷ (۲)

۴√۱۵ (۱)

$$g(x) = \sqrt{x-12} + 2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \xrightarrow{\text{مربع}} x = (x-12) + 4\sqrt{x-12} + 4$$

$$1 = 4\sqrt{x-12} \xrightarrow{\div 4} \frac{1}{4} = \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{مربع}} \frac{1}{16} = x-12 \rightarrow x = 12\frac{1}{16}$$

$$f(12\frac{1}{16}) = \sqrt{12\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \quad \text{نقطه برخورد } A(12\frac{1}{16}, \frac{1}{4})$$

$$OA = \sqrt{12\frac{1}{16}^2 + \frac{1}{16}} = \sqrt{204\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{204\frac{2}{16}} = \sqrt{12\frac{1}{8} \times 17} = \frac{1}{4}\sqrt{17}$$

گزینہ ۳

مسئله: کندر تجوی ۹۹ (خارج)

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$) مفروض است. قرینه نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۲√۵ (۴)

۵√۲ (۳)

۶√۲ (۲)

۴√۵ (۱)

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 2x + 1} - 1 = (x-1)^2 - 1$$

قانونیت به محور x ها : $-f(x) = -(x-1)^2 + 1$

انتقال محور y واحد به بالا : $g(x) = -(x-1)^2 + 1 + 16 = -(x-1)^2 + 17$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = -(x-1)^2 + 17$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 = 18 \stackrel{\div 2}{\Rightarrow} (x-1)^2 = 9$$

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \rightarrow x=-2 \end{cases} \text{نقطه } \perp$$

$$f(4) = (4-1)^2 - 1 = 8 \quad A(4, 8) \quad \text{نقطه برخورد}$$

$$OA = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5} \quad \text{گزینه 1}$$

نکته: گاهی اوقات معادلات نمایی دارای $f(x)$ درجه n شود و معادلات نقطه مشاط با آن

در $a f(bx+c)+d$ خودت می شود. در این حالت تمام مواردی که برای رسم بنویس.

رینم می راریم روی نقطه راره شده اعمال می کنیم. همچنین برای تأثیر داری می توانیم، معلومی

$$y = bn + c \text{ را بدست آوریم.}$$

مثال: نقطه $A(-1, 2)$ روی منحنی $y = f(x)$ است. نقطه مشاخر با آن روی منحنی

$$y = 2x^3 - 7 \text{ ، } A'(a, b) \text{ است. } a - b \text{ کدام است؟}$$

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 1$$

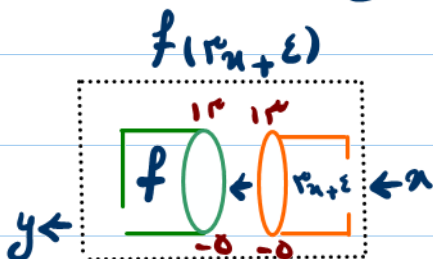
$$t = 2x - 5 \Rightarrow t + \delta = 2x \xrightarrow{-2} x = \frac{t + \delta}{2} = \frac{-1 + \delta}{2} = 2 = a$$

$$b = 2 \times 2^3 - 7 = -1 \Rightarrow A'(2, -1) \rightarrow a - b = 2 - (-1) = 3$$

گزینه ۳

نکته: در تابع $y = a f(bx + c) + d$ ، a ، d روی بردار f ، b ، c روی دامنه f تأثیر می دارند.

مثال: اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $(-5, 13)$ باشد دامنه تابع $y = f(2x + 4)$ را بیابید.



$$-5 < 3x + \varepsilon < 14 \xrightarrow{-\varepsilon} -9 < 3x < 9$$

$$\xrightarrow{\div 3} -3 < x < 3$$

$$D_{f(x+\varepsilon)} = (-3, 3)$$

نشان: اگر در تابع f بازه $(-2, 4)$ باشد، در تابع $g(x) = 3f(x+1) - 1$ (بنا بر \dots)

$$-2 < f(x) < 4 \xrightarrow{\times 3} -6 < 3f(x+1) < 12$$

$$\xrightarrow{-1} -7 < 3f(x+1) - 1 < 11 \Rightarrow -7 < g(x) < 11$$

$$R_{g(x)} = (-7, 11)$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع

یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

قسمت اول: تابع درجه سوم

جلسه دوم: صفحات ۱۳ تا ۱۵

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

توابع چند جمله‌ای :

توابعی که ضرایب آن‌ها به صورت $f(n) = a_n n^n + a_{n-1} n^{n-1} + \dots + a_1 n + a_0$ است و در

آن $a_n \neq 0$ تا a_0 اعداد حقیقی و $a_n \neq 0$ است، تابع چند جمله‌ای درجه n نامیده می‌شود.

در مت‌کمید توان n ها باید اعداد حسابی باشند. بهترین توان n ها درجه چند جمله‌ای است.

مثال: کدامیک از توابع زیر چند جمله‌ای است؟

الف) $f(n) = \frac{1}{n}$ نیست

ب) $g(n) = 4n^2 + \sqrt{5}n - 1$ است (تابع درجه دوم)

پ) $k(n) = \sqrt{n+2}$ نیست

ت) $q(n) = \sqrt{n} + \frac{1}{2}$ است (تابع رنجی)

ث) $p(n) = 5$ است (ثابت)

ج) $k(n) = n^{\frac{1}{2}} + 4n$ نیست

نکته: توابع خطی و همبندی، ثابت و درجه دوم، همگی تابع چندمجهدی هستند.

$$y = ax + b \quad y = c \quad y = x \quad y = ax^2 + bx + c$$

نکته: دامنه تمام توابع چندمجهدی \mathbb{R} است. همچنین برد تمام توابع چندمجهدی از درجه

فرد هم \mathbb{R} است.

تابع چند جمله‌ای درجه سوم:

هر تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$

باشد را یک تابع چندمجهدی از درجه سوم می‌نامیم.

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \sqrt{5}x + \pi \quad \text{مانند:}$$

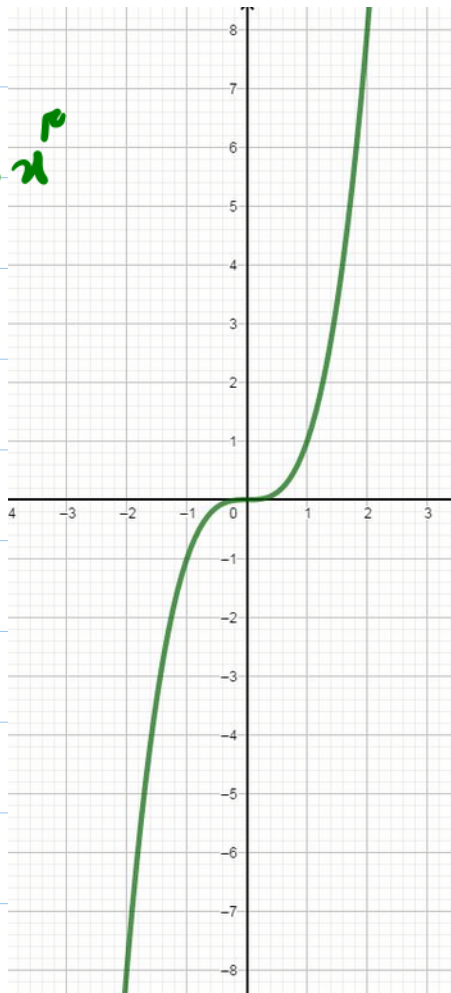
$$g(x) = 8x^3 + 1 \quad , \quad h(x) = 5x^3 - 7x^2$$

منواری توابع $y = x^3$ و $y = -x^3$

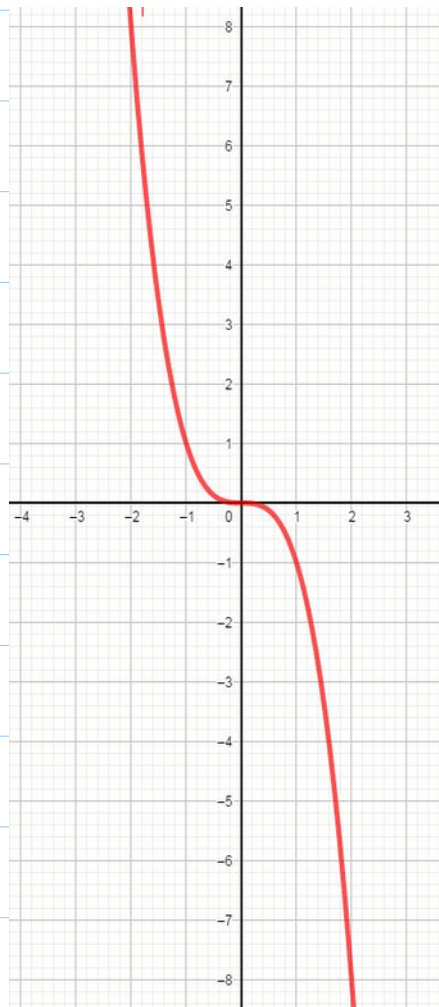
x	-1	0	1	2
$y = x^3$	-1	0	1	8

x	-1	0	1	2
$y = -x^3$	1	0	-1	-8

$$y = x^3$$



$$y = -x^3$$



هر دو نمودار نسبت به مبدأ مختصات متقارن اند

تذکره: برای رسم توابع درجه سوم از قوانین انتقال برای رسم نمودارها کمک می‌گیریم.

مثال: نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ را رسم کنید.

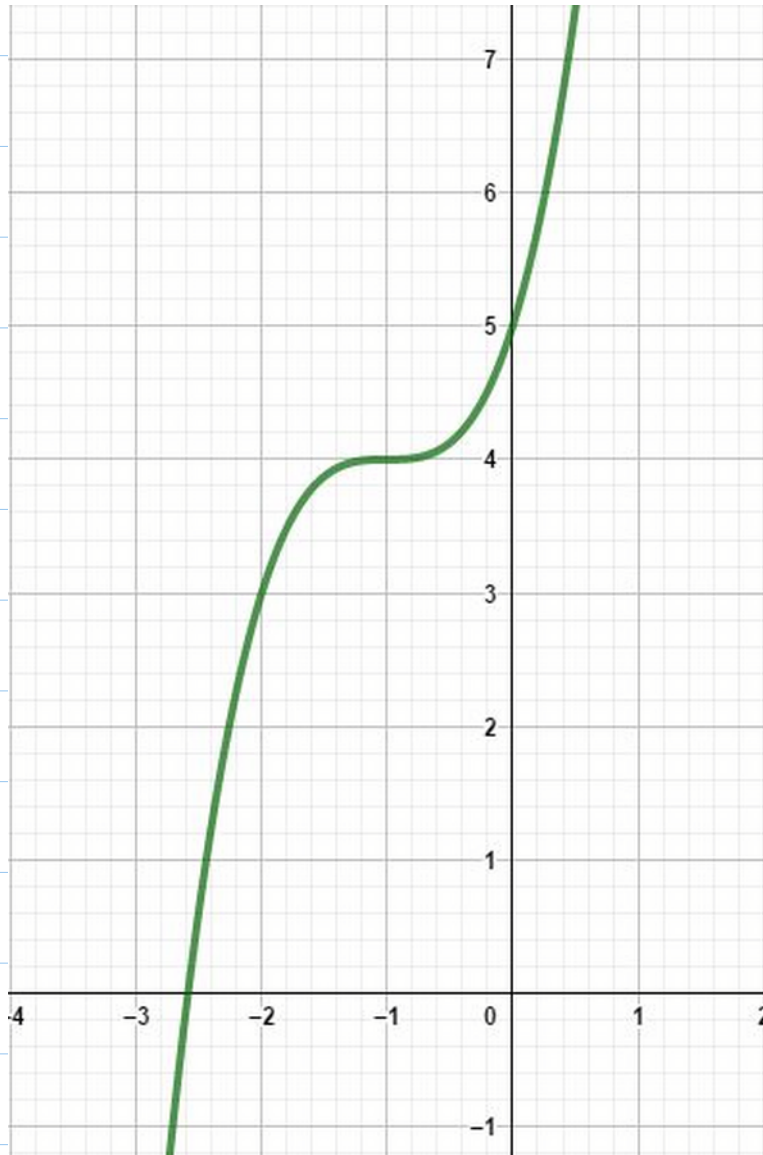
باید تابع درجه سوم را به صورت $y = k(x-a)^3 + b$ در آوریم.

پارادوری: اتحاد ملب درجه سوم:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 4 = (x+1)^3 + 4$$

نمودار $y = x^3$ را چهار واحد به سمت بالا و یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم.



به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x-1)^3 + 2$ ✓

ت) $y = (x+1)^3 - 1$ ✓

ج) $y = x^3 + 1$ ✓

ب) $y = (x-2)^3$ ۹

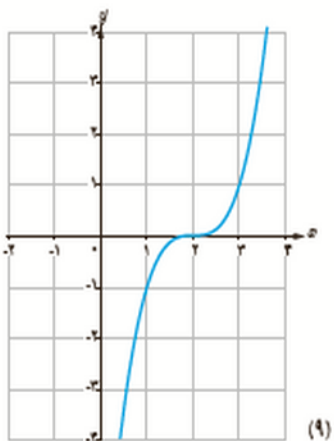
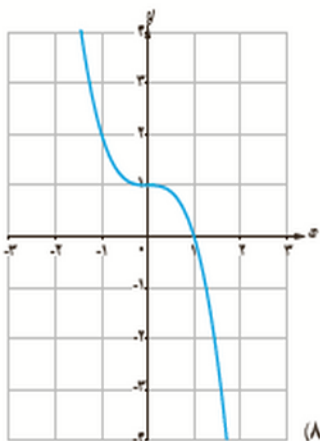
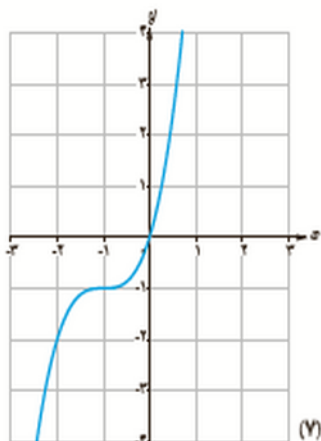
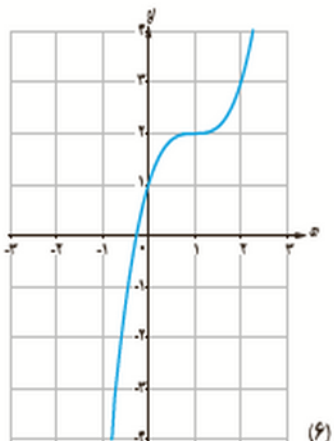
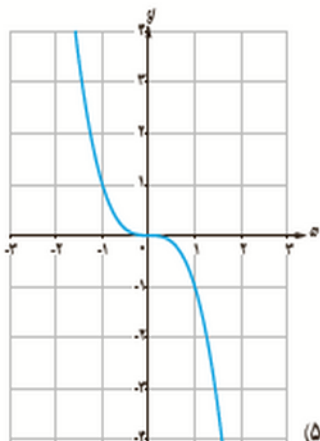
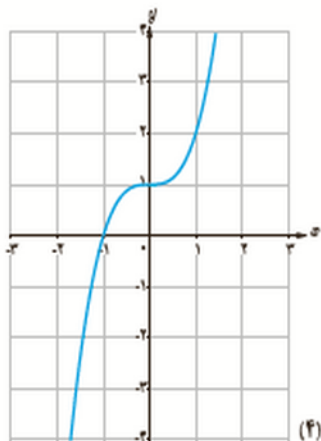
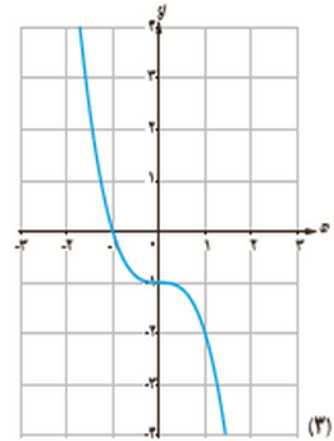
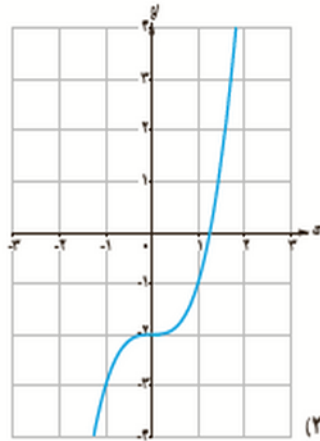
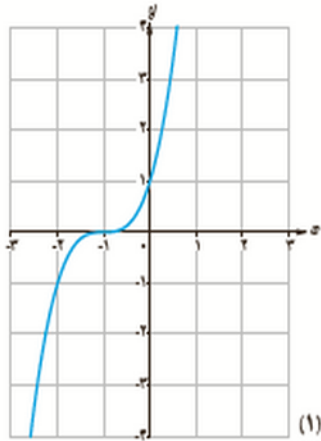
ث) $y = -x^3$ ۵

ح) $y = -x^3 - 1$ ۳

پ) $y = -x^3 + 1$ ۸

چ) $y = (x+1)^3$ ۱

خ) $y = x^3 - 2$ ۲



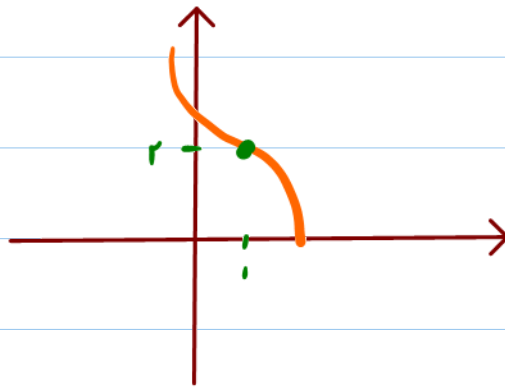
نکته: در توابع درجه سوم به صورت $y = k(x-a)^3 + b$ نقطه مرکز تقارن (a, b)

است. می توان از این نقطه در رسم سریع نمودار توابع درجه سوم کمک گرفت.

مثال: نمودار تابع $y = -(x-1)^3 + 2$ را رسم کنید.

پایه: $y = -x^3$

(۱, ۲) مرکز تقارن



$y = x^2$

$y = x^3$

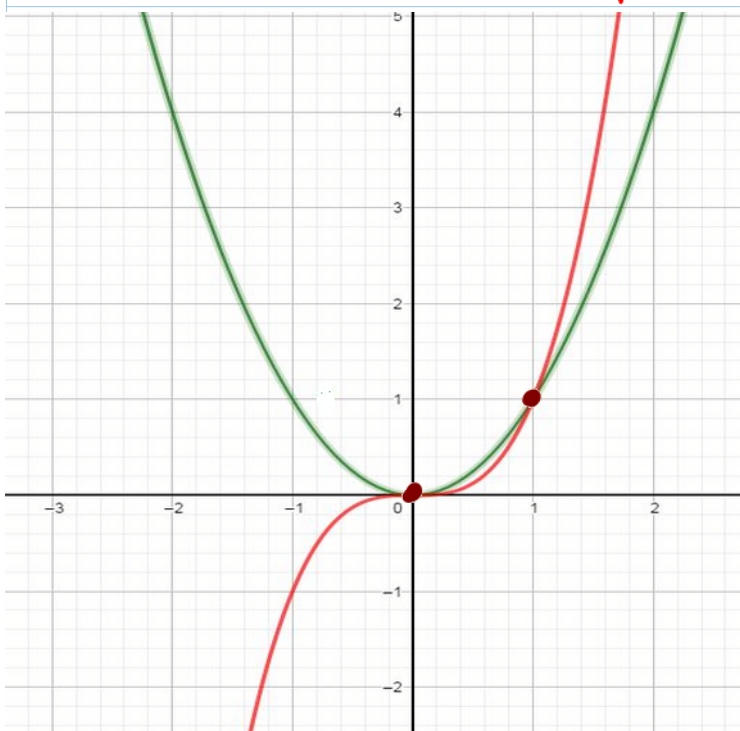
مقایسه نمودارهای $y = x^2$ و $y = x^3$:

۱- دو نمودار در نقاط (۱, ۱) و (۰, ۰) متقاطع اند.

۲- برای $x > 1$ ، $y = x^3$ بزرگتر از $y = x^2$ است.

۳- برای $0 < x < 1$ و $x < 0$ نمودار

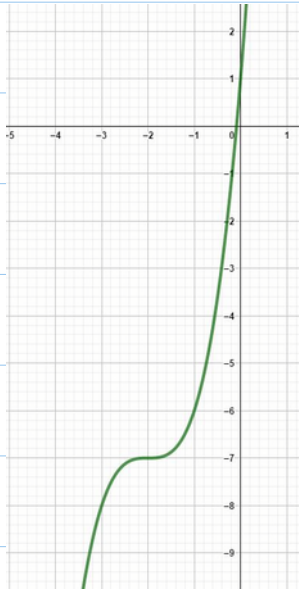
$y = x^2$ بزرگتر از $y = x^3$ است.



مثال: نمودار تابع $y = x^3 + 4x^2 + 12x + 1$ از کدام ناحیه چهارمختصات عبور نمی کند؟

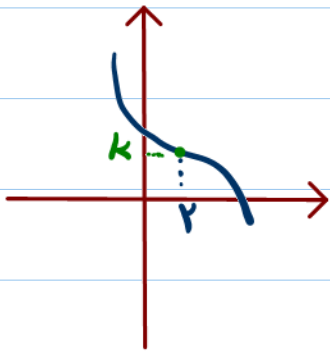
$$y = x^3 + 4x^2 + 12x + 1 = (x+2)^3 - 7$$

انتقال



از ناحیه چهارم عبور نمی کند.

مثال: نمودار تابع $g(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ به شکل زیر است. مقدار a, b را بیابید.



$(2, k)$ مکزق

در بقیس: فریب x نمی ی

$$g(x) = -(x-2)^3 + k = -(x^3 + 3x^2(-2) + 3x(-2)^2 + (-2)^3) + k$$

$$g(x) = -x^3 + 4x^2 - 12x + 1 + k = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-12 \end{cases}$$

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع

یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

قسمت دوم: توابع صعودی و نزولی

جلسه سوم: صفحات ۱۵ تا ۱۸

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

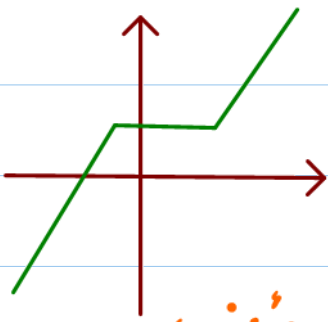
گروه ریاضی
استان همدان

تعریف تابع صعودی:

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$$f(x_2) > f(x_1)$$

به عبارت دیگر در تابع صعودی، با افزایش x ، y افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.



با دقت از چپ به راست هیچگاه با شیب منفی رویم →

مثال:

تعریف تابع ابتداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_2 > x_1$ داشته باشیم

$$f(x_2) > f(x_1)$$

به عبارت دیگر در تابع ابتداً صعودی، با افزایش x ، y هم افزایش می‌یابد.



مثال:

با دقت از چپ به راست همواره با شیب مثبت رویم →

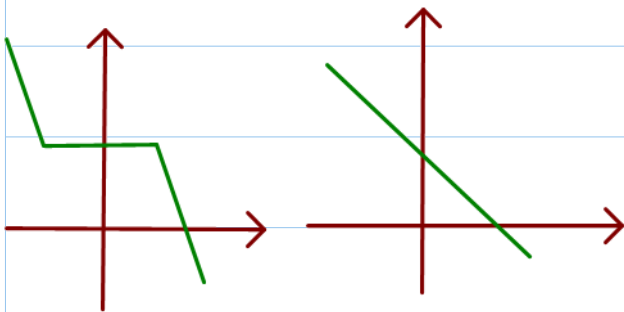
تعریف تابع نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 > x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع نزولی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع نزولی، با افزایش x یا کاهش y ثابت می‌ماند.



مثال:

باوکت از چپ به راست می‌رویم، با افزایش x

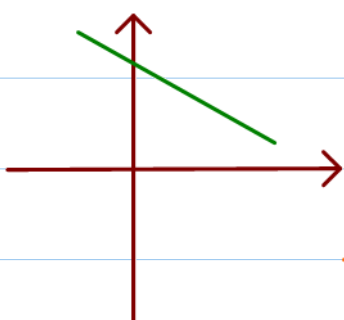
تعریف تابع اکیدا نزولی:

اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از مجموعه A ($A \subseteq D_f$) که $x_1 > x_2$ داشته باشیم

$$f(x_1) < f(x_2)$$

رنگه تابع f را تابع اکیدا نزولی می‌نامیم.

به عبارت دیگر در تابع اکیدا نزولی، با افزایش x ، y کاهش می‌یابد.



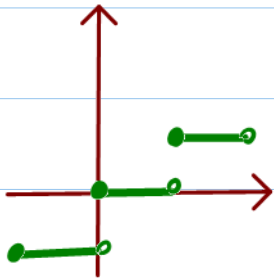
مثال:

باوکت از چپ به راست می‌رویم، هرچه x بیشتر می‌شود

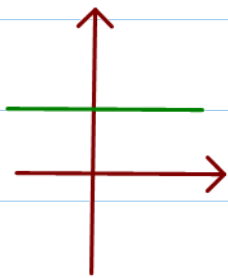
نکته: هر تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و هر تابع اکیداً نزولی، نزولی هم هست.

ولی عکس این مطلب درست نیست.

مثال: تابع $y = [x]$ صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.



نکته: اگر با افزایش x ، y ثابت بماند یا گوییم تابع ثابت است. تابع ثابت هم صعودی است



مثال:

درهم نزولی.

تعریف تابع اکیداً یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی

باشد، می‌گوییم تابع f روی مجموعه A اکیداً یکنوا است.

تعریف تابع یکنوا: اگر تابع f روی مجموعه A ($A \subseteq D_f$) صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم

تابع f روی مجموعه A یکنوا است.

نکته: اگر در تابع با افزایش x حرکت از چپ به راست روی نمودار، y گاهی اوقات

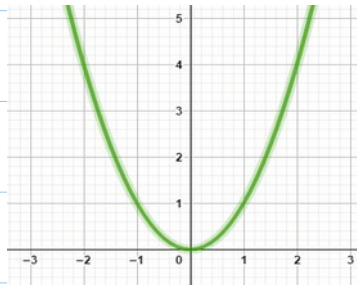
افزایش دهی اوقات کاهش یابد، این تابع را **فزیلیزاد** می گویند.

در وقت کند شدن است تابعی روی دامنه اش فزیلیزاد باشد و اگر روی زیر معبره های

از دامنه اش کندتر باشد.

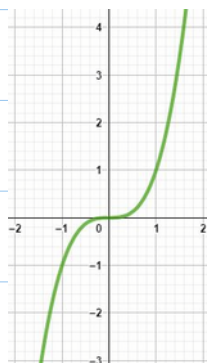
بررسی فنونی توابع معروف:

۱) $y = x^2$



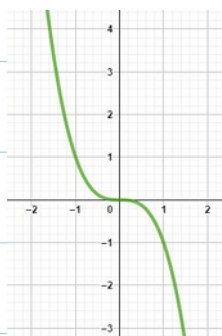
فزیلیزاد روی $[-\infty, 0]$ (کندتر می شود)
و در $[0, +\infty]$ (کندتر می شود)

۲) $y = x^3$



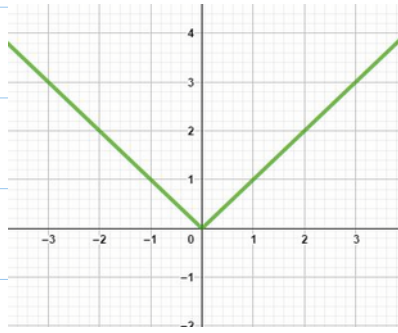
کندتر فزیلیزاد (کندتر می شود)

۳) $y = -x^3$



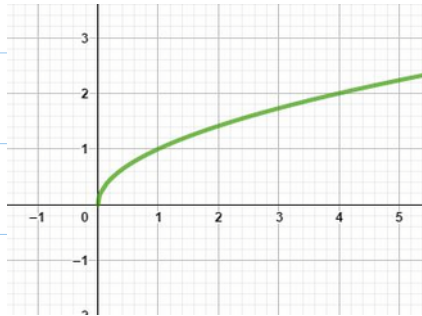
کندتر فزیلیزاد (کندتر می شود)

$$4) y = |x|$$



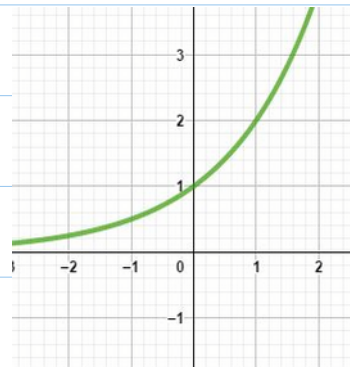
عزیزان
دی در $[-\infty, 0]$ (تیزتر)
و در $[0, +\infty]$ (تیزتر)

$$5) y = \sqrt{x}$$



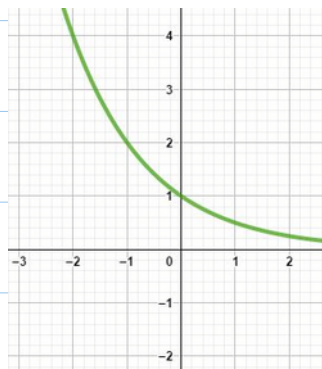
تیزتر (تیزتر)

$$6) y = a^x \quad (a > 1)$$



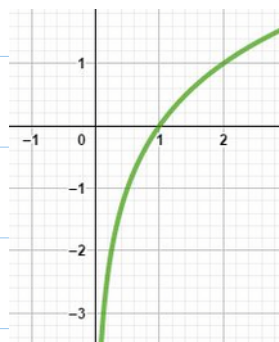
تیزتر (تیزتر)

$$7) y = a^x \quad (0 < a < 1)$$



تیزتر (تیزتر)

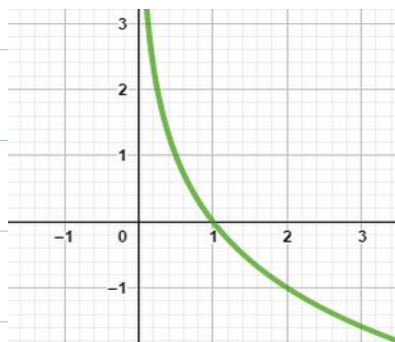
$$8) y = \log_a x \quad (a > 1)$$



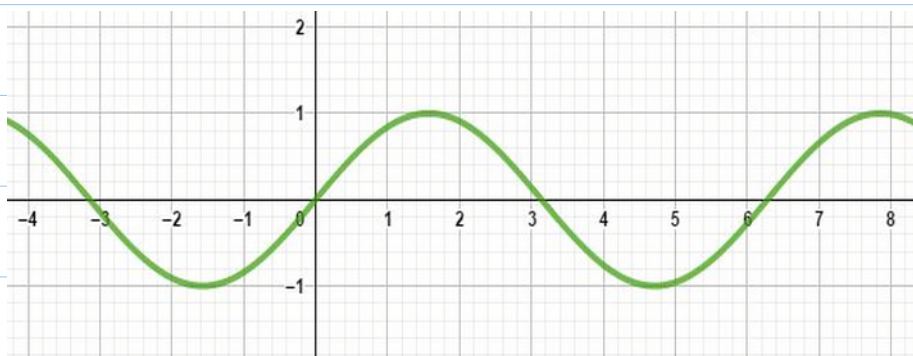
تیزتر (تیزتر)

9) $y = \log_a x \quad (0 < a < 1)$

دیگر اینکه (دیگر تندی)

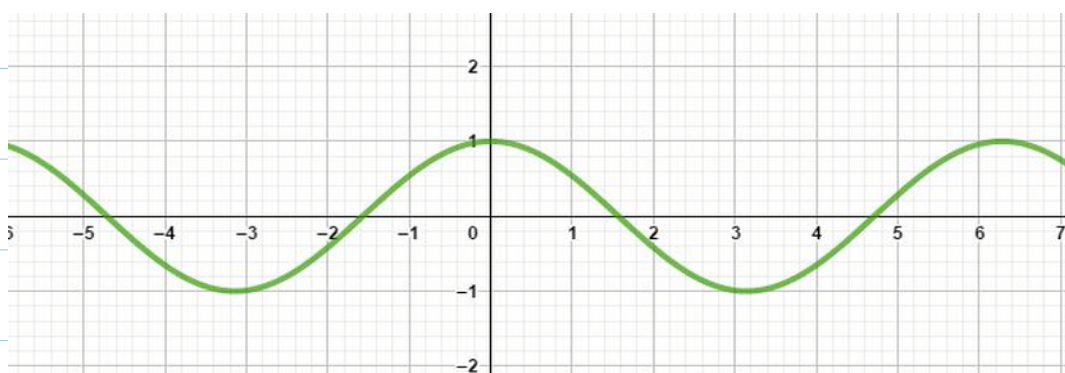


10) $y = \sin x$



خیزلنوا دی مشا در $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ تابع دیگر تندی در $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ تابع دیگر تندی است.

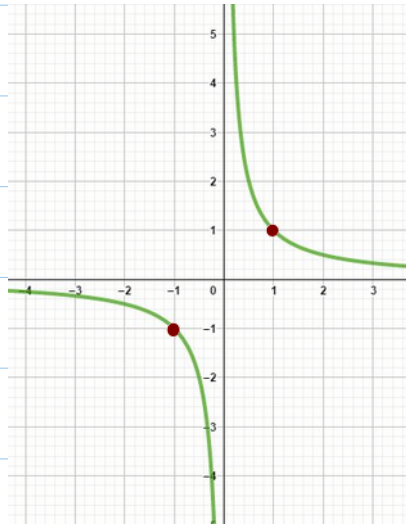
11) $y = \cos x$



خیزلنوا دی مشا در $[\pi, 2\pi]$ تابع دیگر تندی در $[\pi, 2\pi]$ تابع دیگر تندی است.

۱۲) $y = \frac{1}{x}$

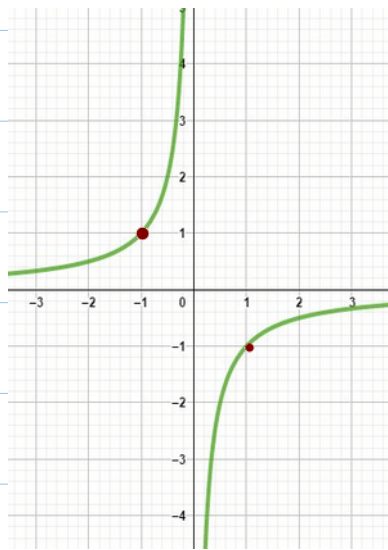
$f(1) < f(-1) \rightarrow 1 < -1$
 صعود



نزولی در $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$
 اکبراً نزولی است

۱۳) $y = -\frac{1}{x}$

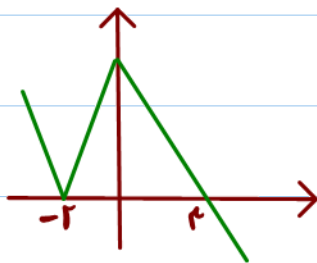
$f(1) > f(-1) \rightarrow 1 > -1$
 نزول



نزولی در $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$
 اکبراً صعودی است

مثال: با توجه به نمودار تابع f ، گزینای α را بررسی کنید.

الف)



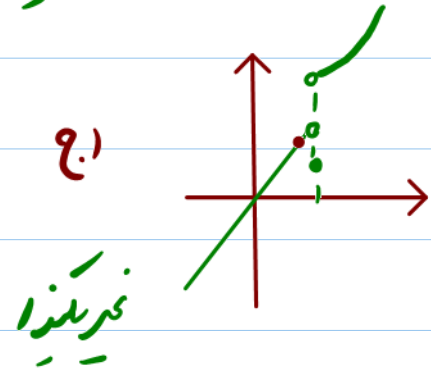
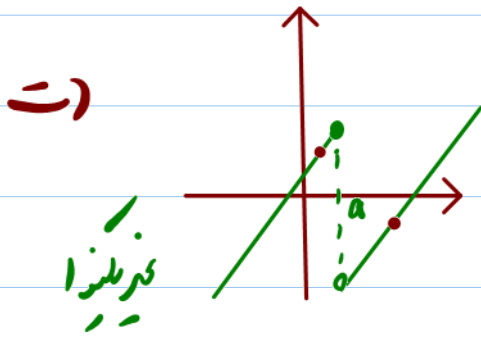
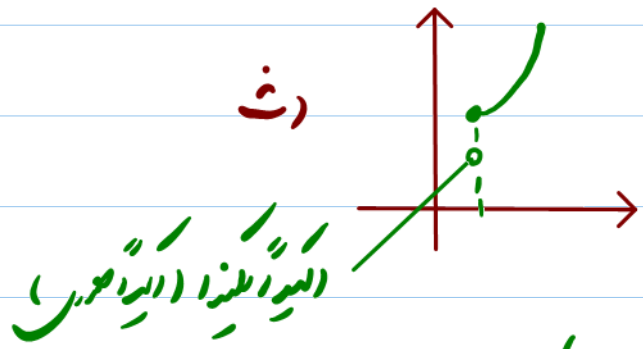
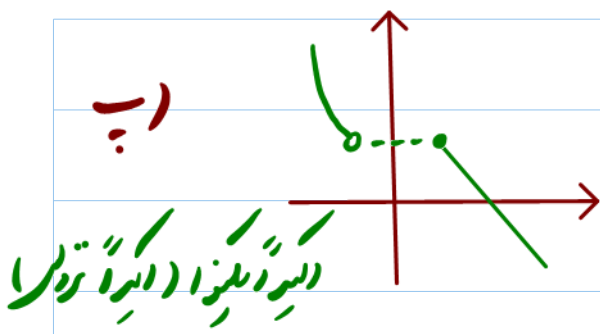
نزولی در $[-2, -\infty)$ و $(-\infty, 2]$

اکبراً نزولی در $[0, 2]$ اکبراً صعودی

ب)



گزینا (نزولی)



مثال: تابع $f = \{(1, 2), (2, m-1), (3, 7-m)\}$ صورتی است. عدد m را بیابید.

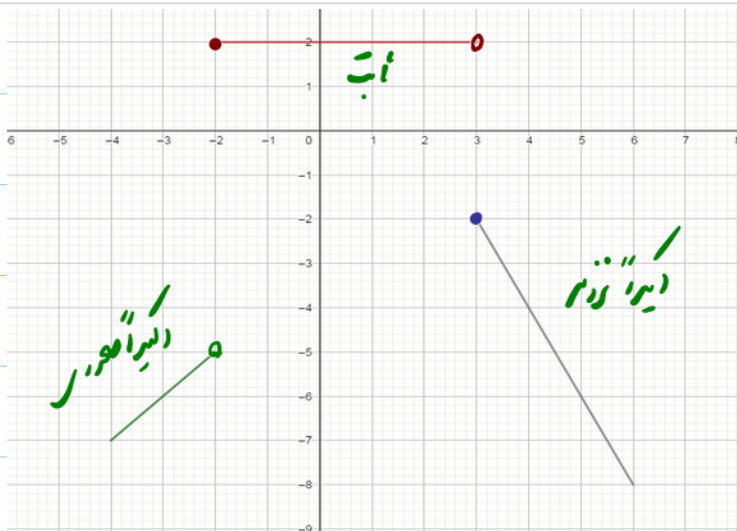
$$1 < 2 \rightarrow f(1) \leq f(2) \Rightarrow 2 \leq m-1 \Rightarrow 3 \leq m \quad (1)$$

$$2 < 3 \rightarrow f(2) \leq f(3) \Rightarrow m-1 \leq 7-m \Rightarrow 2m \leq 8 \rightarrow m \leq 4 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 3 \leq m \leq 4$$

مثال: تابع $y = \begin{cases} x-4 & x < -2 \\ 2 & -2 \leq x < 3 \\ -2x+4 & x \geq 3 \end{cases}$ روی بازه $(-\infty, a)$ صورتی است.

بیشترین مقدار برای a را بیابید.

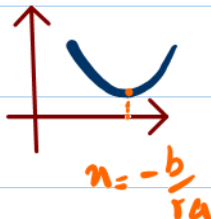


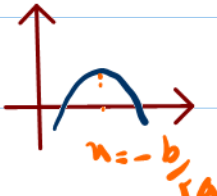
تابع صعودی : $(-\infty, 2)$

↓
a

$\Rightarrow a = 2$

نکته: طبق ریشه دیدیم تابع $y = ax^2 + bx + c$ روی \mathbb{R} غیر یکنواخت ولی

الف) $a > 0$  $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ البراتور و $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ البرافور

ب) $a < 0$  $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ البرافور و $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ البراتور

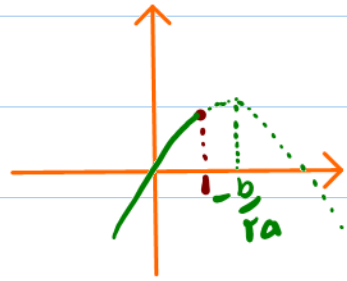
همچنین می توان گفت سعی در هر بازه ای که در آن سعی درون آن بازه باشد غیر یکنواخت

سوال: تابع درجه دوم $f(x) = (k+2)x^2 + a$ با دامنه $(-\infty, +\infty)$ صعودی است.

عدد k را بیابید.

$a < 0 \Rightarrow k+2 < 0 \Rightarrow k < -2$ (1)

$$\frac{a}{\text{ریشه}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(k+2)} \geq 1$$



$$\frac{-1}{2(k+2)} - 1 \geq 0 \stackrel{x(-1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2(k+2)} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+2k+2}{2(k+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{2k+3}{2(k+2)} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-2	$+\infty$
$2k+3$	-	0	+	+
$2(k+2)$	-	-	0	+
$\frac{2k+3}{2(k+2)}$	+	0	-	+

$-\frac{3}{2} \leq k < -2 \quad (2) \Rightarrow (1) \cap (2) = -\frac{3}{2} \leq k < -2$

مثال: تابع $y = (k-1)^{2x}$ و y (سیاه صوری است) حدود k را بدست آورید.

$$a > 1 \Rightarrow k-1 > 1 \Rightarrow k > 2 \Rightarrow k > \sqrt{2} \text{ یا } k < -\sqrt{2}$$

تفسیر: (الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیدا صوری باشد و a, b مقادیر به این خاصه

باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a < b$.

(ب) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیدا نزولی باشد و a, b مقادیر به این خاصه

باشند. اگر $f(a) < f(b)$ آنگاه $a > b$.

اثبات: (الف) چون تابع f اکبراً صعودی است پس اگر $b > a$ آنگاه $f(b) > f(a)$.
فرض $a < b$ حکم

حال اگر f نزولی باشد آنگاه برعکس داریم:

اگر $f(b) \leq f(a)$ آنگاه $b \leq a$ □

ب) به عنوان تمرین، حل شود.

تذکره: پس می توان گفت اگر تابع f (اکبراً) صعودی باشد و آن را از دو طرف نامساوی

حذف کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی کند ولی اگر f (اکبراً) نزولی باشد، با حذف آن از

دو طرف، جهت نامساوی برعکس می شود.

مثال: اگر تابع f روی \mathbb{R} نزولی باشد و $f(3a+2) > f(a^2-1)$ ، حد در a را بیابید.

$$f(a^2-1) > f(3a+2) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} a^2-1 < 3a+2$$

$$a^2 - 3a - 2 < 0 \Rightarrow (a+1)(a-4) < 0 \Rightarrow -1 < a < 4$$

مثال: بصورت جواب نامعادله زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } 14^{2x-2} \geq 8^{2x-1}$$

$$(2^3)^{2x-2} \geq (2^3)^{2x-1} \Rightarrow 2^{6x-4} \geq 2^{6x-3} \xrightarrow{\text{با } a > 1} 6x-4 \geq 6x-3$$

$$6x-4 \geq 6x-3 \Rightarrow -4 \geq -3 \Rightarrow x \leq -\infty \rightarrow \text{ج. پ.} = (-\infty, -\infty]$$

$$\text{ب) } \log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 2 \quad (1) \quad (x+1) > 0 \Rightarrow x > -1 \text{ دانه}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \xrightarrow{\text{با } a < 1} x+1 < \frac{1}{2} \rightarrow x < \frac{1}{2} - 1$$

$$x < -\frac{1}{2} \quad (2) \quad (1) \cap (2) \quad -1 < x < -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ج. پ.} = (-1, -\frac{1}{2})$$

$$\text{پ) } (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n+1} > (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n+2}$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$$

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n+1} > ((\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1})^{2n+2} \Rightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n+1} > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2n-2}$$

$$\xrightarrow{\text{با } a < 1} 2n+1 < -2n-2 \Rightarrow 4n < -3 \Rightarrow n < -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x < -1 \rightarrow \text{ج. پ.} = (-\infty, -1)$$

نکته:

۱) اگر توابع f و g صوری باشند آنگاه $f+g$ هم صوری است.

۲) اگر توابع f و g نزدی باشند آنگاه $f+g$ هم نزدی است.

۳) اگر توابع f و g صوری باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم صوری است.

۴) اگر توابع f و g نزدی باشند و مقادیر این دو همگی مثبت باشند آنگاه $f \times g$ هم نزدی است.

۵) اگر f صوری باشد آنگاه $f(x) - g$ نزدی است.

۶) اگر f نزدی باشد آنگاه $f(x) - g$ صوری است.

۷) اگر f صوری باشد و مقادیر f همگی مثبت و همگی منفی باشد آنگاه $f \pm g$ نزدی است.

۸) اگر f نزدی باشد و مقادیر f همگی مثبت و همگی منفی باشد آنگاه $f \pm g$ صوری است.

۹) اگر f صوری و g نزدی باشد و f صوری و g نزدی است.

مثال: اگر f تابعی نزدیکی با مقدار منفی باشد، کدام تابع نزدیکی است؟

✓ (۱) $y = 2^n f(x)$ (۲) $y = \frac{f(x)}{2^n}$ (۳) $y = 2^n + f(x)$ (۴) $y = 2^n - f(x)$

تابع f تابعی نزدیکی با مقدار منفی است. پس تابع f - تابعی محور با مقدار مثبت است.

همچنین تابع $y = 2^n$ تابعی محور با مقدار مثبت است. پس ضرب این دو تابع منفی

$y = 2^n \times (-f) = -2^n f$ تابعی محور است. پس $y = 2^n f$ تابعی نزدیکی است.

مثال: اگر f و g توابعی نزدیکی با دامنه \mathbb{R} باشند، کدام تابعی محور است؟

(۱) f (۲) g (۳) $-f$ (۴) $-g$ ✓

محوری نزدیکی منفی $\Rightarrow k = -\frac{1}{4}(2g) = -g$
نزدیکی $h = (f+g) + (g-f) = 2g$
نزدیکی g
نزدیکی f

به نام خدا

پایه دوازدهم ریاضی

فصل اول: تابع

درس دوم: تابع درجه سوم، توابع

یکنوا و بخش پذیری و تقسیم

قسمت سوم: تقسیم و بخش پذیری

جلسه چهارم: صفحات ۱۸ تا ۲۰

مدرس: سید ابوالفضل فاضلیان

اداره کل آموزش
و پرورش استان
همدان

معاونت آموزش
متوسطه

اداره تکنولوژی و
گروه های
آموزشی

گروه ریاضی
استان همدان

یادآوری:

در پایه‌های پایین‌تر با تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای آشنا شدید.

مراحل این تقسیم عبارت بودند از:

(۱) آنگاه در نوشتن مقسوم و مقسوم علیه.

(۲) تقسیم جمله اول مقسوم بر جمله اول مقسوم علیه و نوشتن حاصل آن در خارج قسمت و

ضرب آن در مقسوم علیه و کم کردن حاصل آن از مقسوم برای یافتن مقسوم جدید.

(۳) تقسیم جمله اول مقسوم جدید بر جمله اول مقسوم علیه و انجام مرحله ۲.

(۴) تکرار مرحله ۲ تا جایی که درجه مقسوم جدید (حاصل باقی‌مانده) از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

نکته: اگر درجه مقسوم n و درجه مقسوم علیه m باشد ($n > m$)، درجه خارج قسمت $n-m$ و

درجه باقی‌مانده حداکثر $m-1$ خواهد بود.

مثال: چندجمله‌ای $x^4 + 2x^3 - 1$ را بر $x^2 - 2$ تقسیم کنید.

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 3x^3 - 1 \\
 - (2x^4 - 4x^3) \\
 \hline
 7x^3 + 3x^2 - 1 \\
 - (7x^3 - 4x^2) \\
 \hline
 11x^2 + 4x - 1 \\
 - (11x^2 - 8) \\
 \hline
 12x + 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2 \\
 11x^2 + 3x + 8
 \end{array}$$

خارجت

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$$

$$\frac{7x^3}{x^2} = 7x$$

$$\frac{11x^2}{x^2} = 11$$

باقی مانده $\rightarrow 12x + 7$

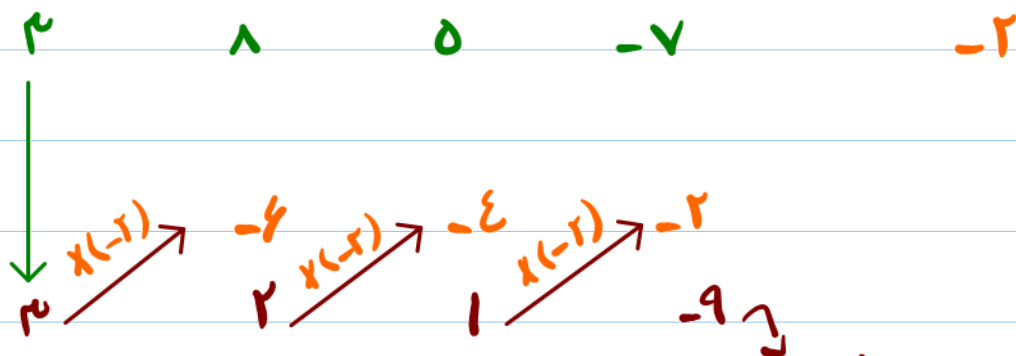
روش هورنر برای تقسیم چندجمله‌ای درجه n بر درجه یک به صورت $x+a$:

این روش را بابک مثال توضیح دهیم:

$$3x^3 + 8x^2 + 5x - 7 \quad | \quad x+2$$

ضرایب یک جمله‌ای مقوم

ریشه مقوم کلمه $(x+2=0)$



باقی مانده

$$3x^2 + 2x + 1$$

خارجت:

قضیه تقسیم (الگوریتم تقسیم) برای چندجمله‌ای:

اگر $p(x)$ و $B(x)$ چندجمله‌ای باشند و درجه $B(x)$ از صفر بزرگتر باشد، آن‌ها

چند جمله‌ای منحصر به فرد $Q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند به طوری که:

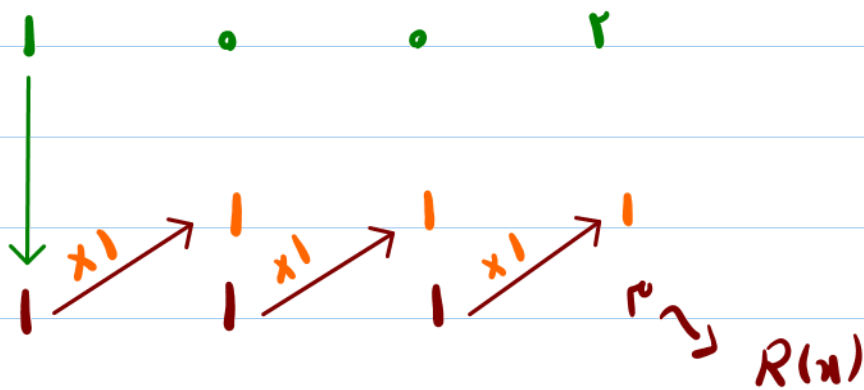
$$p(x) = \overline{B(x)} \overline{Q(x)} + \overline{R(x)}$$

$$p(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

که در آن درجه $R(x)$ از درجه $B(x)$ کمتر است.

اگر $R(x) = 0$ باشد $p(x)$ بر $B(x)$ بخش پذیر است.

مثال: الگوریتم تقسیم را برای تقسیم $p(x) = x^2 + 2$ بر $B(x) = x - 1$ بنویسید.



$$Q(x) = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + 2 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3$$

نقشه (۱): باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک $ax+b$ برابر $P(-\frac{b}{a})$

است. یعنی برای یافتن باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه یک کافی است

ریشه چندجمله‌ای درجه یک (معلوم‌کننده) را به جای متغیر $P(x)$ (معلوم) قرار دهیم.

اثبات: اگر $ax+b$ تقسیم را بنویسیم، داریم:

$$P(x) = (ax+b)Q(x) + R$$

اگر به جای x ریشه معلوم‌کننده $(ax+b=0 \rightarrow ax=-b \rightarrow x=-\frac{b}{a})$ را قرار دهیم

داریم:

$$P(-\frac{b}{a}) = 0 \times Q(-\frac{b}{a}) + R \Rightarrow P(-\frac{b}{a}) = R \quad \square$$

سوال: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - x + 1$ بر $x-2$ را بیابید.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(2) = R$$

$$P(2) = 2^5 - 4(2)^4 + 3(2)^2 - 2 + 1 = 32 - 64 + 12 - 2 + 1 = 11$$

مثال: اگر چند صبر ۵- $4ax - 3x^3 = p(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر باشد، a را بیابید.

$$x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow p(1)=0 \rightarrow p(1) = 3(1)^3 - 4a(1) - 5 = 0$$

$$3 - 4a - 5 = 0 \rightarrow -4a = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

مثال: کثیر را بیابید

برای مقداری از a چند جمله‌ای $p(x) = x^4 + ax^3 - 8x^2$ بر $x+2$ بخش پذیر است.

کوچکترین a را بیابید $p(x)=0$ کدام است؟

$$11 \quad 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19$$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow p(-2)=0 \Rightarrow p(-2) = (-2)^4 + a(-2)^3 - 8(-2)^2 = 0$$

$$16 - 8a + 32 = 0 \rightarrow -8a = -48 \rightarrow a = 6$$

$$p(x) = x^4 + 6x^3 - 8x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 + 6x - 8) = 0$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 6 & 0 & -8 & 0 & -2 \\ \downarrow x^{(2)} & \downarrow x^{(2)} & \downarrow x^{(2)} & \downarrow x^{(2)} & & \\ 1 & 4 & -8 & 0 & & \\ \downarrow x^{(2)} & \downarrow x^{(2)} & \downarrow x^{(2)} & & & \\ 1 & 2 & -4 & & & \end{array}$$

$$Q(x) = x^2 + 2x - 4 = 0$$

باقی مانده

$$p(x) = (x+2)(x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow (x+2)x(x^2 + 2x - 4) = 0$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow x+2=0 \rightarrow x = \underline{-2} \\ & \rightarrow \underline{x=0} \end{aligned}$$

$$\rightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 4 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 + 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 5$$

$$\sqrt{\quad} \Rightarrow x+1 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \underline{x = \sqrt{5} - 1}, \underline{x = -\sqrt{5} - 1} \quad \leftarrow \text{گزینه } \checkmark$$

مثال: باقیمانده تقسیم چندجهای $x^4 - ax^2 + x^2 + b$ بر $x+1$ برابر 9 است. اگر

این چندجهای بر $x-2$ بخش پذیر باشد، a, b را بیابید.

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=9 \Rightarrow p(-1)=(-1)^4 - a(-1)^2 + (-1)^2 + b = 9$$

$$1+a+1+b=9 \Rightarrow a+b=7 \quad (1)$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \Rightarrow p(2)=0 \Rightarrow p(2)=2^4 - a(2)^2 + (2)^2 + b = 0$$

$$16 - 4a + 4 + b = 0 \Rightarrow -4a + b = -20 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1), (2) \Rightarrow & \begin{cases} a+b=7 \\ -4a+b=-20 \end{cases} \\ & \begin{array}{r} a+b=7 \\ -4a+b=-20 \\ \hline 9a=27 \rightarrow a=3 \end{array} \end{aligned}$$

مثال: کنگور ۹۹ ریاضی خارج:

برای یک مقدار a ، چند جمله‌ای $p(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x - 1$ بر $x-1$

بخش پذیر است. در این حالت باقی مانده $p(x)$ بر $x+2$ کدام است؟

۱۱ -۱. ۱۲ -۸ ۱۳ ۲ ۱۴ ۶

$$2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + a\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{8}a + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0 \xrightarrow{\times 8} 1 + a + 4 - 12 = 0 \rightarrow a = 7$$

$$p(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x - 1 \Rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$$p(-2) = 2(-2)^4 + 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) - 1 = 32 - 56 + 8 + 6 - 1 = -1$$

گزینه ۱

مثال: اگر $f(x-1) = x-4$ باشد، باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-4$ را بیابید.

$$x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow f(4) = R$$

باید عددی را جای x در $f(x-1)$ قرار دهیم که $f(4)$ بدست آید:

$$f(n-1) = 3 \Rightarrow f(n) = 6 \rightarrow n = 2$$

$$f(n-1) = n - 4 \xrightarrow{n=2} f(2(2)-1) = 2 - 4 \rightarrow f(3) = -1 = R$$

مثال: چند جمله‌ای $p(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 - 9$ بر $x+3$ بخش پذیر است. باقی مانده

تقسیم چند جمله‌ای $p(x+1)$ بر $x+2$ کدام است؟

$$-1 \quad (4) \quad -1 \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad -14 \quad (1)$$

$$x+3=0 \rightarrow x=-3 \rightarrow p(-3)=0 \rightarrow p(-3) = (-3)^4 + 3(-3)^3 + a(-3)^2 - 9 = 0$$

$$81 - 27 + 9a - 9 = 0 \rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 9$$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2+1) = R \Rightarrow p(-1) = R$$

$$p(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + (-1)^2 - 9 = 1 - 3 + 1 - 9 = -1. \quad \text{گزینه ۳}$$

مثال: باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $p(x) + x$ و $Q(x)$ بر $x-2$ به ترتیب

۳، ۴ است. اگر چند جمله‌ای $k p(x) + Q(x) + 1$ بر $x-2$ بخش پذیر باشد،

مقدار k کجاست؟

$$x^3 - 5x^2 + 0x + 4$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow p(2) + 2 = 4 \Rightarrow p(2) = 1$$

$$\rightarrow x = 2 \rightarrow 2Q(2) = 4 \rightarrow Q(2) = 2$$

$$x = 2 \rightarrow k p(2) + Q'(2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow k \cdot 1 + (2)' + 1 = 0 \rightarrow k + 0 = -1 \rightarrow k = -1$$

گزینه ۱

روش یافتن باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر چند جمله ای از درجه بالاتر از یک :

اگر هم تقسیم را می نویسیم. فقط وقت کمتری درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر است.

مثلاً اگر مقسوم علیه از درجه دو باشد باقی مانده حداکثر از درجه یک است و همانند این باقی مانده

راه هجرت $ax + b$ بنویسیم. برای همه ضرایب باقی مانده باید کار کنیم (مثلاً حذف شود).

از ریشه‌های معلوم علیه برای این کار (شماره می‌نیم). به عبارت دیگر ریشه‌های معلوم علیه

بایست تساری معلوم و باقی‌مانده باشد:

$$\begin{array}{r} p(x) \quad | \quad (x-\alpha)(x-\beta) \\ \hline \quad \quad \quad Q(x) \\ \hline R(x) \end{array}$$

$$p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q(x) + R(x)$$

$$x = \alpha \rightarrow p(\alpha) = (\cancel{\alpha-\alpha})(\alpha-\beta)Q(\alpha) + R(\alpha) \Rightarrow p(\alpha) = R(\alpha)$$

$$x = \beta \rightarrow p(\beta) = (\beta-\alpha)(\cancel{\beta-\beta})Q(\beta) + R(\beta) \Rightarrow p(\beta) = R(\beta)$$

مثال: باقی‌مانده تقسیم $x^0 + 2x^1 + 0x^2 - 1$ را بر $x^2 - 1$ بدست آورید.

$$\begin{array}{r} x^0 + 2x^1 + 0x^2 - 1 \quad | \quad \frac{x^2 - 1}{Q(x)} \\ \hline R(x) = ax + b \end{array}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow p(1) = 1^0 + 2(1)^1 + 0(1)^2 - 1 = R(1) = a(1) + b$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 0 - 1 = a + b \rightarrow a + b = 2 \quad (1)$$

$$x = -1 \Rightarrow p(-1) = (-1)^0 + 2(-1)^1 + 0(-1)^2 - 1 = R(-1) = a(-1) + b$$

$$\Rightarrow -1 + 1 + 0 - 1 = -a + b \Rightarrow -a + b = 6 \quad (2)$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 6 \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} a + 7 = 1 \rightarrow a = 1 \\ 2b = 12 \rightarrow b = 7 \end{matrix}$$

$$R(x) = x + 7$$

مثال: هندسه ریاضی ۹۹

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب ۸ و ۵ است.

باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ کدام است؟

$$2x-1 \quad (1) \quad 2x+1 \quad (2) \quad x+1 \quad (3) \quad -x+1 \quad (4)$$

$$x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow P(1)=8$$

$$2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow P(-\frac{1}{2})=5$$

$$\begin{array}{l} P(x) \mid \frac{2x^2 - x - 1}{Q(x)} \\ \hline R(x) = ax + b \end{array}$$

$$R(x) = ax + b$$

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + (ax + b)$$

$$P(x) = (x-1)(2x+1)Q(x) + (ax + b)$$

$$x=1 \Rightarrow p(1) = (1-1) \cancel{(2+1)} Q(1) + (a+b) = 1 \Rightarrow a+b=1 \quad (1)$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cancel{(2 \times (-\frac{1}{2}) + 1)} Q\left(-\frac{1}{2}\right) + a\left(-\frac{1}{2}\right) + b = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}a + b = 0 \quad (2)$$

$$\begin{array}{l} \times \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} a+b=1 \\ -\frac{1}{2}a+b=0 \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{l} a+b=1 \rightarrow a=2 \\ \hline \frac{1}{2}b=1 \times \frac{2}{2} \rightarrow b=2 \end{array} \Rightarrow R(x) = 2x+2 \\ \hline \frac{1}{2}b=1 \times \frac{2}{2} \rightarrow b=2 \end{array}$$

نیزه ۳

مثال: باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر x^2-4 و x^2-9 به ترتیب $x+6$ ، $x+1$

است. باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $p(x)$ بر x^2-5x+6 کدام است؟

$$(1) \quad 2x+0 \quad (2) \quad 5x+2 \quad (3) \quad 5x-2 \quad (4) \quad 2x-0$$

$$p(x) = (x^2-2)Q_1(x) + (x+6) \Rightarrow p(2) = 2+6 = 8$$

$$p(x) = (x^2-9)Q_2(x) + (2x+1) \Rightarrow p(3) = 4 \times 3 + 1 = 13$$

$$p(x) = (x^2-5x+6)Q_3(x) + (ax+b) = (x-2)(x-3)Q_3(x) + (ax+b)$$

$$p(x) = (x-2)(x-4)Q(x) + (a(x)+b) = 1 \Rightarrow 2a+b=1$$

$$p(x) = (x-1)(x-3)Q(x) + (a(x)+b) = 13 \Rightarrow 2a+b=13$$

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b=13 \end{cases} \rightarrow 10+b=1 \rightarrow b=-9$$
$$a=0$$

$$R(x) = 0x - 9$$

گزین ۳ :

مثال: اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)(x-3)$ برابر $2x+5$ باشد، باقی مانده تقسیم

$f(x)$ بر $x-3$ را بیابند.

$$f(x) = (x-1)(x-3)Q(x) + (2x+5)$$

$$x-3=0 \rightarrow x=3 \rightarrow f(3) = R$$

$$f(3) = (3-1)(3-3)Q(3) + (4+5) = 11 = R$$

نکته: اگر یک چندجمله‌ای بر m ضرب چند، چندجمله‌ای بخش پذیر باشد، بر هر یک از این

چندجمله‌ای‌ها هم بخش پذیر خواهد بود.

مثال: اگر چندجمله‌ای $P(x) = x^5 + mx^2 + nx + 42$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر باشد، m و n را بیابید.

پس طبق نکته چون P بر $(x-2)(x+2)$ بخش پذیر است پس هم بر $x+2$ بخش پذیر

است هم بر $x-2$. در ادامه بخوان تمرین.

روش دیگر برای یافتن باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای درجه ۲

این روش را با حل یک مثال توضیح می‌دهیم.

می‌خواهیم باقی مانده تقسیم عبارت $x^5 + 3x^2 + 5x - 1$ را بر $x^2 - 1$ بیابیم.

مرحله اول: مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می‌دهیم: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1$

مرحله دوم: مقسوم را بر حسب x^2 مرتب می‌کنیم: $x^5 + 3x^2 + 5x - 1 = (x^2)^2 x + 3(x^2) + 5x - 1$

مرحله سوم: جای x^2 مقدارش را در مقسوم می‌نذاریم تا باقی مانده بدست آید:

$$x^2=1 \rightarrow R = 1 \times x + 4(1)^2 + 5x - 1 = x + 4 + 5 - 1 = x + 7$$

تذکره: گاهی اوقات نیاز است هر دو سوم، ضرایب تکراری شود.

مثال: تنکو، ریاضی خارج ۹۴

اگر عبارت $x^2 + ax^2 - bx + \epsilon$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x^2 = 2x - 1$$

$$(x^2)^2 + ax^2 - bx + \epsilon \Big|_{x^2=2x-1} = (2x-1)^2 + a(2x-1) - bx + \epsilon$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 + 2ax - a - bx + \epsilon \Big|_{x^2=2x-1}$$

$$= 4(2x-1) - 4x + 2ax - a - bx + \epsilon = \underline{8x - 4} - 4x + \underline{2ax - a} - bx + \epsilon$$

$$= 4x + 2ax - bx - a + 1 = x(4 + 2a - b) - a + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 4 + 2a - b = 0 \\ -a + 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases} \quad \leftarrow \quad 4 + 2 - b = 0 \rightarrow b = 6 \quad \text{نوع دوم } \epsilon$$

موضوعی چندرنگار جدید :

در سال‌های گذشته با رنگار و جمع رنگار چنان دلاغز آشنا شدیم :

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^2 \pm y^2 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

می‌فهمیم رنگارهای فوقه ابرای توان‌های بهتر از ۳، تعمیم رهمی :

۱) تعمیم $x^n - y^n$ بر $x-y$:

$$x-y=0 \rightarrow x=y \rightarrow P(y) = y^n - y^n = 0 = R$$

پس $x^n - y^n$ همواره بر $x-y$ بخش پذیر است.

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}$$

۲) تعمیم $x^n - y^n$ بر $x+y$:

$$x+y=0 \rightarrow x=-y \rightarrow P(-y) = (-y)^n - y^n \stackrel{n=\text{زوج}}{=} y^n - y^n = 0$$

این $x^n - y^n$ برای n های زوج بر $x+y$ بخش پذیر است.

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}) : n=2k$$

۳) تقسیم $x^n + y^n$ بر $x+y$:

$$x+y=0 \rightarrow x=-y \rightarrow p(-y) = (-y)^n + y^n$$

این $x^n + y^n$ برای n های فرد بر $x+y$ بخش پذیر است.

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}) : n=2k+1$$

سوال: تحت چه شرایطی برای n ، $x^n + y^n$ بر $x-y$ بخش پذیر است؟

$$x-y=0 \rightarrow x=y \rightarrow p(y) = y^n + y^n \neq 0$$

هیچگاه $x^n + y^n$ بر $x-y$ بخش پذیر نیست.

مثال: کسرها را ساده کنید.

$$\text{الف) } \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+x-2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)(x+1)}{(x+2)\cancel{(x-1)}} = x^2+x+1$$

$$\begin{aligned}
 \text{ب) } \frac{(1-t+t^r-t^r+t^E)(1+t)}{1-t^{10}} &= \frac{1+t^0}{1-t^{10}} \\
 &= \frac{1+t^0}{(1-t^0)(1+t^0)} = \frac{1}{1-t^0}
 \end{aligned}$$

$$\text{ج) } \frac{(7+1)(0^9+0^{\wedge}+0^v+\dots+1)}{(0^{10}-1)(4^{\wedge}-4^v+4^r-\dots+1)}$$

$$7^9+1 = (7+1)(7^{\wedge}-7^v+7^r-\dots+1)$$

$$0^{10}-1 = (0-1)(0^9+0^{\wedge}+\dots+1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{جواب} &= \frac{(7+1)(7^{\wedge}-7^v+\dots+1)(0^9+0^{\wedge}+\dots+1)}{(0-1)(0^9+0^{\wedge}+\dots+1)(7^{\wedge}-7^v-\dots+1)} \\
 &= \frac{7}{-1}
 \end{aligned}$$

سؤال: اگر $f(x) = \frac{x^{\wedge}-1}{(x^r+x)(x^r-x^E+x^r-1)}$ ، مقدار $f(-\frac{r}{r})$ کدام است؟

$-\frac{r}{E}$ (ع) $-\frac{1}{r}$ (د) $-\frac{1}{r^2}$ (ز) $-\frac{r}{r}$ (ب)

$$\text{مخرج} = \underbrace{x(x^r+1)}_{\text{لاخر}} \underbrace{(x^r)^r - (x^r)^r + x^r - 1}_{\text{جان}} = x((x^r)^r - 1) = x(x^{\wedge}-1)$$

$$f(x) = \frac{x^{\hat{}} - 1}{x(x^{\hat{}} - 1)} = \frac{1}{x}$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} \quad \text{گزینه ۱}$$